I) Géométrie

Exercice 1 [X MP 2023 # 381] Pour $n \geq 2$, on note P_n le perimêtre d'un polygone regulier a 2^n cotes inscrit dans le cercle unite.

- Calculer P_n et étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n\geq 2}$.
- Etablir une relation de recurrence entre P_n et P_{n+1}.
- Estimer l'erreur $2\pi - P_n$.
- Proposer une méthode d'approximation de π par exces.

Exercice 2 [X MP 2023 # 382] On se donne un triangle direct ABC du plan complexe. On note respectivement a, b, c les mesures principales des angles orientes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On note P l'unique point tel que $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB})$; Q l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AC})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ})$; R l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ et $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BA})$. L'objectif est de montrer que le triangle PQR est equilateral.

- On note f, g, h les rotations de centres respectifs A, B, C et d'angles de mesures respectives $\frac{2a}{3}$, $\frac{2b}{3}$ et $\frac{2c}{3}$. Montrer que P est l'unique point fixe de $g \circ h$.
- Montrer que $(f^3 \circ g^3 \circ h^3)(z) = z$ pour tout nombre complexe z.
- On note $f : z \mapsto a_1 z + b_1$, $g : z \mapsto a_2 z + b_2$ et $h : z \mapsto a_3 z + b_3$. Exprimer P, Q, R en fonction des a_i et des b_i.
- Conclure.

II) Probabilités

Exercice 3 [X MP 2023 # 383] Déterminer le nombre moyen de 2-cycles, de 3-cycles, de p-cycles, d'une permutation de $[\![1, n]\!]$.

Exercice 4 [X MP 2023 # 384]

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle partition de n toute liste décroissante $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ d'entiers naturels non nuls de somme n. On note $P(n)$ le nombre de telles listes.
  Montrer que $P(n) \leq 2^{n-1}$.
- On fixe $n \geq 1$ et on considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur l'ensemble des partitions de n. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$. On pose $N_k = |\{i \in [\![1, n]\!] : X_i = k\}|$.
  Exprimer $\mathbf{P}(N_k \geq j)$ comme un quotient $\frac{P(a)}{P(b)}$ pour des entiers a et b à préciser.
- Calculer $\sum_{i=1}^{n} iN_i$.

Démonstration.

- Revient à $(\ln u)^2 u < (1-u)^2$, pour $u \in]0,1[$. En posant $u = 1 - h$ et en développant en série, par CSSA, c'est bon.
- Par récurrence, bof.
- L'évènement $(N_k \geq j)$ correspond à «il y a au moins j occurrences de k», cela correspond à $\frac{P(n-kj)}{P(n)}$.
- C'est n. □

Exercice 5 [X MP 2023 # 385] On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

- Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$.
- On lance une piece non truquée. Déterminer la loi de la variable aléatoire X qui donne l'instant de premiere apparition du motif Face-Face.
- Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
- Donner un équivalent de $\mathbf{P}(X = n)$.

Exercice 6 [X MP 2023 # 386] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{S}_n$ de la loi uniforme, et on note N la variable aléatoire associant a tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ le nombre de ses orbites.

- Calculer $\mathbf{P}(N = 1)$ et $\mathbf{P}(N = n)$.
- Donner une formule simple pour la fonction génératrice de N.
- Donner un équivalent de $\mathbf{E}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.
- Donner un équivalent de $\mathbf{V}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 [X MP 2023 # 387] Soient $n \geq 2$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $f_{(X_1,\ldots,X_n)}$ la variable aléatoire a valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ telle que, pour tout i, $f_{(X_1,\ldots,X_n)}(e_i) = e_{X_i}$.

- Déterminer $\mathbf{E}\left(\mathrm{rg}\left(f_{(X_1,\ldots,X_n)}\right)\right)$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, soit μ_z la multiplicité de z comme valeur propre de $f_{(X_1,\ldots,X_n)}$. Calculer $\mathbf{E}(\mu_z)$.

Exercice 8 [X MP 2023 # 388] Soient $b, n \in \mathbb{N}^*$. On considère $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![0, b-1]\!]$. On note S l'ensemble des descentes de la suite B c'est-a-dire $S = \{i \in [\![1, n]\!] \mid B_i > B_{i+1}\}$.

- Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, calculer $\mathbf{P}(B_i > B_{i+1})$.
- Soit $j \in [\![1, n-j-1]\!]$. Calculer $\mathbf{P}(B_1 > B_2 > \cdots > B_{j+1})$.

- Pour $I \subset [\![1, n]\!]$, on pose $\alpha(I)$ (resp. $\beta(I)$) le nombre de suites a n éléments à valeurs dans $[\![0, b-1]\!]$ qui vérifient $S \subset I$ (resp. $S = I$). Exprimer α en fonction de β, puis β en fonction de α.

Exercice 9 [X MP 2023 # 389] Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ et $k \in \{1, \dots, 2n\}$, on note $s(\sigma, k)$ le segment de $\mathbb{C}$ qui joint les points $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ et $e^{\frac{i\sigma(k)\pi}{n}}$. On note $b(\sigma)$ le nombre de segments qui ne croisent aucun autre segment (ou on dit que deux segments se croisent s'ils ont un point d'intersection qui n'est pas une extrémité).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_{2n}$. Déterminer $\mathbf{E}(b(\sigma_n))$ et en donner un équivalent.

Exercice 10 [X 2023 # 390] Soient $p \in [0, 1/2]$, $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p$. On cherche p tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i = 0\right) \geq \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i = b\right)$.

1. Montrer que $p \leq \frac{1}{3}$, puis que $p < \frac{1}{3}$ et enfin que $p \leq \frac{1}{4}$.
2. Si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_X : \theta \mapsto \mathbf{E}\left(e^{iX\theta}\right)$. Exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de Φ_X.
3. En déduire que $p \leq \frac{1}{4}$ est une condition suffisante.

Démonstration. 1. On regarde les probabilités, jusqu'à $n = 3$.
2. $\Phi_X(\theta) = \sum P(X = k)e^{ikt}$ et formule de Cauchy.
3. □

Exercice 11 [X MP 2023 # 391] Soient n et d des entiers tels que $1 \leq d < n$, et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[\![0, d]\!]$. On note S_n la classe de $X_1 + \dots + X_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- La variable aléatoire S_n est-elle uniformément distribuée sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- Calculer la loi de S_n.

Démonstration. • Non, cf $d = 1$, c'est une loi binomiale.
- Fonction génératrice. □

Exercice 12 [X MP 2023 # 392] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1, d]\!]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- Soient Y une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{Z}$, $r \in [\![0, d-1]\!]$, $\omega = e^{2i\pi/n}$.
  Montrer que $\mathbf{P}(Y \equiv r\,[d]) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\omega^{kr}} \mathbf{E}\left(\omega^{kY}\right)$.
- Soit $[\![0, d-1]\!]$. Donner une expression de $\mathbf{P}(S_n \equiv r\,[d])$.
- Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathbf{P}(S_n \equiv 0[d])$.

Exercice 13 [X MP 2023 # 393] Soit $n \geq 1$.

- On se donne deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^2$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Déterminer la probabilité $u_n(r)$ pour que X_n et Y_n soient deux points distincts et le coefficient directeur de la droite (X_nY_n) soit égal a r. Donner un équivalent de $u_n(r)$ lorsque $n \to +\infty$.
- On se donne quatre variables aléatoires indépendantes X_n, Y_n, A_n, B_n suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^2$. On note p_n la probabilité pour que $X_n \neq Y_n$, $A_n \neq B_n$ et les droites (X_nY_n) et (A_nB_n) soient parallèles. Montrer que $p_n = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Démonstration. • C'est la probabilité que $\frac{a_n - b_n}{c_n - d_n} = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire $p(c_n - d_n) = q(a_n - b_n)$.
  Il faut que $a_n - b_n$ soit un multiple non nul de p,
  $\sum_{k \neq 0} P(a_n - b_n = kp)P(c_n - d_n = kq) = \sum_{k \neq 0} \sum_{i,j=1}^n \frac{1_{i=kp+j}}{n^2} \sum_{u,v} \frac{1_{u=kq+v}}{n^2}$ On peut supposer $k > 0$, quitte à multiplier par 2. Pour $k = 1$ le produit vaut $\frac{(n-1-p)(n-1-q)}{n^4}$.
  On a donc $\sum_{k \geq 1} \frac{(n-1-kp)(n-1-kq)}{n^4}$, qu'on peut identifier à $\sum_{k \geq 1} \frac{(n-kp)(n-kq)}{n^4}$.
  C'est $\frac{1}{n^2}\sum_{k \geq 1}\left(1 - \frac{kp}{n}\right)\left(1 - \frac{kq}{n}\right)$, qui est une somme de Riemann, pour la fonction $f\colon x \mapsto (1 - px)(1 - qx)$, nulle dès que $\max(qx, px) \geq 1$.
  On trouve $\frac{\max(p,q) + |p-q|}{6\max(p,q)^2}$, peut-être. Mais le $\Theta\left(\frac{1}{\max(p,q)}\right)$ est clair.
  En particulier, c'est en $O\left(\frac{1}{n}\right)$
- On somme sur les r. On a $\sum_r \frac{1}{(nh(r))^2} = \sum_{k=h(r)} \frac{k}{n^2k^2}$, d'où le résultat. □

Exercice 14 [X MP 2023 # 394] • Soit $a \in [1, 2]$. On pose $f_a : x \mapsto |1 + x|^a - |2x|^a - ax$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) \leq 1$.
- Soit X une variable aléatoire réelle centrée et admettant un moment d'ordre 2. Montrer : $\forall c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}\left(|c + X|^a\right) \leq 2^a\mathbf{E}(|X|^a) + |c|^a$.
- Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires centrées admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^a\right) \leq 2^a \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(|X_i|^a)$.

Exercice 15 Urne de Polya [X MP 2023 # 395] Une urne contient a boules jaunes et b boules rouges. On effectue une succession de tirages d'une boule dans l'urne avec remise. À chaque tirage, on ajoute une boule de la couleur de celle tirée dans l'urne. On note X_n le nombre de boules jaunes dans l'urne apres n tirages et T_n l'évènement «tirer une boule jaune au n-ième tirage».

1. s Calculer $P(T_1 \mid T_2)$.
2. Déterminer la loi de X_n.
3. Calculer $P(T_n)$.

4. Pour $n_1, ..., n_p, m_1, ..., m_q$ tous distincts, calculer $P(T_{n_1} \cap \cdots \cap T_{n_p} \cap \overline{T_{m_1}} \cap \cdots \cap \overline{T_{m_q}})$.

Démonstration. 1.

2. $P(X_n = a) = \frac{b}{a+b}\frac{b+1}{a+b+1}\cdots\frac{b+n-1}{a+b+(n-1)}$
   $P(X_n = a+1) = n\frac{b}{a+b}\frac{b+1}{a+b+1}\cdots\frac{b+n-2}{a+b+(n-2)}\frac{a}{a+b+(n-1)}$.
   En général, $P(X_n = a+k) = \binom{n}{k}\frac{(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!}\frac{(b+n-k-1)}{(b-1)!}\frac{a+k-1!}{(a-1)!}$.
3. dur dur, $E(X_n)$
4.

□

Exercice 16 [X 2023 # 396] Soient $n \geq 1$ et A, B, C des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{0,1\}^n$.

1. Pour $n \geq 2$, calculer la probabilité p_n que ABC soit un triangle équilatéral.
2. Déterminer un équivalent de p_n.

Démonstration. Relier à un précédent.

1. On prend $A = \vec{0}$. Alors on veut B, C avec autant de termes 1, et autant de différences entre les deux.
   On considère les ensembles $B \subset [\![1,n]\!]$, $C[\![1,n]\!]$, et $B \oplus C$.
   Les parties $U = B \setminus C$, $V = C \setminus B$ et $W = B \cap C$ vérifient $u + w = v + w = u + v$, donc ils sont de même cardinaux, et disjoints.

□

Exercice 17 [X MP 2023 # 397] On munit l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $[1,n]$ de la probabilité uniforme. Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

- Calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$.
- Déterminer la loi de X_n.
- Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
- Calculer les espérance et variance de la variable aléatoire X_n.

Exercice 18 [X MP 2023 # 398] Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ une matrice aléatoire ou $(a+1) \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $(b+1) \sim \mathcal{P}(\beta)$, $(c+1) \sim \mathcal{P}(\gamma)$ et $(d+1) \sim \mathcal{P}(\delta)$.

- Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible.
- Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible et diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19 [X MP 2023 # 399] Soient X et Y deux variables aléatoires a valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbf{P}(X \geq Y) = 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\mathbf{P}(X = n) > 0$ et $\mathbf{P}(Y = i | X = n) = \dfrac{1}{n+1}$.

- Montrer que, si $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i, X - Y = j)$, puis que $X - Y \sim Y$.
- Montrer que $\mathbf{P}(Y = 0) > 0$.
- On suppose que $X - Y$ et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de Y, puis celle de X.

Exercice 20 [X MP 2023 # 400] Soit $n \geq 3$ un entier. Si $k \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{k}$ la reduction de k modulo n. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes a valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k suit la loi uniforme sur $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. Soit F l'application aléatoire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même telle que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $F(\overline{k}) = \overline{k} + X_k$. Calculer la probabilité que F soit bijective.

Exercice 21 [X MP 2023 # 401] On cherche à collectionner N jouets. À chaque achat, chaque jouet a une probabilité uniforme d'être obtenu. Pour $i \in [\![1,N]\!]$, on note T_i le temps d'attente pour obtenir i jouets différents.

- Calculer l'espérance de T_N.
- Calculer la variance de T_N.
- Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{T_N}{N \ln N} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 22 [X MP 2023 # 402] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles centrées.
On suppose que $\mathbf{E}(X_1^4) < +\infty$.

- Montrer que $\mathbf{E}\left((X_1 + \cdots + X_n)^4\right) = O(n^2)$.
- Pour $\varepsilon > 0$, quelle est la nature de la série de terme général $\mathbf{P}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} > \varepsilon\right)$?

Exercice 23 [X MP 2023 # 403] Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{P}(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $S_n = \sum_{k=1}^n X_k, T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

- Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geq x)dx = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.
- On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(T_n \geq x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$. Retrouver la formule de Stirling.