2) En appliquant le pivot de Gauss,

une matrice est de rg 1 ssi $\forall$ ses colonnes sont colinéaire et au moins une contient un coefficient different de 0.

Alors $\forall_i \neq 1$ $\quad C_i \leftarrow \frac{C_i}{C_1}$ (on a rearrangé la matrice tq la première colonne soit non nulle).

Alors on obtient une matrice equivalente a' :

$$\begin{pmatrix} * & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_3 \\ \vdots & \lambda_1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \lambda_4 & \vdots & & \vdots \\ * & \vdots & & & \vdots \\ & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_3 \end{pmatrix} \underset{C_i \leftarrow C_i - \lambda_i}{\sim} \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & | & & | \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

1) $A \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les colonnes ne sont pas colinéaires donc $rg A = 3$.

$\ker f = \{\vec{0}\}$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^4$.

[redacted]

Interro n°26

Exercice 1

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} AB_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,i} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} B_{ik} A_{ki}$$
$$= \sum_{i=1}^{p} BA_{ii} = Tr(BA)$$

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ tq $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

1)
$$A = Mat_{\mathcal{B}can}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$

$f(X) = X + 2 + X + 2X + 2$
$= 4X + 4$

$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2$
$= X^2 + 2X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2$
$= -2X + 2$

2) On cherche une base de $\mathbb{R}_2[X]$ de vecteurs (e_1, e_2, e_3) tq $e_1, e_2, e_3 \neq 0$ tq $f(e_2) = e_3$ et $e_1, e_3 \in \mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\, e_3$

~~On prend alors e_1, e_2, e_3 de tel vecteur et on veut mq la famille est libre~~

~~On cherche Ker A. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $\iff AX = 0 \iff \begin{cases} 4y + 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$~~

~~Donc $2y = z$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_2$,~~

~~$e_3, e_4 \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$~~

on prend $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car les 2 vecteurs sont libres soit $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\, e_3$ donc $A e_3 = \lambda e_3 \iff \begin{cases} 4y + 2z = \lambda x \\ 4y - 2z = \lambda y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 4y + 2z = \lambda x \\ y(4-\lambda) = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y(8-\lambda) = \lambda x \\ y(4-\lambda) = 2z. \end{cases}$

pour $\lambda \neq 4, 8, 0$ $\quad e_3 = \begin{pmatrix} y\frac{(8-\lambda)}{\lambda} \\ y \\ y\frac{(4-\lambda)}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \left(\frac{8-\lambda}{\lambda}\right) \\ 1 \\ \left(\frac{4-\lambda}{2}\right) \end{pmatrix}.$

On prend $e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et e_1, e_2 deux vecteurs $\in \mathrm{Ker} f$ tq $e_1 \neq \mu e_2$. $\forall \mu \in \mathbb{R}$.

$\to e_3 = 3 + X + X^2$ comme $\dim \mathrm{Im} f = 1$ d'après le thm du rang

$\dim \mathrm{Ker}$

Exercice 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1) A et B sont equivalente ssi il existe $Q, P \in GL_n(\mathbb{R})$.
tq $A = Q^{-1} B P$
Comme A est equivalente à J_r ~~et B~~ si $\mathrm{rg} A = r$
si $\mathrm{rg} B = r$ alors B est equivalente à J_r.
Donc si A et B sont de même rang A est equivalente à J_r.

Exercice 4

Soit E un espace de dimension n et V un sous espace vectoriel de E de dimension p. On note $\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid V \in \mathrm{Ker}\, u\}$.

Soit $u \in \mathcal{V}$ tq $\mathrm{Mat}_{B_r} u = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & \cdots & u(e_p) & u(e_{p+1}) & \cdots & u(e_n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & & \end{pmatrix} \end{array}$

$\dim \mathcal{V} \leqslant n(n-p)$

Exercice 5

1) Pour $X, Y \in \mathbb{K}^n$ $M = XY^T$.

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1\ y_2 \cdots y_n) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & & & \\ x_n y_1 & & & x_n y_n \end{pmatrix}$$

$M = (y_1 X \mid y_2 X \mid y_3 X \mid \cdots\ y_n X)$.
comme toutes ses colonnes sont colinéaire
ses colonnes $\in \mathrm{Vect}(X)$ donc la matrice est de rang 1.

Exercice 7

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1) $AB_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} b_{k,i}$ → combinaison linéaire des $a_{j,k}$ b_i

2) $\text{rg}(A+B)$

3) si $AB = A+B$ alors $\text{rg}\,AB \leq (\text{rg}A, \text{rg}B)$

donc $\text{rg}\,A+B \leq \text{rg}A, \text{rg}B$

et $\text{rg}(A+B) \geq |\text{rg}A - \text{rg}B|$.

donc $\min(\text{rg}A, \text{rg}B) \geq \text{rg}\,AB \geq |\text{rg}A - \text{rg}B|$

Exercice 8

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et (v_n) définie par

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k.$

1) $V_n = M U_n$ donc $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

soit ~~$v : x$~~ $\mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x.$

~~est linéaire et un endomorphisme dans N si $u_0 \in \mathbb{N}$, ou dans R.~~

alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_n) = V_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(V) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_n) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)\, U_n.$

Donc $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ avec $\mathcal{B} = (u_0, u_1, \dots, u_n).$

Donc $M = \begin{array}{c} v_0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \cdots \\ 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{k} & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array}$

$v_0 = u_0$
$v_1 = u_0 + u_1$
$v_2 = u_0 + 2u_1 + u_2$

2) M est inversible

Exercice 9

```
def enfile(l, e):
    l.append(e)
    return l
      ↳ O(1)

def file(l, e):
    defile(l)
    enfile(l)
    return l.

  ↳ O(n).

def defile(l):
    for i in range(len(l)//2):
        l[i], l[len(l)-i-1] = l[len(l)-i-1], l[i]
    l.pop
    for i in range(len(l)//2):
        l[i], l[len(l)-i-1] = l[len(l)-i-1], l[
    return l.

      ↳ O(n)
```

Exercice 10). Soit G un sous groupe fini de $(GL_n(\mathbb{R}); \times)$.

$G = \{A_1, \dots, A_p\}$.

1) Soit $M = \sum_{i=1}^{p} A_i$ mq $M^2 = pM$

$$M^2 = \sum_{i=1}^{p} A_i \times \sum_{i=1}^{p} A_i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} A_i^2$$

comme G est stable par $\times$. $A_i^2 \in GL_n(\mathbb{R})$.

2)
$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') & f(e_4') \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \end{array}$$

On veut que
$e_2' \in \operatorname{Ker} f$.
$f(e_2') = e_1'$
$f(e_3') = e_3'$
$f(e_4') = e_3 + e_4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ae_2' = e_1' \\ Ae_3' = e_3' \\ Ae_4' = e_3' + e_4' \end{cases}$$

Donc soient (e_1', e_2', e_3', e_4') une tel famille on veut mq la famille est libre

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underline{e_3}$: on obtient le système (avec la question precedente)
$$\begin{cases} -z = x \\ z - t = y \\ -x - z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ z - t = y \\ x = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ t = -y. \end{cases}$$

donc $e_3 \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc on prend $e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

__Pour e_4:__ $Ae_4' - e_4' = e_3'$ donc
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -z - x = 0. \\ z - t - y = 1 \\ -x - z - z = 0 \\ -t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ z - t - y = 0 \\ -x = 2z \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Donc $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (pas possible car e_3 et e_4 colinéaires).

3) On a montré que A était semblable à T.

donc Soit $P = P_B^{B'}$

$A = P^{-1} T P$

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall n \geqslant 1$ $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $A^n = P^{-1} T^n P$.