Exercices 2022

I) ENS

1) Algèbre

Exercice 1 ★ ★ [ENS 2022] Soient $m, M, r \in \mathbb{N}$ avec $r \geq 3$, et $k_0, \ldots, k_M \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{i=0}^{M} k_i r^i = \sum_{i=0}^{m} r^i$. Montrer que $\sum_{i=0}^{M} |k_i| \geq m + 1$.

Exercice 2 ★ ★ [ENS 2022] Pour $n \in \mathbb{N}^*$,on note c_n le nombre de nombres premiers $\leq n$, et $\pi_n = \prod_{p \leq n} p$.

1. Montrer que $\pi_n = O(4^n)$.
2. Montrer que $c_n^{c_n} = O(r_n)$.
3. En déduire que $c_n = O(\frac{n}{\ln n})$.

Exercice 3 ★ ★ [ENS 2022] On note φ la fonction indicatrice d'Euler.

1. a) Montrer que $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$, pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.
   b) Rappeler la formule explicite pour $\varphi(n)$.
   c) Calculer $\sum_{d|n} \varphi(d)$, pour $n \geq 1$.
2. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\varphi(nm)$ en fonction de $\varphi(m)$, $\varphi(n)$, $\varphi(n \wedge m)$ et $n \wedge m$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs premiers de n, et $\mu(n) = (-1)^{d_n}$ si n n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier, 0 sinon. Montrer que μ est multiplicative, et calculer $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.

Exercice 4 ★ ★ [ENS 2022] On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que A est euclidien, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $N\colon \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $a \in A$ et $b \in \backslash\{0\}$, il existe un couple $(q, r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ et $N(r) < N(b)$.
3. Énoncer et démontrer un théorème d'existence et d'unicité d'une décomposition en facteurs irréductibles dans A.

Exercice 5 ★ [ENS 2022] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\nu(\sigma)$ son nombre de points fixes. Calculer $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}$.

Exercice 6 ★ ★ [ENS 2022] Déterminer les inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X]$.

Exercice 7 ★ ★ [ENS 2022] Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est un L-groupe si c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Vect}\, A = \mathbb{R}^n$ et si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, $A \cap B(x, r)$ est fini.

1. Que dire dans le cas $n = 1$?
2. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On pose $L_e = \{a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n,\ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$.
   a) Montrer que L_e est un L-groupe.
   b) À quelle condition a-t-on $L_e = L'_e$?

Exercice 8 ★ ★ [ENS 2022] Soit $\varphi\colon SL_2(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme. Montrer que φ est à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9 ★ ★ Décomposition KAN [ENS 2022] Pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, et $h \in H$, on pose $g.z = \frac{az+b}{cz+d}$.

1. Montrer que H est stable par l'action et que $g'.(g.z) = (g'g).z$.
2. Soit $K = SO_2(\mathbb{R})$, A le sous-groupe de SL_2 formé de matrices diagonales, et N les unipotentes supérieures. Montrer que tout élément $g \in G$ se décompose de manière unique $g = kan$.
   Indication : considérer $g(i)$.

Exercice 10 [ENS 2022] Pour G un groupe, on note $\mathrm{sub}(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G. Soient G, H finis de cardinaux premiers entre eux. Montrer que $|\mathrm{sub}(G \times H)| = |\mathrm{sub}(G)| \times |\mathrm{sub}(H)|$.

Exercice 11 ★ ★ [ENS 2022]

1. Soit (a_n) une suite sous-additive, montrer que $\frac{a_n}{n}$ converge.
2. Soit G un groupe multiplicatif, S une partie génératrice finie de G, stable par passage à l'inverse. Pour $x \in G$, on pose $L_S(x)$ le nombre d'éléments de S nécessaires pour l'engendrer. Pour Φ un endomorphisme de G, on pose $\Lambda_S(\Phi) = \max\{L_S(\Phi(x)),\ x \in S\}$. Montrer que $\frac{1}{n} \ln \Lambda_S(\Phi^n)$ converge vers une limite indépendante de S.

Exercice 12 [ENS 2022] Si A est un anneau commutatif, et I un idéal de A, on dit que I est premier si $A \backslash I$ est stable par multiplication.

1. Montrer que tout idéal maximal est premier.
2. Soit $n \geq 3$ premier, et $A = \mathbb{Z}[e^{2i\pi/n}]$. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

Exercice 13 ★ ★ [ENS 2022, ENS 2019]

1. Pour $n \geq 1$, montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin(4n\theta) = \cos\theta \sin\theta P_n\big(\cos^2\theta\big)$.
2. Calculer $\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$ puis $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)$, puis $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 14 ★ ★ [ENS 2022] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$. Montrer que P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(P^{(i)}(x)\right)^2 - P^{(i-1)}(x) P^{(i+1)}(x) > 0$.

Exercice 15 [ENS 2022] On pose $\Phi_1 = X - 1$ et, pour $n \geq 2$, $\Phi_n = \frac{X^n - 1}{\prod_{d|n,\ d<n} \Phi_d(X)}$.

1. Montrer que $\Phi_n(X) = \prod_{k\wedge n=1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.
2. Montrer que $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.
3. Montrer que pour p, q premiers distincts, Φ_{pq} est à coefficients dans $[\![-1, 1]\!]$.
4. Donner le coefficient en X^7 dans Φ_{105}.

Exercice 16 ★ ★ [ENS 2022] Soit p un nombre premier. On pose $\Phi_p = \frac{X^p-1}{X-1}$.

1. Montrer que Φ_p est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. On note $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. Montrer que si $Q \in \mathbb{Q}[X]$ et $R \in \mathbb{Q}[X]$ vérifient $Q(\zeta) = R(\zeta)$, alors $\Phi_p \mid Q - R$.
3. Montrer que $\mathbb{Q}[\zeta] = \{P(\zeta),\ P \in \mathbb{Q}_{p-1}[X]\}$ est un corps.
4. Montrer que si $Q \in \mathbb{Q}[X]$ et $R \in \mathbb{Q}[X]$ vérifient $Q(\zeta) = R(\zeta)$, alors pour tout entier k non multiple de p, $Q(\zeta^k) = R(\zeta^k)$.
5. Soient $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{Q}^p$. On pose $C = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \\ a_2 & & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$.
Montrer que si C est inversible, son inverse est de la même forme.

Exercice 17 [ENS 2022] On admet que tout polynôme de $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_{n-1}]$ se factorise de manière unique comme produit de polynômes irréductibles.

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \\ X_2 & & \ddots & X_1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_0 \end{vmatrix}$.

Exercice 18 ★ [ENS 2022] Soit $n \geq 2$. On note G_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dont 0 est racine simple.

1. Pour $P, Q \in G_n$, montrer qu'il existe un unique $T \in G_n$ tel que $X^n \mid P \circ Q - T$. On note alors $P \star Q = T$.
2. Montrer que $(G_n, \star)$ forme un groupe.

Exercice 19 ★ ★ [ENS 2022] Soit $d \geq 1$ et $0 < a_1 < \ldots < a_d$ des entiers. On pose $P_n = \prod_{k=1}^{d}(X - na_k) - 1$.

1. Montrer que pour n assez grand, P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $n \geq 1$ pour lequel P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et tout $k \leq d$, on note $x_n^{(k)}$ la k-ième racine de P_n dans l'ordre croissant. Déterminer, pour $k \in [\![1, n]\!]$, un équivalent de $x_n^{(k)}$.
3. Montrer que P_n est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 20 ★ [ENS 2022] Soient a, b réels et $n \geq 3$ impair. Étudier, en fonction de n, a, b le nombre de racines réelles de $X^n + aX + b$.

Exercice 21 ★ ★ [ENS 2022] Soit $n \geq 1$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. À quelle condition existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^2 = M$ et $\forall i,\ M_{ii} = \lambda_i$.

Exercice 22 ★ [ENS 2022] Soit $n \geq 2$. On note U_n l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dont les coefficients diagonaux sont de module 1, et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices de permutation. On pose $\mathcal{N}_n = \{AB\,;\ (A, B) \in U_n \times \mathcal{S}_n\}$.

1. Montrer que $\mathcal{N}_n$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que le commutant du commutant de $\mathcal{N}_n$ est égal à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 23 ★ [ENS 2022] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note P_σ la matrice de permutation associée. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales complexes de taille n dont les coefficients sont de module égal à 1. Les ensembles $\mathcal{M}_2 = \{P_\sigma D P_{\sigma'},\ \sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n, D \in \mathcal{D}_n\}$ et $\mathcal{M}_2 = \{P_\sigma D P_\sigma,\ \sigma \in \mathcal{S}_n, D \in \mathcal{D}_n\}$ forment-ils des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$?

Exercice 24 [ENS 2022] Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{A}$, $\overline{M}^T \in \mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}'$ le commutant de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}''$ celui de $\mathcal{A}'$. Montrer que $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

Exercice 25 ★ ★ [ENS 2022] Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G alors F possède un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Exercice 26 [ENS 2022] Soit $P_1, \dots, P_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall i, j,\ P_i P_j = \delta_{i,j} P_i$ et $\sum_{i=1}^{r} P_i = I_n$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des réels distincts. On pose $A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i$.
Montrer que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = \sum_{i=1}^{r} P_i B P_i + AK - KA$.

Exercice 27 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note q la multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique de A.

1. Montrer l'existence et l'unicité de $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XA$, $A^{q+1}X = A^q$ et $XAX = X$.
2. Que dire si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3. L'application $\varphi\colon A \mapsto X$ est-elle continue ?
4. Soit (A_k) une suite convergente de matrices complexes. CNS pour que $\varphi(A_k) \to \varphi(\lim A_k)$.

Exercice 28 [ENS 2022] Soit $n \geq 1$ impair, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $A + iB$ admet un vecteur propre réel.

Exercice 29 [ENS 2022] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose $F = P(X)^2$.

1. Montrer que $f\colon A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto F(A)$ n'est pas surjective.
2. Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $f^{-1}(\{N\})$ soit infini.
3. Montrer qu'il existe un ensemble E dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout $M \in E$, $|f^{-1}(\{M\})|$ soit fini et indépendant de M.

Exercice 30 [ENS 2022] Soit $p \geq 1$, $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On dit que A est toute puissante si pour tout $n \geq 1$, il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^n = A$.

1. Traiter le cas $p = 1$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.
2. On suppose que $\chi_A = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
   a) Montrer qu'il existe $N_1, \dots, N_k$ nilpotentes telles que A soit semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i)$.
   b) Montrer que A est toute puissante si et seulement si les $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ le sont.
3. On dit que M est unipotente si $M - I_p$ est nilpotente.

   Pour A unipotente, on pose $\ln A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(A - I_p)^n$.
   a) Justifier la définition de $\ln A$. Montrer que $\exp$ réalise une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur les matrices unipotentes.
   b) Montrer que les matrices unipotentes sont toutes puissantes.

Exercice 31 [ENS 2022] 1. Quelle est la dimension maximale d'une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par une matrice nilpotente.

2. Soit $m \geq 1$ et $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentes qui commutent deux à deux. On note $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par les A_i. Montrer que $\dim \mathcal{A} \leq n(n - \min \operatorname{rang} A_i)$.

Exercice 32 ★ ★ [ENS 2022] Déterminer les morphismes d'algèbres de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 33 ★ ★ [ENS 2022] On note E l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable. On fixe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ et on considère l'opérateur $T_{a,b} \colon u \in E \mapsto (au_{n+1} + bu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T_{a,b} - \lambda \,\mathrm{Id}$ ne soit pas bijectif.

Exercice 34 Groupe SU(2) [ENS 2022] Soit G l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{C}$ vérifient $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

1. Vérifier que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que G possède un unique sous-groupe distingué autre que G et $\{I_2\}$.

   Un sous-groupe H de G est distingué si pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} = H$.

Exercice 35 [ENS 2022] On note $G_n = \big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)^n$ et $V = \mathcal{F}(G_n, \mathbb{R})$.

1. Dimension de V ?
2. Pour $x \in G_n$, on note $v_x = \mathbb{1}_x$. Pour $x, y \in G_n$, on note $x \sim y$ si la liste $y - x$ a exactement un terme non nul. On définit un endomorphisme ψ de V par $\psi(v_x) = \sum_{y \in G_n | y \sim x} v_y$. Montrer que ψ est diagonalisable.
3. Montrer que tout morphisme de groupes de G_n vers $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un vecteur propre de ψ

Exercice 36 ★ ★ Pfaffien [ENS 2022]

1. Montrer que si n est impair, alors $\mathcal{A}_n$ ne contient aucune matrice inversible.
2. On suppose n pair. On note $I = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Montrer qu'il existe une fonction polynomiale $P \colon \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ telle que $\det A = P^2\big((a_{ij})\big)$ pour tout $A \in \mathcal{A}_n$.

Exercice 37 [ENS 2022] Soit E un espace euclidien, G un sous-groupe fini d'ordre $n > 1$ de $\mathcal{O}(E)$ et v un vecteur unitaire de E tel que $\|g(v) - v\|^2 < \frac{2n}{n-1}$ pour tout $g \in G$. Montrer qu'il existe un vecteur $w \in E \setminus \{0\}$ tel que $g(w) = w$ pour tout $g \in G$.

Exercice 38 [ENS 2022] Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes.

- Toute combinaison linéaire de A_1, A_2 est diagonalisable.
- Ou bien les matrices A_1, A_2 sont codiagonalisables, ou bien toute combinaison linéaire non nulle de A_1, A_2 admet deux valeurs propres réelles distinctes.
- Il existe $S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ telle que pour toute combinaison linéaire A de A_1 et A_2, on ait $SA \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 39 [ENS 2022] Soit $n \geq 1$. Quand c'est défini, on pose $f(B) = (I_n - B)(I_n + B)^{-1}$.

1. Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $f(A)$ est défini.
2. Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $f(A) \in SO_n(\mathbb{R})$ et que -1 n'est pas valeur propre de $f(A)$.
3. Réciproque de la question précédente.
4. Soit $A \in_n (\mathbb{R})$. Que vaut $f(f(A))$? Qu'en déduire ?
5. Expliciter $f(A)$ pour $n = 2$.
6. Déduire de ce qui précède le théorème de réduction des matrices antisymétriques pour n pair.

Exercice 40 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = OBO^{-1}$ si et seulement s'il existe P tel que $A = PBP^{-1}$ et $A^T = PB^TP^{-1}$

Exercice 41 [ENS 2022] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $U\overline{U}^T = I_n$ et $A = UB\overline{U}^T$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = OBO^T$.

Exercice 42 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et A_i la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la i-ième colonne de A. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ celles de A_i. Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$.

Exercice 43 [ENS 2022] Pour $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ son spectre. Pour $A, B \in \mathcal{S}_n$ et i, j tel que $i + j \leq n - 1$, comparer $\lambda_{i+j-1}(A + B)$ et $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$.

Exercice 44 [ENS 2022] Soit $P = a_{2n}X^{2n} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2n$. Montrer que la fonction associée à P est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $A = (A_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_{n+1}^+(\mathbb{R})$ telle que $a_k = \sum_{i+j=k} A_{ij}$.

Exercice 45 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{A}_n$ et $B \in \mathcal{S}_n^+$. On suppose qu'il existe $K \in \mathcal{S}_n$ telle que le spectre de $KA - AK + B$ soit > 0. Montrer qu'il existe $c, C > 0$ tels que $\forall t \geq 0$, $\left\|e^{-t(A+B)}\right\|_{op} \leq Ce^{-ct}$, ou $\|\cdot\|_{op}$ est subordonnée à la norme euclidienne.

Exercice 46 [ENS 2022] Soit E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée. Soit F un sous-espace vectoriel et A_F l'ensemble des projecteurs d'image F. Montrer que l'ensemble $\{\|u \circ p - p \circ u\|_{op}, p \in A_F\}$ admet un minimum.

Exercice 47 [ENS 2022] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les fonctions f de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$ possédant les propriétés suivantes :

- pour $S \in \mathcal{S}_n$ et $O \in \mathcal{O}_n$, $f(O^T SO) = f(S)$
- il existe une famille $(f_{i,j})_{i \leq j}$ de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\forall S$, $f(S) = \prod_{i \leq j} f_{ij}(S_{ij})$

Exercice 48 [ENS 2022] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $n, d \geq 1$, et $A, B \in \mathcal{O}_n$ vérifiant $A^d = I_n$ et $\left\|A^k B - BA^k\right\| \leq \delta$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $B \in \mathcal{O}_n$ telle que $\|B_1 - B\| \leq \varepsilon$ et $AB_1 = B_1 A$.

Exercice 49 [ENS 2022] Soient $A, B \in \mathcal{S}_n$.

1. s Montrer que $\text{Tr}\left((AB)^2\right) \leq \text{Tr}\left(A^2 B^2\right)$.
2. s Pour $k \geq 1$, montrer que $\text{Tr}\left((AB)^{2^k}\right) \leq \text{Tr}\left((A^2 B^2)^{2^{k-1}}\right)$.

Exercice 50 [ENS 2022] On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n^+$ est un convexe fermé de $\mathcal{S}_n$, et préciser son intérieur dans $\mathcal{S}_n$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathcal{S}_n^+$ que l'on déterminera tel que $\forall M \in \mathcal{S}_n^+$, $\|A - P\| \leq \|A - M\|$.

Exercice 51 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{S}_n$ et $a, b > 0$ tels que $aI_n - A$ et $A - bI_n$ soient positives. Soit X, Y dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\langle X, Y\rangle = 0$. Montrer que

$$\langle X, AY\rangle^2 \leq \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \langle X, AX\rangle\langle Y, AY\rangle.$$

Exercice 52 ★ [ENS 2022] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C(A)$ sa comatrice. Soient $U, V \in \mathbb{R}^n$ unitaires. On note P, Q les matrices des projections orthogonales sur $U^\perp$ et $V^\perp$. Montrer que $C(P)C(Q)C(P) = \langle U, V\rangle^2 C(P)$.

Exercice 53 [ENS 2022] Une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne lorsque, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $h_{i,j} = \overline{h_{j,i}}$. Elle est positive si toutes ses valeurs propres sont réelles positives.

1. Déterminer les formes linéaires f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $f(I_n) = 1$ et $f(H) \in \mathbb{R}_+$ pour tout H hermitienne positive.
2. Déterminer les formes linéaires f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $f(I_n) = 1$ et $f(H) \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout H hermitienne strictement positive.

Exercice 54 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que AA^T est diagonalisable à valeurs propres positives. On note $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ ses valeurs propres non nulles (avec multiplicité), et $S(A) = \left(\sqrt{\sigma_1}, \ldots, \sqrt{\sigma_r}\right)$.
2. Comparer $S(A)$ à $S\left(A^T\right)$.
3. Montrer qu'il existe U dans $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et V dans $\mathcal{O}_p(\mathbf{R})$ telles que $U^T AV = R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $D = \text{diag}\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_r\right)$, où $S(A) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.
4. On considère $A^\star = VR^* U^\top$, avec $R^* = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$. Interpréter géométriquement les matrices $AA^\star$ et $A^\star A$, en commençant par examiner le cas particulier où A est inversible.

2) Analyse

Exercice 55 [ENS 2022] Soit $n \geq 1$.

1. Déterminer les plus petites constantes C et C' telles que
$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\|_2 \leq C\,\|x\|_\infty \quad \text{ et } \quad \|X\|_{+\infty} \leq C'\,\|X\|_2\,.$$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\|_2 \geq \|X\|_\infty$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|AX\|_2 \geq \sqrt{n}\,\|X\|_\infty$.
3. Pour deux espaces vectoriels normés E et F de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$. Lorsque $\dim E = \dim F$, on note
$$d(E, F) = \inf\{\|f\|\left\|f^{-1}\right\|,\ f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ bijective}\}.$$
Déterminer $d(E, F)$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est muni de $\|\cdot\|_2$ et $F = \mathbb{R}^n$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 56 ★ ★ Continuité des racines [ENS 2022] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré n scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Pour $t \in \mathbb{C}$, on pose $P_t = X^n - tX - 1$. Montrer qu'il existe n fonctions continues $x_1, \ldots, x_n$ définies sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ sur lequel $P_t = \prod_{i=1}^n (X - x_i(t))$.

Exercice 57 [ENS 2022] Soit $f\colon x \mapsto 2x - \frac{1}{x}$. On pose $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}([-1, 1])$. Montrer que K est un compact d'intérieur vide sans point isolé et que $f(K) = K$.

Exercice 58 [ENS 2022] On note $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées, que l'on munit de la norme infinie. Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire continue T de $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ dont la restriction à $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ soit l'identité.

Exercice 59 L'espace des suites qui tendent vers 0 n'a pas de supplémentaire fermé dans l'ensemble des suites bornées.

Exercice 60 [ENS 2022] Soit $f\colon M \mapsto 2M - M^2$. On note Γ l'ensemble des $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont limites d'une suite de la forme $f^k(M)$.

1. Déterminer Γ.
2. Pour $N \in \Gamma$, déterminer les X tels que $f^k(X) \to N$.

Exercice 61 [ENS 2022] Dunford, par la méthode de Newton Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{Q}^m)$, on pose s$\Psi_u(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u)}(X - \lambda)$. Étudier la bonne définition et la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = u$ et $u_{n+1} = u_n - \Psi_u(u_n) \circ \Psi'_u(u_n)^{-1}$.

Exercice 62 [ENS 2022] On munit $GL_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Déterminer le plus petit $a > 0$ tel qu'il existe un sous-groupe non trivial de $GL_n(\mathbb{C})$ inclus dans la boule fermée $B(I_n, a)$.

Exercice 63 ★ ★ [ENS 2022] Soit E euclidien, et A une partie bornée non vide de E.

1. Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimal contenant A.
2. Qu'en est-il dans un evn quelconque ?

Exercice 64 [ENS 2022] On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme, et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. Montrer qu'il existe une base de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle les formes linéaires coordonnées sont unitaires.

Exercice 65 [ENS 2022] Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de matrices de déterminant 1 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ainsi qu'une norme arbitraire N sur $\mathcal{M}_2(R)$. On suppose que $(A_n)_{n\geq 1}$ est bornée. On considère, pour tout $k \geq 1$, la matrice produit $B_k = A_k A_{k-1} \dots A_1$. On suppose enfin que $\frac{1}{n}\ln N(B_n)$ tend vers un réel $\gamma > 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul v de $\mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{n}\ln \|B_n v\|_2$ tende vers $-\gamma$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 66 ★ ★ Corps p-adique [ENS 2022] On fixe un nombre premier p. On note v_p la fonction de valuation p-adique sur $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1. Pour $r = \frac{a}{b}$ un rationnel avec a, b entiers, on pose $|r|_p = p^{v_p(a) - v_p(b)}$ si $a \neq 0$, et $|r|_p = 0$ sinon. Montrer que la quantité ainsi définie ne dépend effectivement que de r et non du couple (a, b) envisagé.
2. Montrer que $|\cdot|_p$ vérifie $|r + s|_p \leq \max(|r|_p, |s|_p) \leq |r|_p + |s|_p$ pour tous r, s dans $\mathbb{Q}$, que $|-r|_p = |r|_p$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$, que $|\cdot|_p$ est à valeurs positives et ne s'annule qu'en 0. On définit à partir de là, et comme pour une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la notion de convergence vers 0 pour une suite à termes dans $\mathbb{Q}$.
3. Une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ à termes dans $\mathbb{Q}$ est dite de Cauchy lorsque, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $|a_n - a_m|_p \leq \varepsilon$ pour tous $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$. Montrer que si une telle suite ne tend pas vers 0, alors elle est à termes non nuls à partir d'un certain rang et la suite inverse $(1/a_n)_n$ est de Cauchy.
4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_p$ des suites de Cauchy à termes dans $\mathbb{Q}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.
5. Deux suites de Cauchy $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont dites équivalentes lorsque leur différence converge vers 0. Montrer que l'on définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. On considère l'ensemble quotient $\mathbb{Q}_p$ de l'ensemble des suites de Cauchy par cette relation d'équivalence. Montrer qu'il existe une unique structure d'anneau sur $\mathbb{Q}_p$ qui fasse de la projection canonique de $\mathcal{C}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$ un morphisme d'anneaux.
6. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ est un corps, et mettre en évidence un unique morphisme injectif de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_p$.
7. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy à termes dans $\mathbb{Q}$. On appelle norme de a le réel : $N(a) = \lim_{n\to+\infty} \sup\left\{|a_k|_p\,;k \geq n\right\}$.

   Montrer que deux suites de Cauchy équivalentes ont la même norme, et en déduire une fonction $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{Q}_p$ telle que $N(a) = \|a\|$ pour toute suite de Cauchy a à termes dans $\mathbb{Q}$, dont on note $[a]$ la classe pour la relation d'équivalence précédente.

   Vérifier que $N(x + y) \leq \max(N(x), N(y))$ pour tous x, y dans $\mathbb{Q}_p$, que $N(-x) = N(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$, et enfin que N est positive et ne s'annule qu'en l'élément nul de $\mathbb{Q}_p$.
8. Soit $\sum a_n$ une série à termes dans Q_p. Montrer qu'elle converge au sens de N si et seulement si $(a_n)_{n\in N}$ converge vers 0 au sens de N.
9. Le corps $\mathbb{R}$ est-il isomorphe au corps $\mathbb{Q}_p$?

Exercice 67 ★ ★ [ENS 2022] Soit u une suite réelle. Déterminer une CNS pour qu'il existe une réindexation de u qui soit monotone APCR.

Exercice 68 ★ ★ Formule de Lie-Trotter [ENS 2022] Soit $d \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Montrer que $\left(e^{A/n}e^{B/n}\right)^n \to e^{A+B}$.

Exercice 69 ★ ★ [ENS 2022] Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x. On pose $u_0 = 1$ et $u_n = 2u_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ qui est une puissance de 2, et $u_n = \lceil \frac{u_{n-1}}{3} \rceil$ pour tout entier $n \geq 3$ qui est une puissance de 3 et enfin $u_n = u_{n-1}$ sinon. Montrer que u tend vers $+\infty$.

Exercice 70 ★ Règle de Raabe-Duhamel [ENS 2022]

1. Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites de réels > 0. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Que dire des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$?
2. Soit (a_n) une suite de réels > 0. On suppose que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > -1$. Montrer que $\sum a_n$ converge.
3. Que dire si $\alpha < -1$?

Exercice 71 ★ [ENS 2022] Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille sommable de complexes, on pose $\|a\| = \sum_{\mathbb{Z}} |a_n|$.

Si (a_n) et (b_n) sont sommables, on pose $(a * b)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$.

1. Montrer que $a * b$ est bien définie, sommable, et que $\|a * b\| \leq \|a\|\,\|b\|$.
2. Montrer que $*$ est commutative, associative. Déterminer un neutre pour $*$.

Si a est sommable, on pose, pour $|z| \leq 1$, $f_a(z) = \sum_{\mathbb{Z}} a_n z^n$.

3. Montrer que f_a est continue sur le disque unité fermé.
4. Si a est inversible pour $*$, montrer que f_a ne s'annule pas sur D.
5. On suppose que a est à support fini et que f_a ne s'annule pas sur D. Montrer que a est inversible pour $*$.

Exercice 72 ★ ★ [ENS 2022] Soit $(a_n) \in]0,1[^{\mathbb{N}}$. Donner une CNS pour que pour tout $x \in]0,1[$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}^*$ telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(n)}}{2^n}$.

Exercice 73 [ENS 2022] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f\colon x \mapsto 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = a + b + c$.

Exercice 74 ★ [ENS 2022] Donner une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.

Exercice 75 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et dont la dérivée n-ième s'annule en un unique $x_n > 0$, pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
2. Montrer que $x^n f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, pour tout $n \geq 0$.
3. Soit $g\colon x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des coefficients $c_{n,p}$ tels que $g^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} c_{n,p} \frac{f^{(n-p)}(x)}{x^{p+1}}$. Montrer alors que $(-1)^n g^{(n)}$ est strictement positive.

Exercice 76 ★ ★ [ENS 2022] Soient I un intervalle ouvert et $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de continuité est dense dans I. Montrer que f, g ont un point de continuité commun.

Exercice 77 ★ ★ # Fonctions harmoniques [ENS 2022] Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{4}\big(f(x+1) + f(x-1) + f(x+\pi) + f(x-\pi)\big) = f(x)$.

Exercice 78 ★ [ENS 2022] Soit f une fonction de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $(f(x), f'(x)) \neq (0,0)$ pour $x \in [0,1]$. Déterminer la limite, lorsque δ tend vers 0^+, de $\frac{1}{\delta}\int_0^1 \mathbb{1}_{|f(t)|<\delta} |f'(t)| \,\mathrm{d}t$.

Exercice 79 ★ [ENS 2022] Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in [0,1]^2, xf(y) + yf(x) \leq 1$. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{4}$.

Exercice 80 ★ ★ [ENS 2022] Soit $f \in \mathcal{C}^0([-\pi,\pi], \mathbb{R})$ monotone et continue par morceaux. On pose, pour $n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,\mathrm{d}x$. Montrer que la suite $(nc_n(f))_{n\in Z}$ est bornée.

Exercice 81 [ENS 2022] Calculer $\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$.

Exercice 82 [ENS 2022] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ strictement décroissante telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ $+\infty$.

Exercice 83 [ENS 2022] Déterminer les suites croissantes u à termes positifs telles que, pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable, on ait $u_n \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 84 [ENS 2022] Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \geq b > 0$.

1. Montrer que $1 \leq \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$, puis que $0 \leq \frac{\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}}$.
2. On pose $I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$. Calculer $I(a,a)$, puis démontrer que $I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.
3. On définit deux suites réelles $(a_n)_{nz0}$ et $(b_n)_{n20}$ par $a_0 = a, b_0 = b$ et, pour $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Étudier la convergence de $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$.
4. En déduire $I(a,b)$.

Exercice 85 [ENS 2022] Soit $f \in \mathcal{C}^0(]0,1], \mathbb{R})$ décroissante. On pose $r_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $I(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Trouver une condition suffisante pour que (r_n) converge.
3. Soit $f\colon x \to \frac{x^2-1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$. Calculer r_n et en déduire la limite de $\frac{n!^{1/n}}{n}$ sans utiliser Stirling.

Exercice 86 [ENS 2022] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de carré intégrable et $g\colon x \mapsto f(x) - 2e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\int_0^{+\infty} g^2 = \int_0^{+\infty} f^2$.

Exercice 87 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_{\mathbb{R}^+} f = 1$. On pose $g(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$). On suppose à présent que f est décroissante.
2. Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}^+$ tel que $\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \geq m$.

Exercice 88 [ENS 2022]

1. s Déterminer l'ensemble des fonctions réelles qui sont limites uniformes sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes à coefficients positifs.
2. s Déterminer l'ensemble des fonctions réelles qui sont limites uniformes sur $[-1,0]$ d'une suite de polynômes à coefficients positifs.

Exercice 89 [ENS 2022] Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_N : x \in \mathbb{R}\backslash Z \to \sum_{n=-N^N}^{N} \frac{1}{x+n}$.

1. Montrer que $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. On note g sa limite.
2. Montrer que g est continue.

3. Montrer que g est impaire, 1-périodique et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, g(x) = \frac{1}{2}\left(g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2})\right).$$

4. Montrer que $g(x) = \pi \cot\text{an}(\pi x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Exercice 90 [ENS 2022] On considère une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle $\sum e^{-\lambda/t}$ converge pour tout $t > 0$. On suppose en outre que $\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda/t} \sim_{t\to 0+} Bt^{-a}$ pour des réels $B > 0$ et $a > 0$. On note E l'espace des fonctions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues par morceaux et telles que $t \mapsto f(t)e^t$ soit bornée, et pour $f \in E$ on note $N(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|e^t$. On admet que (E, N) est un espace vectoriel normé.

Pour $f \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $L_l(f) = \sum_{j=0}^{+\infty} f(\lambda_j t)\, t^a$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les $f_k\colon \to \exp(-kt)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour $f \in E$, on note $L_0(f) = \frac{B}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} f(t)t^{a-1}\,\mathrm{d}t$ où $\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que L_t est bien définie, linéaire et continue sur E.
2. Montrer que L_0 est bien définie, linéaire, continue et que $L_1(f) \xrightarrow[t\to 0+]{} L_0(f)$ pour tout $f \in \overline{F}$.
3. Pour $x > 0$, on note $N_x := |\{j \in \mathbb{N}^*, \lambda_j \leq x\}|$. Montrer que $N_x \sim_{x\to+\infty} B\frac{x^a}{a\Gamma(a)}$.

Exercice 91 [ENS 2022] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \in]0,1[$, $b > 1$ et $ab > 1$. On pose

$$f_{a,b}\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\ln a}{\ln b}.$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}$, bornée et continue.
2. Montrer que $f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^{n-\alpha} \cos\left(b^n \pi x\right)$ pour tout x.
3. Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\forall x, y,\ |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leq C|x - y|^\alpha$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t) \cos\left(b^n \pi t\right) \mathrm{d}t$, pour $h = 2b^{-n}$.

Exercice 92 ★ ★ [ENS 2022] On pose $p(n) = \left|\left\{(k_1, \ldots, k_N) \in (\mathbb{N}^*)^N \mid k_1 + \cdots + k_N = n\right\}\right|$, et $p(0) = 1$. Montrer que pour $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n)z^n = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - z^k}.$$

Exercice 93 [ENS 2022] Pour $z \in \mathbb{C}$ de module < 1, on pose $f(z + 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$.

1. Soient $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $|u|, |v| < 1$ et $|u + v + uv| < 1$. Montrer que $f\big((1 + u)(1 + v)\big) = f(1 + u) + f(1 + v)$.
2. Soit $h(X) = (X - a_1) \ldots (X - a_n) \in \mathbb{C}[X]$, avec $a_i \neq 0$. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left|h\big(re^{it}\big)\right| \mathrm{d}t = \ln|h(0)| + \ln\frac{r}{|a_1 \ldots a_n|}$$

pour $r > \max(|a_i|)$.

Exercice 94 ★ ★ [ENS 2022] Soit (a_n) une suite réelle décroissante, positive de limite nulle telle que la suite $(a_n - a_{n+1})$ soit décroissante.

Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, $\sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k x^k \leq x^{2n} \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k$.

Exercice 95 [ENS 2022] Soient $C(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ et $D(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k$ les sommes de deux séries entières à coefficients réels de rayon de convergence infini. Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$. On suppose que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}, C(a^n) = D(a^n)$.

1. On suppose que $c_k = d_k$ à partir d'un certain rang. A-t-on $C = D$?
2. On suppose $a \in]0,1[$. Montrer que $C = D$.
3. Donner un exemple de séries entières distinctes C et D, et de $a > 1$ pour lesquels la propriété est vérifiée.
4. On suppose que $a > 1$ et qu'il existe $r \in]0,1[$ tel que $c_k < r^{k^2}$ et $d_k < r^{k^2}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $C = D$.

Exercice 96 Valeurs du dilogarithme [ENS 2022] Pour $x \in [-1,1[$, on pose $L(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la bonne définition de L sur $[-1,1[$ et montrer que L est prolongeable par continuité en 1.
2. Déterminer le développement en série entière de L en 0 et préciser son rayon de convergence.
3. Calculer $L(1)$.
4. Calculer $L(-1)$.
5. Exprimer à l'aide de L la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.
6. Déterminer $L(1/2)$.

Exercice 97 [ENS 2022] Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence d'une série entière de rayon de convergence infini et de somme g, et d'un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbf{C}, f(z) = g(z)P(z) + Q(z)$.

Exercice 98 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ une fonction 1-périodique intégrable sur $]0,1[$.

1. Soit $n\geq 1$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une subdivision $(a_0,\dots,a_N)$ de $[0,1]$ telle que chacune des intégrales
$$\int_{a_i}^{a_{i+1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(t+k\theta)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t$$
soit bien définie.
On admet alors que leur somme ne dépend pas du choix de la subdivision envisagée, et on la note $\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(t+k\theta)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t$.
2. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{1}{n}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(t+k\theta)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t$.

Exercice 99 [ENS 2022] Soit $d\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne canonique. Soit $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}^d$ continues par morceaux. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers $f\colon [a,b[\to\mathbb{R}^d$. On suppose de plus qu'il existe $g\colon [a,b[\to\mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[a,b[,\ \|f_n(t)\|\leq g(t)$.

1. Montrer que $\int_a^b f$ et $\int_a^b f_n$, pour $n\in\mathbb{N}$, convergent. Montrer que $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$.
2. On pose $f_n\colon t\in\mathbb{R}^+\mapsto\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n 1_{t\in[0,\sqrt{n}]}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction f que l'on déterminera. Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n\to\int_0^{+\infty} f$.
3. Donner une expression exacte de $\int_0^{+\infty} f_n$ et retrouver la limite à l'aide de Stirling.
4. Montrer la convergence uniforme de (f_n) à l'aide du théorème de Dini (et en le démontrant dans le cas général).

Exercice 100 [ENS 2022]
1. Montrer que $\forall u\in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}u^{2n}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.
2. Montrer que l'application $f\colon x\in[-1,1]\mapsto\int_0^\pi \ln\left((\cos(t)+x)^2\right)\mathrm{d}t$ est constante. On pourra poser $x=\cos(u)$ avec $0\leq u\leq\pi$.
3. Que déduit-on des deux questions précédentes ?

Exercice 101 [ENS 2022] Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbf{C}$ continue et π-périodique. Sous réserve d'existence, on définit, pour $\varphi\in[-\pi,\pi]$ et $t\in\mathbb{R}$, $I_t(f)(\varphi)=\int_{-\pi}^{\varphi}\frac{f(\theta)}{(1-\cos(\theta-\varphi))^{t-\frac{1}{2}}}d\theta+\int_{\varphi}^{\pi}\frac{f(\theta)}{(1-\cos(\theta-\varphi))^{t-\frac{1}{2}}}d\theta$.

1. Pour quelles valeurs de t la quantité $I_t(f)(\varphi)$ est-elle définie quelle que soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue π-périodique et quel que soit $\varphi\in[-\pi,\pi]$?
2. Calculer, pour les réels t et φ en lesquels elle est définie, la quantité $I_t(1)(\varphi)$ en fonction de $\int_0^1 x^{-t}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer que $I_t(f)$ est continue pour tout réel $t<1$.

Exercice 102 [ENS 2022] On pose $P(z,\theta)=\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$ pour $z\in\mathbb{C}\setminus\cup$ et $\theta\in[-\pi,\pi]$.

1. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}P(z,\theta)d\theta$ pour $|z|<1$.
2. Soit $f\colon S_1\to\mathbb{R}$ continue sur $S_1=\{z\in\mathbb{C}, |z|\leq 1\}$.
On pose $P(f)(z)=f(z)$ si $|z|=1$ et $P(f)(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(e^{i\theta}\right)P(z,\theta)d\theta$ si $|z|<1$. Montrer que $P(f)$ est continue sur S_1.

Exercice 103 [ENS 2022] Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et de limite nulle en $\pm\infty$.

1. Justifier qu'est correctement définie la fonction $u\colon (t,x)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)f(y)dy$
2. Montrer que u est prolongeable en une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$.

Exercice 104 [ENS 2022] Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ continue à support compact d'intégrale 1. On note, pour g continue, $T(g)\colon x\mapsto\int_R f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

1. s Montrer que $T(g^2)\geq g^2$. Cas d'égalité ?
2. s Soit $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $T(g)=g$. On pose $h=T(g^2)-g^2$. Montrer que $T(h)\geq h$.
3. Quelles sont les fonctions g continues et bornées telles que $T(g)=g$?

Exercice 105 [ENS 2022] Soit $A\in\mathcal{M}_n(C)$. Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$ tel que A n'ait pas de valeur propre de module r. Donner une interprétation simple de la matrice $M(r):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}re^{i\theta}\left(re^{i\theta}I_n-A\right)^{-1}d\theta$ en fonction de la matrice A (on montrera en particulier que $M(r)$ est un projecteur).

Exercice 106 [ENS 2022] On note E l'espace vectoriel des fonctions continues et intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $f\in E$, on note $\hat{f}\colon x\mapsto\int_{\mathbb{R}}f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$. On admet que $\hat{\hat{f}}(x)=2\pi f(-x)$ pour tout $f\in E$ tel que $\hat{f}\in E$. Déterminer les complexes λ tels que l'équation $\hat{f}=\lambda f$ ait une solution non nulle $f\in E\setminus\{0\}$.

Indication : On pourra introduire le sous-espace vectoriel des fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $f^{(p)}(x)=_{x\to\pm\infty}O\left(|x|^{-n}\right)$ pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$.

Exercice 107 [ENS 2022]
1. Soit $x\in{\mathbb{R}^+}^*$. Montrer que $\varepsilon\to\int_{-x}^{-\varepsilon}\frac{e^{-x-t}}{t}\,\mathrm{d}t+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-x-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie en 0^+, que l'on notera $I(x)$.
2. Déterminer un équivalent de I en 0^+.

Exercice 108 [ENS 2022]
1. Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$ converge vers un réel strictement positif noté γ. On pose $\Gamma(x):=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x>0$.

2. Montrer que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t}\,\mathrm{d}t$
4. Établir successivement les expressions suivantes pour $\Gamma'(1)$:

$$\Gamma'(1) = \lim_{y \to 0^+} \left[\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x + \ln y \right] = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1-e^{-x}} \right] \mathrm{d}x.$$

5. Montrer que $\Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-(n+1)u}}{u} du + o(1)$, et conclure que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Exercice 109 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(*)$ l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$. En discutant suivant la matrice A, donner l'allure des solutions de $(*)$.

Exercice 110 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$.

1. Déterminer $E_+ = \left\{ x \in \mathbb{C}^n ; e^{tA} x \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \right\}$ et $E_- = \left\{ x \in \mathbb{C}^n ; e^{tA} x \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0 \right\}$.
2. Si $E_+ = \mathbb{C}^n$, montrer qu'existe $C, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$(*) : \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \ \left\| e^{tA} x \right\| \leq C e^{-\delta t} \|x\|$$

.

3. Soit B une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(C)$ tendant vers 0 en $+\infty$.
   Sous la même hypothèse que la question précédente, montrer que les solutions de l'équation différentielle $x'(t) = (A+B(t))x(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 111 [ENS 2022] Soient $\lambda > 0, T > 0$ et $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. On suppose l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\forall T^* > T, \sup_{t \in]0,T^*[} \frac{1}{t} \int_0^t u^2 a(u)\,\mathrm{d}$ α.

1. Énoncer le théorème de Cauchy linéaire. On admet que l'équation différentielle $x' = \lambda + a(t)x^2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ s'annulant en 0.
2. On suppose que $1 > 4a\lambda$. Soit $T^* > T$. On pose $r \colon t \in]0,T^*[\mapsto \sup_{s \in]0,t[} \frac{x(s)}{s}$.
   a) Montrer que r est positive, continue et prolongeable par continuité en 0.
   b) Montrer qu'il existe $\mu < \alpha$ tel que $\forall t \in]0,T^*[, r(t) < \lambda + \mu r^2(t)$.
   c) Montrer que, soit x est bornée, soit $T^* = +\infty$.

Exercice 112 [ENS 2022] Stabilité de l'équation de diffusion avec source linéaire Soit $a < 2$ un réel, et $u \colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que $u(t,0) = u(t,1) = 0$, pour tout $t > 0$, et $\partial_1 u(t,x) = (\partial_2)^2 u(t,x) + au(t,x)$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Montrer, pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, que $\int_0^1 \left((\partial_2)^k u(t,x) \right)^2 \mathrm{d}x \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Exercice 113 [ENS 2022] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère des fonctions dérivables $y_1, \ldots, y_n$ et des réels $a_{i,j} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $1 \leq i \leq n, y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j$ et $\lim_{t \to +\infty} y_i(t) = 0$. Montrer que $(y_1, \ldots, y_n)$ est liée.

Exercice 114 [ENS 2022] On munit $\mathbb{R}$ d'une structure de groupe de loi notée $*$, et de neutre noté e. On suppose que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x * y$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Rappeler la définition de la différentielle d'une fonction $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable.
2. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_2 f(x * y, e) = \partial_2 f(x,y) \partial_2 f(y,e)$.
3. Montrer l'existence de $\Phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\Phi(x * y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   Ind. On pourra chercher Φ sous la forme $\Phi(x) = a \int_e^x \frac{dt}{\partial_2 f(t,e)}$.

Exercice 115 [ENS 2022] Soient $A = (A_{i,j})_{i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), D = \mathrm{Diag}(A_{1,1}, \ldots, A_{n,n}), b \in \mathbb{R}^n$ et f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.

1. Montrer que f a un unique point critique, qui est un minimum global.
2. Montrer que $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. Soient $(\alpha_k)_{k=0}$ une suite réelle, $(x_k)_{k>0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = x_k + \alpha_k D^{-1}(b - Ax_k)$.
   Si $k \in \mathbb{N}$, soit $w_k = D^{-1}(b - Ax_k)$. Déterminer le signe de $\langle \nabla f(x_k), w_k \rangle$.
4. On suppose que x_k n'est pas point critique de f. Montrer qu'il existe un unique réel β_k en lequel $t \in \mathbb{R} \mapsto f(x_k + t w_k)$ est minimal.
5. On suppose qu'aucun des x_k n'est point critique de f et que, pour tout $k \in \mathbb{N}, \alpha_k = \beta_k$. Montrer que $(x_k)_{k=0}$ converge.

Exercice 116 [ENS 2022] Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \geq 0$. Montrer que la restriction de f à la boule unité euclidienne admet un maximum, atteint en un point de la sphère unité.

Exercice 117 [ENS 2022] Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et minorée. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

1. Soit $\lambda > 0, \varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $g \colon x \mapsto f(x) + \frac{\varepsilon}{\ell} \|x - x_0\|$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.
2. On suppose f différentiable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(y_\varepsilon) \leq \in f + \varepsilon$ et $\|\nabla f(y_\varepsilon)\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Exercice 118 [ENS 2022] Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $L > 0$. Montrer l'équivalence entre

- f est convexe et son gradient est L-lipschitzien.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \frac{1}{L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$.

Exercice 119 ★ ★ [ENS 2022] Soit $V : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \det\left(x_i^{j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. On note B la boule unité euclidienne fermée, S la sphère unité, et H l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Montrer que V possède un maximum sur B, atteint en un point de $S \cap H$.

Exercice 120 [ENS 2022]

1. sV5 Montrer que pour tout BON $(e_1, \ldots, e_n)$, et S symétrique, on a $\mathrm{Tr}(e^S) \geq \sum_{k=1}^n e^{\langle Se_k, e_k \rangle}$.
2. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(e^S)$ est convexe

3) Géométrie

Exercice 121 [ENS 2022]

1. Soit un polygone régulier à n sommets inscrit dans un cercle de rayon 1. Calculer le produit des longueurs des cordes reliant un sommet fixé à tous les autres.
2. Pour α et β réels, on pose $E = \left\{\alpha\zeta + \beta\zeta^{-1}, \zeta \in \mathbb{U}\right\}$. Montrer que les points d'affixe dans E décrivent une ellipse.
3. On s'intéresse à l'image des racines n-ièmes de l'unité par le paramétrage précédent. Calculer le produit des longueurs des cordes reliant l'une de ces images à toutes les autres.
   Indication : Considérer un polynôme P_n vérifiant $P_n(\alpha zeta + \beta\zeta^{-1}) = \alpha\zeta^n + \beta\zeta^{-n}$.

Exercice 122 ★ ★ [ENS 2022] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, S une partie de $\mathbb{R}^d$ de cardinal $\geq d+2$. Montrer qu'il existe deux parties disjointes A et B de S telles que $\mathrm{Conv}(A) \cap \mathrm{Conv}(B) \neq \emptyset$.

Exercice 123 ★ ★ Polyèdres [ENS 2022] Une partie bornée P de $\mathbb{R}^n$ est un polyèdre si et seulement s'il existe $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ tels que $P = \{x \in \mathbb{R}^n ; \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \langle x, y_i \rangle \leq \alpha_i\}$. Si P est un polyèdre, on dit que $x \in P$ est un sommet de P si et seulement si, pour tout $y, z \in P$, on a $y + z = 2x$ si et seulement $x = y = z$. Montrer qu'un polyèdre a un nombre fini de sommets.

Exercice 124 ★ ★ [ENS 2022]

1. Soit $n \geq 3$. Si $A = (A_1, \ldots, A_n)$ est un n-uplet de points du plan, on note $T(A) = (B_1, \ldots, B_n)$, où B_i désigne, si $1 \leq i \leq n$, le milieu de $[A_i A_{i+1}]$ (en convenant que $A_{n+1} = A_1$). Étudier la convergence de la suite $\left(T^k(A)\right)_{k=0}$.
2. Même question en fixant un élément α de $]0,1[$ et en considérant que, pour tout i, B_i est le barycentre de $((A_i, \alpha), (A_{i+1}, 1-\alpha))$.

Exercice 125 [ENS 2022] On se place dans $\mathbb{R}^2$. Les éléments de $\mathbb{Z}^2$ sont les points entiers. On appelle polygone entier un polygone dont les sommets sont des points entiers. Montrer que l'aire d'un polygone entier est égale à $i + \frac{k}{2} - 1$ où i est le nombre de points entiers à l'intérieur (strict) du polygone et k le nombre de points entiers sur le bord du polygone.

Exercice 126 ★ ★ [ENS 2022] Soient E un espace euclidien, A une partie bornée non vide de E, d le diamètre de A, x un point de l'enveloppe convexe de A, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ tel que $\left\|x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leq \frac{d}{\sqrt{n}}$.

Exercice 127 [ENS 2022]

1. Soit $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que $(a, b, c) \neq 0$. On considère la partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. On suppose que $\mathcal{C}$ contient trois points non alignés et n'est pas incluse dans la réunion de deux droites. Montrer que, dans un repère orthonormal approprié, $\mathcal{C}$ possède une équation de l'une des trois formes suivantes : $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ (ellipse), $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ (hyperbole) ou $2pX - Y^2 = 0$ (parabole).
2. On considère un (vrai) triangle ABC de $\mathbb{R}^2$. On note A' (respectivement, B', C') le milieu de $[B, C]$ (respectivement, de $[C, A]$, de $[A, B]$). Montrer qu'une et une seule ellipse contient A', B', C' et est tangente à la droite (BC) (respectivement à (CA), à (AB)) en A' (respectivement en B', en C').

4) Probabilités

Exercice 128 Une urne comporte n bulletins. On effectue des tirages avec remise de loi uniforme. Déterminer l'espérance M_n du nombre de tirages nécessaires pour avoir vu tous les bulletins. Donner un équivalent de M_n.

Exercice 129 ★ ★ [ENS 2022] Soit $n \geq 1$, et $(A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(1/2)$. Calculer l'espérance de $\det(A - A^T)$.

Exercice 130 [ENS 2022] On note $C_{n,k}$ le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ qui ont k cycles à supports disjoints dans leur décomposition (en comptant les points fixes).

1. Calculer $C_{n,n}$ et $C_{n,1}$.
2. Montrer que $C_{n+1,k} = nC_{n,k} + C_{n,k-1}$.
3. On note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de cycles d'une permutation choisie uniformément. Calculer la série génératrice de X_n.
4. Soit $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de loi $Y_i \sim \mathcal{B}(1/i)$. Montrer que $X_n \sim S_n$, où $S_n = \sum Y_i$.
5. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$. Que dire quand $n \to +\infty$?
6. Étudier la convergence en probabilité de la suite $\left(\frac{X_n}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$.
7. On pose $Z_n = \sum_{k=1}^n kY_k$. Exprimer, pour $\lambda > 0$, la limite, quand $n \to +\infty$, de $E\left(e^{-\lambda\frac{Z_n}{n}}\right)$.

Exercice 131 On définit la fonction de Moebius $\mu : \mathbb{N}^* \to \{0, 1, -1\}$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ pour $n \geq 1$ divisible par le carré d'un nombre premier, et $\mu(n) = (-1)^{d_n}$ sinon, où d_n est le nombre de diviseurs premiers de n.

1. Montrer que pour $n \geq 2$, $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$.
2. Soit $\alpha \in]0,1[$ et X_α, Y_α deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{G}(\alpha)$. Pour $k \geq 1$, on note $q_k(\alpha) = P(k \mid X_\alpha)$. Déterminer $\lim_{\alpha \to 0} q_k(\alpha)$.
3. On note $f(\alpha) = P(X_\alpha \wedge Y_\alpha = 1)$. Montrer que $f(\alpha) = \sum_{d=1}^{+\infty} \mu(d) q_d(\alpha)^2$.

Exercice 132 [ENS 2022] Soit $\alpha \in]-1,1[$. On pose $f_\alpha : x \mapsto \frac{x+\alpha}{1+\alpha x}$. Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f_\alpha(u_n)$.

1. Variations et points fixes de f_α. Que dire de la limite éventuelle de la suite u selon la valeur de α ?
2. Exprimer u_n en fonction de α. Étudier la limite.
3. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $]-1,1[$. On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f_{\alpha_n}(u_n)$. Que dire de la limite de u ?
4. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $]-1,1[$. Que dire de la limite de u ?

Exercice 133 [ENS 2022] Soit $\alpha \in [0,1]$. Pour $z \in [0,1]$, on pose $\varphi_a(z) = 1-(1-z)^\alpha$.

1. Montrer l'existence d'un variable aléatoire X_a à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\varphi_a(z) = E(z^{X_a})$, pour $z \in [0,1]$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille d'évènements indépendants telle que $P(A_k) = \frac{a}{k}$. Montrer que X_a suit la même loi que la variable $I(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid \omega \in A_n\}$.
3. Soit $(E)\colon \forall z \in [0,1],\ \varphi_a(z) = z\varphi(\varphi_a(z))$ une équation d'inconnue φ, fonction génératrice d'une variable aléatoire.
   a) Montrer que si $a = \frac{1}{2}$, l'équation (E) admet une unique solution.
   b) Montrer que si $a = \frac{1}{3}$, l'équation (E) n'a pas de solution.

Exercice 134 1. Soit $n \geq 1$, $\sigma > 0$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles telles que $\forall t,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ E(e^{tX_i}) \leq e^{t^2\sigma^2/2}$. Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ indépendant de n et σ tel que $E(\max_{i\leq n}|X_i|) \leq C\sigma\sqrt{\ln(2n)}$.

2. Soit X à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(X=k) = \alpha e^{-k^2/2}$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ E(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$.

Exercice 135 1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles centrées admettant un moment d'ordre 2. Montrer que la matrice $(\mathrm{Cov}(X_i, X_j))$ est symétrique positive.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées, admettant un moment d'ordre 2 et telles que les $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ ne dépendent que de $i-j$. On suppose que $V(X_0) > 0$ et $\mathrm{Cov}(X_n, X_0) \to 0$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la matrice $(\mathrm{Cov}(X_i, X_j))$ est symétrique définie positive.

Exercice 136 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelle admettant des moments d'ordre 2, de mêmes espérances m telles que $\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = f(|k-\ell|)$.

1. On suppose que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(k) \to 0$. Pour $n \geq 1$, soit $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers m.
2. On suppose $\big(f(k)\big)_{k\geq 0}$ est sommable. Montrer que $\big(nV(Y_n)\big)_{n\geq 1}$ converge vers un réel à préciser.

Exercice 137 ★ [ENS 2022] On construit une permutation aléatoire σ de $\mathcal{S}_n$ de la manière suivante.

(*i*) On choisit $x \in [\![1,n]\!]$ de manière uniforme, et on pose $\sigma(1) = x$.

(*ii*) Si $\sigma(1) \neq 1$, on choisit de même $y \in [\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(1)\}$ et on pose $\sigma(\sigma(1)) = y$. On réitère ce procédé $k-1$ fois en tout jusqu'à retomber sur 1, de sorte que $\sigma^k(1) = 1$

(*iii*) Si $k < n$, on répète le processus, en partant du premier élément n'appartenant pas à $\{1, \sigma(1), \ldots, \sigma^{k-1}(1)\}$.

Les tirages étant supposés indépendants, montrer que la permutation σ ainsi construite suit la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$.

Exercice 138 [ENS 2022] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi d'espérance finie strictement positive. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que $P(\forall n \geq 1,\ S_n > 0) > 0$.

Exercice 139 Soit $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{R}(p)$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $pe^{t_0} + (1-p)e^{-t_0} < 1$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in]0,1[$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z},\ P(S_n \geq k) \leq \alpha^k \beta^n.$$
3. Montrer que S_n tend vers $-\infty$ presque sûrement.

Exercice 140 ★ [ENS 2022] Soit $n \geq 1$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer $P(XY = 0)$.

Exercice 141 ★ ★ [ENS 2022] Soient $n \geq m \geq 0$. On note A l'ensemble des injections $[\![1,m]\!] \to [\![1,n]\!]$ et B l'ensemble des surjections $[\![1,n]\!] \to 1, m$. Comparer $\frac{A}{n^m}$ à $\frac{B}{m^n}$.

Exercice 142 Définition de variables sous-gaussiennes Soit X une variable aléatoire réelle centrée. Montrer l'équivalence entre

- il existe $a > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ E(e^{\lambda X}) \leq e^{a\lambda^2}$.
- il existe $b > 0$ tel que $\forall t > 0,\ P(|X| \geq t) \leq 2e^{-bt^2}$.
- il existe $c > 0$ tel que $E(e^{cX^2}) < +\infty$

Exercice 143 Soient $\lambda, c \in]0,1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$ telles que $X_0 = c$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in [0,1]$, $P(X_{n+1} = \lambda + (1-\lambda)X_n \mid X_n = x) = x$ et $P(X_{n+1} = (1-\lambda)X_n \mid X_n = x) = 1-x$. On note $u_n(p) = E(X_n^p)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \subset [0,1]$ de cardinal au plus 2^n tel que $P(X_n \in A_n) = 1$.
2. Montrer que $u_n(1) = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer qu'il existe $\lambda_2 > 0$ tel que $\forall n,\ |u_n(2) - c| \leq e^{-\lambda_2 n}$.
4. Montrer que $(1-\lambda)^{p-1}\big(1 + \lambda(p-1)\big) \in]0,1[$ pour tout $p \geq 2$.
5. Montrer que pour tout $p \geq 2$, il existe $\lambda_p > 0$ tel que $u_n(p) - c = O(e^{-\lambda_p n})$.

Exercice 144 [ENS 2022] 1. Soit $n \geq 2$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Dénombrer les manières de choisir k nombres dans $[\![1,n]\!]$ sans prendre deux nombres consécutifs.

2. On installe n couples autour d'une table ronde, en alternant hommes et femmes. Montrer que la probabilité que personne ne soit assis à côté de son partenaire est

$$p_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!.$$

3. Déterminer la limite de (p_n).

Exercice 145 ★ ★ [ENS 2022]

1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout variable aléatoire X à valeurs dans $[0,1]$ non presque sûrement nulle, on ait

$$\sup_{t \geq 0} tP(X \geq t) \geq C \frac{E(X)}{\ln\left(2/E(X)\right)}.$$

2. Montrer qu'il existe une constante $C' > 0$ et une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$ non presque sûrement nulles telle que $E(X_n) \to 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{t \geq 0} tP(X \geq t) \leq C' \frac{E(X)}{\ln\left(2/E(X)\right)}$$

II) X

1) Algèbre

Exercice 146 Valeurs rationnelles de $\cos(\pi r)$ [X 2021, X 2022] Soit $r \in \mathbb{Q}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 2\cos(2^n \pi r)$.

1. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.
2. On suppose que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{Z}$. En déduire les valeurs possibles de r.
3. Vérifier que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
4. Déterminer les éléments d'ordre fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}[i]$.

Exercice 147 [X 2021, 2022] 1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.

Une partie X d'un sous-groupe abélien G est dite sans somme s'il n'existe pas $x, y \in X$ tel que $x + y \in X$.

1. Soit p un nombre premier de la forme $3k+2$. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ contient une partie sans somme de cardinal $k+1$.
2. Soient A, B deux parties d'un corps fini $\mathbb{K}$. Calculer $\sum_{x \in \mathbb{K}^*} |A \cap xB|$.
3. Soit A une partie finie non vide de $\mathbb{Z}^*$. Montrer qu'il existe une partie B de A sans somme et de cardinal strictement supérieur à $\frac{|A|}{3}$.

Exercice 148 [X 2022] Soit $d > 0$. Pour $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on pose $T_a = \begin{pmatrix} 1 & d^{-1/4}\tan a \\ -d^{1/4}\tan a & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre $T_a T_b$ et T_{a+b}.
2. On suppose que d est un entier ≥ 2 et qu'il n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier.
   a) sV2 On note $A = \{a + b\sqrt{d},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que $\sigma\colon a + b\sqrt{d} \mapsto a - b\sqrt{d}$ est bien défini et un morphisme d'anneau. Il s'étend à un morphisme de $\mathcal{M}_2(A)$.
   b) sV1 Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & tx \\ t^{-1}x & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer deux vecteurs $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires tels que BX_i soit colinéaire à X_i.
   c) Soit p, q premiers entre eux, avec $p \neq 0$ et $q \geq 3$ impair. Montrer que $d^{-1/4}\tan(\frac{p\pi}{q})$ est irrationnel.

Exercice 149 ★ ★ Erdős-Ginzburg-Ziv [X 2022] Soit p premier et $a_1, \ldots, a_{2p-1}$ des entiers quelconques. On veut montrer qu'il existe une partie J de cardinal p telle que $p \mid \sum_{i \in J} a_i$. On pose $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrer que cela revient à montrer que les polynômes $P(X_1, \ldots, X_{2p-1}) = \sum_{i=1}^{2p-1} X_i^{p-1}$ et $Q(X_1, \ldots, X_{2p-1}) = \sum_{i=1}^{2p-1} a_i X_i^{p-1}$ admettent une racine commune non triviale.
2. Conclure en considérant $R = (1 - P^{p-1})(1 - Q^{p-1})$.
   On admettra que pour tout $j < p-1$, $\sum_{x \in \mathbb{K}} x^j = 0$.

Exercice 150 [X 2022] Soient $a, c, m \in \mathbb{N}$ avec $m > 1$. $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = ax_n + c$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

1. Montrer que (x_n) est périodique APCR.
2. On suppose que (x_n) est m-périodique à partir d'un certain rang et que $m = p^\alpha$. Montrer que $a \equiv 1[p]$ et que $c \wedge p = 1$.
3. s On suppose que m est une puissance d'un nombre premier impair p et que $a \equiv 1[p]$. On pose $P = \sum_{k=0}^{p-1} x^k$. Montrer que $P(a)$ est divisible par p, mais pas par p^2.
   Manque la fin de l'énoncé.

Exercice 151 ★ ★ [X 2022] Soit $p \geq 3$ premier et $t \in \mathbb{N}^*$. On considère $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers congrus à 1 modulo p^t. On pose $a = 2p_1 \ldots, p_r$ et $c = a^{p^{t-1}}$.

1. Montrer que $c \equiv 2[p]$.

2. Montrer que $m = 1 + c + \cdots + c^{p-1}$ et $c - 1$ sont premiers entre eux.
3. Soit q un facteur premier de m. Montrer que $q \equiv 1 [p^t]$.
4. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo p^t.

Exercice 152 [X 2022] Soit p premier. On considère $K = F_p[[X]]$ l'ensemble des séries formelles, c'est-à-dire $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$ muni du produit de Cauchy, qui en fait une algèbre.

1. Montrer que $(f+g)^p = f^p + g^p$.
2. Si $f = \sum a_n X^n$, alors $f^p = \sum a_n X^{np}$.
3. Pour $r \leq p-1$, on pose $\Lambda_r(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{np+r} X^n$. Montrer que $\Lambda_r(f^p g) = f \Lambda_r(g)$ pour tous f, g.
4. Soit f et $k \geq 1$. On suppose qu'il existe des polynômes non tous nuls $Q_0, \ldots, Q_k$ tel que $\sum Q_i f^{p^i} = 0$. Montrer qu'il existe une telle famille avec $Q_0 \neq 0$.
5. … Manque une suite.

Exercice 153 [X 2022] On note $G = SL_2(\mathbb{Z})$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $G = \langle S, T \rangle$.
2. Soit $\varphi \colon G \to \mathbb{C}^*$ un morphisme. Montrer que $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{U}_{12}$.

Exercice 154 ★★ [X 2022] Soit A un anneau commutatif non nul. On dit que $b \in A$ est un diviseur de 0 si $b \neq 0$ et s'il existe $c \neq 0$ tel que $bc = 0$.

1. Montrer que si A est fini et n'admet aucun diviseur de 0 alors A est un corps.
2. On pose $B = A[X]$. Montrer que $P \in B \setminus \{0\}$ est un diviseur de 0 si et seulement s'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $aP = 0$.

Exercice 155 ★★ [X 2022]

1. Décomposer $X^5 - 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$.
2. Soit p premier, décomposer $X^p - 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 156 ★ [X 2022] Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}$?

Exercice 157 ★★ [X 2018, X 2022]

1. Déterminer l'ensemble des couples (f, g) de polynômes trigonométriques à coefficients réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$.
2. Déterminer les polynômes trigonométriques h tels que $\cos h$ soit un polynôme trigonométrique.

Exercice 158 ★★ Entrelacement de racines [X 2022] Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que toute combinaison linéaire de A, B est scindée sur $\mathbb{R}$ ou nulle. Soit $x_1 < x_2$ deux racines de A. Montrer que $[x_1, x_2]$ contient au moins une racine de B.

Exercice 159 [X 2022] Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang $\leq r$. Montrer que $\dim V \leq nr$.

Exercice 160 ★★ [X 2022] X un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $(f_i(x_j))$ est non inversible pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ alors $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.
2. Soient $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(g_1, \ldots, g_n)$ telles que pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ on ait $\det(f_i(x_j)) = \det(g_i(x_j))$. Montrer que l'une des deux conditions est vérifiée :
   (i) $\operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$
   (ii) $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(g_1, \ldots, g_n)$ sont liées

Exercice 161 ★★ Discriminant d'un polynôme [X 2022] Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \prod (X - \lambda_i) \in \mathbb{C}[X]$. On pose $\Delta(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$.

1. Exprimer $\Delta(P)$ en fonction des a_k dans le cas $n = 2$.
2. Montrer que $\Delta(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} P'(\lambda_i)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \chi_A$. On pose $M = \left(\operatorname{Tr}(A^{i+j-2})\right)_{i,j \leq n}$. Montrer que $\det M = \Delta(P)$.
4. Montrer que $\Delta(P)$ est un polynôme à coefficients entiers en les a_k.

Exercice 162 ★★ [X 2022] Soit $n \geq 2$ et $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AC - BD = I_n$ et $AD + BC = O_n$.

1. Montrer que $CA - DB = I_n$ et $DA + CB = O_n$.
2. Montrer que $\det(AC) \geq 0$.

Exercice 163 [X 2022] Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $M_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$.

1. M est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que le sous-groupe de $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ engendré par M est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
3. Quel est l'indice de nilpotence de $M - I_{n+1}$?
4. Expliciter M^{-1}.

Exercice 164 [X 2022] Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ et T l'endomorphisme de E qui à $(u_n)_{n \geq 1}$ associe $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Déterminer les éléments propres de T.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, déterminer $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id})^k$ pour $k = 2$, puis pour tout $k \geq 2$.

Exercice 165 [X 2022] Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Quels sont les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) \in GL(E)$?
2. À quelle condition sur u est-il vrai que $\mathbb{K}[u] \subset GL(E) \cup \{0\}$?

Exercice 166 [X 2022] Théorème de Brauer Montrer que $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutation M_σ et $M_{\sigma'}$ sont conjuguées.

Exercice 167 [X 2022] Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose u diagonalisable. À quelle condition a-t-on $C(u) = \mathbb{K}[u]$?
2. Dans le cas général, montrer que si $\mathbb{K}[u]$ est de dimension n alors $C(u) = \mathbb{K}[u]$.
3. Réciproque ?

Exercice 168 [X 2022] Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, et $p, q \in \mathcal{L}(E)$. On pose $c = pq - qp$ et on suppose que c commute avec p et q.

1. Montrer que c est nilpotente.
2. Montrer que p, q, c sont cotrigonalisables.
3. La conclusion de la première question subsiste-t-elle si E est de dimension infinie ?

Exercice 169 [X 2022] Soit V de dimension $2n$, σ une symétrie de V. On suppose qu'il existe (a, b) et $(a', b,)$ tels que $ab = ba$, $a'b' = b'a'$ et $b\sigma = \sigma a$ et $b'\sigma = \sigma a'$.

On suppose que a admet $2n-1$ valeurs propres distinctes, et que a' admet $2n$ valeurs propres distinctes. On suppose que $\mathrm{Ker}(a-b)$ est un espace propre de a de dimension 2 sur lequel σ induit l'identité.

1. Calculer la trace de σ.
2. On suppose qu'aucun vecteur propre de a' n'appartient à $\mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{Id})$. Calculer la dimension de $\mathrm{Ker}(a' - b')$.

Exercice 170 [X 2022] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie. On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ telles que $u \circ f - f \circ u = u^m$, où $m \geq 2$.

Exercice 171 [X 2022] Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On considère l'endomorphisme φ_A qui à $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par $X^n - 1$. Est-ce que φ_A est diagonalisable ?

Exercice 172 ★ [X 2022] Soit $n \geq 3$. caractériser les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ pour lesquels il existe une base dans laquelle u est représenté par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $M \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{K})$.

Exercice 173 [X 2022] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

- $\forall m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$
- B est nilpotente et $BA = O_n$.

Exercice 174 [X 2022] Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que $\sum_{i=1}^k s_{i,i} \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

Exercice 175 [X 2022] Simplicité de $SO(E)$ Soit E un espace euclidien de dimension 3, et H un sous-groupe de $SO(E)$. On suppose que $\forall g \in SO(E), \forall h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.

1. On suppose que H contient une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Montrer que $H = SO(E)$.
2. Montrer que si H contient une rotation r d'angle obtus alors $H = SO(E)$.
   Indication : Considérer $x \neq 0$ tel que $\langle r(x), x \rangle = 0$, s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\, x$ et $u = srsr^{-1}$.
3. Montrer que $SO(E)$ est simple.

Exercice 176 [X 2022] Soit $M \in SL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|MX\|_2 = \|X\|_2 = 1$.
2. Montrer qu'il existe $O, O' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que OMO' soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

2) Analyse

Exercice 177 [X 2022] Soit $\rho > 1$ et $A_\rho = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{\rho^n},\ (\varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$. Montrer que A_ρ est un compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 178 [X 2022] Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et E un espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathcal{A}_r = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{rang}\, u = r\}$.

1. L'ensemble $\mathcal{A}_r$ est-il ouvert ? fermé ?
2. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathcal{A}_r$.

Exercice 179 [X 2022] Pour $H, K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $f_{H,K} : Z \in \mathbb{C}^n \mapsto HZ + K\overline{Z}$.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   - $\forall Z,\ f_{H,K} \circ F_{H,K}(Z) = -Z$
   - $H^2 + K\overline{K} = -I_n$ et $HK + K\overline{H} = 0$
2. Montrer qu'il existe un voisinage de (iI_n, O_n) tel que pour tout couple (H, K) la condition précédente soit équivalente à l'existence d'une unique matrice B telle que

$$f_{H,K} = f_{B,K} \circ f_{iI_n, O_n} \circ f_{B,K}^{-1}.$$

Exercice 180 [X 2022] Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f = 0 \right\}$. Pour $f \in E$, on pose $A(f) \in E$ définie par

$$A(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall f \in E,\ \|A(f)\|_\infty \leq C\,\|f\|_\infty$.
2. Déterminer la valeur optimale d'une telle constante C.

Exercice 181 ★ ★ [X 2022] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On dit qu'un endomorphisme T de E est positif si pour tout $f \in E$, $f \geq 0$ implique $T(f) \geq 0$. On pose, pour $i \in \mathbb{N}$, $e_i \colon x \mapsto x^i$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\,\|f\|_\infty}{\delta^2}(x-y)^2.$$
2. Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite d'endomorphismes positifs de E. On suppose que pour $i \in \{0,1,2\}$, la suite $(T_n(e_i))_{n\in\mathbb{N}}$ convergence uniformément vers e_i. Montrer que pour tout $f \in E$, la suite $(T_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 182 ★ ★ [X 2022] Soit $f \colon [0,1]^d \to [0,1]^d$ telle que $\|f(x) - f(y)\|_\infty < \|x-y\|_\infty$ pour x, y distincts.

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Soit $x_0 = (0,\dots,0)$, montrer que la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge.

Exercice 183 [X 2022] On munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme infinie. On note B sa boule unité fermée. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1,\dots,x_N) \in [0,1]^N$. On pose $\Phi \colon f \cap E \mapsto \big(f(x_k)\big)_{1\leq k\leq N}$.
Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1,\dots,f_p \in B \cap E$ telles que pour tout $g \in B \cap E$, $\min\limits_{i\in[\![1,p]\!]} \|\Phi(g) - \Phi(f_i)\|_\infty \leq \delta$.
2. On suppose que tout élément de E de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose de plus qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall f \in E,\ \|f'\|_\infty \leq C\,\|f\|_\infty$. Montrer que E est de dimension finie.

Exercice 184 ★ ★ [X 2022] Montrer que la distance de $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ à $\mathbb{Z}$ tend vers 0, lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 185 ★ ★ [X 2022] On considère la suite de Fibonacci, de premiers termes $F_0 = F_1 = 1$.

1. On pose $r = \frac{1}{9899} = 0,000101020305081321 34\dots$. Démontrer une relation entre ce développement décimal et la suite (F_n).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une configuration est une partition de $\{0,1\} \times [\![0,2n]\!]$ en sous-ensembles de l'une des formes suivantes : $\{\varepsilon\} \times \{i, i+1\}$ ou $\{0,1\} \times \{i\}$. Calculer, en fonction des termes de (F_n), la proportion q_n parmi les configurations, de celles qui contiennent $\{0,1\} \times \{n\}$. Montrer que $(q_n)_{n\geq 1}$ converge, et préciser sa limite.
3. La suite des classes de (F_n) modulo 100 est-elle périodique ?

Exercice 186 [X 2022] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $i(n)$ et $p(n)$ le nombre de diviseurs positifs impairs et pairs de n. Déterminer la limite, un équivalent, puis un développement asymptotique de la suite $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(i(k) - p(k)\big)$

Exercice 187 [X 2022] Si $A \subset \mathbb{N}$, on note $d(A) = \inf_{n>0} \frac{\left|A\cap[\![1,n]\!]\right|}{n}$.

1. Soit A contenant 0 et telle que $d(A) \geq \frac{1}{2}$. Montrer que tout élément de $\mathbb{N}$ s'écrit comme somme de deux éléments de A.
2. Soient A, B contenant 0. Montrer que $1 - d(A+B) \leq (1 - d(A))(1 - d(B))$.
3. Si $0 \in A$ et $d(A) > 0$, montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{N} = A + A + \cdots + A$ (r fois).

Exercice 188 [X 2022] Soit $A \subset \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si la famille $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in A}$ est sommable, alors A est de densité nulle, c'est-à-dire $\frac{1}{n}\big|A \cap [\![1,n]\!]\big| \to 0$.
2. Montrer que si les éléments de A sont deux à deux premiers entre eux, alors A est de densité nulle.

Exercice 189 ★ ★ [X 2022] Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ telle qu'il existe $d > 0$ tel que $F(n) = \big|A \cap [\![1,n]\!]\big| \sim nd$. On pose $Q = \left\{\frac{a}{b},\ a, b \in A\right\}$.

1. Montrer que Q est dense dans $\mathbb{R}_+$.
2. On suppose que $d = 1$. Montrer que $Q = \mathbb{Q}_+^*$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A \subset \mathbb{N}^*$ telle que $Q \neq \mathbb{Q}_+^*$ et $F(n) \sim nd$, avec $d \geq 1 - \varepsilon$.

Exercice 190 [X 2022] Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ et f, g définies pour $n \geq 2$ par

$$f(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{k\in A} \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{1}_{k\in A}}{k}.$$

Pour $\ell \geq 0$, comparer les assertions $f(n) \to \ell$ et $g(n) \to \ell$.

Exercice 191 ★ ★ [X 2022] Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles, vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \int_0^1 \max(x, v_n)\,\mathrm{d}x$ et $v_{n+1} = \int_0^1 \max(x, u_n)\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence des deux suites.

Exercice 192 ★ ★ [X 2022] Soit $n \geq 2$. On note $P(k,n) = \prod_{i=0}^k \left(1 - \frac{i}{n}\right)$, pour $0 \leq k < n$.

1. Montrer qu'il existe un plus petit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $P(k,n) \leq \frac{1}{2}$. On le note k_n.

2. Montrer que k_n tend vers l'infini.
3. Montrer que $k_n = o_{+\infty}(n)$

Exercice 193 [X 2022] Pour $\alpha \geq 0$ on dit que $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ est α-Höldérienne si elle vérifie $|f(s) - f(t)| \leq C|s-t|^\alpha$.

1. Que dire de f dans les cas $\alpha = 0$ et $\alpha > 1$?
2. Soient $0 \leq \alpha \leq \beta$. Montrer que si f vérifie (H_β), elle vérifie (H_α).
3. Soient $\alpha, \beta > 0$, f vérifiant H_α et g vérifiant H_β. Montrer que la suite suivante converge. $\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right)\left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)$.

Exercice 194 ★ [X 2022] Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ de même degré $d \geq 1$, av $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$. On suppose que $\frac{a_{d-1}}{a_d} \neq \frac{b_{d-1}}{b_d}$. Soit (u_n) une suite strictement positive vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{P(n)}{Q(n)}$ pour n assez grand. Montrer qu'il existe trois constantes a, b, c telles que $u_n \sim a n^b c^n$ et $a > 0$.

Exercice 195 ★ [X 2022]

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un couple $(x_n, y_n) \in \,]0,1[^2$ tel que
$$n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n+x_n} \quad \text{et} \quad n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{n+1}}{1+n+y_n}.$$
2. Montrer qu'il n'existe pas de triplet $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que $a + be + ce^2 = 0$.

Exercice 196 ★ ★ [X 2022]

1. Construire une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{Q}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction croissante de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 197 ★ ★ [X 2022] Soit $f\colon x \mapsto e^{-x^2}$. En combien de points de $\mathbb{R}$ la dérivée n-ième de f s'annule-t-elle ?

Exercice 198 [X 2022] Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $c \in [0,1]$ tel que $f'(c) + \lambda f(c) = 0$.

Exercice 199 [X 2022] Soit E l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

1. Déterminer les éléments de E dérivables en 0.
2. Montrer que si un élément de E est dérivable en un point de $\mathbb{R}_+^*$, il est dérivable sur tout $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer les éléments de E dérivable en un point.

Exercice 200 [X 2022] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $g\colon x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 201 [X 2022] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On note $E_f = \mathrm{Vect}(x \mapsto f(x+\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre

- E_f est de dimension finie.
- Il existe n et $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que f soit n fois dérivable et $f^{(n)} = a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f$.

Exercice 202 ★ Théorème des cordes [X 2022] Soit $a < b$ et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) = f(b)$.

1. Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il existe $a', b' \in [a,b]$ tels que $f(a') = f(b')$ et $b - a = n(b' - a')$.
2. Redémontrer le théorème de Rolle à l'aide de cette propriété.

Exercice 203 [X 2022] Soient $\xi_n > \xi_{n-1} > \ldots > \xi_1 > 0$ et $a, \ldots, a_n$ des réels non nuls. On pose $f\colon t \mapsto \sum_{k=1}^n a_k \sin(\xi_k t)$. On suppose que la suite $\left(\left\|f^{(N)}\right\|_\infty\right)$ est bornée, que $f'(0) = 1$ et que $\|f\|_\infty \leq 1$. L'objectif est de montrer que $f = \sin$.

1. Montrer que $\xi_n \leq 1$.
2. On pose $g = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{[-\xi_k, \xi_k]}$. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 g(x) e^{itx}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 204 [X 2022] Existe-t-il $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue telle que :

- f s'annule un nombre fini de fois sur chaque droite verticale,
- f s'annule un nombre infini de fois sur toutes les autres droites ?

Exercice 205 [X 2022]

1. Montrer qu'il existe une unique fonction dérivable $v\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $v(0) = 0$ et $\forall t \geq 0,\ v'(t) = \int_0^1 \big(v(tx) + 1 - v(t)\big)\,\mathrm{d}x$.
2. On suppose qu'il existe une fonction dérivable $v\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que $v(0) = 0$ et $\forall t \geq 0,\ v'(t) = \int_0^1 \max\big(0, v(tx) + 1 - v(t)\big)\,\mathrm{d}x$. On pose $a = \max\{t \geq 0 \mid v(t) \leq 1\}$. Justifier l'existence de a. Montrer que pour tout $t \geq a$, il existe un unique réel positif $f(t)$ tel que $v(f(t)) + 1 = v(t)$.
3. On admet que f est dérivable sur $]a,+\infty[$ et que pour tout $t > a$, $f'(t)v'(f(t)) = v'(t)$. Montrer que v est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 206 [X 2022] Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. On suppose qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x, y \geq 0,\ \left|\int_x^y f\right| \leq m$ et $\forall x > 0,\ |f(x)| \leq 2x^{-2}\int_0^x (x-y)|f(y)|\,\mathrm{d}y$ (hapothèse (H)).

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que $g\colon x \mapsto \sup_{y \geq x} |f(y)|$ a une limite finie $K \geq 0$ en $+\infty$.
3. Soit $\ell > 0$. Montrer qu'il existe $\ell' \in \left]0,\ell\right[$ tel que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ de longueur ℓ, il existe un intervalle I', de longueur ℓ',non disjoint de I, tel que $\sup_{I'} |f(x)| \leq \frac{2m}{\ell}$.
4. On suppose $K > 0$. En considérant, pour un $k > 0$ bien choisi, la suite d'intervalles $\left(\left[\frac{pk}{4m}, \frac{(p+1)k}{4m}\right]\right)_{p\in\mathbb{N}}$, déduire une contradiction de l'hypothèse (H).
5. Conclure que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 207 [X 2022] Soit $a > 0$ et E l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $f^2 + a(f')^2$ soit intégrale sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}$, il existe $f \in E$ tel que $f(0) = v$.
3. Soit $v \in \mathbb{R}$. Déterminer
$$\inf\left\{\int_0^{+\infty}\left(f^2 + a(f')^2\right)\ ;\ f \in E \text{ et } f(0) = v\right\}.$$
4. Pour $A, B \in \mathcal{S}_n$, on pose $A \leq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^+$. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+$ telle que $A \leq B$. En utilisant les questions précédentes, montrer que $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$.

Exercice 208 [X 2022] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$ et $r > 0$. Justifier la convergence de l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\left|P(re^{it})\right|\right)\mathrm{d}t$, puis la calculer en fonction de $P(0)$ et des racines de P de module strictement inférieur à r.

Exercice 209 [X 2022] Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0, f développable en série entière sur $D(0,R)$, avec $R > 0$, $p \geq 1$. On suppose que $f(z) = O_0(z^p)$. Montrer que pour $r > 0$ assez petit, on peut trouver $2p$ nombres complexes z vérifiant $|z| = r$ et $f(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 210 [X 2022] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, et $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| 2^n = M < +\infty$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$, $\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq M$.
2. Soit $n \geq 1$. on suppose que $\forall k \in [\![-n,n]\!],\ f(k/n) = 0$. Montrer qu'il existe une constante absolue C telle que $\forall x \in [-1,1],\ |f(x)| \leq CM\frac{\sqrt{n}}{e^n}$.
3. s Soit $n \geq 1$. on suppose que $\forall k \in [\![-n,n]\!],\ f(k/n) = 0$. Montrer qu'il existe une constante absolue C telle que $\forall x \in [-1,1],\ |f(x)| \leq CM\left(\frac{2}{e}\right)^n$.

Exercice 211 [X 2022] Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \left]-1,1\right[$ distincts non nuls et $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite bornée (c_k) d'entiers relatifs telle que $f\colon t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ vérifie $\forall i,\ f(\alpha_i) = \beta_i$.

Exercice 212 ★★ [X 2022] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$.

1. Déterminer les réels en lesquels f est définie.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on écrit $f(x)^k = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} x^n$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe k tel que $a_{n,k} \neq 0$.
3. Montrer que pour tous $k, n \geq 1$, $a_{n,k} \leq (1 + \ln_2 n)^k$.
4. Soient $p, m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,p]\!]$. On pose $N = (2^p - 1)2^m$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $N - 2^m + 1 \leq n \leq N + 2^m - 1$. Montrer que $a_{n,k} = 0$, sauf si $k = p$ et $n = N$.

Exercice 213 [X 2022] Soit (a_n) complexe, $C > 0$ et R le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$. Montrer l'équivalence entre

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ |a_n| \leq (C + \varepsilon)^n$.
- $R = +\infty$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists R_0 > 0, \forall |z| \geq R_0,\ |f(z)| \leq \exp\left((C+\varepsilon)|z|\right)$.

Exercice 214 [X 2022] Soit (a_n) réelle telle que $\sum a_n x^n$ soit de rayon 1. Pour $x \in \left]-1,1\right[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
2. Donner un exemple de suite (a_n) telle que $f(x)$ admette une limite finie quand $x \to 1^-$ et que $\sum a_n$ diverge.
3. On suppose les a_n positifs et que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.
4. On suppose que $a_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

Exercice 215 [X 2022] On pose $g\colon x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.Pour $y > 0$, on pose $g_y\colon x \mapsto \frac{1}{y} g(x/y)$. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, nulle en dehors d'un segment.

1. Montrer que pour tout $x, y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g_y(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $f(x)$ en 0^+.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \left]0,\delta\right[, \qquad \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t) g_y(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

Exercice 216 [X 2022] Soit $n \geq 1$ et $J = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$. Soit $S \in \mathcal{S}_{2n}$ définie positive.

1. Montrer que toute solution du système différentiel $X' = JSX$ est bornée.

2. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que JS soit semblable à $\mathrm{Diag}(i\lambda_1, -i\lambda_1, \dots, i\lambda_n, -i\lambda_n)$.

Exercice 217 [X 2022] Soit $(E)\colon x'(t) = \cos(x(t)) + \cos(t)$. On admet que pour tout $a \in [0, \pi]$, il existe une unique solution φ_a de (E) telle que $\varphi_a(0) = a$. On admet également que s'il existe $a, b \in [0, \pi]$, $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi_a(t_0) = \varphi_b(t_0)$, alors $a = b$. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) à valeurs dans $[0, \pi]$ et 2π-périodique.

Exercice 218 [X 2022] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note (E_n) l'équation différentielle $-y'' + x^2 y = (2n+1)y$, dont on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$. On considère également, sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les opérateurs $A\colon f \mapsto (x \mapsto f'(x) + xf(x))$ et $B\colon f \mapsto (x \mapsto -f'(x) + xf(x))$.

1. Qeu dire de l'espace des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$?
2. Résoudre (E_0) à l'aide des opérateurs A, B.
3. Déterminer les solutions de (E_0) qui sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.
4. On pose $f_0\colon x \mapsto e^{-x^2/2}$. Montrer que pour tout n, la fonction $f_n = B^n(f_0)$ est solution de (E_n).
   Indication : Commencer par donner une expression simplifiée de $AB^n - B^n A$.
5. Montrer que les solutions de carré intégrable de (E_n) sont les éléments de $\mathrm{Vect}\, f_n$.
6. Montrer que (f_n) est orthogonale pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} fg$.

3) Probabilités

Exercice 219 ★ ★ [X 2022]

1. Soit A, B, C un triangle du plan. On construit D tel que ABD soit isocèle en D avec un angle orienté en D égal à $\frac{2\pi}{3}$ et de même E, F relativement aux côtés BC et CA. Montrer que le triangle DEF est équilatéral.
2. Soit $n \geq 3$ et $k \in [\![1, n-2]\!]$. on note T_k l'application qui à un polgone $A_1 A_2 \dots A_n$ associe le polygone $B_1 \dots B_n$ tel que pour tout i, $A_i A_{i+1} B_i$ soit isocèle en B_i avec un angle de $\frac{2k\pi}{n}$. Montrer que, quel que soit le polygone initial, lorsqu'on lui applique tous les T_k, pour $1 \leq k \leq n-2$, on obtient un polygone régulier et que celui-ci ne dépend pas de l'ordre dans lequel on compose les T_k.

Exercice 220 ★ ★ [X 2022] Soit $n \geq 2$. Dénombrer les vrais triangles rectangles de $\mathbb{R}^n$ dont les trois sommets sont dans $\{0, 1\}^n$.

Exercice 221 ★ ★ [X 2022] Soit $n \geq 3$. Quel est le cardinal du groupe des isométries affines du plan euclidien stabilisant un polygone régulier à n sommets ?

Exercice 222 ★ ★ [X 2022] Une urne contient des boules bleues rouges, noires. À chaque étape on retire deux boules de couleurs différentes, et on ajoute une boule de la troisième couleur.

1. Montrer que si à la fin du procédé il ne reste qu'une seule boule, sa couleur est déterminée par la configuration initiale.
2. À quelle condition est-il possible de finir avec une seule boule ?

Exercice 223 [X 2022] Pour $\lambda > 0$, on note X_λ une variable suivant une loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Étudier le comportement de $P(X_\lambda > E(X_\lambda))$, quand $\lambda \to +\infty$.

Exercice 224 [X 2022] Soient $m, n \geq 2$, $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. On note A_n l'évènement «m divise $X_1 + \dots + X_n$».

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$\sum_{\substack{k=0 \\ m|k}}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left(e^{\frac{2i\pi j}{m}} p + q\right)^n.$$
2. Montrer que $P(A_n)$ converge vers une limite ℓ à préciser.
3. Montrer que $\left|P(A_n) - \ell\right| \leq e^{-\frac{8pq}{m^2} n}$.

Exercice 225 ★ ★ [X 2022]

1. Soient $n \geq 2$, $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ avec τ une transposition. Comparer le nombre de cycles à supports disjoints de σ et de $\sigma \circ \tau$.
2. On munit $\mathcal{S}_n$ d'une distribution uniforme de probabilité. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, avec $i \neq j$. Calculer la probabilité que i et j soient dans un même cycle.

Exercice 226 ★ [X 2022] Soit σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$.

1. Soit L_n la longueur du cycle de σ_n contenant 1. Déterminer l'espérance de L_n.
2. Quelle est la probabilité que 1 et 2 soient dans un même cycle de σ_n ?
3. On note c_n le nombre de cycles de σ_n. Montrer que $E(c_n) \sim \ln n$.

Exercice 227 [X 2022] Soient G un groupe fini de neutre e, $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ indépendantes de même loi uniforme sur $G \setminus \{e\}$. Déterminer la loi de $Y_n = X_n \dots X_1$.

Exercice 228 [X 2022] Pour X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note
$$d(X, Y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left|P(X = n) - P(Y = n)\right|.$$
Soit $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$ et P de loi $\mathcal{P}(1)$. Montrer que $d(S_n, P) \to 0$.

Exercice 229 [X 2022] Soit X_n suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note R_n le reste de la division euclidienne de n par X_n et $Y_n = \frac{R_n}{X_n}$. Montrer que $P(Y_n \geq 1/2) \to 2\ln 2 - 1$.

Exercice 230 ★ ★ [X 2022] Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On note p_d la probabilité que le polynôme $X^d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i X^i + 1$ possède une racine rationnelle. Montrer que $p_d \sim \sqrt{\frac{2}{\pi d}}$.

Exercice 231 [X 2022]

1. Soit $n \geq 3$ un entier. Montrer que l'équation $x = n \ln x$ admet deux solutions > 0, que l'on note $a_n < b_n$.
2. Trouver une suite strictement croissante $(p_k)_{k\geq 2}$ d'entiers telle que $p_2 \geq 2$, que $\sum 2^{-(p_{k+1}-p_k)}$ diverge et qu'il existe $C > 2$ tel que pour $k \geq 2$, $\sum_{j=p_k}^{p_{k+1}} \frac{1}{\ln j} \geq C$.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher. Que dire de la convergence de $\sum \frac{X_n}{\ln n}$.

Exercice 232 ★ ★ [X 2022] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et X, Y, Z, σ telle que $X, Y, Z \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ et $\sigma \hookrightarrow \mathcal{U}(S_n)$. On note L_X le cardinal de l'orbite de X par σ.
Montrer que $P(L_X = L_Y = L_Z) \geq P(L_X = L_Y)^2$.

Exercice 233 [X 2022] Soit $p \in]0,1[$. $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires indépendantes de même loi de même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $N_n : \omega \mapsto \text{Card}\{k \mid X_k(\omega) = M_n(\omega)\}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $a \geq 1$, exprimer $P(M_n = k, N_n = a)$.
2. On suppose $1 - p = \frac{1}{t}$ pour un entier $t \geq 4$. Limite de $P(N_{t^m} = 1, M_{t^m} = m)$, quand $m \to +\infty$.

Exercice 234 [X 2022] Soient $n, b \geq 2$, $X_1, \dots, X_n$ indépendantes de même loi uniforme sur $[\![0, b-1]\!]$.

1. Déterminer $P(X_{i+1} < X_i)$.
2. Déterminer $P(X_{i+j} < X_{i+j-1} < \ldots < X_i)$

Exercice 235 [X 2022] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de même loi centrée et bornée, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $E(S_n^4) \leq Cn^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $P\left(\bigcup_{n\geq N} \left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right)\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.
3. Donner une interprétation à l'évènement $\bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} \left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \frac{1}{k}\right)$, et calculer sa probabilité.

Exercice 236 [X 2022] Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements, $x_1, \dots, x_n \in]0,1[$ et $D_1, \dots, D_n$ des parties de $[\![1, n]\!]$. On suppose que pour tout i, $\mathbb{1}_{A_i}$ est indépendante de la variable conjointe $(\mathbb{1}_{A_j})_{j\in[\![1,n]\!]\setminus D_i}$. On suppose aussi que $P(A_i) \leq x_i \prod_{D_i\setminus\{i\}}(1 - x_j)$, pour tout i.
Soit $E \subset [\![1, n]\!]$ et $i \in [\![1, n]\!] \setminus E$. On pose $B_E = \bigcap_E \overline{A_j}$, que l'on suppose non négligeable. Montrer que $P(A_i \mid B_E) \leq x_i$.

III) Centrale

Exercice 237 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier la limite de la suite $\left(\left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

Exercice 238 [Centrale 2022] $Y_{n+1} = \sum_{i=0}^{Y} {}_n X_{i,n+1}$; $P(X > 1) > 0$ et d'espérance finie. G la fonction génératrice de X ; G_n celle de Y_n.

1. Montrer que G et G' sont strictement croissantes sur $[0, 1]$.
2. Montrer que $G_{n+1} = G_n \circ G$. En déduire une expression de $E(Y_n)$.
3. On pose $Z = \inf\{n \mid Y_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Montrer que $P(Z < +\infty)$ est le plus petit point fixe d G.
4. Montrer que $P(Z < +\infty) = 1$ si et seulement si $m \leq 1$.

Exercice 239 [Centrale 2022] Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre

- f est développable en série entière sur un voisinage de 0.
- il existe $\alpha > 0$, $M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $|f^{(n)}(x)| \leq Ma^n n!$.

Exercice 240 [Centrale 2022] Soient $, b, c \in \mathbb{C}$ non entiers. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(a+k)(b+k)}{c+k}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum u_n z^n$.
2. Donner une CNS pour que la série entière converge absolument sur le cercle de centre 0 et de rayon R.

IV) Mines

Exercice 241 [Mines 2022] Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \left(\frac{\sin n}{\alpha} + \alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

1. Nature de la série $\sum a_n$?
2. Racon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

Exercice 242 Montrer que les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, $2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ sont les applications de la forme $f(x, y) = g\left(\frac{x}{1+y^2}\right)$, où g est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 243 [Mines 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier la limite de la suite $\left(\left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

Exercice 244 [Mines 2022] Soit $m \geq 1$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0,1[$. On pose $M = \inf\{n \mid S_n \geq m\}$.

1. Montrer que M est une variable aléatoire et évaluer $P(M = +\infty)$.
2. Montrer que $P(M \geq n) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}$.

3. Montrer que M est d'espérance finie et la calculer.
4. Calculer la variance de M.

Exercice 245 [Mines 2022] Soit $n \geq 2$. On pose $J = \left(J_{i,j}\right)$, où $\forall i,\ J_{i+1,i} = J_{1,n} = 1$, et les autres coefficients sont nuls.

1. Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et les vecteurs propres de J.
2. E Soient $X_0, \ldots, X_{n-1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On considère la matrice $M = \left(X_{i-j[n]}\right)_{i,j \leq n}$.
3. Exprimer M en fonction de J.
4. Pour $n = 2$, calculer $P(M \in GL_n(\mathbb{R}))$.
5. Déterminer le spectre complexe de M.
6. On suppose n premier, et on admet que le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Calculer $P(M \in GL_n(\mathbb{R}))$.