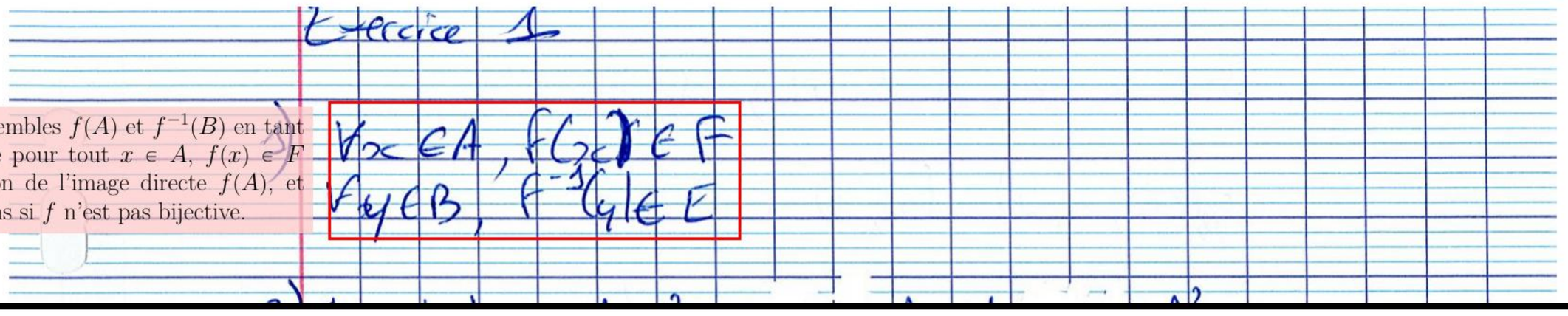
1. Donner la définition formelle de l'image de $A$ par $f$ et de l'image réciproque de $B$ par $f$.

1. L'image de $A$ est $f(A) = \{f(x), x \in A\}$. L'image réciproque de $B$ est $f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$.

Ex 1 : 1) Note : **0.0**

Vous devez définir les ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(B)$ en tant qu'ensembles. Écrire que pour tout $x \in A$, $f(x) \in F$ ne donne pas la définition de l'image directe $f(A)$, et $f^{-1}(y) \in E$ n'a pas de sens si $f$ n'est pas bijective.

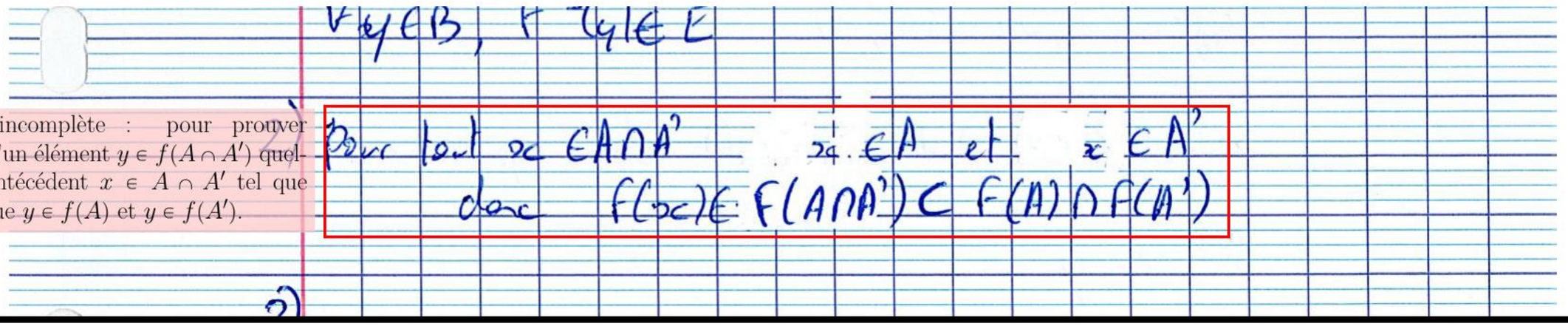



2. Montrer que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

2. Soit $y \in f(A \cap A')$. C'est qu'il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$. Alors $x \in A$, donc $y \in f(A)$, et $x \in A'$, donc $y \in f(A')$. On en déduit que $y \in f(A) \cap f(A')$.

Ex 1 : 2) Note : **1.5**

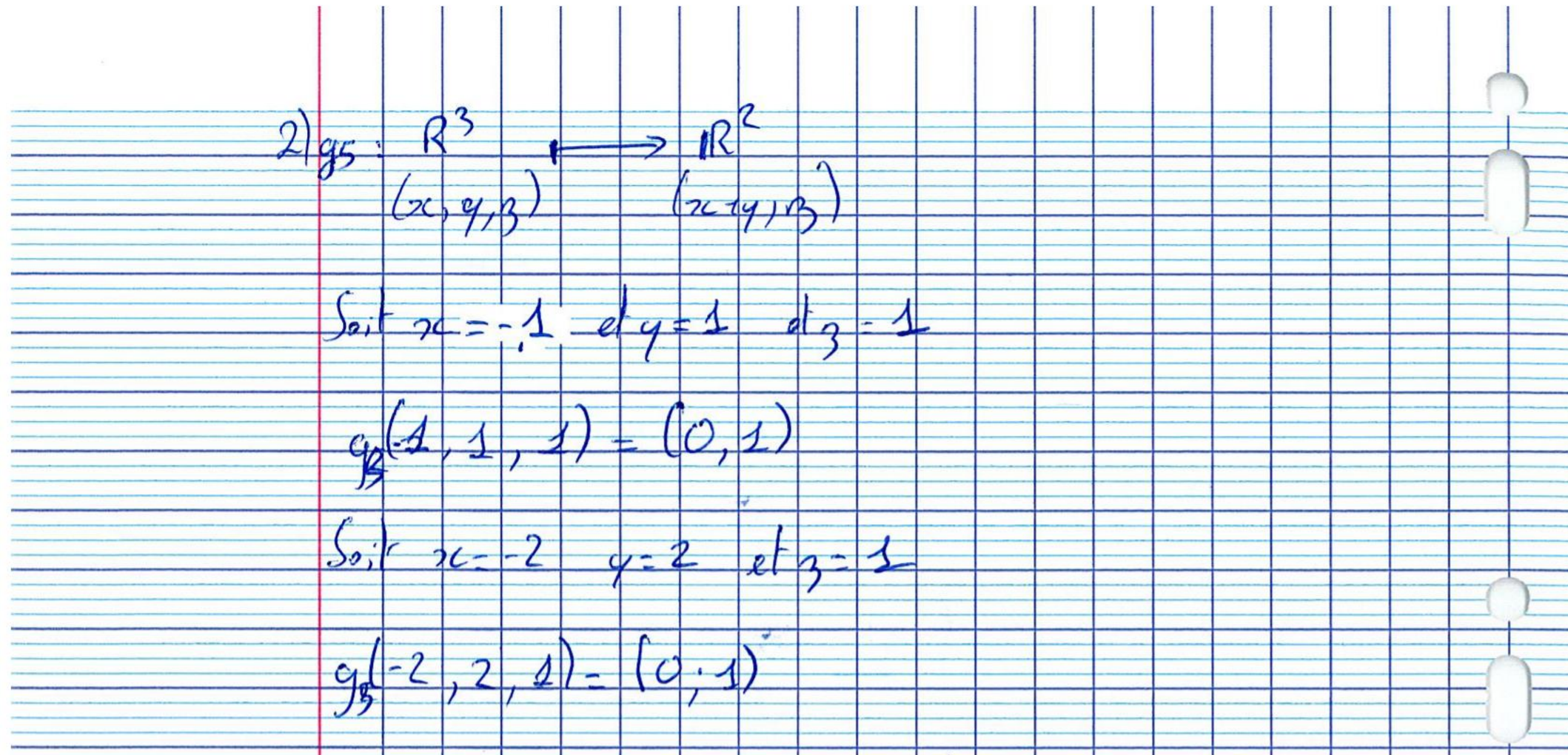
La démonstration est incomplète : pour prouver l'inclusion, il faut partir d'un élément $y \in f(A \cap A')$ quelconque, introduire son antécédent $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$, puis montrer que $y \in f(A)$ et $y \in f(A')$.




2. $g_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,z) \end{array}$

2. La fonction $g_5$ n'est pas injective car $g_5(1,0,3) = g_5(0,1,3)$.
La fonction $g_5$ est surjective : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $g_5(a,0,b) = (a,b)$.

Ex 2 : 2) Note : **2.0**

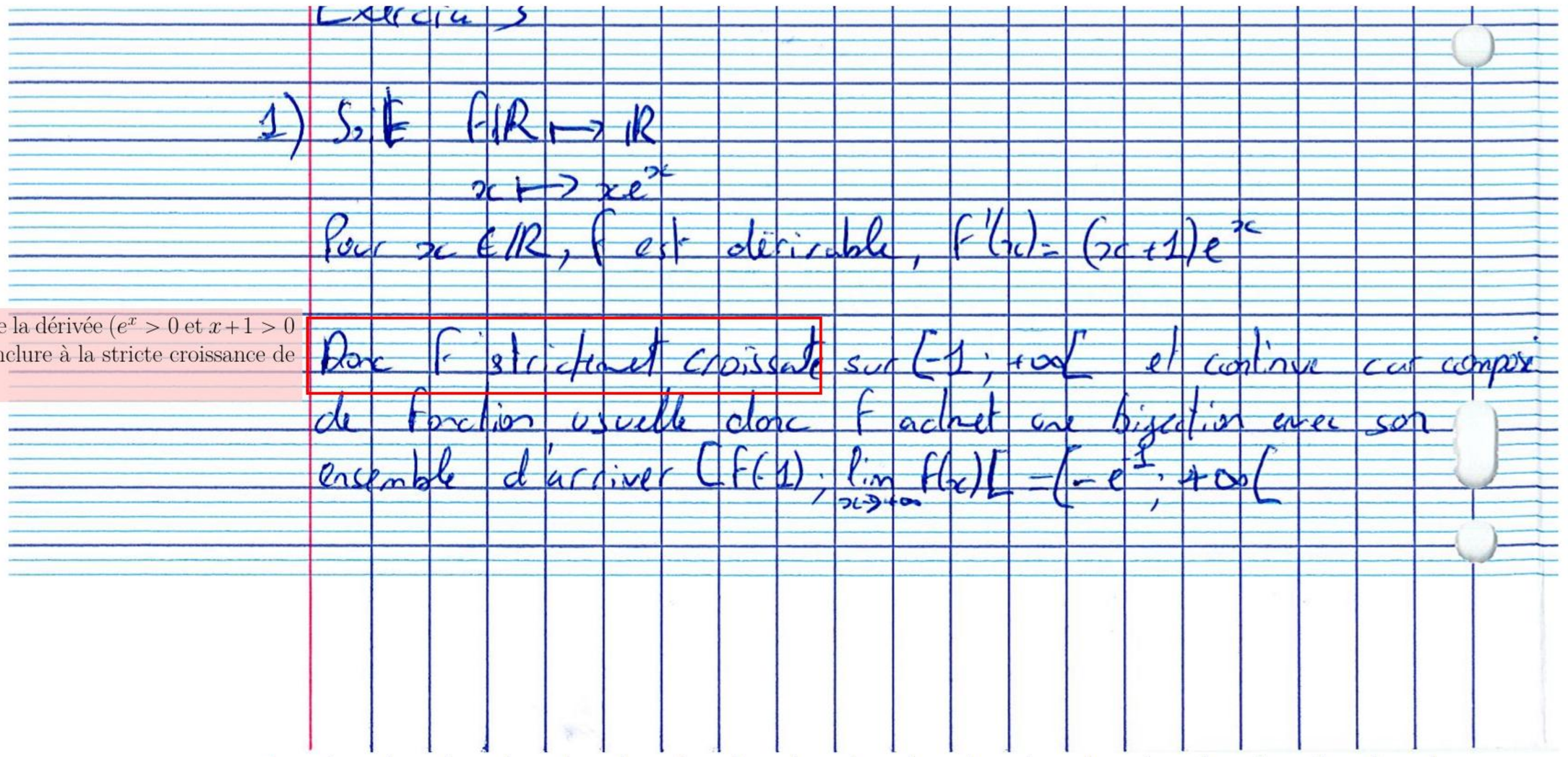



La démonstration de la surjectivité est incorrecte. Pour prouver que $g_5$ est surjective, il faut montrer que tout élément $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ admet un antécédent $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $g_5(x,y,z) = (u,v)$ (par exemple en choisissant $(u,0,v)$). Montrer que l'image d'un triplet appartient à $\mathbb{R}^2$ ne suffit pas.

1. Justifier que $f$ réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $\left[-e^{-1},+\infty\right[$.

1. La fonction $f$ est dérivable, de dérivée $f'(x) = e^x(x+1)$.
La fonction est continue sur $[-1,+\infty[$, strictement croissante (car $\forall x > -1$, $f'(x) > 0$), donc réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $[f(-1),\lim_{+\infty} f[ = \left[e^{-1},+\infty\right]$.

Ex 3 : 1) Note : **3.5**

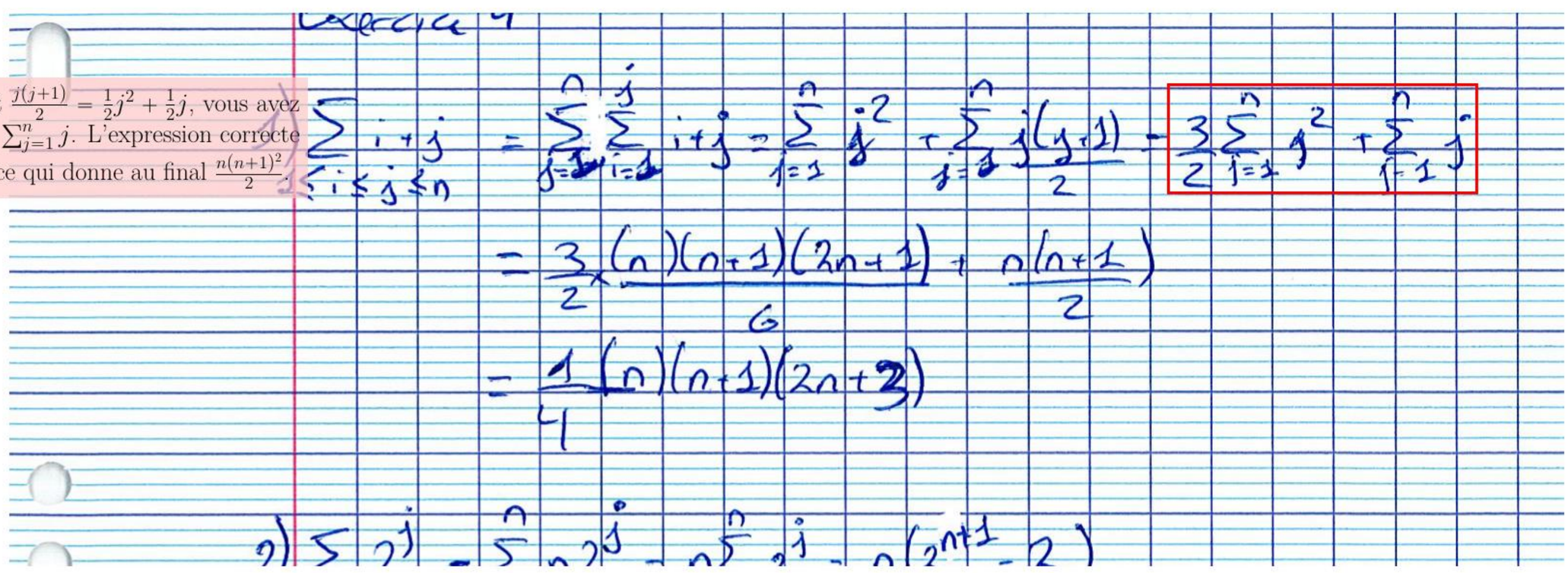



Pensez à justifier le signe de la dérivée ($e^x > 0$ et $x+1 > 0$ pour $x > -1$) avant de conclure à la stricte croissance de $f$.

1. $\sum_{1 \le i \le j \le n} i + j$

1. $\sum_{1 \le i \le j \le n} i + j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (i+j) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + nj\right) = n\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$

Ex 4 : 1) Note : **3.5**

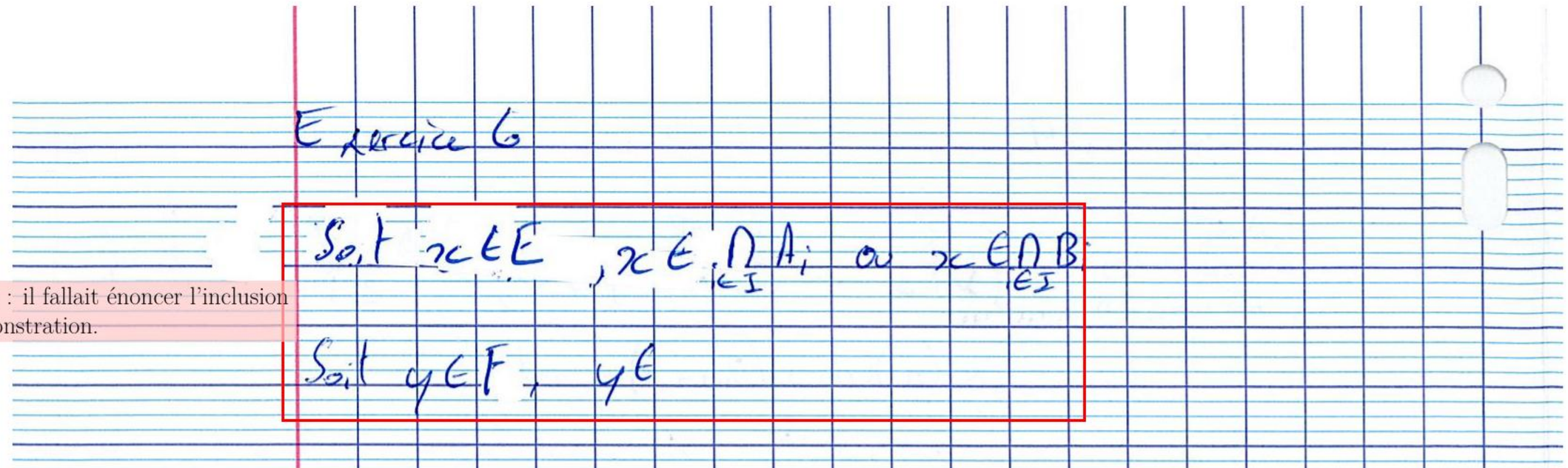



Attention, en développant $\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}j^2 + \frac{1}{2}j$, vous avez oublié le facteur $\frac{1}{2}$ devant $\sum_{j=1}^{n} j$. L'expression correcte est $\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j$, ce qui donne au final $\frac{n(n+1)^2}{2}$.

Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles d'ensembles. Comparer pour l'inclusion $E = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$ et $F = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B_i)$

On a $E \subset F$ : Soit $x \in E$, alors ou bien $\forall i \in I$, $x \in A_i$, ou bien $\forall i \in I$, $x \in B_i$. Dans les deux cas, on a bien $\forall i \in I$, $x \in A_i \cup B_i$, donc $x \in \bigcap_i (A_i \cup B_i)$.

**Ex 6** Note : **0.5**



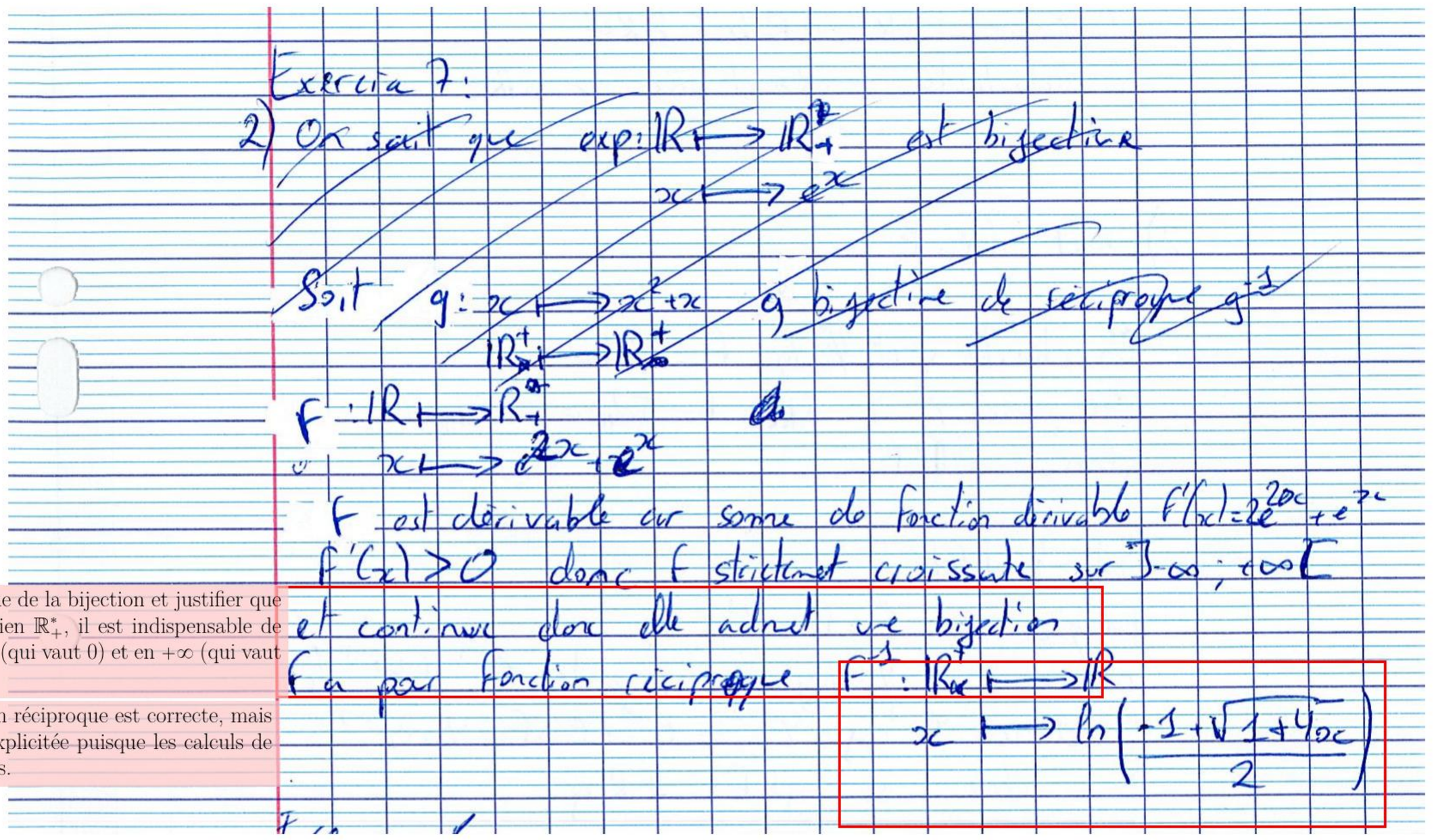

La réponse est incomplète : il fallait énoncer l'inclusion $E \subset F$ et en faire la démonstration.

2. Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & e^{2x} + e^x \end{array}$ est une bijection, et donner sa bijection réciproque.

2. La fonction $f$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$ et $e^x > 0$.

On peut écrire $f$ comme la composée $f = h \circ \exp$, où $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \quad x \mapsto x^2 + x$ est bijective, de réciproque $y \mapsto \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}$. On en déduit que $f$ est bijective, de réciproque $\exp^{-1} \circ h^{-1} : y \mapsto \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}\right)$.

**Ex 7 : 2)** Note : **3.0**




Pour appliquer le théorème de la bijection et justifier que l'ensemble d'arrivée est bien $\mathbb{R}_+^*$, il est indispensable de calculer les limites en $-\infty$ (qui vaut 0) et en $+\infty$ (qui vaut $+\infty$).

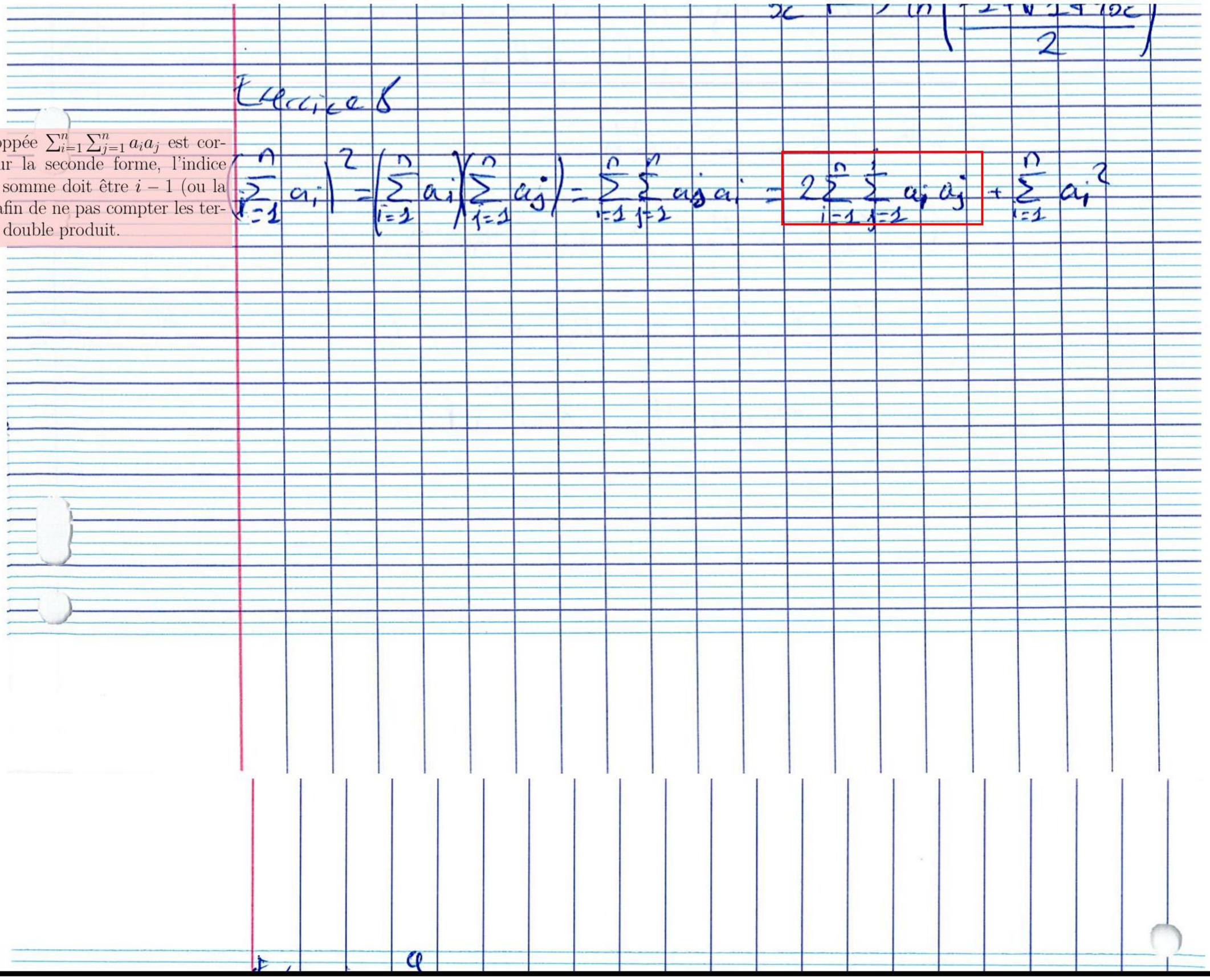
L'expression de la fonction réciproque est correcte, mais son obtention n'est pas explicitée puisque les calculs de composition ont été barrés.

Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs. Donner deux formes développées de $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$.

$(\sum_{i=1}^n a_i)^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_i b_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j$.

## Ex 8 Note : 3.0

La première forme développée $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j$ est correcte. En revanche, pour la seconde forme, l'indice supérieur de la deuxième somme doit être $i-1$ (ou la condition d'indice $j<i$) afin de ne pas compter les termes diagonaux $a_i^2$ dans le double produit.




1. Rappeler les propriétés formelles que doit vérifier une relation d'équivalence sur un ensemble $E$.

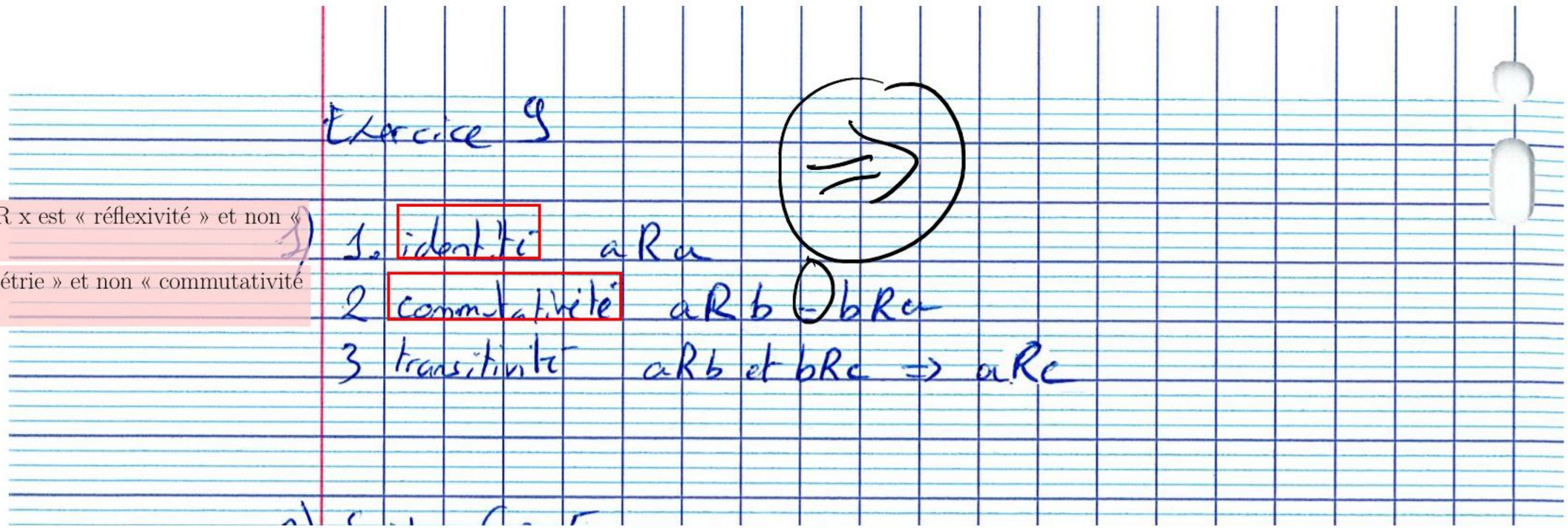
1. $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$, $\forall x, y,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ et $\forall x, y, z \in E,\ \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

## Ex 9 : 1) Note : 2.5

Les quantificateurs sur les éléments de l'ensemble sont absents.

Le terme pour désigner x R x est « réflexivité » et non « identité ».

Le terme correct est « symétrie » et non « commutativité ».



2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

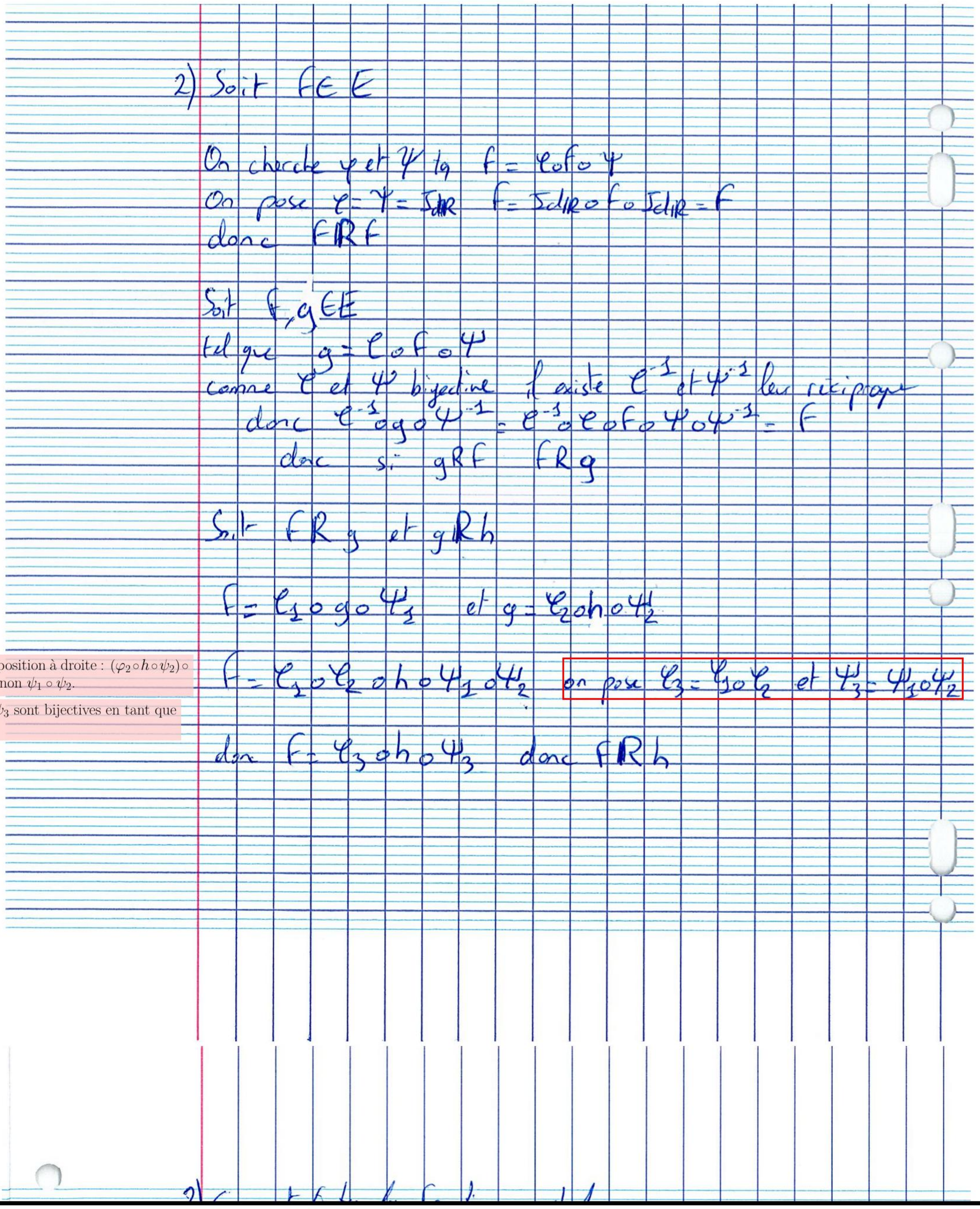
2. Pour $f \in E$, on a $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, donc $f \mathcal{R} f$.

Pour $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on suppose que $f \mathcal{R} g$, c'est-à-dire qu'il existe deux bijections $\varphi, \psi$ telles que $g = \varphi \circ f \circ \psi$. On a alors $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \psi^{-1}$, et $\varphi^{-1}, \psi^{-1}$ sont bijectives, donc $g \mathcal{R} f$.

Pour $f, g, h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on suppose que $f \mathcal{R} g$ et $g \mathcal{R} h$. C'est qu'il existe des bijections $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ telles que $g = \varphi_1 \circ f \circ \psi_1$ et $h = \varphi_2 \circ g \circ \psi_2$.

On a alors $h = \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ f \circ \psi_1 \circ \psi_2$, et les fonctions $\varphi_2 \circ \varphi_1$ et $\psi_1 \circ \psi_2$ sont bijectives, comme composées, donc $f \mathcal{R} h$.

Ex 9 : 2) Note : **3.0**




Attention à l'ordre de composition à droite : $(\varphi_2 \circ h \circ \psi_2) \circ \psi_1 = \varphi_2 \circ h \circ (\psi_2 \circ \psi_1)$ et non $\psi_1 \circ \psi_2$.

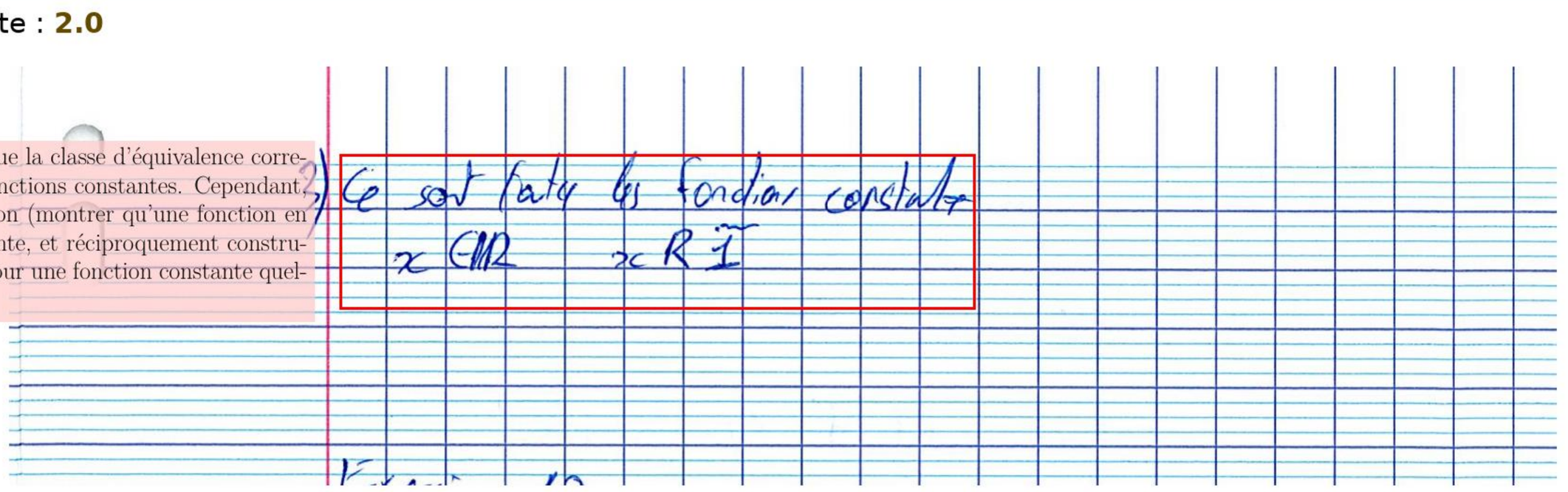
Il faut préciser que $\varphi_3$ et $\psi_3$ sont bijectives en tant que composées de bijections.

3. On note $\tilde{1}$ la fonction constante égale à 1. Quelle est la classe d'équivalence de $\tilde{1}$ ?

3. Si $f$ est en relation avec $\tilde{1}$, il existe deux bijections telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \varphi(\tilde{1}(\psi(x))) = \varphi(1)$, donc $f$ est constante.

Réciproquement, si $f$ est constante, il suffit de prendre pour $\varphi$ n'importe quelle bijection vérifiant $\varphi(1) = f(0)$, on a bien $f = \varphi \circ \tilde{1} \circ \psi$, pour toute application $\psi$.

Ex 9 : 3) Note : **2.0**

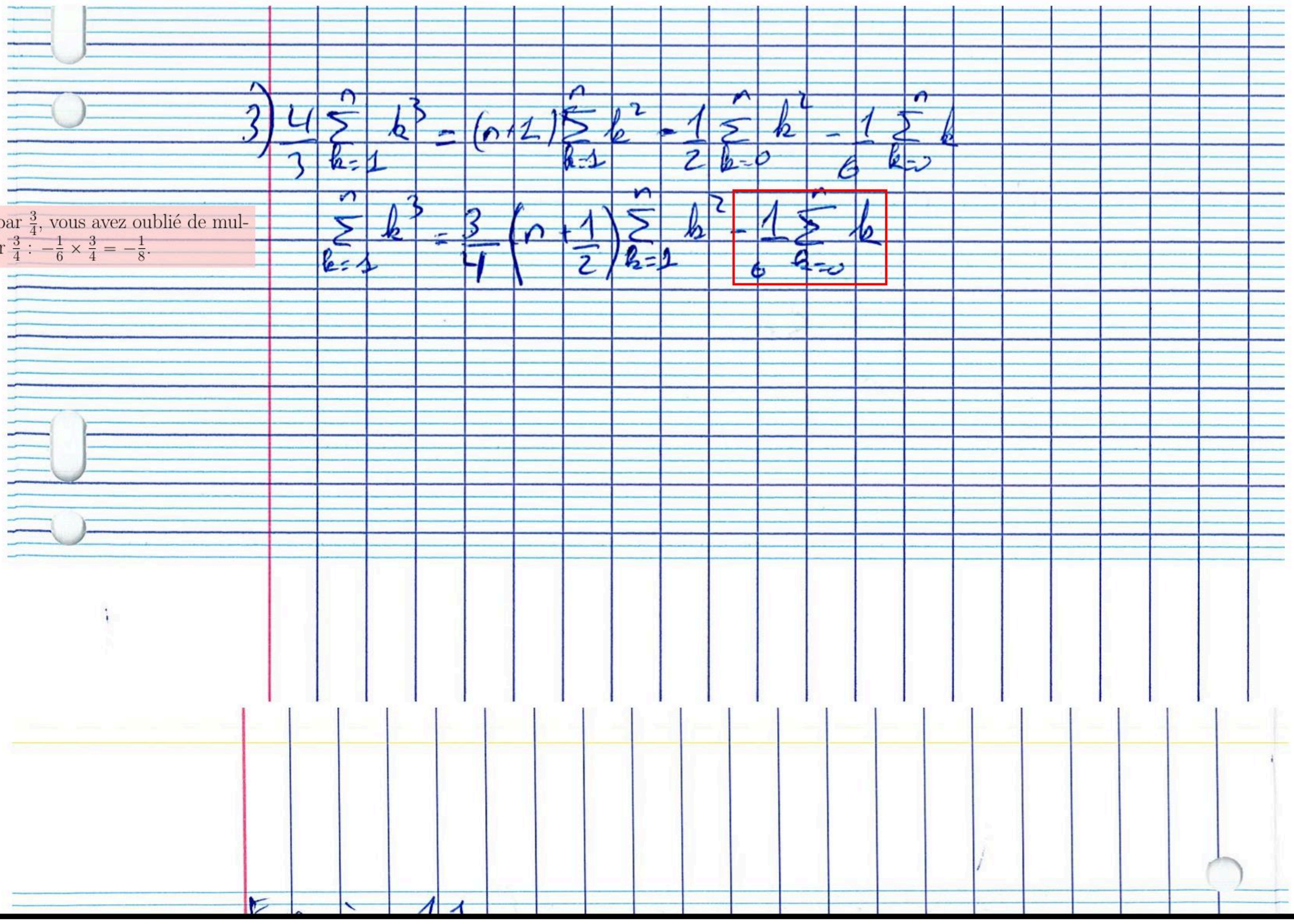



Vous avez bien identifié que la classe d'équivalence correspond à l'ensemble des fonctions constantes. Cependant, il manque la démonstration (montrer qu'une fonction en relation avec $\tilde{1}$ est constante, et réciproquement construire les bijections $\varphi$ et $\psi$ pour une fonction constante quelconque).

3. En déduire une expression de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k$.

3. En utilisant les deux expressions obtenues, on trouve $\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k$, d'où : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{3(2n+1)}{8}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n} k$.

Ex 10 : 3) Note : **3.0**




Lors de la multiplication par $\frac{3}{4}$, vous avez oublié de multiplier le dernier terme par $\frac{3}{4}$ : $-\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = -\frac{1}{8}$.

1. Écrire une fonction `ppp_2` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie la plus petite puissance de 2 supérieure ou égale à $n$.

1.
```python
def ppp_2(n):
    p = 1
    while p < n:
        p *= 2
    return p
```

Ex 12 : 1) Note : **2.5**

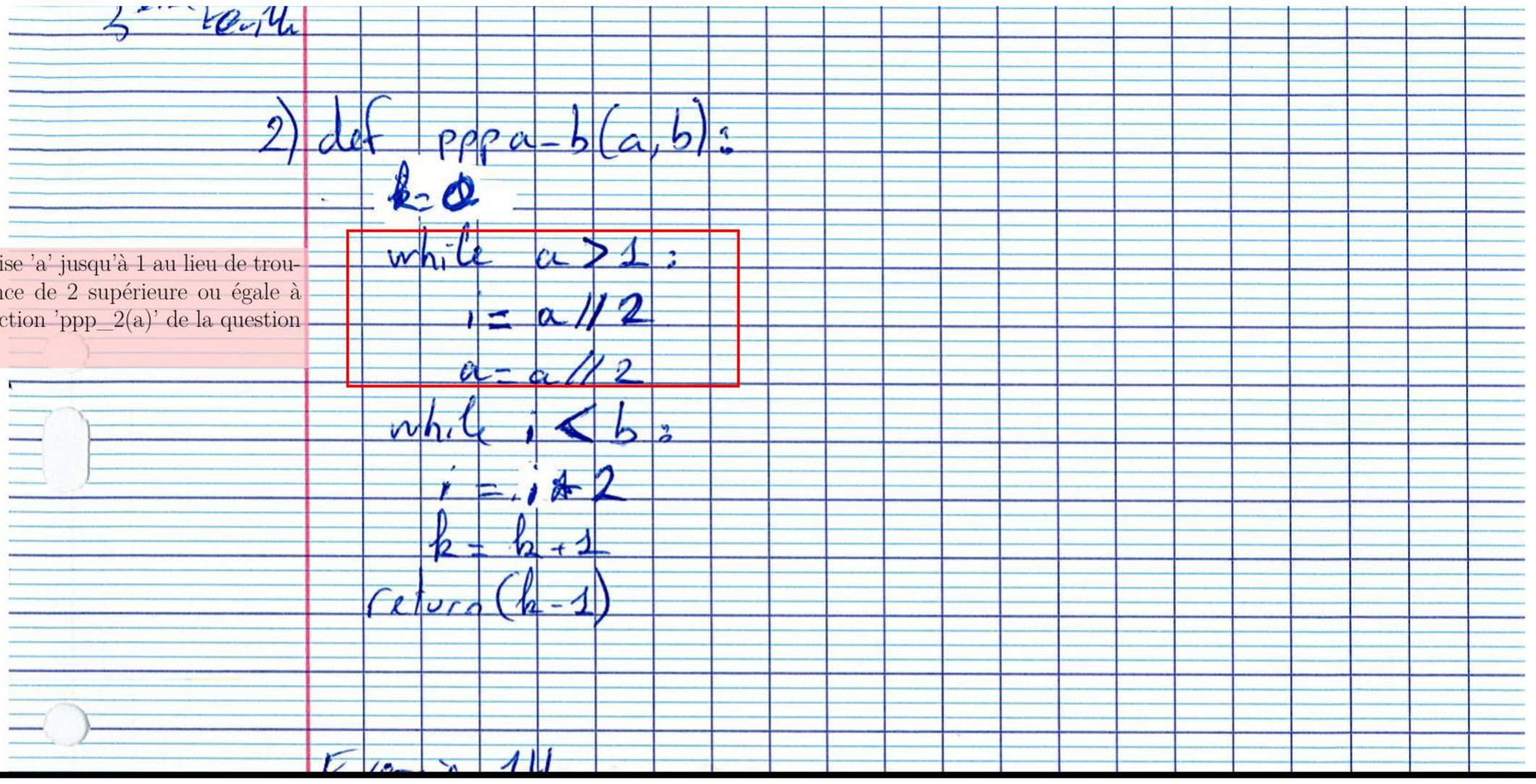



La fonction renvoie l'exposant 'i' au lieu de la puissance de 2 elle-même. Il fallait renvoyer 'k'.

2. Écrire une fonction qui prend en argument deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$, avec $a \leq b$, et qui renvoie le nombre de puissances de 2 entre $a$ et $b$.

2.
```python
def nb_puissances_2(a, b):
    p = ppp_2(a)
    c = 0
    while p <= b:
        c += 1
        p *= 2
    return c
```

Ex 12 : 2) Note : **1.0**




Cette première boucle divise 'a' jusqu'à 1 au lieu de trouver la plus petite puissance de 2 supérieure ou égale à 'a'. Il fallait utiliser la fonction 'ppp_2(a)' de la question précédente.

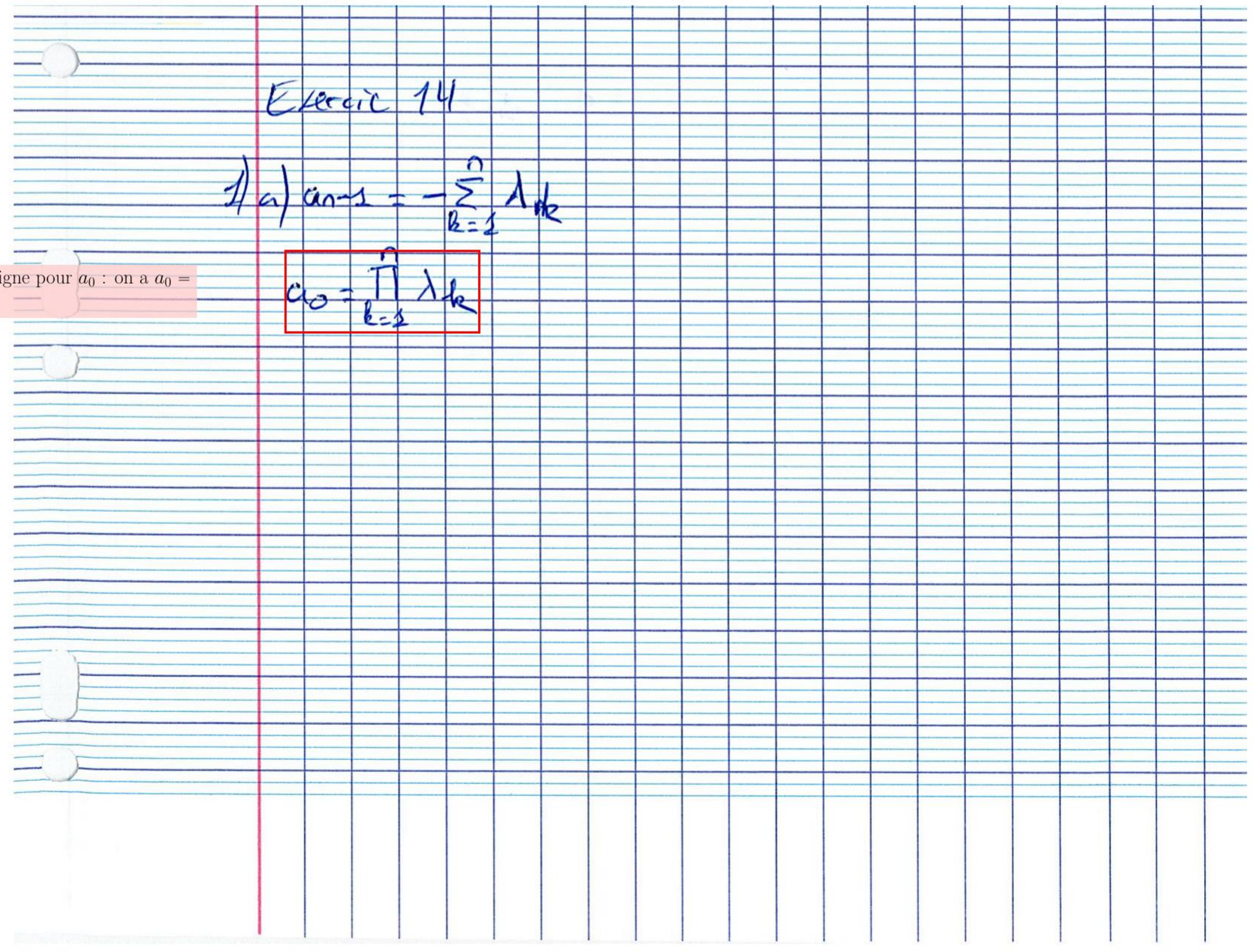
1. Soit $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ un polynôme scindé unitaire de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

   (a) On note $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Donner une expression de $a_{n-1}$ et $a_0$ en fonction des racines, puis de $a_{n-i}$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

1. (a) $a_{n-k} = (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$.

Ex 14 : 1)a) Note : **1.0**

L'expression générale des coefficients $a_{n-k}$ en fonction des racines n'est pas donnée.




Il manque le facteur de signe pour $a_0$ : on a $a_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$.