Exercices 2024

Table des matières

I) ENS MP 2024 XENS

1) Algèbre

Exercice 1 [ENS MP 2024 # 1] Soit E un ensemble fini non vide. Pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in E^3$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, on note $\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$. Soit $E^{3*} = \{(x, y, z) \in E^3 \ ; \ x, y, z \text{ sont distincts}\}$. Soit $S \subset E^{3*}$ tel que

- $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_3$, si $\varepsilon(\sigma) = -1$ alors $\sigma \cdot (S) = \{\sigma \cdot x \ ; \ x \in S\} = E^{3*} \setminus S$,
- $\forall a, b, c, d \in E$, si $(a, b, c) \in S$ et $(a, c, d) \in S$, alors $(a, b, d) \in S$ et $(b, c, d) \in S$.

Montrer qu'il existe $g\colon E \to \mathbb{R}$ injective telle que $\forall (a,b,c) \in E^3$, $g(a) < g(b) < g(c) \Rightarrow (a,b,c) \in S$.

Exercice 2 Théorème d'Ostrowski [ENS MP 2024 # 2] Soit N une application de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

- $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,
- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,
- pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
- il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N(n) > 1$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \left]0,1\right]$ tel que $N(x) = |x|^\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3 [ENS MP 2024 # 3] On etend de facon naturelle la valuation 2-adique v_2 à $\mathbb{Q}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k}$. Calculer $v_2(H_n)$.

Exercice 4 [ENS MP 2024 # 4] Congruences sur les coefficients binomiaux Soit $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, avec p premier supérieur ou egal à 5, m et p premiers entre eux.

- Montrer que $\dbinom{np}{m} \equiv 0\,[p]$.
- Montrer que $\dbinom{np}{mp} = \sum_{k=0}^{p} \dbinom{p(n-1)}{mp-k} \dbinom{p}{k}$.
- Montrer que $\dbinom{np}{mp} \equiv \dbinom{n}{m}\,[p^2]$.
- On veut montrer que $\dbinom{2p}{p} \equiv 2\,\left[p^3\right]$.
  - ▷ Montrer que $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1 [p]$.
  - ▷ Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k}\right)^2 \equiv 0[p]$.
  - ▷ Conclure

Exercice 5 Détermination de $\left(\frac{2}{p}\right)$ [ENS MP 2024 # 5] Soit p un nombre premier impair.

- Déterminer $\mathrm{Card}\{x^2,\ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*\}$.
- Démontrer l'équivalence : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ si et seulement si a est un carré non nul modulo p.
- On pose $a = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (2k)$. Montrer que
  - ▷ Si $p \equiv 1[4]$, alors $a \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! [p]$
  - ▷ Si $p \equiv -1[4]$, alors $a \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! [p]$
- CNS pour que 2 soit un carré modulo p.

Exercice 6 [ENS MP 2024 # 6] On considère l'équation $2^a + 3^b = 5^c$, où $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$.

- Résoudre l'équation dans le cas $a = b = c$.
- Traiter le cas b impair.
- Traiter le cas c impair.
- Traiter le cas général.

Exercice 7 [ENS MP 2024 # 7] Soit p un nombre premier impair.

- Quel est le cardinal du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
- Montrer que l'équation $x^2 = 1$ possède exactement deux solutions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- En déduire $\mathrm{Card}\{x^2,\ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.
- Soit $\chi\colon \mathbb{Z} \to \{-1,0,1\}$ telle que : $\chi(n) = 1$ si $n \wedge p = 1$ et si n est un carré modulo p ; $\chi(n) = -1$ si $n \wedge p = 1$ et si n n'est pas un carré modulo p ; $\chi(n) = 0$ si $p \mid n$.
  - ▷ Déterminer $\sum_{k=0}^{p-1} \chi(k)$.
  - ▷
    - s Montrer que le produit d'un carré et d'un non carré est un non carré.
    - En utilisant le caractère bijectif de $x \mapsto ax$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.
  - ▷ Déduire de 7 une majoration de $\left|\sum_{k=0}^{N} \chi(k)\right|$ pour $N \in \mathbb{N}$.
  - ▷ On pose $\xi = e^{2i\pi/p}$. Montrer que
$$\chi(n) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{a=0}^{p-1} \chi(a) \xi^{k(a-n)}.$$
- Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on note $S_k(N) = \sum_{n=0}^{N} \xi^{-kn}$.
  - ▷ Montrer que $\forall N \geq 0$, $|S_k(N)| \leq \frac{1}{|\sin(k\pi/p)|}$.
  - ▷ En déduire que, pour $k < p/2$, $|S_k(N)| \leq p/(2k)$.
  - ▷ Trouver une majoration similaire pour $k > p/2$.

- On pose $G_k = \sum_{a=0}^{p-1} \chi(a)\xi^{ka}$.
  - ▷ Montrer que, pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, $|G_k| = \sqrt{p}$.
  - ▷ Montrer que G_k est réel ou imaginaire pur, et que cela ne dépend pas de k. (Non posé)
  - ▷ On suppose que G_1 est réel, montrer que $G_1 \geq 0$. (Non posé)?? Trouver des questions pour finir…
    Ressemble à une preuve classique, mais je ne vois pas comment rester dans le monde des caractères. Il faut normalement

Exercice 8 Anneaux euclidiens [ENS MP 2024 # 8] On dit que A est un anneau euclidien si A est un anneau intègre (donc commutatif) et qu'il existe $t\colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ vérifiant :

- pour tout $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0\})$, il existe $(q, r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ avec $r = 0$ ou $t(r) < t(b)$,
- $\forall (a, b) \in (A \setminus \{0\})^2, t(ab) \geq t(a)$.
- Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont-ils euclidiens ? Montrer qu'un corps est un anneau euclidien.
- Soient A un anneau euclidien et I un idéal de A. Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $I = xA$. Y a-t-il unicité de x ?
- Dans cette question, on se donne A un anneau euclidien tel que $t(1) = 1$. Soit $x \in A$. Montrer que x est inversible si et seulement si $t(x) = 1$.

Exercice 9 [ENS MP 2024 # 9] Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.
Pour $f, g \in A$, on pose $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g(n/d)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif intègre.
- Caractériser les inversibles de l'anneau A.
- Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans l'anneau A avec a et $b^2 - 4ac$ inversibles.

Exercice 10 [ENS MP 2024 # 10]
- Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont cycliques.
- Alice et Barbara jouent à un jeu. Elles choisissent à tour de role un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sans remise qu'elles ajoutent à un ensemble S. Le jeu s'arrête quand S engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et la joueuse ayant tiré le dernier numéro perd. Selon n, y a-t-il une stratégie gagnante pour la première joueuse ?
- Même question si à chaque étape, on ne peut pas retirer un élément de $\langle S \rangle$.
- Reprendre 10 avec le groupe $\mathcal{S}_n$.

Exercice 11 [ENS MP 2024 # 11]
- Soient $\sigma \in S_n$ et $c_1 \circ \cdots \circ c_r$ sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Calculer l'ordre de σ dans le groupe S_n.
- On note $g(n)$ l'ordre maximal d'une permutation de S_n. Montrer que g est croissante et $n \leq g(n) \leq n!$
- Trouver n minimal tel que $g(n) > n$.
- On note $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que :
  $n \geq \sum_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \implies g(n) \geq \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.
- On suppose que $g(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Montrer que : $n \geq \sum_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.
- Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) \leq Ce^{\varepsilon n}$.

Exercice 12 [ENS MP 2024 # 12] Lorsque $\sigma \in S_n$, on note $n_k(\sigma)$ le nombre de k-cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints. Ainsi $n_1(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ. On note egalement $m(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} n_k(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.

- Soient $i, k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de i dans $\big(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +\big)$.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma, \tau \in S_n$. On dit que σ et τ sont conjuguées s'il existe $\varphi \in S_n$ tel que $\sigma = \varphi\tau\varphi^{-1}$.

Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall k \in [\![1, n]\!], n_k(\sigma) = n_k(\tau)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\det \big(i \wedge j\big)_{1\leq i,j\leq n^*}$.

Ind. Considérer les matrices $A = (1\!\!1_{i|j})$ et $B = (\varphi(j)1\!\!1_{j|i})$.

- Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall i \in [\![1, n]\!], m(\sigma^i) = m(\tau^i)$.
- Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutation P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 13 [ENS MP 2024 # 13] Soient G un groupe, A une partie finie non vide de G. Montrer que $|A| = |AA|$ si et seulement si $A = xH$ avec $x \in G$ et H sous-groupe de G tel que $x^{-1}Hx = H$.

Exercice 14 [ENS MP 2024 # 14] Soient G un groupe et $A \subset G$ fini non vide tel que $|AA| < \frac{3}{2}|A|$. Montrer que $A^{-1}A$ est un sous-groupe de G.

Exercice 15 Groupe dihédral [ENS MP 2024 # 15]
- Soient $n \geq 3$ et $\mathcal{Q}$ un polygone régulier à n côtés. Montrer que l'ensemble des isométries affines du plan préservant $\mathcal{Q}$ est un groupe à $2n$ éléments.
- s On note maintenant $n = q$, nombre premier impair, et D_{2q} le groupe précédent. Montrer que tout groupe de cardinal $2q$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ ou à D_{2q}.

Exercice 16 [ENS MP 2024 # 16]
- Trouver tous les groupes d'ordre 8 dont l'ordre maximal des éléments est 4.
- Trouver tous les groupes d'ordre 8 à isomorphisme pres.

Exercice 17 [ENS MP 2024 # 17]
- Donner des exemples de groupes d'ordre 12 commutatifs ainsi qu'un exemple non commutatif.
- Montrer que tout groupe d'ordre 12 admet un élément d'ordre 2.

- Trouver à isomorphisme prêt les groupes commutatifs d'ordre 12.
- Montrer que tout groupe d'ordre 12 admet un élément d'ordre 3.
- Trouver tous les groupes d'ordre 12 à isomorphisme pres.

Exercice 18 [ENS MP 2024 # 18] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F}_3)$. On admet que $A^{13} = -I_3$.

- Quels calculs auriez-vous fait pour justifier que $A^{13} = -I_3$?
- Montrer que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ et que A est d'ordre 26 dans ce groupe.
- On note G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A, et on pose $V = G \cup \{0\}$. Montrer que $V = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.
- On pose $W = \mathrm{Vect}(I_3, A)$. Montrer que, pour tout $M \in G$, il existe $N, P \in W \setminus \{0\}$ telles que $M = P^{-1}N$.
- On note H le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A^2. Montrer que H est isomorphe à $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, puis que $|H \cap W| = 4$.

Exercice 19 [ENS MP 2024 # 19]

- Montrer que toute rotation du plan complexe est composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites.
- Montrer que toute permutation d'un ensemble fini non vide X est produit de deux éléments d'ordre au plus 2 du groupe des permutations de X.
- Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si X est infini ?

Exercice 20 [ENS MP 2024 # 20] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $|z| < 2$.

Exercice 21 [ENS MP 2024 # 21] Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, ..., a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$.
On pose $f(X, Y) = a_0X^m + a_1X^{m-1}Y + a_2X^{m-2}Y^2 + ... + a_mY^m$ et on suppose que le polynôme $f(X, 1) \in \mathbb{R}[X]$ est scindé.
Montrer que, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, le polynôme $\frac{\partial^{n+p} f}{\partial X^n \partial Y^p}(X, 1)$ est nul ou scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 [ENS MP 2024 # 22] Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \in [1/C, C]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^n (X - x_{k,n})$, ou l'on a note $x_{k,n}$ les racines complexes de P_n.

- Montrer que $\{x_{k,n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![1, n]\!]\}$ est borné.
- Montrer que $\sum_{k=1}^n x_{k,n}^2 = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n}{a_n^2}$ pour tout $n \geq 2$.
- Montrer que, pour n suffisamment grand, P_n n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23 [ENS MP 2024 # 23]

- Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ unitaire de degré $n \geq 2$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, avec $a_{n-1} \in \mathbb{R}_+$. Montrer, pour $M = \max(|a_0|, \dots, |a_{n-2}|)$, que toute racine z de P vérifie $\mathfrak{Re}(z) \leq 0$ ou $|z| \leq \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4M}}{2}$.
- Soit p un nombre premier et $b \geq 3$ un entier. On écrit $p = \overline{c_n c_{n-1} \cdots c_0}^b$ en base b. Montrer que $\sum_{k=0}^n c_k X^k$ est irreductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 24 [ENS MP 2024 # 24] Soit P un polynôme à n indéterminées $X_1, X_2, \dots, X_n$. On dit que P est symétrique si, pour toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a $P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, X_2, \dots, X_n)$. On dit que P est homogène de degré $k \in \mathbb{N}$ s'il est somme de mo- nomes de la forme $cX_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}$ avec $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$.

- Montrer qu'il existe une famille presque nulle $(e_i(X_1, X_2, \dots, X_n))_{i \geq 0}$ de polynômes à n indéterminées symétriques et homogènes tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(1 + tX_1)(1 + tX_2) \cdots (1 + tX_n) = \sum_{i \geq 0} e_i(X_1, X_2, \dots, X_n)t^i$.
- Montrer qu'il existe une famille $(h_i(X_1, X_2, \dots, X_n))_{i \geq 0}$ de polynômes à n indéterminées symétriques et homogènes tels que, pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0,
$\dfrac{1}{(1 - tx_1)(1 - tx_2) \cdots (1 - tx_n)} = \sum_{i=0}^{+\infty} h_i(x_1, x_2, \dots, x_n)t^i$.

On pose $\mathcal{P}_n = \{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n,\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \}$ et, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on pose $\Lambda(\alpha)$ le n-uplet obtenu en ordonnant les entiers de α par ordre décroissant, puis pour tout $\lambda \in \mathcal{P}_n$, $m_\lambda = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n,\, \Lambda(\alpha) = \lambda} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}$.

- Calculer m_λ avec $\lambda = (2, 1, 0, 0)$ et λ le n-uplet contenant r fois 1 et $n - r$ fois 0.
- Pour $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$, on note $M_{\lambda,\mu}$ le nombre de matrices dont les coefficients valent 0 ou 1 et telles que la somme des coefficients de la i-ieme ligne vaut toujours λ_i et celle des coefficients de la j-ieme colonne vaut toujours μ_j. Montrer que $\prod_{i=1}^n e_{\lambda_i}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} M_{\lambda,\mu} m_\mu$.

Exercice 25 Théorème de Liouville [ENS MP 2024 # 25] Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ non tous constants et premiers entre eux deux à deux.

- On veut montrer que si $A + B = C$ alors $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) \leq M(ABC) - 1$ ou $M(P)$ est le nombre de racines distinctes du polynôme P.
  Si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, on note $W_{P,Q} = PQ' - P'Q$.
  - ▷ Montrer que $W_{A,B} = W_{C,B} = W_{A,C} \neq 0$.
  - ▷ Montrer que $\deg(A \wedge A') + \deg(B \wedge B') + \deg(C \wedge C') \leq \deg(W_{A,B})$.
  - ▷ Conclure.
- Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Donner un exemple de $(A, B, C) \in \mathbb{C}[X]^3$ avec $\deg(A) = d$ et pour lequel $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) = M(ABC) - 1$.

- Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux dans leur ensemble et tels que $A^n + B^n = C^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n \leq 2$. Montrer qu'il existe des solutions pour $n = 2$.

Exercice 26 [ENS MP 2024 # 26] Soit $\mathbb{R}\left[X, X^{-1}\right]$ l'ensemble des fractions rationnelles dont le dénominateur est une puissance de X.

- Montrer que $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}(X)$. En est-ce un sous-corps ? Quels sont ses éléments inversibles ?
- Déterminer les automorphismes de l'anneau $\mathbb{R}$.
- Déterminer les automorphismes de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$.
- Déterminer les automorphismes de l'anneau $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$.

Exercice 27 [ENS MP 2024 # 27] Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaires. On dit que P et Q sont entrelacés lorsqu'entre deux racines consécutives de l'un (en tenant compte des multiplicités) il y a exactement une racine de l'autre. On suppose que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$, que Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et que P et Q n'ont aucune racine commune. On pose enfin $F = \dfrac{P}{Q}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Montrer l'équivalence entre :

- P est scindé sur $\mathbb{R}$ et P et Q sont entrelacés,
- $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$

Exercice 28 [ENS MP 2024 # 28] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Exprimer $\det(A + uv^T)$. Dans le cas ou celui-ci est non-nul, exprimer $(A + uv^T)^{-1}$.

Exercice 29 [ENS MP 2024 # 29] Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Que dire de f si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée ?
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{tr}\, A = 0$. Montrer que A est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

Exercice 30 [ENS MP 2024 # 30]

- Calculer $\det\left(i^j\right)_{1 \leq i, j \leq n}$.
- Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$P_i = \prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} X^{k-1}$$

  Calculer $\det(\alpha_{i,k})_{1 \leq i, k \leq n}$.

Exercice 31 [ENS MP 2024 # 31] Soient $n, r, k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq r \leq n$ et $r + k \leq n$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Montrer que M est de rang $r + k$ si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est de rang k.

Exercice 32 [ENS MP 2024 # 32] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, m un entier supérieur ou egal à 2. Montrer que la reduction modulo m définit un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, puis que ce morphisme est surjectif.

Exercice 33 Sous-algèbre transitive [ENS MP 2024 # 33] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\{Mv\ ;\ M \in \mathcal{M}\} = \mathbb{C}^n$. Montrer que $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 34 [ENS MP 2024 # 34] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 + B^2 = AB$ et $AB - BA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que n est divisible par 3.

Exercice 35 [ENS MP 2024 # 35] Soient $\chi\colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes non constant. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de la forme $(a + b\chi(r) + c\overline{\chi(s)} + d\chi(r)\overline{\chi(s)})_{r,s \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}$ avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}$.

- Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Pour $\xi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes, calculer $\sum_{r \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} \xi(r)$.
- Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par produit matriciel et que la $\mathbb{R}$-algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (on exhibera un isomorphisme).

Exercice 36 [ENS MP 2024 # 36] On s'intéresse aux parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont des groupes pour le produit matriciel.

- Donner des exemples de tels groupes, dont certains ne soient pas des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$, où B est inversible et N nilpotente.
- Caractériser ces groupes.

Exercice 37 [ENS MP 2024 # 37] Pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, soit $\mathrm{Pf}(A) = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3}$.

- Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$.
- On admet que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ et tout $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}(BAB^T) = \det(B)\mathrm{Pf}(A)$.
- Soit $R \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. On pose $A = R - R^T$. Montrer l'équivalence entre :
  - ▷ R n'a pas de valeur propre réelle,
  - ▷ $\mathrm{Pf}(A) \neq 0$,
  - ▷ A est inversible.
- Soient $R_1, R_2 \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, $A_1 = R_1^T - R_1$ et $A_2 = R_2^T - R_2$. On suppose $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $\mathrm{Pf}(A_1) = \mathrm{Pf}(A_2) \neq 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ telle que $R_1 = PR_2P^T$.

Exercice 38 [ENS MP 2024 # 38] Déterminer l'image de $\varphi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M^{2n+1}$.

Exercice 39 [ENS MP 2024 # 39] À quelle condition sur la matrice A, la comatrice de A est-elle diagonalisable ?

Exercice 40 [ENS MP 2024 # 40] Pour $i \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $c_i(A)$ le coefficient numéro i du polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de la matrice A.

- Montrer que $c_i(AB) = c_i(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $i \in \mathbb{N}$.
- Le résultat reste-t-il valable pour des matrices à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ quelconque ?

Exercice 41 [ENS MP 2024 # 41] Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\zeta = e^{2i\pi/n}$ et $S = \left(\zeta^{(r-1)(s-1)}\right)_{1\leq r,s\leq n}$.

- s Calculer S^2.
- Donner une expression simple de $|\det(S)|$.
- On pose $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik^2\pi}{n}}$. Donner une expression simple de $|G_n|^2$ par un calcul direct.
- s On suppose que n est impair. Déterminer le spectre de S et la multiplicité de chacune de ses valeurs propres.

Exercice 42 [ENS MP 2024 # 42]

- Rappeler l'ordre d'un élément k de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Montrer que deux permutations de $\mathcal{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si elles ont pour tout k, le même nombre de cycles de longueur k dans leurs décompositions en produit de cycles à supports disjoints.
- Soit c un cycle de longueur k. Déterminer le nombre de cycles dans la décomposition de c^i en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 43 [ENS MP 2024 # 43] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $v, w \in \mathcal{L}(E)$. On note $u = vw - wv$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on note $F_u(\lambda) = \bigcup_{m\geq 1} \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})^m$

- Montrer que $F_u(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel stable par u et qu'il admet un supplémentaire stable par u.
- On écrit $\pi_u = (X-\lambda)^p Q$ avec $(X-\lambda) \wedge Q = 1$. Montrer que $E = F_u(\lambda) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u)$.
- E On suppose de plus que u commute avec v. On note p_λ le projecteur sur $F_u(\lambda)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, Q(u)$.
- Montrer que p_λ commute avec v.
- Montrer que $\mathrm{tr}(up_\lambda) = \lambda\,\mathrm{rg}(p_\lambda) = 0$.
- En déduire que u est nilpotent.
- On suppose desormais que $vw^2 - w^2v = w$. Montrer qu'il existe un entier d impair tel que $\pi_w = X^d$.

Exercice 44 [ENS MP 2024 # 44] Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{tr}(M^k) = 0$.
- On suppose que $A(AB - BA) = 0$. Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.
- On suppose que $A(AB - BA) = (AB - BA)A$. Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.

Exercice 45 [ENS MP 2024 # 45] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_A = \prod_{i=1}^r \underbrace{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}_{=P_i}$.

- Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur $\mathrm{Ker}\, P_i(A)$.
- Montrer qu'il existe D diagonalisable et N nilpotente telles que $A = D + N$ et $ND = DN$.
- Si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Comm}_X : M \mapsto MX - XM$. On reprend les notations précédentes. Montrer que $\mathrm{Comm}_A = \mathrm{Comm}_D + \mathrm{Comm}_N$, que Comm_D et Comm_N commutent et sont respectivement diagonalisable et nilpotente.

Exercice 46 [ENS MP 2024 # 46] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite toute puissante (TP $\mathbb{K}$) si, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = B^p$. - Trouver les matrices TP $\mathbb{K}$ pour $n = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\chi_A = \prod_{i=1}^k (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ ou les λ_i sont distincts dans $\mathbb{K}$ et les α_i sont des entiers naturels non nuls.
- Montrer qu'il existe $N_1, \ldots, N_k$ nilpotentes telles que A soit semblable à une matrice diagonale par blocs avec comme blocs diagonaux $\lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k$.
- Montrer que A est TP $\mathbb{K}$ si et seulement si les $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ le sont. On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unipotente si $M - I_n$ est nilpotente et on note $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$, on pose $\ln(A) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(A - I_n)^p$.

- Justifier la définition de $\ln(A)$ pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp$ est une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur l'ensemble $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$.
- Montrer que les matrices unipotentes sont TP $\mathbb{K}$.
- Déterminer finalement les matrices toutes-puissantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 47 [ENS MP 2024 # 47] Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considére l'équation $(E)\colon X - AXB = C$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ les spectres complexes de A et B.

- On suppose que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, $\alpha\beta \neq 1$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution.
- Que se passe-t-il dans le cas general ?

Exercice 48 [ENS MP 2024 # 48] Combien y a-t-il de classes de similitude de $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ constituées de matrices M telles que $M^3 = 0$?

Exercice 49 [ENS MP 2024 # 49] Déterminer les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que M soit semblable à $2M$.

Exercice 50 [ENS MP 2024 # 50] Déterminer les matrices $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $k \geq 2$, on dispose de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A = M^k$.

Exercice 51 [ENS MP 2024 # 51] Montrer que toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ admet une racine carrée.

Exercice 52 [ENS MP 2024 # 52]

- Montrer que toute $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de facon unique UD ou $U \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente, $D \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable et $UD = DU$.
- Soit ρ un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$ tel que les coefficients de $\rho(M)$ soient des fonctions polynomiales de ceux de M. Montrer que ρ respecte la décomposition de la question précédente.

Exercice 53 [ENS MP 2024 # 53]

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. à quelle condition existe-t-il $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales ?
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A s'écrit de maniere unique $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\pi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ son polynôme minimal et $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(A)$ est diagonalisable si et seulement si $P^{(j)}(\lambda_i) = 0$ pour tous $i \in [\![1, r]\!]$ et $j \in [\![1, \beta_i - 1]\!]$.

Exercice 54 [ENS MP 2024 # 54]

- Soient u, v deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, tels que $uv = vu$. Montrer que u et v sont codiagonalisables.
- Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que u admet au plus une décomposition de la forme $u = d + n$, ou $(d, n) \in \mathbb{K}[u]^2$, l'endomorphisme d est diagonalisable, l'endomorphisme n est nilpotent et $dn = nd$.

Exercice 55 [ENS MP 2024 # 55] Soient $n \in \mathbb{N}$ et w une fonction continue positive non identiquement nulle de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, $\int_0^1 f_k f_\ell w = \delta_{k,\ell}$. Montrer que $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.
- Montrer qu'il existe une unique suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $\int_0^1 p_k p_\ell w = \delta_{k,\ell}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k soit polynomiale de degré k à coefficient dominant positif.
- Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, p_n à n racines simples dans $]0, 1[$ que l'on note $x_{1,n} < \cdots < x_{n,n}$.
- Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{n,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_0^1 pw = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} p(x_{k,n})$.

Exercice 56 [ENS MP 2024 # 56] Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E tels que $\langle e_i, e_j \rangle \leq 0$ pour tous i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre si et seulement s'il existe une forme linéaire f sur E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) > 0$.

Exercice 57 [ENS MP 2024 # 57] Soient $n, m \geq 1$ des entiers. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle_E)$ et une application $f\colon \mathbb{R}^n \to E$ (non linéaire) tels que, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, x' \rangle^m = \langle f(x), f(x') \rangle_E$.

Exercice 58 Produit de Schur Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A \star B$ la matrice $(a_{ij} b_{ij})_{i,j \leq n}$. Soient A, B symétriques positives.

- sAV2 Montrer qu'il existe au plus n vecteurs $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ tels que $A \in \mathrm{Vect}\, v_i v_i^T$.
- sAV2 On note $A \otimes B \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ la matrice définie par blocs $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \ldots & a_{nn}B \end{pmatrix}$. Montrer que $A \otimes B$ est symétrie positive.
- Montrer que $A \star B$ est symétrique positive.

Exercice 59 [ENS MP 2024 # 58] Trouver un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ et $f\colon \mathbb{R} \to E$ tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2}\right) = \langle f(x), f(y) \rangle$.

Exercice 60 [ENS MP 2024 # 59] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$. On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on considére r vecteurs de $\mathbb{R}^m$ notés $x_1, \ldots, x_r$.

- Montrer qu'il existe une matrice $U_0 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^r \|x_i - UU^T x_i\|_2^2$ parmi toutes les matrices $U \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telles que $U^T U = I_n$.
- Montrer que $\min_{U \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^r \|x_i - UU^T x_i\|_2^2 = \min_{U,V \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^r \|x_i - UV^T x_i\|_2^2$.

Exercice 61 [ENS MP 2024 # 60] Soient $(\lambda_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante vérifiant $\lambda_0 = 0$ et k dans $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

- Calculer $I_{n,k} = \inf_{(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}} \int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=0}^n a_i t^{\lambda_i}\right)^2 dt$.

On admettra que le déterminant de la matrice de coefficient general $m_{i,j} = \dfrac{1}{1 + x_i + y_j}$ vaut $\dfrac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (1 + x_i + y_j)}$.

- En déduire une condition suffisante sur (λ_n) pour que $F = \mathrm{Vect}(t \mapsto t^{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ soit dense dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $f \mapsto \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$.

Exercice 62 [ENS MP 2024 # 61] Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\langle\ ,\ \rangle_1$ et $\langle\ ,\ \rangle_2$ deux produits scalaires tels que $\forall (x, y) \in V^2,\ \langle x, y \rangle_1 = 0 \iff \langle x, y \rangle_2 = 0$

- Soient $x, y \in V$. Montrer que si $\|x\|_1 = \|y\|_1$ alors $\|x\|_2 = \|y\|_2$.
- En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|x\|_1 = C\|x\|_2$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(V)$ qui préserve l'orthogonalité : si $\langle x, y \rangle = 0$ alors $\langle u(x), u(y) \rangle = 0$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $u \circ u^* = C\ \mathrm{id}$.

Exercice 63 [ENS MP 2024 # 62] Soient E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On pose $\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i,\ (\lambda_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{Z}^n \right\}$.

- Soit $r \in \mathcal{O}(E)$ tel que $r(\Lambda) \subset \Lambda$. Montrer que $r(\Lambda) = \Lambda$.
- Montrer que $G_\Lambda = \{r \in \mathcal{O}(E), r(\Lambda) = \Lambda\}$ est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(E)$.
- Ici $n = 3$. Montrer que tous les éléments de G_Λ ont un ordre qui divise 12.

Exercice 64 [ENS MP 2024 # 63] Soient E un espace euclidien de dimension n, G un groupe fini et ρ un morphisme injectif de G dans $\mathrm{GL}(E)$ tel que, pour tout $g \in G$, $\rho(g) \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que les éléments de G sont d'ordre 1 ou 2, puis que $|G|$ divise 2^n.

Exercice 65 [ENS MP 2024 # 64]
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ soit positive, puis définie positive.
- Soit $(a, b, c) \in [-1, 1]^3$. On suppose que $1 + 2abc \ge a^2 + b^2 + c^2$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2(abc)^n \ge a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$.

Exercice 66 [ENS MP 2024 # 65]
- s Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Montrer qu'il existe un vecteur propre de A dont tous les coefficients sont > 0.
- Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients > 0. Montrer que A possède un vecteur propre à coefficients > 0.
- Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$, $M_i = \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $1 \le i \le n$. Montrer que $M_1 \times \cdots \times M_n$ est à spectre inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 67 Réduction des endomorphismes normaux [ENS MP 2024 # 66]
- Rappeler la définition de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
- Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u et u^* commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux etant soit de taille 1, soit de taille 2 et de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 68 [ENS MP 2024 # 67] Montrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 69 [ENS MP 2024 # 68] On admet l'existence d'une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ d'unite 1 admettant une base de la forme $(1, i, j, k)$ avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$. Montrer que le groupe des automorphismes de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ est isomorphe à $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 70 [ENS MP 2024 # 69] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf\limits_{\|G\|=1} \|AG - GB\| = \min\limits_{(\lambda_1,\lambda_2)\in \mathrm{Sp}(A)\times \mathrm{Sp}(B)} |\lambda_1 - \lambda_2|$.

Exercice 71 [ENS MP 2024 # 70] Soient X un ensemble et $K\colon X \times X \to \mathbb{R}$. On suppose que, pour tous $n \ge 1$ et $x_1, \dots, x_n \in X$, $(K(x_i, x_j))_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $x \in X$, on note $K_x\colon y \mapsto K(x, y)$. Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^X$ engendré par les fonctions $(K_x)_{x\in X}$.
Soit $a, b \in E$. Par définition de E, il existe $(\lambda_x)_{x\in X}$ et $(\mu_x)_{x\in X}$ dans $\mathbb{R}^X$ n'admettant qu'un nombre fini de coefficients non nuls tels que $a = \sum_{x\in X} \lambda_x K_x$ et $b = \sum_{x\in X} \mu_x K_x$ et on pose

$$\langle a, b\rangle = \sum_{x,y\in X} \lambda_x \mu_y K(x, y).$$

- Montrer que cela définit bien un produit scalaire sur E.
- Montrer qu'il existe $f\colon X \to E$ telle que $\forall x, y \in X, K(x, y) = \langle f(x), f(y)\rangle$.

Exercice 72 [ENS MP 2024 # 71] Soient $p \ge 1$ et $A, B \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$. TODO

- Montrer que $\mathrm{Tr}\left(I_p - A^{-1}B\right) \le \ln\left(\frac{\det A}{\det B}\right)$.
- Soient $n \ge 1, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda > 0$. Pour $1 \le m \le n$, on pose $A_m = \sum_{k=1}^m u_k\, u_k^T$ et $B_m = \lambda I_p + A_m$. Montrer que, pour $1 \le m \le n$, B_m est symétrique définie positive.
- Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A_n. Montrer que $\sum_{m=1}^n \left\langle u_m, B_m^{-1} u_m\right\rangle \le \sum_{i=1}^p \ln\left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)$.

Exercice 73 [ENS MP 2024 # 72] Si G est un groupe, on note $Z(G)$ son centre. On pose $U_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,,\ A^*A = I_n\}$ ou $A^* = \overline{A}^T$, l'ensemble des matrices unitaires.

- Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G et que $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne, c'est-a-dire telle que $A^* = A$. Démontrer qu'il existe $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ telle que P^*AP soit diagonale.
- Démontrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit comme combinaison linéaire d'au plus quatre matrices unitaires.
- Déterminer $Z\left(\mathcal{U}_n(\mathbb{C})\right)$.

2) Analyse

Exercice 74 [ENS MP 2024 # 73] Soit F l'application qui à une norme N sur $\mathbb{R}^n$ associe la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour N.

- L'application F est-elle injective ?
- Quelle est l'image de F ?

Exercice 75 [ENS MP 2024 # 74] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi : E \to \mathbb{R}^+$ une application telle que

- pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)$.

On note $C = \{x \in E,\ \varphi(x) \leq 1\}$.

- Montrer que φ est une norme si et seulement si C est convexe.
- Soit K un partie de E convexe, compacte, d'intérieur non vide et symétrique par rapport à l'origine. Montrer que K est un voisinage de l'origine.
- Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Posons $I(x) = \{\lambda > 0\,;\ \exists k \in K,\ x = \lambda k\}$. Montrer que $I(x)$ est un convexe ferme, non vide.

Exercice 76 [ENS MP 2024 # 75] Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}^n, +)$ dans lequel 0 est un point isolé. Montrer qu'il existe une famille libre $(u_1, \dots, u_p)$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $G = \{\sum_{k=1}^{p} a_k . u_k,\ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p\}$.

Exercice 77 [ENS MP 2024 # 76] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E l'ensemble des pavés de $\mathbb{R}^n$, c'est-a-dire des parties de la forme $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ avec $a_1 \leq b_1$,..., $a_n \leq b_n$. Pour toute partie finie $G \subset \mathbb{R}^n$, on note $f(G) = \{F \cap G,\ F \in E\}$. Déterminer $\sup\{k \in \mathbb{N}\,;\ \exists G \subset \mathbb{R}^n,\ |G| = k,\ f(G) = \mathcal{P}(G)\}$.

Exercice 78 [ENS MP 2024 # 77]

- Soient E un espace vectoriel normé et K un compact convexe non vide de E. Soit $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions affines, continues, qui commutent deux à deux et telles que $f_i(K) \subset K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que les fonctions f_i ont un point fixe commun.
- Le résultat précédent reste-t-il valable pour une famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions indexées par un ensemble non dénombrable ?

Exercice 79 [ENS MP 2024 # 78] Soient H le groupe (pour la composition) des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, H^+ le sous-groupe des homéomorphismes croissants.

- Caractériser les groupes finis isomorphes à un sous-groupe de H.
- Montrer qu'on peut munir tout sous-groupe G de H^+ d'une relation d'ordre totale telle que $\forall f, g, h \in G$, $f \leq g \implies h \circ f \leq h \circ g$.
- Réciproquement, montrer que tout groupe dénombrable pouvant être muni d'un tel ordre est isomorphe à un sous groupe de H^+.

Exercice 80 [ENS MP 2024 # 79] Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$, F une partie finie de $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$, f une application 1-lipschitzienne (pour les normes euclidiennes canoniques) de F dans $\mathbb{R}^m$.

1. sV2 On suppose que $\forall x \in F$, $\|f(x)\| > \|x\|$, montrer que 0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $f(F)$.
2. Montrer que l'on peut prolonger f en une application 1-lipschitzienne de $F \cup \{x\}$ dans $\mathbb{R}^m$.

Exercice 81 [ENS MP 2024 # 80] Soient $\gamma, \tau \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$D_N = \left\{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \|k\| \leq N \Rightarrow |\langle x, k\rangle| \geq \frac{\gamma}{\|k\|^\tau}\right\} \quad \text{et} \quad D = \bigcap_{N \geq 1} D_N.$$

Montrer que D est fermé et d'intérieur vide. Qu'en est-il de D_N ?

Exercice 82 [ENS MP 2024 # 81] Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f\colon E \to F$ telle que : $\forall r \in]0{,}1]$, $\forall x \in E,\ B\left(f(x), \frac{r}{2}\right) \subset f(B(x, r)) \subset B(f(x), 2r)$.

- Montrer que f est continue et surjective.
- Que peut-on dire de l'image par f d'un ouvert ? D'un fermé ?
- Soit γ un chemin continu de $[0, 1]$ dans F. Montrer qu'il existe un chemin c continu de $[0, 1]$ dans E tel que $f \circ c = \gamma$.

Exercice 83 [ENS MP 2024 # 82]

- Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non vide. Soit $f : X \to X$. On suppose qu'il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in X$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \theta\|x - y\|$. Montrer que f possède un unique point fixe c et que, pour tout $x \in X$, $f^m(x) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} c$.
- Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un compact non vide. Soit $f\colon X \to X$. On suppose que $\forall x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.
  - ▷ Soient Y, Z deux compacts non vides tels que $f(Y) \subset Y$ et $f(Z) \subset Z$. Montrer que $Y \cap Z$ est non vide.
  - ▷ En déduire que f possède un unique point fixe.

Exercice 84 [ENS MP 2024 # 83] On se place dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ munis d'une norme.

- Montrer qu'il existe $C > 0$ et $R_0 \geq 0$ tels que, pour tout $r \geq R_0,\ \text{card}\{x \in \mathbb{Z}^n\ ;\ \|X\| \leq r\} \leq Cr^n$.
- On appelle plongement grossier $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ une fonction qui vérifie :
  - ▷ $\forall a \geq 0,\ \exists b \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}^n,\ \|x - y\| \leq a \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq b$,
  - ▷ $\forall b \geq 0,\ \exists a \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}^n,\ \|f(x) - f(y)\| \leq b \Rightarrow \|x - y\| \leq a$.

  Soit $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ un prolongement grossier.

  - ▷ Montrer qu'il existe $\rho\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $\mu > 0$ tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} \rho(x) = +\infty$ et

  $$\forall x, y \in \mathbb{Z}^n,\ \rho(\|x - y\|) \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \mu\|x - y\|.$$

  - ▷ Montrer que $m \geq n$.
- Adapter pour $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Exercice 85 [ENS MP 2024 # 84] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme. Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on pose :
$L_f(x,r) = \sup\left\{\|f(x)-f(y)\| \ ; \ y \in \mathbb{R}^2,\ \|x-y\| \le r\right\}$,
$\ell_f(x,r) = \inf\left\{\|f(x)-f(y)\| \ ; \ y \in \mathbb{R}^2,\ \|x-y\| \ge r\right\}$.

- Montrer que : $L_f(x,r) = \sup\left\{\|f(x)-f(y)\| \ ; \ y \in \mathbb{R}^2,\ \|x-y\| = r\right\}$,
  $\ell_f(x,r) = \inf\left\{\|f(x)-f(y)\| \ ; \ y \in \mathbb{R}^2,\ \|x-y\| = r\right\}$.
- Pour x fixé, montrer que $r \mapsto L_f(x,r)$ et $r \mapsto \ell_f(x,r)$ sont croissantes.
- E On dit que f est quasi-conforme s'il existe $K_f > 0$ tel que : $\forall (x,r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*},\ L_f(x,r) \le K_f \ell_f(x,r)$.
- On suppose f quasi-conforme. Montrer qu'alors $L_f(x,2r) \le (1+K_f)L_f(x,r)$.
- Montrer que f est quasi-conforme si et seulement si f^{-1} est quasi-conforme.

Exercice 86 [ENS MP 2024 # 85] Soient $n \ge 2$ et e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $a_{v,M} \in \mathbb{R}$, tel que la suite $(M^k v)_{k\ge1}$ tende vers $a_{v,M} e_1$, avec de plus $v \mapsto a_{v,M}$ non identiquement nulle.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $f_v\colon M \in \mathcal{A} \mapsto a_{v,M}$ est continue.

Exercice 87 [ENS MP 2024 # 86] Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour $X \subset E$ et $x \in E$, on note $d(x,X) = \inf_{y\in X} \|y-x\|$ et $\Pi_X(x) = \{y \in X \ ; \ \forall z \in X,\ \|y-x\| \le \|z-x\|\}$.

- Pour quels ensembles $Y \subset E$ existe-t-il $X \subset E$ et $x \in E$ tels que $Y = \Pi_X(x)$?
- Soient $X \subset E$ et $x \in E \setminus X$ tels que $d(x,X) = 0$. Montrer que $\Pi_X(x) = \emptyset$.
- Existe-t-il $X \subset E$ et $x \in E \setminus X$ tels que $d(x,X) > 0$ et $\Pi_X(x) = \emptyset$?
- On suppose qu'il existe un produit scalaire $\langle\ \rangle$ tel que $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ pour tout $x \in E$, que E est de dimension finie et que $X \subset E$ est un ensemble convexe fermé et borné. Montrer que $\Pi_x(X)$ est un singleton.

Exercice 88 [ENS MP 2024 # 87] Soit $n \ge 1$ un entier, $L \in]0,1[$, $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application L-lipschitzienne pour $\|\ \|_\infty$, et $x_* \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x_*) = x_*$.

- Soit $(x_k)_{k\ge1}$ définie par $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \ge 1$, $x_{k+1} = F(x_k)$. Montrer que $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_*$.
- Pour $I \subset \{1,\dots,n\}$, on note $F^{|I}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $1 \le i \le n$, par $F^{|I}(x)_i = \begin{cases} F(x)_i & \text{si } i \in I \\ x_i & \text{si } i \notin I \end{cases}$.

Montrer que $F^{|I}$ est 1-lipschitzienne pour $\|\ \|_\infty$.

- Soit $(I_k)_{k\ge1}$ une suite de sous-ensembles de $\{1,\dots,n\}$ telle que chaque indice $i \in \{1,\dots,n\}$ appartienne à une infinite de ces ensembles. Soient $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et, pour $k \ge 1$, $x_{k+1} = F^{|I_k}(x_k)$. Montrer que cette suite converge vers x_*.

Exercice 89 [ENS MP 2024 # 88] On munit l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées de la norme $\|\ \|_\infty$.

- Soit (a_n) une suite réelle sommable. Montrer que l'application $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ définit une forme linéaire continue sur l'espace ℓ^∞.
- On suppose l'existence d'une partie $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que : (i) pour tous $A, B \in F$, $A \cap B \in F$, (ii) pour $A \in F$, F contient toute partie B de $\mathbb{N}$ qui contient A, (iii) F ne contient que des ensembles infinis, (iv) si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors $A \in F$ ou $\mathbb{N} \setminus A \in F$.
  - ▷ Soit $x \in \ell^\infty$.
    Montrer qu'il existe un unique réel x^∞ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in F, \forall n \in A, |x_n - x^\infty| \le \varepsilon$.
  - ▷ En déduire l'existence d'une forme linéaire continue sur ℓ^∞ qui n'est pas de la forme donnée en question -.
- On note c_0 le sous-espace de ℓ^∞ des suites réelles de limite nulle. Montrer que toute forme linéaire continue sur c_0 est de la forme donnée en question -.

Exercice 90 [ENS MP 2024 # 89] Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, E une partie de $\mathbb{R}^2$ couplant toute boule de rayon r (pour la norme euclidienne canonique), $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ s'annulant sur E. Montrer que $P = 0$.

Exercice 91 [ENS MP 2024 # 90] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \ge 2$, C un convexe ouvert de E ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une droite vectorielle ne couplant pas C.

Exercice 92 [ENS MP 2024 # 91] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^+)^n,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique point $\pi(x) \in \Delta$ tel que $\forall z \in \Delta$, $\langle z - \pi(x), x - \pi(x)\rangle \le 0$.

- Soient $x, u \in \mathbb{R}^n$ et $x' = \pi(x+u)$.
  Montrer que, pour tout $z \in \Delta$, $2\langle u, z-x\rangle \le \|z-x\|_2^2 - \|z-x'\|_2^2 + \|u\|_2^2$.
- E Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $x_1, y_1 \in \Delta$ et $(\gamma_k)_{k\ge1}$ une suite strictement positive. Pour $k \ge 2$, on définit par récurrence $x_{k+1} = \pi(x_k + \gamma_k A y_k)$ et $y_{k+1} = \pi(y_k - \gamma_k A^T x_k)$.
- Montrer qu'on peut choisir la suite $(\gamma_k)_{k\ge1}$ de sorte que

$$\max_{x\in\Delta} \sum_{k=1}^N \langle x, Ay_k\rangle - \min_{y\in\Delta} \sum_{k=1}^N \langle x_k, Ay\rangle \le o(N).$$

- En déduire que $\max_{x\in\Delta}\min_{y\in\Delta}\langle x, Ay\rangle = \min_{y\in\Delta}\max_{x\in\Delta}\langle x, Ay\rangle$.

Exercice 93 [ENS MP 2024 # 92] Soient E euclidien et $T : E \to E$. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$\forall (x,y) \in E^2,\ \|\|T(x)-T(y)\| - \|x-y\|| \leq C$.
L'objectif est de montrer qu'il existe $h \in \mathbb{R}^+$ et un unique $u \in \mathcal{O}(E)$ tels que
$\forall x \in E,\ \|T(x)-u(x)\| \leq h$.

- Conclure dans le cas ou $C = 0$.
- Prouver l'unicité de u.
- Pour tout x de E, on pose $u_0(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T(2^n x)}{2^n}$. Montrer que u_0 est bien définie, linéaire et conserve la norme.
- Conclure.

Exercice 94 [ENS MP 2024 # 93] Soient $(E, \langle\ \rangle)$ un espace préhilbertien, $F : E \to E$ et $G = \dfrac{1}{2}(\mathrm{id} - F)$.

- Montrer que, F est 1-lipschitzienne pour $\|$ si et seulement si $\forall x, x' \in E,\ \langle G(x')-G(x), x'-x\rangle \geq \|G(x')-G(x)\|^2$.
- On suppose que F est 1-lipschitzienne pour et qu'il existe $x_* \in E$ tel que $F(x_*) = x_*$. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_1 \in E$ et, pour $n \geq 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + F(x_n)}{2}$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\|F(x_n) - x_n\| \leq \dfrac{2\,\|x_1 - x_*\|}{\sqrt{n}}$.
- En déduire que, si E est un espace euclidien, $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers un point fixe de F.

Exercice 95 [ENS MP 2024 # 94] Soient $n \geq 2$ et $I_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;\ \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Im}(A) \subset E_\lambda(A)\}$, ou $E_\lambda(A)$ est le sous-espace propre de A associe à la valeur propre λ.

- Montrer que $I_n(\mathbb{R})$ est stable par similitude.
- Soient $A, B \in I_n(\mathbb{R})$.Montrer que A et B sont semblables si et seulement si $\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,B$ et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.
- On note $I_n^*(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Im}(A) = E_\lambda(A)\}$. Étudier la connexité par arcs de $I_n(\mathbb{R})$ et de $I_n^*(\mathbb{R})$.
- Déterminer les classes de similitude incluses dans $I_2(\mathbb{R})$.

Exercice 96 [ENS MP 2024 # 95] Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe une norme stricte sur $\mathbb{R}^n$ pour laquelle les éléments de G sont des isométries.
- On suppose que les éléments de G stabilisent un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ note K. Montrer que les éléments de G ont un point fixe commun dans K.
- Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel les éléments de G sont des isométries.

Exercice 97 [ENS MP 2024 # 96] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour tous $g \in G$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $g \cdot A = gAg^T$.

- Donner un exemple de produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la norme N_0 euclidienne associée.
- Soit $N\colon A \mapsto \sup\limits_{g\in G} N_0(g\cdot A)$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $K = \{gg^T, g \in G\}$. Montrer qu'il existe un compact convexe C vérifiant : $K \subseteq C$, $\{g\cdot A,\ (g,A) \in G\times C\} \subseteq C$ et $C \subseteq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Montrer qu'il existe un produit scalaire G invariant pour $\cdot$.

Exercice 98 [ENS MP 2024 # 97] Déterminer les valeurs d'adherence des suites $(\cos n)$ et $(\cos^n n)$.

Exercice 99 [ENS MP 2024 # 98] [PSLR] Soit S une partie de $\mathbb{N}^*$ infinie et stable par produit. On range les éléments de S en une suite strictement croissante $(s_n)_{n\geq 1}$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $[1, +\infty[$.

Exercice 100 [ENS MP 2024 # 99] Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n e^{-i\,\mathrm{Im}(z_n)}$. Pour quelles valeurs de z_0 cette suite est-elle convergente ?

Exercice 101 [ENS MP 2024 # 100] Trouver un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k^n}{2^k}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 102 [ENS MP 2024 # 101] On fixe un entiers $n \geq 2$ et $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ une famille d'éléments de $]0,1[$. Soit pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(x_k^i)_{k\geq 0}$ une suite réelle. On suppose que, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1}^i = (1-t_i)x_k^i + t_i x_k^{i+1}$. Montrer que les n suites $(x_k^i)_{k\geq 0}$ pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ convergent vers une même limite.

Exercice 103 [ENS MP 2024 # 102] Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{U}$ distincts et $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k z_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

Exercice 104 Lemme de Van der Corput [ENS MP 2024 # 103] Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $\forall h \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{a_{k+h}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 105 [ENS MP 2024 # 104] Pour $x_0 > 0$, on définit par récurrence $x_{n+1} = x_n + \int_{x_n}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Étudier la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Donner un équivalent de x_n puis un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 106 [ENS MP 2024 # 105] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe une unique suite $(n_i)_{i\geq 1} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $n_{i+1} \geq {n_i}^2$ et que $\alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n_i}\right)$.

Exercice 107 [ENS MP 2024 # 106] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive.
On note, pour $\alpha \geq 0$, $\mathcal{R}_\alpha = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n a_n \leq \alpha\right\}$.
Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive sommable. Pour tout $\alpha > 0$, construire une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\alpha$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n b_n = \max_{(u_n)\in\mathcal{R}_\alpha} \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n b_n\right\}$.

Exercice 108 [ENS MP 2024 # 107] Soient $p \in]1,+\infty[$ et $q \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ des suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que $\sum {a_n}^p$ et $\sum {b_n}^q$ convergent. Montrer que $\sum a_n b_n$ converge.
- Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sum a_n$ converge et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$. Déterminer la nature de $\sum \frac{a_n}{{R_n}^\alpha}$.
- Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$. On suppose que, pour toute suite $(b_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que $\sum {b_n}^q$ converge, $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $\sum a_n^p$ converge.

Exercice 109 [ENS MP 2024 # 108] On admet l'irrationalite de π. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos(n)}$.

- Montrer que $\sum u_n$ converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\sum u_n$ converge.

Exercice 110 [ENS MP 2024 # 109] Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$.

- sAV2 Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $c_1, \ldots, c_n > 0$, on a $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n\sqrt[n]{c_1 \ldots c_n}} \sum_{i=1}^n a_i c_i$.
- sÀ Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$.
- Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} < e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
- Montrer que la constante e est optimale.

Exercice 111 [ENS MP 2024 # 110] Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_{0,n} = a_0 + \cdots + a_n$ et, pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$,
$H_{\alpha,n} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n H_{\alpha-1,k}$. Si $(H_{\alpha,n})_{n\geq 0}$ converge, on dit que (a_n) est H_α-sommable.

- Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est H_α-sommable, montrer qu'elle est $H_{\alpha+1}$ sommable.
- On suppose $(H_{0,n})_{n\geq 0}$ périodique. Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ est H_α-sommable pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
- Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que $\sum a_n$ diverge. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas H_α-sommable.
- Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est H_α-sommable, montrer que $a_n = o(n^\alpha)$.
- Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 0}$ qui n'est pas H_α-sommable mais qui est $H_{\alpha+1}$-sommable.

Exercice 112 [ENS MP 2024 # 111]

- Montrer que : $\cos(k\theta)$, $\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}$, $\frac{\cos((k+1/2)\theta)}{\cos(\theta/2)}$ et $\frac{\sin((k+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}$ sont des polynômes en $\cos\theta$.
- Soient $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels.

On suppose que : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $g(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)) \geq 0$. Montrer qu'il existe un polynôme complexe P tel que : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $g(\theta) = |P(e^{i\theta})|^2$.

Exercice 113 [ENS MP 2024 # 112]

- Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n, p, u_{n+p} \leq u_n + u_p + C$, ou C est une constante réelle. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge ou tend vers $-\infty$.
- Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ continue et croissante, telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + 1$. On note f^n la composée iterée de f (n fois). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{f^n(x) - x}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers une limite qui ne depend pas de x.

Exercice 114 Inégalité de Muirhead [ENS MP 2024 # 113] Soient $(a_1 \geq \cdots \geq a_n)$ et $(b_1 \geq \cdots \geq b_n)$ dans $(\mathbb{R}^{+*})^n$.
On note $a \geq b$ si : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i$ et $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$. Montrer que $a \geq b$ si
et seulement si, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n x_i^{a_{\sigma(i)}} \geq \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n x_i^{b_{\sigma(i)}}$.

Exercice 115 [ENS MP 2024 # 114]

- Soit $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,2\pi]$ tel que $f(x) \geq \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt$.
- Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

  Montrer qu'il existe une partie I de $[\![1, n]\!]$ telle que $\left|\sum_{j\in I} z_j\right| \geq \dfrac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n |z_j|$.

Exercice 116 [ENS MP 2024 # 115] Soient $a < b$. Une dissection du segment $[a,b]$ est une suite finie $(t_k)_{0\leq k\leq n}$ strictement croissante telle que $t_0 = a$ et $t_n = b$. Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on définit la variation de f sur $[a,b]$ par $V(f,[a,b]) = \sup_{\substack{t \text{ dissection} \\ \text{def } [a,b]}} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$.

- Calculer $V(f,[a,b])$ dans le cas ou f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
- Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que $V(f,[0,1]) < +\infty$ si et seulement s'il existe g et h croissantes telles que $f = g - h$.

Exercice 117 [ENS MP 2024 # 116] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $S_- = \{x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0\}$.

- L'ensemble S_- peut-il être fini non vide ?
- On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts tels que $S_- \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell(I_n) \leq \varepsilon$ (ou $\ell(I_n)$ designe la longueur de I_n). Montrer que f est croissante (donc $S_- = \emptyset$).

Exercice 118 [ENS MP 2024 # 117] Soient E un espace vectoriel, $C \subset E$ un ensemble convexe non vide, $a < b$ deux réels, et F l'ensemble des fonctions $f\colon C \to [a,b]$ convexes. Soit $x, y \in C$ fixes. Déterminer $\sup_{f\in F}\left(f(y) - f(x)\right)$. Déterminer les cas ou la borne supérieure est atteinte.

Exercice 119 Soit $C = [c,d]$ et F l'ensemble des fonctions $f\colon C \to [a,b]$ convexes. Soient $x < y \in C$ fixés. Déterminer $\sup_{f\in F}\left(f(y) - f(x)\right)$.

Exercice 120 [ENS MP 2024 # 118] Pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, on note $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq +\infty\}$. Si $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$, on définit $f^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ par $f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xy - f(x)\}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

- Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ telle que $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$. Montrer que $\mathrm{dom}(f^*)$ est un ensemble convexe et que f^* est convexe sur $\mathrm{dom}(f^*)$.
- Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable.
  On pose $E = \left\{(y,a) \in \mathbb{R}^2\,;\ \forall x \in \mathbb{R},\ xy - a \leq g(x)\right\}$.
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sup_{(y,a)\in E}(xy - a)$.
- En déduire que $(g^*)^* = g$.
- Étendre au cas ou g n'est pas dérivable.

Exercice 121 [ENS MP 2024 # 119] Soient I un intervalle réel contenant 0 et $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose qu'il existe $A, C > 0$ telles que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq C|f(x)| + A$.
Montrer que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leq |f(0)|e^{C|x|} + \dfrac{A}{C}\left(e^{C|x|} - 1\right)$.

Exercice 122 [ENS MP 2024 # 120] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue et dont une primitive est bornée. On suppose que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq \dfrac{2}{x^2}\int_0^x (x-y)\,|f(y)|dy$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelles généralisations peut-on étudier ?

Exercice 123 [ENS MP 2024 # 121] On note $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Une application $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^{+^*}$ est appelée une jauge. Soit $D = ((a_i)_{0\leq i\leq n}, (x_i)_{0\leq i\leq n-1})$ une subdivision pointée de $[a,b]$, c'est-a-dire $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ x_i \in [a_i, a_{i+1}]$. On dit que D est δ-fine lorsque pour tout i, $|a_{i+1} - a_i| \leq \delta(x_i)$.

- Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ telles que $\forall x, y \in [a,b], y \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
- Si δ est une jauge, montrer qu'il existe une subdivision pointée δ-fine.
- Redémontrer le theoreme de Heine pour f continue.
- Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et I un réel. On dit que f est HK-intégrable, d'intégrale I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ telle que, pour toute subdivision pointée $((a_i)_{0\leq i\leq n}, (x_i)_{0\leq i\leq n-1})$ δ-fine, on a $\left|\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f(x_i) - I\right|$ ε.
  Montrer que I est unique. On la note $\int_{HK} f$.
- Montrer que, si f est dérivable, f' est HK-intégrable et $\int_{HK} f' = f(b) - f(a)$.

Exercice 124 [ENS MP 2024 # 122] Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $P(0) \neq 0$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $z_1, \ldots, z_p$ les racines de module strictement inférieur à r de P comptées avec multiplicité. Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(|P(re^{it})|)dt = \ln(|P(0)|) + \sum_{k=1}^{p}\ln\left(\dfrac{r}{|z_k|}\right)$.

Exercice 125 [ENS MP 2024 # 123] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On dit qu'un endomorphisme u de E est positif si, pour tout $f \in E$, $f \geq 0$ implique $u(f) \geq 0$. On pose, pour $i \in \mathbb{N}$, $e_i : x \in [0,1] \mapsto x^i$.

- Soit u un endomorphisme positif de E. Montrer que pour tout $f \in E$, $|u(f)| \leq u(|f|)$.
- Soit $f \in E$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \dfrac{2\,\|f\|_\infty}{\delta^2}(x-y)^2$.
- Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite d'endomorphismes positifs de E. On suppose que, pour $i \in \{0,1,2\}$, la suite $(T_n(e_i))$ converge uniformément vers e_i sur $[0,1]$. Montrer que, pour tout $f \in E$, la suite $(T_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
- Démontrer le theoreme de Weierstrass.

Exercice 126 [ENS MP 2024 # 124] Soit $s > 1$. On dit que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est s-Gevrey s'il existe $R, C > 0$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq CR^k(k!)^s$.

- Soit $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+in^s x}$. Justifier que f est bien définie et s-Gevrey.
- Soit $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,e^{-1/x}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2-Gevrey.

Exercice 127 [ENS MP 2024 # 125] Pour $x > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on pose : $F_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}t^\alpha(1+t)^\beta\,\mathrm{d}t$.

- Pour quels (α,β) l'intégrale $F_{\alpha,\beta}(x)$ converge-t-elle absolument ?
- Pour un tel couple (α,β), étudier la régularite de $F_{\alpha,\beta}$.
- On pose $f\colon x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g\colon x \in]0,1[\mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Exprimer f et g en fonction des $F_{\alpha,\beta}$.
- Déterminer un développement asymptotique de $F_{\alpha,\beta}$ en $+\infty$.

Exercice 128 [ENS MP 2024 # 126] Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\,\Gamma(1/2)$.
- Montrer que, pour $x, y > 0$ et $\lambda \in [0,1]$, $\Gamma\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leq \Gamma(x)^{1-\lambda}\Gamma(y)^\lambda$.

- En déduire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n+1/2)^2 \leq \Gamma(n)\,\Gamma(n+1)\,; \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1)^2 \leq \Gamma(n+1/2)\Gamma(n+3/2)$.

- Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$. Démontrer que la suite $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers Γ.

Exercice 129 [ENS MP 2024 # 127] Soient $x, y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $x'(t) = \sin(y(t))$ et $y'(t) = \cos(x(t))$.

- Montrer que $f : t \mapsto \sin(x(t)) + \cos(y(t))$ est constante.
- Soit $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2}\left(x(t) + y(t) - \frac{\pi}{2}\right)$. Montrer que les points $(\sin(\varphi(t)), \varphi'(t))$ sont situes sur un même cercle dont on déterminera le rayon.

Exercice 130 [ENS MP 2024 # 128] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, E l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Pour $u \in E$, soit X_u l'unique application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $X_u(0) = x$ et $\forall t \in [0,1], X_u'(t) = AX_u(t) + Bu(t)$. Montrer que $\{X_u(1)\ ;\ u \in E\} = \mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice $(A|AB|\ldots|AB^{n-1})$ de $\mathcal{M}_{n,n^2}(\mathbb{R})$ est de rang n.

Exercice 131 [ENS MP 2024 # 129]

- Que dire du spectre complexe d'une matrice symétrique réelle ? d'une matrice antisymétrique réelle ?
- Soient $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ vérifiant : $A' = AB - BA$. On suppose que : $\forall t \in \mathbb{R}, A(t) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B(t) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = P(t)^{-1}A(0)P(t)$.
- On se place dans le cas $n = 2$ avec : $A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ a_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}$ et (S) : $a_1' = a_1(b_2 - b_1)$, $b_1' = 2a_1'$, $b_2' = -2a_1'$, $b_1(0) + b_2(0) = 0$ et $a_1(0), b_1(0) \geq 0$.
- Calculer $AB - BA$.
- Trouver une solution particuliere de (S) au voisinage de 0.

Exercice 132 [ENS MP 2024 # 130] Pour $k \geq 3$, on note $G_k : z \mapsto \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m+nz)^k}$.

- Montrer que $G_k(z)$ est bien défini pour tout complexe z tel que $\operatorname{Im} z > 0$ et que la fonction $(x,y) \mapsto G_k(x+iy)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer que $G_k(iy)$ admet une limite quand $y \to +\infty$.
- Étudier l'existence des limites suivantes :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+in)^2} \text{ et } \lim_{M\to\infty} \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+in)^2}, \text{ oi dans les deux cas la somme}$$

exclut $(n,m) = (0,0)$. Ces limites sont-elles égales ?

Exercice 133 [ENS MP 2024 # 131] Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3$. Démontrer que $(x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

Exercice 134 [ENS MP 2024 # 132] Soit $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (t,x) \mapsto F(t,x)$ continue et décroissante par rapport à x.
Soient u et v appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ 1-périodiques par rapport à x.

- On suppose que $\frac{\partial u}{\partial t} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \leq 0 \leq \frac{\partial v}{\partial t} + F\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$.
Démontrer que $\sup_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}(u-v) = \sup_{\{0\}\times\mathbb{R}}(u-v)$.
- On suppose que $\frac{\partial u}{\partial t} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$. Montrer que u est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Exercice 135 [ENS MP 2024 # 133] Soient $a > 0$, $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n > 0$. Calculer $\inf\limits_{\substack{y_1,\ldots,y_n>0 \\ y_1+\cdots+y_n\leq}} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i^a}$.

Exercice 136 [ENS MP 2024 # 134] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
On considére $n+1$ vecteurs $v_1, \ldots, v_{n+1}$ engendrant positivement $\mathbb{R}^n$, c'est à dire tels que $\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i,\ (\lambda_i)_{1\leq i\leq n+1} \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}\right\} = \mathbb{R}^n$.
Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue croissante telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\langle v_i, x\rangle)$.

- Montrer qu'il existe bien $n+1$ vecteurs $v_1, \ldots, v_{n+1}$ engendrant positivement $\mathbb{R}^n$.
- Montrer que g atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$.
- On suppose que f est intégrable en $-\infty$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} f(\langle v_i, x\rangle)v_i = 0$.

Exercice 137 [ENS MP 2024 # 135] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

- Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que vaut $d(A, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$?
- On note $S = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $M_0 \in S$ telle que $d(A,S) = \left\|\grave{A} - M_0\right\|$.
- Rappeler le résultat sur les extrema sous contrainte. Que peut-on en déduire sur la matrice M_0 définie ci-dessus ?

3) Géométrie

Exercice 138 [ENS MP 2024 # 136]
- Montrer que, si $n \geq 2$, le groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$ préservant les points dont les affixes sont les racines n-iemes de l'unite est un groupe d'ordre $2n$ que l'on note $\mathcal{D}_{2n}$.
- Soient p un nombre premier, G un groupe fini d'ordre $2p$. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ou à $\mathcal{D}_{2p}$.

Exercice 139 [ENS MP 2024 # 137]
- On note G le groupe (pour la composition) des deplacements du plan, i.e. des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Montrer que, si H est un sous-groupe de G, H est discret si et seulement si l'orbite de tout $z \in \mathbb{C}$ sous l'action de H n'a pas de point d'accumulation.
- Le résultat subsiste-t-il si on remplace G par le groupes des similitudes directes du plan, i.e. des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$?

4) Probabilités

Exercice 140 [ENS MP 2024 # 138] Soit E un espace vectoriel normé et soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. On considére des variables aléatoires $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ i.i.d telles que $\mathbf{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$. Si $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$, on pose $N(v_1, \ldots, v_n) = \mathbf{E}\left(\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k\|\right)$. Démontrer que, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [-1, 1]^n,\ N(\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n) \leq N(u_1, \ldots, u_n)$.

Exercice 141 [ENS MP 2024 # 139] On considére une pièce equilibrée et ε_n la valeur du n-ieme lancer que l'on considére à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Soient $X_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ et $\tau = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 0\}$. Déterminer $\mathbf{P}(\tau = n)$ ainsi qu'un équivalent de cette quantite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 142 [ENS MP 2024 # 140] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi de Poisson de paramêtre $\lambda > 0$, et Y la loi géométrique de paramêtre $p \in]0, 1]$.

- Montrer que $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = k)$. On pose $A = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.
- Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{rg}(A))$.
- Calculer $\mathbf{P}(A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ puis $\mathbf{P}(A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}))$.
- Déterminer la probabilité pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- On pose $B = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ X-Y & Y \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{P}(B \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$.
- Soient Z une variable aléatoire réelle et $C = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ Z & Y \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{P}(C \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$.
- Soit M une matrice aléatoire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la famille des coefficients est i.i.d., chaque coefficient suivant la loi uniforme sur $\{0, -1, 1\}$. Déterminer $P(M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 143 [ENS MP 2024 # 141] On note $E = [\![1, n]\!]$ et Δ la différence symétrique. Soit $p \in [0, 1]$ et X et Y deux variables aléatoires i.i.d de Ω dans $\mathcal{P}(E)$ telles que, pour tout $i \in E,\ \mathbf{P}(i \in X) = p$.

- Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{card}(X \Delta Y))$.
- On note $D(n)$ le cardinal maximal d'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ telle que, pour toutes parties A et B distinctes de $\mathcal{A}$, $|A \Delta B| \geq n/3$. Montrer qu'il existe $C > 0; D_n \geq C\sqrt{n}$

Exercice 144 [ENS MP 2024 # 142] Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Si N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $X_{N+n}(\omega) = X_{N(\omega)+n}(\omega)$.

- Existe-t-il N tel que $\mathbf{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_{N+n} = 1) = 1/2$?
- Existe-t-il N tel que $\mathbf{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\mathbf{P}(X_{N+n} = 1) = 1/2$?

Exercice 145 [ENS MP 2024 # 143] Soient $E = [\![1, n]\!]$ et $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ telle que $\forall i \in E,\ \mathbf{P}(i \in X) = p$ et, pour $i \neq j \in E$, $(i \in X)$ et $(j \in X)$ sont indépendants.

Pour Y variable aléatoire de même loi que X et indépendante de X, calculer $\mathbf{E}(|X \Delta Y|)$.

Exercice 146 [ENS MP 2024 # 144] Soient G un groupe fini de cardinal N, et A une partie de G aléatoire, ou l'on prend chaque élément de G indépendamment avec probabilité $p > 0$.

On note $\mathrm{AA} = \{xy,\ (x, y) \in A^2\}$.

- Montr per que $\mathbf{P}(1 \in \mathrm{AA})$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini.
- Montr per que $\mathbf{P}(\mathrm{AA} = G)$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini.

Exercice 147 [ENS MP 2024 # 145] Paley-Sigmund, trois séries de Kolmogorov
- Soit X une variable aléatoire réelle positive L^2. Montrer que, pour $\lambda \in]0, 1[$, $\mathbf{P}(X \geq \lambda \mathbf{E}(X)) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.
- Soit (u_n) une suite de variables aléatoires positives indépendantes. Montrer que la série $\sum u_n$ converge presque sûrement si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}(\min(u_n, 1)) < +\infty$.
- Soit $\alpha > 0$. On suppose que $\mathbf{P}(X_n \geq r) \underset{r \to +\infty}{\sim} r^{-\alpha}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ pour que $\sum x_n X_n$ converge presque sûrement.

Exercice 148 [ENS MP 2024 # 146] Soient $\lambda > 0$ et N_λ une variable de Poisson de paramètre λ.

Pour $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bornée, on pose $Tf : n \in \mathbb{N} \mapsto \lambda f(n+1) - nf(n)$.

- Montrer que $Tf(N_\lambda)$ est d'espérance finie, nulle.

- Pour μ et ν deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$, et X et Y variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ de lois respectivement données par μ et ν, on note $d(\mu,\nu)=d(X,Y)=\frac{1}{2}\sup_{\|g\|_\infty\leq 1}\mathbf{E}(g(X)-g(Y))$.
  Montrer l'existence de $C_\lambda>0$ tel que, pour toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $d(N,N_\lambda)\leq C_\lambda\sup_{\|f\|_\infty\leq 1}\mathbf{E}(Tf(N))$.

Exercice 149 [ENS MP 2024 # 147] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1,\ldots,x_n\}$. L'entropie de X est définie par $\mathcal{H}(X)=-\sum_{k=1}^n p_i\ln(p_i)$ avec $p_i=\mathbf{P}(X=x_i)$.

- Montrer que $\mathcal{H}(X)\geq 0$ avec égalité si et seulement si X est constante.
- Soit $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite positive telle que $p_1+\cdots+p_n=1$ et (q_i) une autre suite positive de somme 1.
  - ▹ Montrer que $\sum_{i=1}^n p_i\ln(p_i)\geq\sum_{i=1}^n p_i\ln(q_i)$. Expliciter le cas d'égalité.
  - ▹ Montrer que $\mathcal{H}(X)\leq\ln(n)$ avec égalité si et seulement si X suit une loi uniforme.
- Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\{x_1,\ldots,x_n\}^2$.
  On note $p_{i,j}=\mathbf{P}(X=x_i,Y=x_j)$ pour $1\leq i,j\leq n$.
  L'entropie de (X,Y) est $\mathcal{H}(X,Y)=-\sum_{i,j=1}^n p_{i,j}\ln(p_{i,j})$.
  Montrer que $\mathcal{H}(X,Y)\leq\mathcal{H}(X)+\mathcal{H}(Y)$.

Exercice 150 [ENS MP 2024 # 148] Soit $(E,\langle\ \rangle)$ un espace euclidien. Soient $v_1,\ldots,v_n\in E$ tels que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\|v_i\|\leq 1$. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in[-1,1]$ et $w=\sum_{i=1}^n\alpha_i v_i$. Montrer qu'il existe des $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}$ tels que $v=\sum_{i=1}^n\varepsilon_i v_i$ satisfait $\|v-w\|\leq\sqrt{n}$.

Exercice 151 [ENS MP 2024 # 149] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d sur $\mathbb{Z}$ à support fini suivant la loi μ. On pose $\nu(k)=\frac{e^{\lambda k}\mu(k)}{\mathbf{E}(e^{\lambda X_1})}$ et on considére une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ i.i.d suivant la loi ν. On pose $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$ et $T_n=\sum_{k=1}^n Y_k$. On prend $\lambda\geq 0, a\in\mathbb{R},\varepsilon>0,n\geq 1$.

- Montrer que $\mathbf{P}(na\leq T_n\leq(a+\varepsilon)n)\leq\frac{e^{\lambda n(a+\varepsilon)}}{(\mathbf{E}(e^{\lambda X}))^n}\mathbf{P}(S_n\geq na)$.
- On suppose $X\sim -X$ et $\exists k>a,\ (a>0),\ \mu(k)>0$.
  Démontrer que $\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(S_n\geq na)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\inf_{s\geq 0}(-sa+\log\mathbf{E}(e^{sX}))$.

Exercice 152 [ENS MP 2024 # 150] Soient $\sigma>0$, $n\geq 1$ un entier et $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires réelles discretes telles que pour tout $1\leq i\leq n$ et $s>0$, $\mathbf{E}\left(\exp(sX_i)\right)\leq\exp\left(\sigma^2 s^2\right)$. Montrer que $\mathbf{E}\left(\max_{1\leq i\leq n}X_i\right)\leq 2\sigma\sqrt{\ln n}$.

Exercice 153 [ENS MP 2024 # 151] Soient $n\geq 1$, $a>0$, et $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires discretes, indépendantes, d'espérance nulle, et à valeurs dans $[-a,a]$.

- Montrer que, pour tout $1\leq i\leq n$ et $s>0$, $\mathbf{E}\left[e^{sX_i}\right]\leq\exp\left(\frac{\mathbf{V}(X_i)}{a^2}\left(e^{as}-1-as\right)\right)$.
- On note $\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbf{V}(X_i)$. Montrer que, pour tout $t\geq 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right|\geq t\right)\leq 2\exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma^2+2at/3}\right).$$

Exercice 154 [ENS MP 2024 # 152] Pour $x>0$, on pose $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. On pourra utiliser sans demonstration le fait que $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1)=1$.

- Montrer que, pour tout $k\geq 1$ entier, $\Gamma(k)=(k-1)!$ et $\Gamma(k+1/2)\leq k!$.
- Soient $\sigma>0$ et X une variable aléatoire réelle discrete à valeurs dans un ensemble discret, telle que, pour tout $t\geq 0$, $\mathbf{P}\left(|X|>t\right)\leq 2\exp\left(-\dfrac{t^2}{2\sigma^2}\right)$. Montrer que, pour tout entier $k\geq 1$, $\mathbf{E}\left(|X|^k\right)\leq(2\sigma^2)^{k/2}k\Gamma(k/2)$.
- On suppose de plus que $\mathbf{E}\left(X\right)=0$. Montrer que $\forall s>0$, $\mathbf{E}\left[\exp(sX)\right]\leq\exp\left(4\sigma^2 s^2\right)$.

Exercice 155 [ENS MP 2024 # 153] Soient $n\geq 3$ un entier. Si $\sigma\in\mathcal{S}_n$, une suite alternante pour σ est une suite strictement croissante $(i_1)_{1\leq m}$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$ telle que :

- soit pour tout $k\in[\![2,\ell-1]\!]$, $\sigma(i_k)>\max\{\sigma(i_{k-1}),\sigma(i_{k+1})\}$;
- soit pour tout $k\in[\![2,\ell-1]\!]$, $\sigma(i_k)<\max\{\sigma(i_{k-1}),\sigma(i_{k+1})\}$.

On note $\Delta(\sigma)$ la longueur maximale d'une suite alternante pour σ et on considére σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Calculer $\mathbf{E}(\Delta(\sigma_n))$.

Exercice 156 [ENS MP 2024 # 154] Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires discretes réelles i.i.d. Pour $n\geq 1$, on note $M_n=\max\limits_{1\leq k\leq n}X_k$. Soit $\alpha>0$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists(a_n)_{n\geq 1}\in(\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}^*},\quad\forall x\geq 0,\quad\mathbf{P}\left(\dfrac{M_n}{a_n}\leq x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\exp(-x^{-\alpha})$,

(ii) $\forall x>0,\quad\dfrac{\mathbf{P}(X_1>xt)}{\mathbf{P}(X_1>t)}\xrightarrow[t\to\infty]{}x^{-\alpha}\qquad$ (et $\forall t>0,\mathbf{P}(X_1>t)>0$).

Exercice 157 [ENS MP 2024 # 155] Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n\sim\mathcal{B}\left(1/n\right)$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

- Montrer que, pour une indexation de sous-suite $(\varphi(n))_{n\geq 1}$ bien choisie, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{k\geq N}\left(\left|\dfrac{S_{\varphi(k)}}{H_{\varphi(k)}}-1\right|>\dfrac{1}{k}\right)\right)=0$.

- Montrer que l'évènement «$\left(\dfrac{S_n}{\ln(n)}\right)_{n\geq 1}$ converge» est presque sûr.

Exercice 158 [ENS MP 2024 # 156]
- Soient $n\in\mathbb{N}$, $(p_0,\dots,p_n)\in\{-1,1\}^{n+1}$. Montrer que les racines de $\sum_{i=0}^n p_iX^i$ dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur ou egal à 1.
- Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite réelle non identiquement nulle telle que $\sum a_kx^k$ ait pour rayon de convergence $R>0$. Si $j\in\mathbb{N}$, on dit que la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ change de signe en j s'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $a_ja_{j+k}<0$ et que $a_i=0$ pour $i\in[\![j+1,j+k-1]\!]$. Montrer que l'ensemble des $x\in]0,R[$ tels que $\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k=0$ est fini de cardinal majoré par le nombre de changements de signes de $(a_i)_{i\geq 0}$.
- Soit $(A_k)_{k\geq 0}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Pour $n\in\mathbb{N}$, soient $S_n=\sum_{k=0}^n A_k$ et N_n le nombre de $x\in]0,1[$ tels que $\sum_{i=0}^n A_ix^i=0$. Montrer que $N_n\leq\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\mathbb{1}_{S_{2k+1}=0}$ et en déduire que $\mathbf{E}(N_n)\underset{n\to+\infty}{=}O(\sqrt{n})$.

Exercice 159 [ENS MP 2024 # 157] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tous $n,k\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}\left(X_n=k\right)>0$. Soit $N\in L^2$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On pose $X=X_N$. **TODO**

- Montrer qu'il existe une unique fonction $f_0\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, que l'on déterminera, telle que $\mathbf{E}\left((f_0(X)-N)^2\right)=\min_{g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}}\mathbf{E}\left((g(X)-N)^2\right)$.
- On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $R(g,n)=\mathbf{E}\left((g(X_n)-n)^2\right)$. Montrer que, si la suite $(R(f_0,n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à un certain R_0, alors $R_0=\min_{g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}}\sup_{n\in\mathbb{N}}R(g,n)$ et f_0 est l'unique fonction vérifiant cette condition.

Exercice 160 [ENS MP 2024 # 158] Soient $a\in]0,1[$ et $m\in\mathbb{N}^*$. à l'aide d'une interprétation probabiliste, calculer la borne supérieure, pour $(u_n)_{n\geq 1}$ parcourant l'ensemble des suites à valeurs dans $[0,1]$, de

$$\sum_{1\leq n_1<n_2<\cdots<n_m}\prod_{\ell=1}^m u_{n_\ell}\prod_{n_{\ell-1}<k<n_\ell}(1-au_k).$$

II) ENS PSI 2024 **AUTRE**

1) Algèbre

Exercice 161 [ENS PSI 2024 # 159] $\!\!$Résoudre $X^2+X=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 162 [ENS PSI 2024 # 160] $\!\!$Soient $N\in\mathbb{N}^*$ et $x_0<x_1<\ldots<x_N$ des réels. On définit S_3^N l'ensemble des fonctions s de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0,x_N]$ tel que $\forall i\in[\![0,N]\!]$, $s_i=s_{|]x_i,x_{i+1}[}$ soit un polynôme de degré au plus 3.

- Montrer que S_2^3 est de dimension 5.
- Montrer que S_3^N est de dimension $N+3$.

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0,x_N]$. - Montrter qu'il existe une unique fonction s de S_3^N telle que $\forall i\in[\![0,N]\!],s(x_i)=f(x_i)$, $s'(x_0)=f'(x_0)$, $s''(x_0)=f''(x_0)$.

- Montrter qu'il existe une unique fonction s de S_3^N telle que :

$\forall i\in[\![0,N]\!],s(x_i)=f(x_i),\,s'(x_0)=f'(x_0),\,s''(x_N)=f''(x_N)$.

Exercice 163 [ENS PSI 2024 # 161]
- Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrter que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f^2)$.
- Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose f^2 diagonalisable. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 164 [ENS PSI 2024 # 162] Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit $F:\ E\to E$ par : $\forall u\in E,\ \forall n\in\mathbb{N},\ (F(u))_n=u_{n+1}$.

- Montrter que F est linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?
- Trouver $G\in\mathcal{L}(E)$ telle que $F\circ G=\mathrm{id}_E$. Que vaut $G\circ F$?

Dans la suite de l'exercice, on pose $E=\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ et on définit $F:\ E\to E$ par :

$\forall u\in E,\ \forall n\in\mathbb{Z},\ (F(u))_n=u_{n+1}+u_{n-1}$.

- Montrter que F est linéaire. Est-elle injective ?
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrter qu'il existe une matrice $M_\lambda\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dependante de λ telle que :

$\forall u\in E,\,u\in\mathrm{Ker}(F-\lambda\mathrm{id})\Leftrightarrow\forall k\in\mathbb{Z},\begin{pmatrix}u_k\\u_{k+1}\end{pmatrix}=M_\lambda^k\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}$.

En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(F-\lambda\mathrm{id})$.

- Montrter que si $|\lambda|\neq 2$ alors M_λ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Donner ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.
- Si $|\lambda|\neq 2$, l'espace $\mathrm{Ker}(F-\lambda\mathrm{id})$ contient-il des suites périodiques non nulles ?
- Traiter le cas $|\lambda|=2$.

Exercice 165 [ENS PSI 2024 # 163] Pour toute matrice $A∈M_n(C),$ on note $\rho(A)=\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}|\lambda|$. On admet que, pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe D,N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement diagonale et nilpotente telles que $DN=ND$, et $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A=P(D+N)P^{-1}$.

- Pour cette question seulement on pose $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
- Déterminer $\rho(A)$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
- Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$ et trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum A^k$ converge.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ montrer que : $\sum A^k$ converge si et seulement si $\rho(A) < 1$.
- Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\rho(A)\rho(B) < 1$. Montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $ADB - D = C$.

Exercice 166 [ENS PSI 2024 # 164] On dit que $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unipotente si $U - I_n$ est nilpotente. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On admet qu'il existe un unique couple (D_0, N_0) avec D_0 diagonalisable et N_0 nilpotente tel que $A = D_0 + N_0$ et $D_0 N_0 = N_0 D_0$.

- Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unipotente.
- Montrer que $\mathrm{Sp}(U) = \{1\}$.
- Calculer U^{-1} en fonction de $N = U - I_n$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $D_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On suppose $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Montrer que $D_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Montrer qu'il existe un unique couple (D, U) tel que $A = DU$, $DU = UD$ et D diagonale, U unipotente.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 167 [ENS PSI 2024 # 165] Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$.
On note $\mathcal{S} = \{[A, B]\ ,\ (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2\}$

- Si $M \in \mathcal{S}$, montrer que $\mathrm{Tr}(M) = 0$.
- Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par multiplication par un scalaire.
- Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par similitude.
- Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
- Soient $D = \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n)$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices de diagonale nulle. Montrer que l'application $M \mapsto [D, M]$ est un automorphisme de $\mathcal{N}$.
- Montrer que $\mathcal{N} = \mathcal{S}$.

Exercice 168 [ENS PSI 2024 # 166] Soit $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

- Montrer que si B est diagonalisable alors e^B l'est aussi.
- Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ diagonalisable ayant n valeurs propres distinctes $\mu_1, \ldots, \mu_n$.
- Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall 1 \leq j \leq n$, $Q(\mu_j) = e^{\mu_j}$.
- Montrer que $Q(A) = e^A$.
- On considére $\exp : M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mapsto e^M$.
- Soit $C = \mathrm{Diag}(-1, -2, ..., -d)$. Pourquoi est-elle inversible ?
- Montrer que, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, alors $e^\lambda \in \mathrm{Sp}(e^M)$.
- Montrer qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $C = e^M$.
- Que dire de exp ?

Exercice 169 [ENS PSI 2024 # 167] • On considére la fonction f définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par : $f(X) = \frac{1}{2} X^T A X - B^T X$ ou $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que f est minorée si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et $B \in \mathrm{Im}(A)$

- Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $i = 1, 2$, on note $f_i : X \mapsto \frac{1}{2} X^T A_i X - B_i^T X$. On suppose que f_1 et f_2 sont minorées et que, pour tout X, $\|\nabla_X f_1\| = \|\nabla_X f_2\|$. Montrer que $f_1 = f_2$.
- Soient A_1, A_2 dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Im}(A_1 + A_2) = \mathrm{Im}(A_1) + \mathrm{Im}(A_2)$. En déduire que $\mathrm{Ker}(A_1 + A_2) = \mathrm{Ker}(A_1) \cap \mathrm{Ker}(A_2)$.

2) Analyse

Exercice 170 [ENS PSI 2024 # 168] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\|M\|_\infty = \sup_{X \neq 0, X \in \mathbb{R}^n} \frac{\|MX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$.
Montrer que $\|M\|_\infty = \sup_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|$.

Exercice 171 [ENS PSI 2024 # 169] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathbb{B}_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices bistochastiques, c'est-a-dire des matrices $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ à coefficients dans $[0, 1]$ telles que : $\forall i \in [\![1, d]\!]$, $\sum_{k=1}^d p_{i,k} = 1$ et $\forall j \in [\![1, d]\!]$, $\sum_{k=1}^d p_{k,j} = 1$ On note $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de permutation, c'est-a-dire des matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de la forme $\left(\delta_{\sigma(i),j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ ou $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

- Montrer que $\mathbb{B}_d(\mathbb{R})$ est convexe. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$?
- Montrer que $\mathbb{B}_d(\mathbb{R})$ est borne et ferme.
- Montrer que $\mathbb{P}_d(\mathbb{R}) \subset \mathbb{B}_d(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$ est fermé.

On admet le$_{\text{theoreme}}$ de Birkhoff_ : La matrice P appartient à $\mathbb{B}_d(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe un entier naturel $m \leq (d-1)^2 + 1$, des matrices $P_1, \ldots, P_m$ dans $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ positifs de somme 1 tels que $P = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$.

- Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Montrer que φ admet un minimum sur $\mathbb{B}_d(\mathbb{R})$, et que celui-ci est atteint sur $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$.
- Soient $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $P, Q \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$. Montrer que $\|QMP\| = \|M\|$.
- Soient $A, B \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ orthosemblables aux matrices diagonales D_A et D_B. Montrer l'existence de $P \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ telle que $\|A - B\| = \|D_A P - P D_B\|$.

On note $R = \left(p_{i,j}^2\right)_{1 \le i,j \le d}$.

- Montrer que $R \in \mathbb{B}_d(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\|A - B\|^2 = \sum_{1 \le i,j \le d} r_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$ ou les $\lambda_i(A)$ (resp. $\lambda_i(B)$) sont les valeurs propres de A (resp. B).

Exercice 172 [ENS PSI 2024 # 170] On dit qu'une suite (u_n) à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m, n \ge N \Rightarrow \|u_n - u_m\| \le \varepsilon$.
On admet qu'une suite réelle est de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

- Montrer qu'une suite complexe est de Cauchy si et seulement si elle converge.
- On se place dans l'espace $\ell^2(\mathbb{C})$ des suites complexes (u_n) telles que $\sum |u_n|^2$ converge.

Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$ on pose $\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{1/2}$.
Montrer qu'une suite à valeurs dans $\ell^2(\mathbb{C})$ est de Cauchy (au sens de $\|\ \|_2$) si et seulement si elle converge.

Exercice 173 [ENS PSI 2024 # 171] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega_n = e^{2i\pi/n}$.On définit une application $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ en posant, pour $v = (v_1 \cdots v_n)^T$, $\mathcal{F}(v) = (\zeta_1 \cdots \zeta_n)^T$ ou, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\zeta_k = \sum_{j=1}^n v_j \omega_n^{(k-1)(j-1)}$.

- Montrter que $\mathcal{F}$ est linéaire et donner sa matrice A dans la base canonique.
- Calculer $\overline{A}^T A$ et déterminer $\mathcal{F}^{-1}$.
- Pour $v = (v_1 \cdots v_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose $\|v\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |v_k|^2\right)^{1/2}$.

Montrer que $\|\mathcal{F}(v)\|_2 = \sqrt{n}\,\|v\|_2$.

Exercice 174 [ENS PSI 2024 # 172] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\|M\|_2 = \sup_{X \ne 0, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \frac{|MX|_2}{|X|_2}$ et $k(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- Rappeler la définition de la norme euclidienne $|\ |_2$ et montrer que $\|M\|_2 = \sup_{|X|_2 = 1} |MX|_2$.
- Montrer que $\|\ \|_2$ est une norme et que $\forall M_1, M_2, \|M_1 M_2\|_2 \le \|M_1\|_2 \|M_2\|_2$.
- Montrer qu'il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $|MX|_2 = \|M\|_2 |X|_2$.
- Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Soient $\sigma_1 \le \cdots \le \sigma_n$, les valeurs propres de $A^T A$. Montrer que $k(A) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_1}}$.
- On suppose $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Calculer $\|A\|_2$ et en déduire $k(A)$.
- Montrer que $k(A) = 1$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = \alpha Q$.

Exercice 175 [ENS PSI 2024 # 173] On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne canonique. Pour toute partie A non vide bornée on définit le diamêtre de A par $d(A) = \sup\{\|x - y\|,\ (x, y) \in A^2\}$.
Soit X une partie bornée. Pour $\rho > 0$ on définit un ρ-recouvrement de X comme une famille $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dénombrable de parties bornées telle que $X \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ et $\forall k \in \mathbb{N}\colon\ d(A_k) \le \rho$.
On définit, pour $s \ge 0$:

$$H_s^\rho(X) = \inf \left\{ \sum_{k \ge 0} d(A_k)^s\ \ (A_k)_{k \in \mathbb{N}}\ \rho\text{-recouvrement de } X \right\}.$$

- Montrer que $H_s^\rho(X)$ est fini et qu'il est décroissant en ρ.
- Montrer que $H_s(X) = \sup_{\rho > 0}(H_s^\rho(X)) = \lim_{\rho \to 0}(H_s^\rho(X))$ est décroissante par rapport à s.
- Calculer $H_0(X)$ et $H_s(X)$ pour $s > n$.
- Pour X partie bornée et v vecteur de $\mathbb{R}^n$, comparer $H_s(X + v)$ et $H_s(X)$.
- Pour $\lambda > 0$, comparer $H_s(\lambda X)$ et $H_s(X)$.
- Soient X et Y deux parties bornées telles que $\inf_{x \in X, y \in Y} \|x - y\| > 0$.

Montrer que $H_s(X \cup Y) = H_s(X) + H_s(Y)$.

- Soit $s \ge 0$. Montrer que si $H_s(X) < +\infty$ alors $H_t(X) = 0$ pour tout $t > s$.
- Soit $s \ge 0$. Montrer que si $H_s(X) > 0$ alors $H_t(X) = +\infty$ pour tout $t < s$.

Exercice 176 [ENS PSI 2024 # 174] Pour $f \in \mathcal{C}^3([-1,1], \mathbb{R})$ et $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}$, on note $I_{app}(f) = w_1 f(-2/3) + w_2 f(0) + w_3 f(2/3)$.

- Déterminer w_1, w_2, w_3 de sorte que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $I_{app}(P) = \int_{-1}^1 P$.

On prendra ces valeurs de w_1, w_2, w_3 dans toute la suite.

- A-t-on toujours $I_{app}(P) = \int_{-1}^1 P$ pour $\deg(P) \ge 3$?
- Soient $f \in \mathcal{C}^3([-1,1], \mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(-2/3) = P(-2/3)$, $f(0) = P(0)$ et $f(2/3) = P(2/3)$.

Montr per que $\|f-P\|_{\infty,[-1,1]} \leq C\|f^{(3)}\|_{\infty,[-1,1]}$ ou $C=\frac{1}{6}\sup_{x\in[-1,1]}|x(x+2/3)(x-2/3)|$.

Ind. Considérer l'application $t\mapsto f(t)-P(t)-(f(x)-P(x))\frac{(t+2/3)t(t-2/3)}{(x+2/3)x(x-2/3)}$ pour $x\notin\{-2/3,0,2/3\}$.

- En déduire une majoration de $\left|I_{app}(f)-\int_{-1}^1 f\right|$ en fonction de $\|f^{(3)}\|_{\infty,[-1,1]}$.

Exercice 177 [ENS PSI 2024 # 175] Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ carre intégrable. Pour $x\in\mathbb{R}^{+*}$, on pose $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Montr per que g est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Montr per que g^2 est intégrable et que $\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leq 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$
- Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition nécessaire et suffisante d'égalité. Discuter de l'optimalite de la constante 4.

Exercice 178 [ENS PSI 2024 # 176] • Soient $a,b\in\mathbb{R}$ avec $0<a<b<1$, $I=[a,b]$ et $\varphi: x\in I\mapsto 2x(1-x)$. Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ définie par $\varphi_0=\varphi$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ \varphi_{n+1}=\varphi\circ\varphi_n$. Étudier la convergence sur I de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 0}$

- Soit $P: I\to\mathbb{R}$ une fonction polynomiale. Montr per qu'il existe une suite de fonctions polynomiales à coefficients entiers qui converge uniformément vers P sur I.

Exercice 179 [ENS PSI 2024 # 177] • Existe-t-il une fonction $g\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ telle que pour toute fonction f polynomiale on ait $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(g(x))$?

- Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum n!\,z^{n^2}$
- Existe-t-il une fonction $g\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ telle que, pour toute fonction f développable en série entière, $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(g(x))$?
- Une fonction est dite analytique si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de son domaine de définition. Montr per que, si f est limite simple de polynômes à coefficients positifs sur $\mathbb{R}^+$, alors elle est analytique sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 180 [ENS PSI 2024 # 178] • Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $t\mapsto|P(t)|^{-1/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

- Soit F une fraction rationnelle complexe. Montr per que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\deg(F)\leq -2$ et F n'a pas de pole réel.On écrit alors $F(X)=\sum_{x\in\mathbb{C}}\left(\frac{a_{x,n_x}}{(X-x)^{n_x}}+\ldots+\frac{a_{x,1}}{X-x}\right)$, ou les $a_{x,j}$ sont dans $\mathbb{C}$.

Montrer que $\int_{\mathbb{R}} F(t)\,\mathrm{d}t = i\pi\sum_{x\in\mathbb{C}}\xi(x)a_{x,1}$ ou $\xi(x)$ designe le signe de $\mathrm{Im}(x)$.

- Soit P un polynôme complexe non constant. En etudiant la fonction $F: r\mapsto\int_0^{2\pi}\frac{dt}{P(re^{it})}$, démontrer le theoreme de d'Alembert-Gauss.

Exercice 181 [ENS PSI 2024 # 179] On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique note $\langle\ \rangle$. On considére Q ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$\forall\lambda\in[0,1],\forall x,y\in\mathbb{R}^n, f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\max(f(x),f(y))$

- Pour $n=1$, trouver une fonction $f\in Q$ autre qu'une fonction affine.
- On fixe $x,h\in\mathbb{R}^n$. On pose, pour $t\in\mathbb{R}$, $g(t)=f(x+th)-f(x)$. Exprimer $g'(t)$.
- Montrer que $f\in Q$ si et seulement si, pour tous $x,y\in\mathbb{R}^n$ tels que $f(y)\leq f(x)$, on a $\langle\nabla f(x),y-x\rangle\leq 0$.
- Pour $f\in Q$ de classe $\mathcal{C}^2$, on pose $\forall t\in\mathbb{R}$, $g(t)=f(x+th)-f(x)$. Calculer $g''(0)$.
- On suppose $\langle\nabla f(x),h\rangle=0$. Que dire du signe de $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)h_ih_j$?

3) Probabilités

Exercice 182 [ENS PSI 2024 # 180] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note G sa série generatrice et R le rayon de convergence de G.

- Justifier que $R\geq 1$.
- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $(G_{X_n})_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]-R,R[$ vers une fonction notée G. La fonction G est-elle nécessairement la série generatrice d'une variable aléatoire ?

Exercice 183 [ENS PSI 2024 # 181] On considére un de equilibre cubique. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre obtenu à un lancer. Donner sa série generatrice.

- On note Y la variable aléatoire qui correspond à la somme des lancers de deux des cubiques equilibres. Donner sa série generatrice.
- Est-il possible de truquer le de utilise de sorte que Y suive la loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$?

Exercice 184 [ENS PSI 2024 # 182] Soit $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toute la loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$.

- On note $U=\min\{k\in\mathbb{N}^*,\ Z_k=0\}\in\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$.
- Déterminer $\mathbf{P}(U>k)$ et $\mathbf{P}(U=k)$.
- En déduire $\mathbf{P}(U=+\infty)$.
- Donner $\mathbf{E}(U)$ et $\mathbf{V}(U)$.
- On définit $V=\min\{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ Z_{k-1}=Z_k=1\}\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.
- Déterminer $\mathbf{P}(V=k)$ pour $k=1,2,3,4$.
- Montrer que $\mathbf{P}(V>n)\leq\mathbf{P}(V>n-2)p(2-p)$.

- En déduire $\mathbf{P}(V=+\infty)$. - Trouver une relation de récurrence linéaire vérifiée par la suite $(\mathbf{P}(V=k))$. - Montrer que V est d'espérance finie et calculer $\mathbf{E}(V)$.

Exercice 185 [ENS PSI 2024 # 183] On munit $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ de la distribution uniforme de probabilité.

On se donne $X_1,\ldots,X_{n-1}$ des variables aléatoires réelles telles que :

- pour $i\neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.
- pour tout i, $X_i(\Omega)$ est de cardinal au moins 2.
- pour tout i, $\mathbf{E}(X_i)=0$ et $\mathbf{V}(X_i)=1$.

Pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$, on pose $x_i=(X_i(\omega_1),\ldots,X_i(\omega_n))$ et on note $x_n=(1,\ldots,1)$. On note $\langle\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

- On se donne une variable aléatoire Z à valeurs discretes et on note $Z(\Omega)=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$, les α_i etant deux à deux distincts. On suppose $m\geq 3$.
- Montrer que $\mathbf{E}(Z)=\frac{1}{\pi}\langle z,x_n\rangle$ ou $z=(Z(\omega_1),\ldots,Z(\omega_n))$.
- Montrer qu'il existe $\beta_1,\ldots,\beta_m\in\mathbb{R}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=1}^{m}\mathbf{P}(Z=\alpha_k)\beta_k=0 \text{ et } \sum_{k=1}^{m}\mathbf{P}(Z=\alpha_k)\beta_k\alpha_k=0$$

- En déduire qu'il existe $Q\in\mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que :

$Q(Z)\neq 0$ $\mathbf{E}(Q(Z))=0$ et $\mathbf{E}(Q(Z)Z)=0$.

- Montrer que, pour $(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2$, $\langle x_i,x_j\rangle=n\delta_{i,j}$.
- En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1}X_k^2=n-1$.
- Montrer que, pour tout i entre 1 et \$n-1,\$ on a $\mathbf{E}(X_i^3)=0$.

Exercice 186 [ENS PSI 2024 # 184] Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discretes telles que $\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(Y)=0$ et $\mathbf{V}(X)=\mathbf{V}(Y)=1$. On pose $\rho=\mathbf{E}(XY)$.

- Enoncer les inégalités de Markov et de Bienayme-Tchebychev.
- Montrer que $\forall t\in[-1,1], \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2-2txy\geq(1-t^2)\max(x^2,y^2)$.
- Soit $\lambda>0$. Montrer que $\mathbf{P}(|X|\geq\lambda$ ou $|Y|\geq\lambda)\leq\frac{2}{\lambda^2}$.
- Montrer que $2(1-t\rho)\geq(1-t^2)\lambda^2\,\mathbf{P}(|X|\geq\lambda$ ou $|Y|\geq\lambda)$.
- Montrer que $\mathbf{P}(|X|\geq\lambda$ ou $|Y|\geq\lambda)\leq\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\lambda^2}$.
- Montrer que l'inégalité de Bienayme-Tchebychev en est une consequence.
- Pour $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}^+)^2$, donner une majoration de $\mathbf{P}(|X|\geq\alpha$ ou $|Y|\geq\beta)$.

Exercice 187 [ENS PSI 2024 # 185] Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher.

- On pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de S_n.
- Montrer que, pour tout $a\in\mathbb{R}$, on a $\mathbf{P}(S_n\geq na)\leq\frac{1}{na^2}$.
- Montrer que, pour toute variable aléatoire à valeurs réelles X, pour tout $a\in\mathbb{R}$ et pour tout $s\in\mathbb{R}^{+*}$: $\mathbf{P}(X\geq a)\leq\frac{\mathbf{E}\left(e^{sX}\right)}{e^{sa}}$.
- Montrer que $\forall s\in\mathbb{R}^{+*}, \mathbf{P}(S_n\geq na)\leq\left(\frac{\mathrm{ch}(s)}{e^{sa}}\right)^n$. - Montrer que : $\forall s\in\mathbb{R}, \mathrm{ch}(s)\leq e^{s^2/2}$_._
- En déduire que : $\mathbf{P}(S_n\geq na)\leq e^{-na^2/2}$.

Exercice 188 [ENS PSI 2024 # 186] Soit $a<0<b$ des nombres réels. On pose $f:\ x\mapsto\frac{ax}{b-a}+\ln\left(1+\frac{a(1-e^x)}{b-a}\right)$.

- Déterminer l'ensemble de définition D de f et montrer : $\forall x\in D, 0\leq f''(x)\leq 1/4$.
- En déduire : $\forall x\in D, 0\leq f(x)\leq x^2/8$.
- Soient X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)\subset[a,b]$.

Montrer : $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \mathbf{E}(e^{\lambda X})\leq\frac{b-\mathbf{E}(X)}{b-a}e^{\lambda a}+\frac{\mathbf{E}(X)-a}{b-a}e^{\lambda b}$.

- Dans le cas particulier ou $\mathbf{E}(X)=0$, montrer : $\mathbf{E}(e^{\lambda X})\leq e^{f(\lambda(b-a))}$.
- En déduire dans le cas general : $\mathbf{E}(e^{\lambda X})\leq e^{\lambda\mathbf{E}(X)+\lambda^2(b-a)^2/8}$.
- Pour tout $\varepsilon>0$, montrer : $\mathbf{P}(|X-\mathbf{E}(X)|\geq\varepsilon)\leq 2\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$.
- Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. On pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$. On suppose que, pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$, $X_k(\Omega)\subset[a_k,b_k]$. Montrer pour tout $\varepsilon>0$: $\mathbf{P}(|S_n-\mathbf{E}(S_n)|\geq\varepsilon)\leq 2\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)^2}\right)$.

III) ENS - PC

1) Algèbre

Exercice 189 [ENS PSI 2024 # 187] • Soit $X \subset \mathbb{N}$ telle que 0 et 1 appartiennent à X et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}(X \cap [\![0, n]\!]) = 0$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $j \in \mathbb{N}$ telle que $\mathrm{Card}(X \cap [\![j, j+k]\!]) = 2$.

- Montrer qu'il existe 100 entiers consécutifs contenant exactement 5 nombres premiers.

Exercice 190 [ENS PSI 2024 # 188] Soient deux réels a et b. On pose $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + X$. On suppose que les racines de P sont toutes distinctes deux à deux et qu'elles appartiennent à un même cercle du plan complexe. Montrer que $3 < ab < 9$.

Exercice 191 [ENS PSI 2024 # 189] Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 2 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = XP_n'$. Montrer qu'il existe une suite de réels positifs $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines complexes de P_n appartiennent au disque de centre 0 et de rayon λ_n.

Exercice 192 [ENS PSI 2024 # 190] Soit E l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients 0 ou 1 qui sont inversibles. Quel est le nombre maximal de 1 d'un élément de E ?

Exercice 193 [ENS PSI 2024 # 191] On dit qu'une matrice est positive si tous ses coefficients sont positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :
(i) A est monotone, c'est-à-dire A est inversible et A^{-1} positive,
(ii) $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$.

Exercice 194 [ENS PSI 2024 # 192] Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall A \in E, \mathrm{rg}(A) \leq 1$. Montrer que $\dim(E) \leq n$.

Exercice 195 [ENS PSI 2024 # 193] Déterminer les $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 196 [ENS PSI 2024 # 194] Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes d'indice $n-1$.

Exercice 197 [ENS PSI 2024 # 195] Existe-t-il deux matrices N et P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $N^2 = 0$, $P^2 = P$, NP est nilpotente et \$(NP)$^{2\neq}$ 0\,\$?

Exercice 198 [ENS PSI 2024 # 196] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = 0$. Montrer qu'il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X + MX + XM^2 = M$.

Exercice 199 [ENS PSI 2024 # 197] On pose $A_0 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 5/4 \end{pmatrix}$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = 2A_n - A_n^2$. Déterminer la limite de $(\det(A_n))$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 200 [ENS PSI 2024 # 198] On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = \left(\begin{array}{cc} A_n & I_{2^n} \\ \hline I_{2^n} & A_n \end{array}\right)$. Montrer que A_n admet $(n+1)$ valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ d'ordres respectifs $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n$.

Exercice 201 [ENS PSI 2024 # 199] On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $M = \left(\langle X^i, X^j\rangle\right)_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}$ est inversible.

Exercice 202 [ENS PSI 2024 # 200] Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels.
Pour des polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k)\, Q^{(k)}(a_k)$.

- Montrer que $\langle\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- Montrer qu'il existe une base $(P_0, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, orthonormée pour ce produit scalaire et telle que, pour chaque $i \in [\![0\,;\,n]\!]$, le polynôme P_i soit de degré i et à coefficient dominant strictement positif.
- Déterminer $P_k^{(k)}(a_k)$ pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$.
- On suppose $a_0 = \cdots = a_n = a$. Déterminer les polynômes P_k.

Exercice 203 [ENS PSI 2024 # 201] Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \ldots, f_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, \exists i \in \{1, \ldots, k\},\ \langle x, f_i\rangle > 0$.

- Donner un exemple de famille de $\mathbb{R}^n$ vérifiant cette propriété.
- Montrer que $(f_1, \ldots, f_k)$ est une famille generatrice de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 204 [ENS PSI 2024 # 202] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En notant $(s_1, \ldots, s_n)$ les valeurs propres de M, on pose

$$N_p(M) = \left(\sum_{i=1}^n |s_i|^p\right)^{1/p}.$$

- Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En déduire que N_2 est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $N_1(M) = \sup\{|\mathrm{tr}(MO)|,\ O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$. En déduire que N_1 est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 205 [ENS PSI 2024 # 203] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de A sont imaginaires pures.
- Que dire de $\det(A)$ si n est impair ?
- On suppose n pair et on considére la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que $\det(A+J) = \det(A)$

Exercice 206 [ENS PSI 2024 # 204] Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]^2}$ vérifiant $\forall(i,j) \in [1,n]^2,\ a_{i,j} \in \{0,1\}$. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont egaux à 1. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^T A = kI_n + J$. Montrer que A est inversible.

Exercice 207 [ENS PSI 2024 # 205] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$.

- Quelles sont les valeurs propres complexes possibles de A ?
- Donner un exemple de matrice A qui vérifie $A^2 = A^T$ et qui possède toutes les valeurs propres possibles trouvées à la question précédente.

Exercice 208 [ENS PSI 2024 # 206] • Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que les assertions sont équivalentes :
(i) S admet k valeurs propres positives (comptées avec multiplicité),
(ii) il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $\dim F = k$, $\dim G = n-k$ et $\forall X \in F,\ X^T SX \geq 0$ et $\forall Y \in G$, $Y^T SY \leq 0$.

- Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^T SP$ et S ont le même nombre de valeurs propres positives.

Exercice 209 [ENS PSI 2024 # 207] • Montrer que toute matrice symétrique positive admet une racine carrée.

- Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe S symétrique définie positive telle que $SA = A^T S$.

Exercice 210 [ENS PSI 2024 # 208] Soit E un espace euclidien. Soit a un endomorphisme autoadjoint de E. Soient $u \in E$ non nul et $V = \mathrm{Vect}\left\{a^k(u)\ ;k \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que l'endomorphisme induit par a sur V n'a que des valeurs propres simples.

2) Analyse

Exercice 211 [ENS PSI 2024 # 209] Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^2$. On dit que $x,\ y\ \in A$ sont connectes si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{C}^0([0,1], A)$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.

- Montrer que tous les points de $\mathbb{R}^2$ sont connectes.
- Déterminer les points connectes de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- Déterminer les points connectes de $\mathbb{R}^2 \setminus \{x,\ \|x\| = 1\}$. - Déterminer les points connectes de $\mathbb{R}^2 \setminus \underset{i\in\mathbb{Z}^2}{\cup} \mathcal{B}_o(i,\varepsilon)$ ou $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 212 [ENS PSI 2024 # 210] On considére $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sup\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$, ou le spectre est pris sur $\mathbb{C}$. L'application f est-elle lipschitzienne ?

Exercice 213 [ENS PSI 2024 # 211] On pose $a_1 \geq 0$ puis $a_{n+1} = 10^n {a_n}^{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. à quelle condition sur a_1 la suite (a_n) tend-elle vers 0 ?

Exercice 214 [ENS PSI 2024 # 212] On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$. Donner un équivalent de $f(n)$.

Exercice 215 [ENS PSI 2024 # 213] Étudier les suites u et v telles que $u_0 = v_0 = 0$ et $u_1 = v_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $\begin{cases} u_{n+1} &= au_n + bv_n + cu_{n-1} + dv_{n-1} \\ v_{n+1} &= a'u_n + b'v_n + c'u_{n-1} + d'v_{n-1} \end{cases}$. avec toutes les constantes réelles.

Exercice 216 [ENS PSI 2024 # 214] Pour $a \in \mathbb{R}$, soit (u_n) définie par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n, x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$.

- Pour quelles valeurs de a a-t-on $\forall n, u_n \in [0,1]$? Que peut-on dire alors de la suite (x_n) ?
- Montrer que, si $a \in [1,2]$, alors x_n tend vers $\frac{a-1}{a}$.
- On suppose que $a \in [2,3]$ et que (x_n) converge. Quelle est la limite de (x_n) ?

Exercice 217 [ENS PSI 2024 # 215] Soit $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs ou nuls telle que $p_{i,j} = 0$ si $j > i$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{n} p_{n,j} = 1$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

- pour chaque $j \in \mathbb{N}$, la suite $(p_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0,
- pour toute suite convergente $(s_n)_{n\geq0}$ de limite S, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} p_{n,j}s_j = S$.

Exercice 218 [ENS PSI 2024 # 216] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 \neq u_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})} f(u_n)$.

- Montrer que, si u_0 et u_1 sont assez petits, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Sous les hypotheses de -, déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 219 [ENS PSI 2024 # 217] Pour $c \in \mathbb{C}$, on définit la suite (z_n) par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C},\ (z_n) \text{ est bornée}\}$.

- Montrer que, si $|c| \leq 1/4$, alors $c \in \mathcal{M}$.
- Montrer que, si $|c| \geq 3$, alors $c \notin \mathcal{M}$.
- Discuter de l'ensemble $\mathcal{M} \cap \mathbb{R}$.

Exercice 220 [ENS PSI 2024 # 218] Soient $(a_n)_{n\geq0}$ et $(b_n)_{n\geq0}$ deux suites réelles. Soit $S \in \mathbb{R}$. On suppose que :
(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n > 0$; (ii) la série $\sum b_n$ diverge ; (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = S$.Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_0+\cdots+a_n}{b_0+\cdots+b_n} = S$.

Exercice 221 [ENS PSI 2024 # 219] Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = A$. Quelles sont les valeurs que peut prendre $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$?

Exercice 222 [ENS PSI 2024 # 220] Soit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g(0) = g'(0) = 0$ et $g''(0) > 0$. Pour $\lambda > 0$, on pose $A_\lambda = \{x > 0,\ g(x) = \lambda x\}$. Montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\forall \lambda \in]0,\mu]$, $A_\lambda \neq \emptyset$.

Exercice 223 [ENS PSI 2024 # 221] Soient $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. On suppose que $f+g$ est croissante. Montrer que $f([0,1])$ est un intervalle.

Exercice 224 [ENS PSI 2024 # 222] Trouver toutes les fonctions $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)^2=f\left(t\sqrt{2}\right)$.

Exercice 225 [ENS PSI 2024 # 223] Soient $f,g:[0,1]\to[0,1]$ continues. On suppose $f\circ g=g\circ f$ et g croissante. Montrer que f et g admettent un point fixe commun.

Exercice 226 [ENS PSI 2024 # 224] Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ telles que : $\forall(x,y)\in[-1,1]^2,\ f(x)-f(y)\geq f(x)^2(x-y)$.

Exercice 227 [ENS PSI 2024 # 225] Déterminer les fonctions $f\in\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ telles que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f\left(7x+1\right)=49f\left(x\right)$.

Exercice 228 [ENS PSI 2024 # 226] Soit $f:t\mapsto\sum_{k=1}^{N}a_k\sin(2\pi kt)$ ou les a_k sont des nombres réels avec $a_N\neq 0$. On note N_j le nombre de racines comptées avec multiplicité (notion qu'on admettra) de $f^{(j)}$ sur $[0,1]$. Montrer que $(N_j)_{j\geq 0}$ est une suite croissante qui tend vers $2N$.

Exercice 229 [ENS PSI 2024 # 227] Soit $V=\{f\in\mathcal{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})\ ;\ f(0)=0 \text{ et } f(1)=1\}$. Trouver tous les réels α tels que : $\forall f\in V,\ \exists x\in[\,0,1\,],\ f(x)+\alpha=f'(x)$.

Exercice 230 [ENS PSI 2024 # 228] Soit $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim_{t\to+\infty}g(t)=0$ et f telle que $f'(t)-f(t)=g(t)$. On pose $a=f(0)$. Montrer qu'il existe une unique valeur a pour laquelle $\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$.

Exercice 231 [ENS PSI 2024 # 229] Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ ne prenant pas les valeurs 0 et 1.
On suppose que $\forall x\geq 0, f'(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)-1}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 232 [ENS PSI 2024 # 230] Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 1-lipschitzienne, $\lambda\in\,]0,1[$ et $a\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique application $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lipschitzienne telle que $\forall x\in\mathbb{R}, F(x)=f(x)+\lambda F(x+a)$.

Exercice 233 [ENS PSI 2024 # 231] Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose $f_a:x\mapsto f(x+a)$ et $F_f=\mathrm{Vect}(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

- Trouver f telle que F_f est de dimension finie. Preciser la dimension. - Montrter que, si F_f est de dimension finie, alors $F_{f'}$ est aussi de dimension finie.
- Trouver les fonctions f telles que $\dim F_f=1$.
- Trouver les fonctions f telles que $\dim F_f=2$.

Exercice 234 [ENS PSI 2024 # 232] Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. On pose, pour $t\in\mathbb{R}^+$, $\lambda(t)=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(|f(x)|\exp(-tx^2)\right)$.

- On suppose $f(0)\neq 0$. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty}\lambda(t)$.
- On suppose maintenant $f(0)=0$ et $f'(0)\neq 0$. Déterminer un équivalent de λ en $+\infty$.
- Même question en supposant la fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(0)=\cdots=f^{(k-1)}(0)=0$ et $f^{(k)}(0)\neq 0$.

Exercice 235 [ENS PSI 2024 # 233] On dit que (x_n) converge au sens de Cesaro vers ℓ lorsque $\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$.

Déterminer toutes les fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété suivante : pour toute suite réelle (x_n), si la suite (x_n) converge au sens de Cesaro vers ℓ, alors la suite $(f(x_n))$ converge au sens de Cesaro vers $f(\ell)$.

Exercice 236 [ENS PSI 2024 # 234] Soit g une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(0)=g'(0)=0$ et $g''(0)>0$. On pose, pour λ dans $\mathbb{R}^{+*}$, $A(\lambda)=\{x>0,\ g(x)=\lambda x\}$.

- Montrez qu'il existe $\lambda_0>0$ tel que, pour tout λ dans $]\,0\,;\lambda_0\,[$, $A(\lambda)\neq\emptyset$.
- On pose $\lambda^*=\sup\{\lambda>0,\ A(\lambda)\neq\emptyset\}$ (cela peut être $+\infty$). Montrer que, pour tout λ dans $]\,0\,;\lambda^*\,[$, $A(\lambda)$ est non vide.
- On pose $X_\lambda=\inf\{x>0,\ g(x)=\lambda x\}$ quand c'est défini. Montrer que $X_\lambda\neq 0$.
- En toute generalite, la fonction $h\colon\lambda\mapsto X_\lambda$ est-elle continue sur $]\,0\,;\lambda^*\,[$?
- Montrer que cette fonction h est continue au voisinage de 0.

Exercice 237 [ENS PSI 2024 # 235] Soit $M\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R},\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$. On suppose que, pour tout t, $M(t)$ est inversible. L'objectif est de montrer que $\dfrac{d}{dt}\left(\det\left(M\left(t\right)\right)\right)=\det\left(M\left(t\right)\right)\mathrm{tr}\left(M\left(t\right)^{-1}\dfrac{d}{dt}\left(M\left(t\right)\right)\right)$.

- Le montrer si M est diagonale.
- Montrer que $\forall U\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\det\left(I_n+\varepsilon U\right)-\det\left(I_n\right)}{\varepsilon}=\mathrm{tr}\left(U\right)$.
- On suppose qu'il existe $t_0\in\mathbb{R}$ tel que $M\left(t_0\right)=I_n$. Montrer la relation en t_0.
- Traiter le cas general.

Exercice 238 [ENS PSI 2024 # 236] Soit $f\in\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$. On pose $f_a:x\mapsto f\left(a+x\right)$ et $F_f=\mathrm{Vect}\left(f_a,a\in\mathbb{R}\right)$.

- Si F_f est de dimension finie, montrer que $F_{f'}$ l'est aussi.
- Quelle est la dimension de F_f lorsque $f=\exp$?
- Réciproquement, montrer que si $\dim\left(F_f\right)=1$, alors $f=\exp$.

Exercice 239 [ENS PSI 2024 # 237] On suppose $e=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$. Montrer que $q\int_0^1 x^n e^x\,\mathrm{d}x\in\mathbb{N}^*$. Conclure.

Adapter la preuve précédente pour prouver $e^2\notin\mathbb{Q}$.

Exercice 240 [ENS PSI 2024 # 238] Soit $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $x \mapsto f(x) + \int_0^x f(t)dt$ tend vers le réel ℓ en $+\infty$. Montrer que f possède une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

Exercice 241 [ENS PSI 2024 # 239] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ et intégrable telle que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)\, f(1-x) = 1$. Montrer que $\int_0^1 f \geq 1$.

Exercice 242 [ENS PSI 2024 # 240] Soit $f \in \mathcal{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{8}\left\|f'\right\|_\infty$.

Exercice 243 [ENS PSI 2024 # 241] Soit $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Que dire de $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$?

Exercice 244 [ENS PSI 2024 # 242] Soit (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x) - e^x| = 0$. Montrer que $\deg(P_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 245 [ENS PSI 2024 # 243] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ par $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 1$ et $f'_{n+1}(x) = e^x\sqrt{f_n(x)}$. Justifier l'existence de $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et déterminer sa valeur.

Exercice 246 [ENS PSI 2024 # 244] Encadrer et donner un équivalent en $+\infty$ de $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k!}}$.

Exercice 247 [ENS PSI 2024 # 245]

- Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite.
- Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un développement asymptotique de $\ln(\Gamma(n+1))$ à la precision $O(\ln(n))$. En considérant la fonction $\Psi : x \mapsto \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Ind. On admet que l'on peut < < deriver > > le développement précédent c'est-a-dire que $\Psi(n+1) = \ln(n) + O(1/n)$.

- Montrer que Ψ est croissante et justifier le développement admis precedemment.

Exercice 248 [ENS PSI 2024 # 246] Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose qu'il existe des constantes $C_1, C_2, a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \frac{C_1}{(1+|x|)^a}$ et $|g(x)| \leq \frac{C_2}{(1+|x|)^b}$.Lorsque c'est possible, on pose $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$.

- à quelle condition sur C_1, C_2, a, b la fonction $f * g$ est-elle définie sur $\mathbb{R}$?
- On suppose maintenant a et b strictement supérieurs à 1. Montrer qu'il existe $C_3 > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\quad |f * g(x)| \leq \dfrac{C_3}{(1+|x|)^{\min(a,b)}}$.

Exercice 249 [ENS PSI 2024 # 247] Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}^2$ et telles que $f = a\dfrac{\partial f}{\partial x} + b\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 250 [ENS PSI 2024 # 248] Montrer que la fonction $f\colon P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto f(P) = \int_0^1 \left(P(x) - e^x\right)^2 \mathrm{d}x$ admet un unique point critique.

3) Géométrie

Exercice 251 [ENS PSI 2024 # 249] Montrer qu'un polygone à n sommets inscrit dans le cercle unité est d'aire maximale si et seulement s'il est régulier

Exercice 252 [ENS PSI 2024 # 250] Soit $\varepsilon \in \,]0{,}1[$. Soit n le plus grand entier naturel tel que $n\varepsilon \leq 1$. On trace les cercle de rayon 1 et de centres $(k\varepsilon, -1)$, pour $0 \leq k \leq n$. Donner un développement limité de la somme des longueurs des arcs de cercle qui forment une courbe longeant la droite des abscisses.

4) Probabilités

Exercice 253 [ENS PSI 2024 # 251] On considère une urne contenant $n \geq 2$ boules : 2 boules sont rouges et les $n-2$ autres sont blanches. On tire les boules une par une sans remise. On s'arrête une fois qu'on a tiré les deux boules rouges. En moyenne, combien reste-t-il de boules dans l'urne ?

Exercice 254 [ENS PSI 2024 # 252] On considère une urne vide qu'on remplit successivement d'une boule blanche (avec une probabilité p) ou d'une boule rouge (avec une probabilité $1-p$). On arrête de la remplir lorsqu'on obtient la première boule rouge. Puis on la vide jusqu'à tirer la boule rouge. Déterminer le nombre moyen de boules blanches restantes à la fin.

Exercice 255 [ENS PSI 2024 # 253] On dispose d'une urne vide. On ajoute des boules une par une et on s'arrête dès qu'on a ajouté une boule rouge. La probabilité d'ajouter une boule rouge à chaque étape est égale à $\frac{1}{m}$. On mélange ensuite les boules et on les retire une à une jusqu'à retirer la boule rouge. Calculer l'espérance du nombre de boules restantes.

Exercice 256 [ENS PSI 2024 # 254] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour A partie de $[\![1, n^2$, on note $M(A)$ la matrice carrée de taille n à coefficients dans $\{0,1\}$ caractérisée par $\forall (i,j), M(A)_{i,j} = 1 \iff (i,j) \in A$. On considére l'ensemble P des parties de $1, n]\!]^2$ de cardinal n et une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur P. Quelle est la probabilité que $M(X)$ soit inversible ?

Exercice 257 [ENS PSI 2024 # 255] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$. Déterminer $\mathbf{E}\left(M_n^k\right)$ pour $k \in \mathbb{N}$.Ind._ Distinguer selon la parite de k.

Exercice 258 [ENS PSI 2024 # 256] Soient, pour $\lambda > 0$, A_λ, B_λ, C_λ, D_λ quatre variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

- Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathbf{P}\left(A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda \text{ n'a que des racines réelles}\right)$.
- Même question pour $A_\lambda X^3 + B_\lambda X^2 + C_\lambda X + D_\lambda$.

Exercice 259 [ENS PSI 2024 # 257] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble S_n des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de la probabilité uniforme. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Pour $\sigma \in S_n$, on note
$P_k(\sigma) = \left\{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k \ i_1 < i_2 < \cdots < i_k \text{ et } \sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_k)\right\}$
l'ensemble des sous-suites croissantes de longueur k de la permutation σ.

Exercice 260 [ENS PSI 2024 # 258] Soient $\lambda \in [0, 1]$, $(X_{k,n})_{\substack{1\leq k\leq n\\ n\geq 1}}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, ou $X_{k,n}$ suit la loi $\mathcal{B}\left(\lambda/n\right)$. On pose $X_n = X_{1,n} + \cdots + X_{n,n}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(\exp(tX_n))$.

Exercice 261 [ENS PSI 2024 # 259] On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles est infiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$ indépendantes et de même loi telles que $X \sim X_{1,n} + \cdots + X_{n,n}$.

- Donner des exemples de variables aléatoires indéfiniment divisibles.
- Soit X une variable aléatoire infiniment divisible non nulle telle que $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que, pour tout $A > 0$, $\mathbf{P}(X > A) > 0$.

Exercice 262 [ENS PSI 2024 # 260] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$.
Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}(P(M_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x)P(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 263 [ENS PSI 2024 # 261] On note $D(X)$ le nombre de diviseurs premiers de X, ou X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(D(X))$.
- On admet que $\sum\limits_{p \text{ premier}, p\leq n} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln n)$. Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{D(X)}{\ln(\ln n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Exercice 264 [ENS PSI 2024 # 262] Soient $C \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ nilpotente. Soit $p \in]0, 1[$. On définit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $B_0 = I_n$ et $B_{n+1} = A_n B_n$, ou $\mathbf{P}(A_n = C) = p$ et $\mathbf{P}(A_n = N) = 1 - p$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n \neq O)$.

Exercice 265 [ENS PSI 2024 # 263] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.
Soient $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ et $p \in \,]0, 1[$. On note $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit (u_n) une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$ avec $u_0 = (1, 0)^T$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}\left(u_{n+1} = R(\theta)u_n\right) = p$ et $\mathbf{P}\left(u_{n+1} = Mu_n\right) = 1 - p$. Déterminer la limite de $(\mathbf{E}(\|u_n\|)$ pour $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ puis pour θ quelconque.

Exercice 266 [ENS PSI 2024 # 264] Soit $\theta \in [\,0\,; 2\pi\,]$. Soit $p \in \,]\,0\,; 1[$. On pose $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Les variables aléatoires $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et vérifient $\mathbf{P}(A_n = R) = p$ et $\mathbf{P}(A_n = Q) = 1 - p$. On note $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = A_n U_{n-1}$.
On note $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ les instants n successifs ou $A_n = Q$.

- Trouver la loi de $\|U_{t_1}\|$ ou $\|\ \|$ designe la norme euclidienne canonique.
- Pour $N \in \mathbb{N}^*$, donner une approximation du nombre d'indices i tels que $t_i \leq N$.

Dans toute la suite, on suppose que $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

- Calculer $\mathbf{E}(\ln\|U_{t_1}\|)$.
- Déterminer la loi de $\|U_{t_2}\|$.
- Déterminer la loi de $\|U_{t_k}\|$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
- Déterminer $\mathbf{E}(\ln\|U_{t_k}\|)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

IV) X - MP **XENS**

1) Algèbre

Exercice 267 [X MP 2024 # 265] Pour toute partie finie non vide X de $\mathbb{R}$ dont on note $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ les éléments, on pose :

$$a^+(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i + 1) \quad \text{et} \quad a^-(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i - 1).$$

L'objectif est d'etablir que : $\sum_{\substack{B\subset A\\ B\neq\emptyset}} a^-(B)=a^+(A)$ pour n'importe quelle partie finie non vide A de $\mathbb{R}$.

On se donne donc $A=\{a_1\ldots,a_n\}$ une partie finie non vide de $\mathbb{R}$, avec $a_1<\ldots<a_n$.

- On suppose le résultat acquis. Trouver une expression de : $\alpha(A)=\sum_{\substack{B\subset A\\ a_n\in B}} a^-(B)$.
- Établir le résultat cherché.
- On suppose $A=[\![1,n]\!]$. Calculer : $\sum_{\substack{B\subset A\\ B\neq\emptyset\\ B\cap(B+1)=\emptyset}} a^-(B)$.

Exercice 268 [X MP 2024 # 266]

- Soit $n\geq 1$, premier avec 10. Montrer que n possède un multiple dont l'écriture en base 10 n'a que des 9.
- On remarque que $\frac{1}{7}=0,\underline{142857142857}\ldots\underline{142857}\ldots$ avec $142+857=999$.

$\frac{285+714}{7}=0,\underline{285714285714}\ldots\underline{285714}\ldots 076+923=999$

$\frac{1}{13}=0,\underline{076923}\;\underline{076923}\ldots\underline{076923}\ldots$

Expliquer.

Exercice 269 [X MP 2024 # 267] Pour r un rationnel non nul s'écrivant $r=2^ka/b$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et a,b deux entiers impairs, on définit la valuation dyadique de r par $v_2(r)=k$.

On admet que : $\forall x,y\in\mathbb{Q}^*$, $v_2(xy)=v_2(x)+v_2(y)$ et si $x+y\neq 0$, $v_2(x+y)\geq\min(v_2(x),v_2(y))$, avec égalité si $v_2(x)\neq v_2(y)$.

On note enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $H_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$.

- Montrer que pour tout $n>1$, $H_n\notin\mathbb{Z}$.
- Montrer que pour tous $m,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $m\leq n-2$, on a $v_2(H_n-H_m)<0$.
- Montrer les propriétés admisses plus haut.
- La question - peut-elle s'adapter à la valuation 3-adique ?

Exercice 270 [X MP 2024 # 268] Quels sont les m de $\mathbb{N}^*$ tels qu'il existe m éléments consécutifs de $\mathbb{N}^*$ divisibles par des cubes d'éléments de $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$?

Exercice 271 [X MP 2024 # 269] Montrer que tout $n\in\mathbb{Z}$ s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^N\varepsilon_k(-2)^k$ avec $N\geq 0$ et les ε_k dans $\{0,1\}$.

Exercice 272 [X MP 2024 # 270] Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des entiers naturels qui ne sont pas divisibles par le carré d'un entier supérieur ou egal à 2, et $q(n)=|\mathcal{F}\cap[\![1,n]\!]|$. On note $\mathcal{E}(n,k)=\mathbb{R}^{+*}\cap\left\{\sum_{i=1}^k\sqrt{a_i}-\sum_{i=1}^k\sqrt{b_i},\ (a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_k)\in[\![0,n]\!]^{2k}\right\}$ et $\Delta(n,k)=\min\mathcal{E}(n,k)$.

- On admet que $(\sqrt{n})_{n\in\mathcal{F}}$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
  Montrer que $\Delta(n,k)\leq\frac{k(\sqrt{n}-1)}{\binom{q(n)+k-1}{k}-1}$.
- E On démontre à présent le résultat admis précédemment.
- Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{R}$, et x un élément de $\mathbb{K}\cap\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbb{K}[\sqrt{x}]=\mathbb{K}+\mathbb{K}\sqrt{x}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, et que si $\sqrt{x}\notin\mathbb{K}$ alors il existe un unique automorphisme σ de l'anneau $\mathbb{K}[\sqrt{x}]$ différent de l'identite et fixant tous les éléments de $\mathbb{K}$.
- E Dans la suite, on fixe un entier $n\geq 1$ on suppose acquise, pour tout ensemble fini A constitue de n nombres premiers, la libert é de la famille des $\sqrt{m}$, ou m parcourt l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ ayant tous leurs diviseurs premiers dans A. Soit A un ensemble forme de $n+1$ nombres premiers $p_1,\ldots,p_{n+1}$.
- E On construit par récurrence une suite $(\mathbb{K}_0,\ldots,\mathbb{K}_n)$ de corps : $\mathbb{K}_0=\mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}_i=\mathbb{K}_{i-1}[\sqrt{p_i}]$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.
- Montrer que $\mathbb{K}_n$ est de dimension 2^n comme $\mathbb{K}_0$-espace vectoriel, et en preciser une base. Montrer qu'il existe un automorphisme σ du corps $\mathbb{K}_n$ qui fixe $\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_{n-1}}$ et envoie $\sqrt{p_n}$ sur $-\sqrt{p_n}$. Dans la suite, on raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{p_{n+1}}\in\mathbb{K}_n$.
- Montrer que $\sqrt{p_{n+1}}=\alpha+\beta\sqrt{p_n}$ pour un $\alpha\in\mathbb{K}_{n-1}$ et un $\beta\in\mathbb{K}_{n-1}$, puis montrer qu'en fait $\sqrt{p_{n+1}}=\beta\sqrt{p_n}$.
- Montrer que $\sqrt{p_{n+1}}=\lambda\prod_{k=1}^n\sqrt{p_k}$ pour un $\lambda\in\mathbb{Q}$, et conclure à une contradiction.
- Conclure.

Exercice 273 [X MP 2024 # 271] Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4. On note L l'ensemble des carres de $\mathbb{F}_p^*$.

- Montrer que $|L|=\frac{p-1}{2}$.
- Montrer que si $x\in L$, alors $-x\notin L$.
- On fixe $x\in\mathbb{F}_p^*$ et l'on pose $A=\left\{(\ell_1,\ell_2)\in L^2\ ;\ x=\ell_1-\ell_2\right\}$. Calculer card A.

Exercice 274 [X MP 2024 # 272] Soit p un nombre premier impair.

- Dénombrer les $(x,y)\in(\mathbb{F}_p)^2$ tels que $x^2+y^2=1$.
- Soit $z\in\mathbb{F}_p\setminus\{0\}$. Dénombrer $\{\,(x,y)\in\mathbb{F}_p^2,\ x^2+y^2=z\}$.

Exercice 275 [X MP 2024 # 273] Soit p un nombre premier impair. On pose $q=2p+1$ et l'on suppose q premier. On considére l'équation : $(E):x^p+y^p+z^p=0$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ une solution de (E) telle que p ne divise aucun des entiers x,y et z et telle que x,y,z soient premiers entre eux deux à deux.

- Montrer que q divise x,y ou z.

- Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que : $y+z=a^p$, $x+y=b^p$, $x+z=c^p$.
- Factoriser y^p+z^p.
- Conclure à une contradiction.

Exercice 276 [X MP 2024 # 274] Soient p un nombre premier congru à 1 modulo 4 et S l'ensemble $S=\{x,y,z) \in \mathbb{N}^3 ; p=x^2+4yz\}$. Pour $(x,y,z) \in S$ on pose :

- si $x<y-z$, $f(x,y,z)=(x+2z,z,-x+y-z)$;
- si $y-z<x<2y$, $f(x,y,z)=(2y-x,y,x-y+z)$;
- si $x>2y$, $f(x,y,z)=(x-2y,x-y+z,y)$.

Montrer que f définit une involution de S. En déduire que p s'écrit u^2+v^2 avec $(u,v) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 277 [X MP 2024 # 275] Soit $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. On considére l'équation $(*)\colon x^2-dy^2=1$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

- Traiter les cas $d<0$ et $d=k^2$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- E Dans la suite, on suppose $d>0$ et $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$. Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(\pm 1,0)\}$ solution de $(*)$.
- On pose $z=x_0+\sqrt{d}\,y_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(x_n,y_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $z^{n+1}=x_n+\sqrt{d}\,y_n$.
- En déduire que, si l'ensemble des solutions de $(*)$ est non trivial, i.e. n'est pas reduit à $\{(\pm 1,0)\}$, il en existe une infinité.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|p-qx|<\dfrac{1}{n}$.
- Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $|p-qx|<\dfrac{1}{q}$.
- Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ pour lequel il existe une infinité de couples d'entiers (p,q) tels que $|p^2-dq^2|<K$.
- Conclure que $(*)$ possède des solutions non triviales.

Exercice 278 [X MP 2024 # 276]

- Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. On admet que le groupe multiplicatif $\mathbb{F}^\times$ est cyclique.
  Soient $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{F}$. On note $\widehat{\mathbb{F}^\times}$ l'ensemble des morphismes de $\mathbb{F}^\times$ dans $\mathbb{C}^*$ prolongés par 0 en 0. On note $N(X^n=u)$ le nombre de zéros du polynôme X^n-u dans $\mathbb{F}$. On note $\widehat{\mathbb{F}^\times}[n]$ l'ensemble des $\chi \in \widehat{\mathbb{F}^\times}$ tels que $\chi^n=1$.
  Montrer que $N(X^n=u)=1+\sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[n], \chi \neq 1} \chi(u)$.
- On suppose $\mathbb{F}=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \equiv 1 \pmod 3$ et p impair.
  Montrer que $N(X^3+Y^3=1)=p+\sum_{\chi_1,\chi_2 \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[3]\setminus\{1\}} J(\chi_1,\chi_2)=p-2+2\operatorname{Re}\big(J(\omega,\omega)\big)$ si $\omega \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[3]\setminus\{1\}$, où $J(\chi_1,\chi_2)=\sum_{a+b=1}\chi_1(a)\chi_2(b)$.
- On admet que $|J(\omega,\omega)|=\sqrt{p}$ et $pJ(\omega,\omega)=g_\omega^3$ ou $g_\omega=\sum_{x\in\mathbb{F}}\omega(x)\zeta_p^x$ avec $\zeta_p=e^{\frac{2i\pi}{p}}$.
  Montrer que $N(X^3+Y^3=1)=p-2-a_p$ avec $a_p^2+27b_p^2=4p$ ou $b_p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 279 [X MP 2024 # 277] Pour p premier impair, on note $\chi\colon \mathbb{F}_p \to \{1,-1,0\}$ la fonction définie par $\chi(0)=0$, $\chi(x)=1$ pour tout élément x de $\mathbb{F}_p^\times$ qui est un carre, et $\chi(x)=-1$ dans toute autre situation.

Pour $t \in \mathbb{N}$, on pose $g_p(t)=\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\chi(tx)e^{\frac{2i\pi x}{p}}$.

- Soit p un nombre premier impair, et des entiers a et b tels que $0<a<b<p$. Montrer que $g_p(1)\sum_{n=a}^{b-1}\chi(n)=\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\chi(x)\sum_{t=a}^{b-1}e^{\frac{2i\pi tx}{p}}$
  On admettra dans la suite que $|g_p(1)|=\sqrt{p}$.
- Montrer qu'il existe une constante $M>0$ telle que, quels que soient p premier impair, et a,b entiers tels que $0 \leq a<b<p$, on ait $\operatorname{card}\{k \in [\![a,b-1]\!],\ k \text{ est un carre modulo } p\}=\dfrac{b-a}{2}+u_{p,a,b}$ ou $|u_{p,a,b}| \leq M\sqrt{p}\ln p$.

Exercice 280 [X MP 2024 # 278] Soit G un groupe fini de cardinal $2n$ ou n est impair.

- Montrer que G possède un élément d'ordre 2.
- Montrer que G possède un sous-groupe d'ordre n.
  Ind : Considérer l'application Φ qui à $g \in G$ associe $\Phi(g)\colon G \to G$ telle que, pour tout $x \in G$, $\Phi(g)(x)=gx$.
- s Trouver un contre-exemple si n est pair.

Exercice 281 [X MP 2024 # 279] Soit p un nombre premier. On dit qu'un groupe G est un p-groupe si, pour tout $g \in G$, l'ordre de g est une puissance de p. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que G est k-divisible si, pour tout $g \in G$, il existe $x \in G$ tel que $x^k=g$.

- Montrer qu'un p-groupe non trivial et p-divisible est infini.
- Donner un exemple de tel groupe.
- Montrer que G est alors k-divisible pour tout k.

Exercice 282 [X MP 2024 # 280] Soit G un groupe d'ordre $n \geq 1$. Pour $g_1,\dots, g_k \in G$, on note $E(g_1,\dots,g_k)=\{g_{i_1}\cdots g_{i_s} ;\ s \in \mathbb{N},\ 1 \leq i_1<\cdots<i_s \leq k\}$ (avec la convention que l'élément neutre est le produit vide donc appartient à cet ensemble).

- Soient $g_1,\dots, g_k \in G$ tel que $G=E(g_1,\dots,g_k)$. Montrer que $k \geq \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
- Soit $A \subset G$. Montrer que $\sum_{x\in G}|A \cap Ax|=|A|^2$.
- Montrer qu'il existe $g_1,\dots,g_k \in G$ tels que $G=E(g_1,\dots,g_k)$ avec $k \leq \lfloor \log_2(2n\ln n) \rfloor$.

Exercice 283 [X MP 2024 # 281] On note $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ le groupe des permutations de $\mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe cyclique de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ d'ordre 2^n, ou $n \geq 2$, contenant la conjugaison complexe.

- Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il existe $\tau \in G$ tel que $\tau(z) \neq \pm z$.
- Soit H un sous-groupe de G d'ordre 2^{n-1}. Montrer que H contient au moins deux applications $\mathbb{R}$-linéaires.
- sA On regarde $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Est-il possible que G ne soit composé que d'applications linéaires ?
- sA Montrer que G contient exactement deux applications $\mathbb{R}$-linéaires.

Exercice 284 [X MP 2024 # 282] Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre. On suppose que $\mathcal{A}$ est munie d'une norme N vérifiant : $\forall a, b \in \mathcal{A},\ N(ab) = N(a)N(b)$.

- Soit $x \in \mathcal{A}$. En posant $z = z \cdot 1_{\mathcal{A}}$, on identifie $\mathbb{C}$ à une sous-algèbre de $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, N(x - z_0) \leq N(x - z)$. On pose $a = x - z_0$.
- On suppose que $N(a) = 2$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{U}_n, N(a - z) \geq 2$. Montrer ensuite que $N(a-1) = 2$ puis $N(a-5) = 2$.
- Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, i.e. $\dim \mathcal{A} = 1$.

Exercice 285 [X MP 2024 # 283]
- Soit f l'application qui à $z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$ associe le point d'intersection de $\mathbb{R}$ et de la droite passant par z et i. Montrer que $f(z) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow z \in \mathbb{Q}(i)$.
- Montrer qu'il existe une infinite de triplets non proportionnels $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

Exercice 286 [X MP 2024 # 284] On appelle nombre de coefficients positifs du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ le cardinal de l'ensemble $\{i \in [\![0, n]\!],\ a_i \geq 0\}$.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. Montrer que P^2 à au moins trois coefficients positifs.
- Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que P^2 ait exactement trois coefficients positifs.

Exercice 287 [X MP 2024 # 285] Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré majore par n, Δ le pgcd de $P(0), P(1), \dots, P(n)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, Δ divise $P(k)$.

Exercice 288 [X MP 2024 # 286] Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 2$ dont on note $z_0, \dots, z_{n-1}$ les racines. On note $t_1, \dots, t_{n-1}$ les racines complexes de P' et l'on suppose que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], |z_k| \leq 1$.

- Montrer que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!], |t_k| \leq 1$.
- On suppose que z_0 est racine simple de P. Calculer $\dfrac{P''(z_0)}{P'(z_0)}$ deux façons :
  - ▷ en fonction de z_0 et des t_k ;
  - ▷ en fonction de z_0 et des z_k.
- Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tel que $|z| \leq 1$. Montrer que $\mathfrak{Re}\left(\dfrac{1}{1+z}\right) \geq \dfrac{1}{2}$.
- On suppose que $z_0 = 1$ et que z_0 est racine simple. Montrer qu'il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $|1 - t_k| \leq 1$.
- On suppose que $|z_0| = 1$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $|z_0 - t_i| \leq 1$.
- s Soient $Q \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On pose $P = Q^2 + \alpha^2$. Montrer qu'il existe une racine z de P et une racine t de P' telles que $|z - t| \leq |z|$.

Exercice 289 [X MP 2024 # 287] Pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2}$.

- Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$, $\|(X - z)P\| = \|(1 - \overline{z}X)P\|$.
- On suppose P unitaire, et on note M_P le produit des modules des racines de P de module ≥ 1. Montrer que $M_P \leq \|P\|$.
- Montrer, pour $1 \leq k \leq n-1$, que $|a_k| \leq \binom{n-1}{k} M_P + \binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 290 [X MP 2024 # 288]
- Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. On pose $r = \min\{|z|,\ z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0\}$, et on suppose $r > 0$. Si $a_k \neq 0$, montrer que $r^k \leq \binom{n}{k} \frac{|a_0|}{|a_k|}$.
- Soit $A_n = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg P = n,\ P(-1) = P(1) = 0\}$. Montrer que $\sup_{P \in A_n} \{\min\{|z|,\ P'(z) = 0\}\} < +\infty$.

Exercice 291 [X MP 2024 # 289] Soient $\omega, q \in \mathbb{C}^*$ tels que ω^2 n'est pas une puissance entière de q. On considère l'équation $(*) \colon \omega f(z) g(qz) = \omega^2 f(qz) g(z) + P(z)$, d'inconnues $(P, f, g) \in \mathbb{C}[X]^3$, avec g, P unitaires.

- Si (P, f, g) vérifie $(*)$, trouver une relation entre les degrés de P, f, g.
- On fixe P. Montrer l'existence de (f, g) tel que (P, f, g) vérifie $(*)$.
- On fixe (P, f). Y a-t-il unicité de g tel que (P, f, g) vérifie $(*)$?

Exercice 292 [X MP 2024 # 290] Soit $\theta \in \mathbb{C}$ un nombre algébrique.

- Montrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de θ est l'ensemble des multiples d'un certain polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, déterminé de manière unique. On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n = 1$, et on suppose P à coefficients entiers, θ irrationnel et $a_0 \geq 0$.
- Montrer que $n \geq 2$, $a_0 > 0$ et θ est racine simple de P.
- On pose $Q = X^n P(1/X)$ et $f \colon z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que si θ^{-1} n'est pas un pôle de f, alors $a_0 = 1$ et n est pair.
- Montrer qu'il existe $r > 0$ et une suite (b_n) d'entiers telle que pour tout $z \in D(0, r)$, on ait f définie en z et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Exercice 293 [X MP 2024 # 291] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si M est inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre non-inversible ?
- Si M n'est pas inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre inversible ?

Exercice 294 [X MP 2024 # 292] Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $a, b \in \mathcal{L}(V)$. Pour $u, v \in \mathcal{L}(V)$, on pose $[u, v] = uv - vu$. On suppose que a est nilpotent et que $[a, [a, b]] = 0$. Montrer que $[a, b]$ et ab sont nilpotents.

Exercice 295 [X MP 2024 # 293] Soit $V_0, \dots, V_n$ des espaces vectoriels, $(v_0^+, \dots, v_{n-1}^+) \in \mathcal{L}(V_0, V_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(V_{n-1}, V_n)$ et $(v_1^-, \dots, v_n^-) \in \mathcal{L}(V_1, V_0) \times \cdots \times \mathcal{L}(V_n, V_{n-1})$. On suppose que $v_{i-1}^+ \circ v_i^- = -v_{i+1}^- \circ v_i^+$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, et que $v_{n-1}^+ \circ v_n^- = 0$. Montrer que l'endomorphisme $v_1^- \circ v_0^+$ de V_0 est nilpotent. Déterminer l'indice de nilpotence maximal possible de $v_1^- \circ v_0^+$.

Exercice 296 [X MP 2024 # 294] Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de permutation associée et, pour tout k, $n_k(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

- Soit $\sigma \in S_n$. Calculer, pour tout k, $\mathrm{tr}(P_\sigma^k)$ en fonction des $n_r(\sigma)$.
- En déduire que deux permutations $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si les matrices P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 297 [X MP 2024 # 295] Soient $V = \mathbb{C}^n$ et $T = (\mathbb{C}^*)^n$. Pour tout $v \in V$ et toute partie $H \subset V$, on note $H \cdot v = \{(h_1 v_1, \dots, h_n v_n),\ h \in H\}$.

- Soit $v \in V$. Déterminer la nature topologique de $T \cdot v$. Preciser notamment son adherence.
- Quels sont les sous-espaces $W \subset V$ tels que, pour tout $v \in T$, $W \cdot v = W$?
- Dénombrer les familles $(W_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de sous-espaces vectoriels satisfaisant la condition de la question précédente et les inclusions strictes $W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_n$.

Exercice 298 [X MP 2024 # 296] Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et φ un morphisme de groupes de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}(V)$ tel que $\{0\}$ et V soient les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les $\varphi(g)$ pour $g \in \mathbb{U}$.

- Montrer que $\dim V = 1$.
- On suppose $f \colon \theta \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(e^{i\theta})$ dérivable en 0. Déterminer φ.

Exercice 299 [X MP 2024 # 297] Soit $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que (V, A, B) est une realisation de M si :

- V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d,
- $A = (a_1, \dots, a_n)$ est une famille libre de formes linéaires sur V,
- $B = (b_1, \dots, b_n)$ est une famille libre de vecteurs de V,
- pour tous i, j, $a_i(b_j) = m_{i,j}$.

On dit que d est la dimension de la réalisation.

- Montrer que si M est realisée par un espace de dimension d, elle l'est aussi par un espace de dimension $d' > d$.
- Trouver une realisation de la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Trouver la dimension minimale d'une realisation de M_0.

Exercice 300 Formule de Glauber [X MP 2024 # 298] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant à $AB - BA$.

- sV2 Simplifier $e^{At} B e^{-At}$.
- Calculer $\exp(A + B)$.

Exercice 301 [X MP 2024 # 299] Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \chi_B$ et $AM = MB$.

- Montrer que, pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}((A - MX)^r) = \mathrm{tr}((B - XM)^r)$.
- En déduire que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A - MX) = \det(B - XM)$.

Exercice 302 [X MP 2024 # 300] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ peut-elle s'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 303 [X MP 2024 # 301] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $ab - ba = f \circ v$ avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

- Calculer $\det(ab - ba)$.
- Montrer que a et b sont cotrigonalisables.

Exercice 304 [X MP 2024 # 302] Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par crochet de Lie : pour $M, N \in \mathcal{A}$, $[M, N] = MN - NM \in \mathcal{A}$.

TODO

- On suppose que, pour tout $M \in \mathcal{A}$, $N \mapsto [M, N]$ induit un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{A}$. Montrer que $\forall M, N \in \mathcal{A}$, $[M, N] = 0$.
- On suppose que $\dim \mathcal{A} \le 3$ et que, pour tout $M \in \mathcal{A}$, $N \mapsto [M, N]$ induit un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{A}$. On pose $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ et, pour $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_{j+1} = \{[M, N],\ (M, N) \in \mathcal{A}_j^2\}$. Montrer que $\mathcal{A}_3 = \{0\}$.

Exercice 305 [X MP 2024 # 303] Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un drapeau de E est une famille de sous-espaces $(F_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ telle que $F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n$.

- Soit $(F_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ un drapeau de E. Déterminer $\dim F_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
- E On considére dorénavant deux drapeaux $(F_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ et $(G_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$.
- Soient $i \in [\![1, n]\!]$, $j_0 \in [\![0, n]\!]$ tels que $F_{i-1} + G_{j_0} = F_i + G_{j_0}$. Montrer que, pour tout $j \ge j_0$, $F_{i-1} + G_j = F_i + G_j$.
- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $F_{i-1} + G_j = F_i + G_j$.
- Montrer que l'application σ qui à i associe $\min\{j \in [\![1, n]\!],\ F_{i-1} + G_j = F_i + G_j\}$ est une permutation de $[\![1, n]\!]$.
- Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ e_i \in F_i \cap G_{\sigma(i)}$.

- s Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique permutation $\tau \in \mathcal{S}_n$ pour laquelle il existe deux matrices U et V triangulaires supérieures dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = UP_\tau V$ ou $P_\tau = (\delta_{i,\tau(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$, et montrer qu'on peut en outre imposer que 1 soit la seule valeur propre de U.

Exercice 306 [X MP 2024 # 304] On considére un groupe fini G et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie. Soit ρ un morphisme injectif de G dans $\mathrm{GL}(V)$.

- Calculer $\mathrm{tr}(\rho(e))$ ou e est le neutre de G.
- Montrer que, pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable.
- Montrer que, si $\mathrm{tr}(\rho(g)) = \mathrm{tr}(\rho(e))$, alors $\rho(g) = \rho(e)$.
- Soit $f\colon G \to \mathbb{C}$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $a_m = \sum_{g \in G} f(g)\,(\mathrm{tr}(\rho(g)))^m$. Démontrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m \neq 0$ lorsque $f(e) \neq 0$.
- Montrer que $\Phi\colon z \mapsto \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$ est une fonction rationnelle.
- On prend $G = \mathfrak{S}_3$ et $\rho\colon \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{GL}(V)$.
  Montrer qu'il existe une décomposition de V sous la forme $\bigoplus_i E_i$ telle que :
  - ▷ $\forall i,\ \forall g \in G,\ E_i$ est stable par $\rho(g)$
  - ▷ $\forall i,\ \dim E_i \in \{1, 2\}$.

Exercice 307 [X MP 2024 # 305] Soit $d \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $\delta_1, \delta_2 > 0$ avec $\delta_1 \neq \delta_2$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $\forall i \neq j$, $\|x_i - x_j\| \in \{\delta_1, \delta_2\}$. Montrer que $n \leq \dfrac{(d+1)(d+4)}{2}$.

Ind. Montrer que les $f_i\colon y \mapsto \left(\|y - x_i\|^2 - \delta_1^2\right)\left(\|y - x_i\|^2 - \delta_2^2\right)$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 308 [X MP 2024 # 306] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) \mid M^T M = nI_n\right\}$.

- Déterminer H_1, H_2 et H_3.
- Soit $n \geq 4$ tel que $H_n \neq \emptyset$. Montrer que 4 divise n.
- À l'aide de $A \in H_n$, construire une matrice $B \in H_{2n}$.
- Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 3\,[4]$. Montrer que H_{p+1} n'est pas vide.

Exercice 309 [X MP 2024 # 307] On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ unitaire.
Soient $\sigma_u\colon x \mapsto x - 2\langle x, u\rangle\, u$ et $\Omega_u = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u\rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, \sigma_u(x)\rangle \leq 0\right\}$.

- Décrire et représenter Ω_u.
- Montrer que Ω_u est auto-dual, c'est-à-dire que $\Omega_u = \left\{y \in \mathbb{R}^3 ;\ \forall x \in \Omega_u,\ \langle x, y\rangle \geq 0\right\}$.
- On dit que $x \in \Omega_u$ est extrémal si : $\forall x_1, x_2 \in \Omega_u$, $x = x_1 + x_2 \Rightarrow x, x_1, x_2$ colinéaires. Quels sont les points extrémaux de Ω_u ?
- Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on dit que f est extrémal si $f(\Omega_u) \subset \Omega_u$ et, pour tous $g, h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $f = g + h$, $g(\Omega_u) \subset \Omega_u$, $h(\Omega_u) \subset \Omega_u$, on a f, g, h colinéaires.
  Déterminer les endomorphismes extrémaux de rang 1.

Exercice 310 [X MP 2024 # 308] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $r = \mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_n)$. On cherche à quelle condition il existe une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et un projecteur orthogonal p tels que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $p(f_i) = v_i$.

- Traiter le cas $r = n$.
- On suppose dans cette question que $n = 2$ et $r = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante dans ce cas.

Exercice 311 [X MP 2024 # 309] Combien y a-t-il de matrices orthogonales de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$?

Exercice 312 [X MP 2024 # 310] Un produit scalaire hermitien Φ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une application $\Phi : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que : $\forall y \in E$, $x \mapsto \Phi(x, y)$ est linéaire ; $\forall (x, y) \in E^2$, $\Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$; $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\Phi(x, x) > 0$. On note alors $\|x\| = \sqrt{\Phi(x, x)}$ pour $x \in E$.

- On munit $\mathbb{C}^2$ du produit scalaire hermitien tel que $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$. Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\left\{\langle Tx, x\rangle ;\ x \in \mathbb{C}^2,\ \|x\|^2 = 1\right\}$.
- On munit l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ de carré sommable du produit scalaire défini par : $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$. Soit T l'endomorphisme de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui à $(u_n)_{n \geq 0}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n \geq 0}$. Déterminer $\left\{\langle Tu, u\rangle ;\ u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}),\ \|u\|^2 = 1\right\}$.

Exercice 313 [X MP 2024 # 311] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ et $b_1 \leq \cdots \leq b_n$ des nombres réels, A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$ et $\chi_B = \prod_{k=1}^n (X - b_k)$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

Exercice 314 [X MP 2024 # 312] On munit l'espace $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle u(e_i), e_i\rangle = \lambda_i$.
Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de u.

2) Analyse

Exercice 315 [X MP 2024 # 313] Soit E un espace vectoriel normé. Que dire d'une partie A de E à la fois ouverte et fermée ?

Exercice 316 [X MP 2024 # 314] Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que A, A°, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\overline{\overset{\circ}{A}}$ soient toutes distinctes.

Exercice 317 [X MP 2024 # 315] Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$ (ou $d \geq 1$).

- Montrer que la boule unite fermée pour N est fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0.
- Soit C une partie non vide de E, fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0. Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}^d$ dont C est la boule unite fermée.

Exercice 318 [X MP 2024 # 316] Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

- Montrer que si f est continue alors le graphe de f noté Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. La réciproque est-elle vraie ?
- Montrer que si Γ_f est compact alors f est continue.

Exercice 319 [X MP 2024 # 317] Soient E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1,0,1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes non nuls de E.

- Trouver des propriétés de base sur A (stabilité ou symétrie).
- Montrer que, pour tout $a \in A$, $|a| < 2$.
- Montrer que $\overline{A} = [-2,-1/2] \cup \{0\} \cup [1/2,2]$.

Exercice 320 [X MP 2024 # 318] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

- Soit $h_1\colon E \to \mathbb{R}$ définie par $h_1(f) = \sum\limits_{\substack{p/q \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ p\wedge q=1}} f\left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{q^3}$. Montrer que h_1 est bien définie et continue.
- Soient $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et $h_2\colon E \to \mathbb{R}$ définie par $h_2(f) = \sup_{t\in[0,1]} g(f(t))$.
  Déterminer les points de continuité de h_2.

Exercice 321 [X MP 2024 # 319] Existe-t-il une fonction continue $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f \circ f = \exp$?

Exercice 322 [X MP 2024 # 320]

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer la norme subordonnée de A relative à la norme infinie, puis à la norme 1.
- Montrer que si $\|A\|_{\mathrm{op},\infty} \leq 1$ et $\|A\|_{\mathrm{op},1} \leq 1$, alors $\|A\|_{\mathrm{op},2} \leq 1$.
- Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\inf_{B\notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \|B-A\|_{\mathrm{op},2} = \sqrt{\lambda_1}$, ou λ_1 est la plus petite valeur propre de AA^T.

Exercice 323 [X MP 2024 # 321] Soit (u_n) une suite réelle majorée telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$. Montrer que (u_n) est constante.

Exercice 324 [X MP 2024 # 322] On définit la suite (z_n) par $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right)$.

- Lorsque $z_0 \in \mathbb{R}^*$, étudier l'existence de la suite (z_n) et sa convergence.
- Même question lorsque $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 325 [X MP 2024 # 323]

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ que l'on note a_n.
- Montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite ℓ à déterminer. Donner un équivalent de $a_n - \ell$.

Exercice 326 [X MP 2024 # 324] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement décroissante à termes dans]0,1[. Soient $\alpha > 0$ et (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(u_n^\alpha + a_n)$. Montrer qu'il existe un unique $u_0 \geq 0$ tel que la suite (u_n) converge vers un réel > 0. Déterminer alors cette limite.

Exercice 327 [X MP 2024 # 325]

- Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ avec $a \wedge b = 1$. Montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, il existe $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $n = au + bv$.
- Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On suppose que l'ensemble $S = \{s_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est stable par produit.
  Montrer que $\frac{s_{n+1}}{s_n} \to 1$ si et seulement s'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\ln(s_p)}{\ln(s_q)} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 328 [X MP 2024 # 326] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-périodique.
On définit : $\forall S \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(f,S) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(S_k)$.

- Montrer que la suite $(M_n(f,S))$ converge pour toute suite S si et seulement si f est constante.
- On dit qu'une suite réelle (u_n) est équirépartie modulo 1 lorsque pour tout fonction continue 1-périodique, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$
  Montrer que la suite $(\sqrt{n})$ est équirépartie modulo 1.

Exercice 329 [X MP 2024 # 327] Calculer la somme de la série de terme general $n^2 2^{-(n+1)}$.

Exercice 330 [X MP 2024 # 328] Soit $\varphi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ injective. Nature de $\sum \frac{\varphi(n)}{n^2}$?

Exercice 331 [X MP 2024 # 329] Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Exercice 332 [X MP 2024 # 330] Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série $\sum u_n$ converge.
Montrer que la série de terme general $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$ diverge.

Exercice 333 [X MP 2024 # 331]

- Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. On suppose que $\frac{S_n}{nu_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a > 0$. Déterminer la nature de (S_n). Donner un équivalent de $\frac{1}{u_n}\sum_{k=0}^n ku_k$.
- Soient $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $T_n = v_0 + \cdots + v_n$. On suppose que $\frac{S_n}{nu_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{T_n}{nv_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b \in \mathbb{R}_+^*$. Donner un équivalent de $\frac{1}{u_nv_n}\sum_{k=0}^n u_kv_k$. **TODO**

Exercice 334 [X MP 2024 # 332] Déterminer les fonctions dérivables $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x)f(y)=f(x+yf(x))$.

Exercice 335 [X MP 2024 # 333] Soit $f\colon \mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ telle que $f(mn)=f(m)+f(n)$ pour tous $m,n\geq 1$.

- On suppose f croissante. Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f(n)=c\ln n$.
- On suppose que $f(n+1)-f(n)\to 0$ quand $n\to+\infty$. Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)=c\ln n$.

Exercice 336 [X MP 2024 # 334] Soit E l'ensemble des $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$.

Si $f\in E$, on pose $\Delta(f) : x\mapsto f(x+1)-f(x)$.

- Montrer que Δ est un endomorphisme de E. Est-ce un automorphisme ? ! ! (surjectivité ? Sous la forme d'une série ?)
- Soient $f\in E$, $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe $x_n\in\,]x,x+n[$ tel que $\Delta^n(f)(x)=f^{(n)}(x_n)$.

Ind. Étudier $y\mapsto f(x+y)$ et $y\mapsto\sum_{k=0}^n\dfrac{y(y-1)\cdots(y-k+1)}{k!}\,\Delta^k(f)(x)$.

Exercice 337 [X MP 2024 # 335] Déterminer les $f\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telles que $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=2(f(x/2)+f(1-x/2))$.

Exercice 338 [X MP 2024 # 336] Soient N et d deux entiers supérieurs ou egaux à 1. On pose $D=[\![-N,N]\!]^d$ et on note $(e_1,\dots,e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
TODO

On note $\partial D=\left\{\sum_{i=1}^d x_ie_i\ ;\ (x_1,\dots,x_n)\in D,\ \exists i\in[\![1,d]\!],\ |x_i|=N\right\}$ et $\overset{\circ}{D}=D\setminus\partial D$.

Pour $i\in[\![1,d]\!]$ et $u\colon D\to\mathbb{R}$, on pose $\forall x\in\overset{\circ}{D}$, $\Delta_iu(x)=2u(x)-u(x+e_i)-u(x-e_i)$.

On pose, pour $x\in\overset{\circ}{D}$, $Mu(x)=\prod_{i=1}^d\Delta_iu(x)$.

- Construire une fonction $u\colon D\to\mathbb{R}^+$ concave, i.e. vérifiant $\forall i\in[\![1,d]\!]$, $\Delta_iu\geq 0$, telle que $\forall x\in\overset{\circ}{D}$, $Mu(x)>0$ et $u|_{\partial D}=0$.

  Pour $f\colon\overset{\circ}{D}\to\mathbb{R}^+$ fixée, on note A l'ensemble des $h\colon D\to\mathbb{R}^+$ concaves, nulles sur ∂D et telles que $Mh\geq f$. Soit $u\colon x\mapsto\inf_{h\in A}h(x)$.
- Montrer que A est non vide.
- Montrer que $u\in A$ et que $Mu=f$.

Exercice 339 [X MP 2024 # 337] Si f est une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on note $V(f)$ la borne supérieure, dans $[0,+\infty]$, de l'ensemble $\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|f(a_{k+1}-f(a_k)|\ ;\ n\in\mathbb{N}^*, 0\leq a_0\leq a_1\cdots\leq a_n\leq 1\right\}$. On note VB l'ensemble des fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $V(f)<+\infty$.

- Montrer que VB est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ contenant les fonctions monotones et les fonctions lipschitziennes.
- Donner un exemple de fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ n'appartenant pas à VB.
- Montrer qu'une fonction f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est dans VB si et seulement si elle est différence deux fonctions croissantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit $f\in\mathbb{R}^{[0,1]}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
  - ▷ $\forall g\in[0,1]^{[0,1]}, V(g)<+\infty\implies V(f\circ g)<+\infty$;
  - ▷ f est lipschitzienne.

Exercice 340 [X MP 2024 # 338]

1. Soit $f\colon\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe.
   - Montrer qu'il existe $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ tel que $\frac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$; déterminer les valeurs possibles de ℓ.
   - Si $\ell\in\mathbb{R}$, montrer que $f(x)-\ell x$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $+\infty$ et déterminer les limites possibles.
2. Soient f,g convexes et continues sur $[0,1]$ vérifiant $\max(f,g)\geq 0$.
   Montrer qu'il existe α,β positifs et non tous nuls tels que $\alpha f+\beta g\geq 0$.
3. Soient $f_1,\dots,f_n : [0,1]\to\mathbb{R}$ convexes et continues vérifiant $\max(f_1,\dots,f_n)\geq 0$.
   Montrer qu'il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ positifs et non tous nuls vérifiant $\sum_{k=1}^n\alpha_kf_k\geq 0$.

Exercice 341 [X MP 2024 # 339] Soient $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$. Montrer l'équivalence entre :

- f n'est pas polynomiale,
- $\mathrm{Vect}\left(\{x\mapsto f(\alpha x+\beta)\ ;(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}\right)$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Exercice 342 [X MP 2024 # 340] Soient F un fermé de $\mathbb{R}$, $O=\mathbb{R}\setminus F$.

- Montrer que O est reunion dénombrable d'intervalles ouverts bornés.
- Montrer qu'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F=f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 343 [X MP 2024 # 341] On munit $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\ \|_\infty$.

Pour $f\in E$, soit $T(f)\colon t\in[0,1]\mapsto\sup_{[0,t]}(f)-f(t)$. Soit $f\in E$.

- Montrer que $T(f)$ est continue, que $T(f)\geq 0$ et que $T(f)(0)=0$.
- Montrer que la suite $(\|T^n(f)\|)_{n\geq 0}$ est décroissante.
- Si f est K-lipschitzienne, montrer que $T(f)$ est lipschitzienne.
- Soit $f\in E$ lipschitzienne. Montrer que (T^nf) converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 344 [X MP 2024 # 342] Soit $f : [0,1] \to [-a,b]$ continue, ou a et b sont dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2 dt \le ab$.

Exercice 345 [X MP 2024 # 343] Pour $r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $D_n(r) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos(rx)dx$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe P_n et Q_n des polynômes à coefficients entiers de degré au plus n tels que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $D_n(r) = \frac{n!}{r^{2n+1}}(P_n(r)\cos(r) + Q_n(r)\sin(r))$.
- En déduire que π est irrationnel.

Exercice 346 [X MP 2024 # 344] Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact et E l'ensemble des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ bornées par 1. Déterminer $\sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi' \ ; \ \varphi \in E \right\}$.

Exercice 347 [X MP 2024 # 345] Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{-x}+e^{2x}|\sin x|}\, \mathrm{d}x$?

Exercice 348 [X MP 2024 # 346] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et lipschitzienne. Peut-il exister un réel x non nul tel que la série de terme general $f(nx)$ diverge ?

Exercice 349 [X MP 2024 # 347] Soit (f_n) une suite de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ convergeant uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$. On suppose que, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\int_0^1 f_n' g \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Que dire de f ?

Exercice 350 [X MP 2024 # 347] Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

Exercice 351 [X MP 2024 # 348] Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1-(1-e^{-n})^x\right) \sim \ln(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 352 [X MP 2024 # 349] Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^*)$. Soit m, M deux réels vérifiant : $0 < m < M$ et $m \le |a| \le M$. On suppose egalement que $m > 2$ ou $M < \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ continue et bornée vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = 1 + \frac{F(qt)}{a(t)}$.

Exercice 353 [X MP 2024 # 350] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence appartient à $]0,+\infty[$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^{n^2}$.

Exercice 354 [X MP 2024 # 351] Soit $x > 0$.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} < e^{-x} < \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} < \arctan x < \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.
- s Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k (k!)^2} < \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t < \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k (k!)^2}$.

Exercice 355 [X MP 2024 # 352] Montrer que, pour tous $r \in]0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\ln\left|1-re^{i\theta}\right| = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n}\cos(n\theta)$.

Exercice 356 [X MP 2024 # 353] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) \ge 0$.

- On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \le 0,\ f(x) = 0$.
- On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x) \le \frac{x}{n} f'(x)$. Que peut-on en déduire ?
- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

Exercice 357 [X MP 2024 # 354] Soit $(L_n)_{n\ge0}$ définie par $L_0 = L_1 = 1$ et, si $n \ge 1$, $L_{n+1} = (n+1)L_n - \binom{n}{2}L_{n-2}$, avec $L_{-1} = 0$. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n}{n!} x^n$.

- Montrer que le rayon de convergence de f est strictement positif.
- Montrer que $\frac{L_n}{n!} \to 0$.
- Déterminer f. Ind. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
- En déduire un équivalent de $\frac{L_n}{n!}$.

Exercice 358 [X MP 2024 # 355] Une série $\sum_{n\ge0} a_n$ est dite primitive lorsqu'elle est à termes entiers et il n'existe pas d'entier $d > 1$ divisant tous les a_n.

- Soit $\sum_{n\ge0} a_n$ et $\sum_{n\ge0} b_n$ deux séries primitives. Montrer que leur produit de Cauchy est une série primitive.
- Soit $F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$, ou $c_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n, telle qu'il existe P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ avec $P \wedge Q = 1$ et $Q(0) = 1$, tels que, pour z voisin de 0, on ait $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que $(P,Q) \in \mathbb{Q}[X]^2$.
- s À Compléter.

Exercice 359 [X MP 2024 # 356] Soit $n \ge 2$. On pose $g_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{4k}}\binom{2k}{k}^2$. Soit K_n l'élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to0}{=} K_n(x) + o(x^n)$.

- Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|K_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = g_n$.
- Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou egal à 1, de somme $f(z)$. On suppose que, pour $|z| < 1$, $|f(z)| \le 1$. Montrer que $|\sum_{k=0}^n a_k| \le g_n$.

Exercice 360 [X MP 2024 # 357] Déterminer la limite de la suite de terme general $u_n = n\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t$.

Exercice 361 [X MP 2024 # 358] Soit $r \in]0,\pi[$. Déterminer la limite de la suite de terme general $u_n = \int_{-r}^{r} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 362 [X MP 2024 # 359] Déterminer un équivalent en 1^- de $x \mapsto \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}} dt$.

Exercice 363 [X MP 2024 # 360] Calculer $f(x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ixt}}{1+t^2}dt$.

Exercice 364 [X MP 2024 # 361] Soit $t>0$. Our $p\in\mathbb{R}$, on pose $F_c(p)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\cos(px^2)\,\mathrm{d}x$, $F_s(p)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\sin(px^2)\,\mathrm{d}x$ et $Z=F_c+iF_s$.

- Montrer que Z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer une équation différentielle du premier ordre satisfaite par Z.
- En déduire F_c et F_s.

Exercice 365 [X MP 2024 # 362] Soit $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{xf'(x)}{f(x)}\to a\in\mathbb{R}$ quand $x\to+\infty$.

- Soit $m\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $x\mapsto\frac{f(mx)}{f(x)}$ admet une limite en $+\infty$; la calculer.
- Soit $I\colon t\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x$.
  - ▷ Montrer que I est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
  - ▷ Montrer que I admet une limite finie en $+\infty$.
  - ▷ Supposons $a<-1$. Déterminer la limite de I en 0^+.

Exercice 366 [X MP 2024 # 363]

- Soient I et J deux segments de $\mathbb{R}$, et $f:I\times J\to\mathbb{R}$ continue. Montrer l'existence et l'égalité des deux quantites $\int_I\left(\int_J f(x,y)dy\right)dx$ et $\int_J\left(\int_I f(x,y)dx\right)dy$.
- Pour $\alpha\in]0,1[$ et $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f^2 et f'^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$, on note $\|f\|_\alpha^2=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+2\alpha}}dy\right)dx$. Montrer que $\|\ \|_\alpha$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\{f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ (f,f')\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})^2\}$.

Exercice 367 [X MP 2024 # 364] Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, $f_1,\dots,f_n$ des fonctions dérivables de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ telles que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $f_i'=\sum_{j=1}^n a_{i,j}f_j$. Montrer que la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est liée.

Exercice 368 [X MP 2024 # 365]

- Soit $f\in\mathcal{C}^1([0,\pi],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f(\pi)=0$. Montrer que $\int_0^\pi f^2\le\frac{\pi^2}{8}\int_0^\pi(f')^2$.
- Soit $f,q\in\mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$ telle que $\forall x\in[0,\pi],\ q(x)<\frac{8}{\pi^2}$. Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $y\in\mathcal{C}^2([0,\pi],\mathbb{R})$ telle que $y''+qy=f,\ y(0)=a,\ y(\pi)=b$.

Exercice 369 [X MP 2024 # 366] Pour $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $H(f)\colon x\mapsto x^2f(x)-f''(x)$, $A_-(f)\colon x\mapsto -f'(x)+xf(x)$ et $A_+(f)\colon x\mapsto f'(x)+xf(x)$.

- Déterminer $A_-\circ A_+$ et $A_+\circ A_-$.
- Montrer qu'il existe une unique $\varphi_0\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de carré intégrable, telle que $H(\varphi_0)=\varphi_0$ et $\varphi_0(0)=1$.
- E On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi_n=A_-^n(\varphi_0)$.
- Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $H(\varphi_n)=(2n+1)\varphi_n$.
- Montrer que φ_n s'écrit sous la forme $P_n\times\varphi_0$ avec P_n polynomiale.

Exercice 370 [X MP 2024 # 367]

- Soit f une fonction croissante de $[a,b]$ dans $[a,b]$. Montrer que f possède un point fixe.
- On s'intéresse à l'équation différentielle $(E)\colon x'(t)=\cos(x(t))+\cos(t)$. On admet que, pour tout $a\in[0,\pi]$, il existe une unique solution φ_a définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi_a(0)=a$, et de plus que s'il existe t tel que $\varphi_a(t)=\varphi_b(t)$ alors $a=b$.

Montrter qu'il existe une unique solution φ_a de (E) qui est 2π-périodique.

Exercice 371 [X MP 2024 # 368]

- Soit x de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $+\infty$. On suppose qu'il existe $\tau>0$ et $\lambda>0$ tels qu'on ait $x'(t)+\lambda x(t-\tau)\le 0$ et $x(t)\ge 0$ au voisinage de $+\infty$.

  Démontrer que $x(t-\tau)\le\frac{4}{(\lambda\tau)^2}x(t)$ au voisinage de $+\infty$.
- Soient x de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, m et n dans $\mathbb{N}^*$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_m$ des réels, $\tau_1,\dots,\tau_n$, des réels strictement positifs, $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ des réels positifs.

  On suppose que $\forall t\in\mathbb{R},\ x'(t)+\sum_{i=1}^n\lambda_i x'(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^m\mu_i x(t-\sigma_i)=0$.

  Démontrer qu'il existe c et K réels tels que, pour t au voisinage de $+\infty$, $|x'(t)|\le Ke^{ct}$.

Exercice 372 [X MP 2024 # 369]

- Soient $f,g\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ des fonctions continues et K un réel strictement positif. On suppose que, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $f(t)\le g(t)+K\int_0^t f(u)\,du$.

  Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $f(t)\le g(t)+K\int_0^t e^{K(t-u)}g(u)\,du$.
- Soient $A,B\colon\mathbb{R}^+\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des fonctions continues, et $M,N\colon\mathbb{R}^+\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $M'(t)=A(t)M(t)$, $N'(t)=B(t)N(t)$ et que $M(0)=N(0)=I_n$.

  On suppose de plus que $\|A(t)\|\le K$ et $\|A(t)-B(t)\|\le\eta$ pour tout $t\in[0,T]$, ou K,η,T sont des réels strictement positifs, et $\|\ \|$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  Montrer que, pour tout $t\in[0,T]$, $\|M(t)-N(t)\|\le e^{Kt}\left(e^{\eta t}-1\right)$.

Exercice 373 [X MP 2024 # 370] On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique. Soit $P\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction polynomiale à valeurs positives.

- La fonction polynomiale P atteint-elle nécessairement un minimum ?
- On suppose que $P(x,y)\underset{\|(x,y)\|\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. La fonction polynomiale P atteint-elle nécessairement un minimum ?
- On garde l'hypothese précédente. On note $S(0,1)$ le cercle unite.

  Montrer que : $\forall(x,y)\in S(0,1),\exists C(x,y)\in\mathbb{R}^{+*}\cup\{+\infty\},\lim_{t\to+\infty}\frac{P(tx,ty)}{t^2}=C(x,y)$.

- Montrer que C est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ ou qu'il n'existe qu'un nombre fini de couples (x, y) tels que $C(x, y) < +\infty$.

Exercice 374 [X MP 2024 # 371] Soient $u_0, u_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer les fonctions $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$, avec $u(t=0, \cdot) = u_0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t=0, \cdot) = u_1$.
Ind. On utilisera la fonction $U = f \circ u$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convenable.

Exercice 375 [X MP 2024 # 372] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace de dimension r et $p \in \mathcal{P}$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{P}$ en p.

3) Géométrie

Exercice 376 [X MP 2024 # 373] Soit P un polynôme réel de degré 6. Une droite D est tangente à la courbe C_P en trois points A, B, C d'abscisses $a < b < c$.

- On suppose que $AB = BC$. Montrer que les aires delimitées par $[BC]$ et C_P d'une part, et par $[AB]$ et C_P d'autre part, sont egales.
- On pose : $q = \frac{BC}{AB}$ et $Q = \frac{A_1}{A_2}$ avec A_1 et A_2 les aires susmentionnées. Montrer que : $\frac{2}{7}q^5 \le Q \le \frac{7}{2}q^5$.

Exercice 377 [X MP 2024 # 374] On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. Soient $e_0 = (1, 0)$, $e_1 = (0, 1)$ $e_2 = (-1, 0)$, $e_3 = (0, -1)$ et, pour $k \ge 4$, $e_k = e_{k \bmod 4}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On écrit $P = c_0 X^n - c_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n$. On pose $M_{-1}(P) = (0, 0)$, et pour $k \in [\![0, n]\!]$, $M_k(P) = M_{k-1}(P) + c_k\, e_k$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit D_k la droite passant par $M_k(P)$ dirigée par e_k. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $\Delta_1(\lambda)$ la droite passant par $(0, 0)$ de pente λ, $\Delta_0(\lambda)$ la perpendicularaire à $\Delta_1(\lambda)$ et passant par $(0, 0)$ et, pour $k \ge 2$, $\Delta_k(\lambda) = \Delta_{(k \bmod 2)}(\lambda)$.
On pose $\mu_0 = (0, 0)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, μ_k est l'intersection de D_k et de la parallele à $\Delta_k(\lambda)$ passant par μ_{k-1}.

- On suppose dans cette question que $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.
- Déterminer les racines de P.
- Pour chaque racine λ de P, construire M_3 et μ_3.
- Que peut-on conjecturer ?
- En notant δ_k la distance algebrique selon e_k de M_k à μ_k, montrer que $M_n = \mu_n$ si et seulement si $P(\lambda) = 0$.

4) Probabilités

Exercice 378 [X MP 2024 # 375] Soient $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i\| \le \sqrt{n}$.

Exercice 379 [X MP 2024 # 376] Soit E un ensemble fini. Dénombrer les triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \subset B \subset C$.

Exercice 380 [X MP 2024 # 377] Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de facon d'apparier les entiers de 1 à $2r$?

Exercice 381 [X MP 2024 # 378] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ ou $r \ge 1$ est arbitraire, et $n_1, \ldots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls.
- On fixe $r \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ ou $n_1, \ldots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls.

Exercice 382 [X MP 2024 # 379] Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les fonctions $f\colon [\![0, 2N]\!] \to [\![0, 2N]\!]$ telles que $f(0) = f(2N) = 0$ et $\forall k \in [\![0, 2N-1]\!],\ |f(k+1) - f(k)| = 1$.

Exercice 383 [X MP 2024 # 380] Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on note $N\colon \omega \mapsto \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(\omega) = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- Montrer que $\mathbf{E}(N) = +\infty$.
- Exprimer $\mathbf{P}(N \ge 2)$ en fonction de $\mathbf{P}(N \ge 1)$.
- Montrer que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$.

Exercice 384 [X MP 2024 # 381] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation de $[\![1, n]\!]$.

Exercice 385 [X MP 2024 # 382] On munit $\mathcal{S}_n$ de la loi uniforme et on considére X_n la variable aléatoire qui associe à une permutation le nombre d'orbites de cette permutation.

- Calculer $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$.
- Déterminer la fonction generatrice de X_n.
- En déduire des équivalent de $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{V}(X_n)$ quand $n \to +\infty$.
- Comment peut-on déterminer la loi de X_n ?

Exercice 386 [X MP 2024 # 383]

- Déterminer le nombre de listes de k entiers non consécutifs dans l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$.
- On place aléatoirement des couples (A_i, B_i), ou $i \in \{1, \ldots, n\}$, autour d'une table ronde à $2n$ places, de sorte qu'aucun des A_i ne soit assis à côté d'un autre A_j. On cherche la probabilité p_n que A_i et B_i ne soient pas à côté. Montrer que, si la configuration des A_i est fixée, la probabilité que A_i et B_i ne soient pas à cote est inchangée. En déduire une expression sommatoire de p_n.

Exercice 387 [X MP 2024 # 384] Soit s un réel > 1. On munit $\mathbb{N}^*$ de la probabilité $\mathbf{P}_s$ définie par $\mathbf{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{n^s \zeta(s)}$ pour tout $n \ge 1$. On note par ailleurs $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $p \in \mathcal{P}$ on note X_p la variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $X_p(n) = 1$ si p divise n, et 0 sinon.

- Montrer que les variables aléatoires X_p sont mutuellement indépendantes.
- En déduire que $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{(1 - p^{-s})}$.

- Pour $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(n)$ la plus grande puissance de p qui divise n. Déterminer la loi de v_p étudier l'indépendance mutuelle des variables aléatoires v_p.

Exercice 388 [X MP 2024 # 385] On joue à pile ou face avec probabilité $p \in]0,1[$ d'obtenir pile. On découpe la succession des lancers en sequences maximales de résultats identiques. Déterminer l'espérance de la longueur de la deuxième séquence.

Exercice 389 [X MP 2024 # 386] Une grille $\{1,2,3\} \times \{1,2,...,n\}$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t = 0$ une goutte d'eau au point $(2,n)$. à chaque instant, si elle se trouve au milieu (i.e. en un point $(2,k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se deplace à droite (resp. gauche) avec probabilité $\frac{1}{4}$; si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\frac{1}{2}$.

- Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à un instant t.
- s Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

Exercice 390 [X MP 2024 # 387]

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur les entiers pairs entre 2 et $2n$. Déterminer $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 1)$ et $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 2)$.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et identiquement distribuées. Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose :
  $S_m(n) = \left|\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ ; \ |X_i - X_j| \leq m\}\right|$.
  Montrer que $\mathbf{E}(S_m(n)) = n + n(n-1)\mathbf{P}(|X_1 - X_2| \leq m)$.
- Soit $(x_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, on pose : $s_m(n) = \left|\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ ; \ |x_i - x_j| \leq m\}\right|$.
  Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_2(n) \leq 3s_1(n)$.
- En déduire que, si X, Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et de même loi, alors $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 2) \leq 3\,\mathbf{P}(|X - Y| \leq 1)$.

Exercice 391 [X MP 2024 # 388] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On considère les évènements : A_n : «$\sqrt{X_n}$ admet 1 pour 1er chiffre apres la virgule», B_n : «$(\sqrt{X_n}$ admet 1 pour 1er chiffre», et C_n : «2^{X_n} admet 1 pour 1er chiffre».

- Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(A_n))$.
- Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(B_n))$.
- Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(C_n))$.

Exercice 392 [X MP 2024 # 389] On dit qu'une variable aléatoire Y est k-divisible lorsqu'elle à la même loi que la somme de k variables indépendantes et identiquement distribuées.

- On suppose que $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$. Pour quels entiers $k > 0$ la variable Y est-elle k-divisible ?
- Construire une variable aléatoire Y non constante infiniment divisible.
- Soit Y une variable aléatoire bornée infiniment divisible. Montrer que Y est constante presque surement.

Exercice 393 [X MP 2024 # 390] Soient $\alpha > 0$ et $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $\mathbf{P}(B_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(B_i = 0) = \frac{1}{i^\alpha}$. Soit $S = \{n \in \mathbb{N}^*, B_n = 1\}$.

- Donner une condition sur α pour que S soit infini presque surement, puis pour que S soit fini presque sûrement.
- On suppose $\alpha < 1$. On pose $\beta > 0$ et $N = \max\{n \in \mathbb{N}^*, S \cap [\![n, n + n^\beta]\!] = \emptyset\}$. Donner des conditions sur β pour que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$ et pour que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 0$.
- Montrer que, presque surement, il existe un rationnel γ tel que $\lfloor \gamma^{2^n} \rfloor \notin S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 394 [X MP 2024 # 391] Soient $N \geq 1$, μ une distribution de probabilité sur $[\![1,N]\!]$ telle que $\mu(1) > 0$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi μ. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $E = \{S_m,\ m \in \mathbb{N}\}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{P}(n \in E) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)\,\mathbf{P}(n - k \in E)$.
  On pose $F\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(n \in E) z^n$ et $G\colon z \mapsto \sum_{k=1}^{N} \mu(k) z^k$.
- On pose $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{D}$, $F(z) = \frac{1}{1 - G(z)}$.
- Montrer que 1 est un pole simple de F et tous les autres poles de F ont un module strictement supérieur à 1.
- Montrer que $\mathbf{P}(n \in E) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathbf{E}(X_1)}$.
- Et si μ n'est pas à support fini ?

V) X - PSI **AUTRE**

1) Algèbre

Exercice 395 [X PSI 2024 # 392] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_0 = 1$ et, pour $1 \leq k \leq n$, $P_k = \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$. Montrer qu'il existe $(s_0, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $X^n = \sum_{k=0}^{n} s_k P_k$.

Exercice 396 [X PSI 2024 # 393] Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie.

- Quels sont les endomorphismes de E qui commutent avec tous les projecteurs ?
- Quels sont les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathrm{GL}(E)$?

Exercice 397 [X PSI 2024 # 394] Soient $A_1, \ldots, A_m$ des matrices distinctes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, commutant entre elles et telles que : $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $A_i^2 = I_n$. Montrer que $m \leq 2^n$.

Exercice 398 [X PSI 2024 # 395] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AC = CB$.

2) Analyse

Exercice 399 [X PSI 2024 # 396] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $(v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $|\det(v_1, \ldots, v_n)| \leq c\prod_{j=1}^n \|v_i\|_\infty$.

Exercice 400 [X PSI 2024 # 397] Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 401 [X PSI 2024 # 398] On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ ;\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall j \in \mathbb{N},\ x \mapsto x^k \varphi^{(j)}(x)$ est bornée$\}$.

- Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k \varphi^{(j)}(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que φ possède une primitive appartenant à $\mathcal{S}$.

Exercice 402 [X PSI 2024 # 399] On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soient U et W deux sous-espaces vectoriels de même dimension m. On suppose qu'il existe un vecteur $u \in U$ tel que $u \in W^\perp$, $u \neq 0$. Montrer qu'il existe $v \neq 0 \in W$ tel que $v \in U^\perp$.

Exercice 403 [X PSI 2024 # 400] Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi/2], \mathbb{R})$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = (n+1)\int_0^{\pi/2} x\, f(x) \cos(x)^n\,\mathrm{d}x$.
Déterminer la limite de $(I_n)_{n\geq 0}$.
Ind. Utiliser $J_n = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)^n dx$.

Exercice 404 [X PSI 2024 # 401] Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{it^2 x}\mathrm{d}t$. Montrer que F est définie et qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.Ind._ Traiter le cas ou f est $\mathcal{C}^1$, le cas ou f est nulle sur $\mathbb{R}$ prive de $[-a, a]$.

Exercice 405 [X PSI 2024 # 402] Soit $(E) : y'' + \frac{t}{1+t^3} y = 0$. Montrer que (E) admet une solution non bornée.

Exercice 406 [X PSI 2024 # 403] On considére l'équation différentielle $(E) : y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0$, avec φ continue 2π-périodique et on note Sol l'ensemble des solutions de (E) de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs complexes.

- Montrer qu'il existe $y_1 \in Sol$ telle que $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, et $y_2 \in Sol$ telle que $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$.

Montrer que toute solution de (E) est combinaison linéaire de y_1 et y_2.

- Pour $y \in Sol$, on note $\Psi(y)$ la fonction $t \mapsto y(t + 2\pi)$. Montrer que $\Psi(y) \in Sol$.

Déterminer la nature de l'application Ψ.

- Montrer que, si $z \in Sol$ avec $z \neq 0$ est telle que $\forall t \in \mathbb{R}, z(t + 2\pi) = \lambda z(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, alors λ est racine du polynôme $X^2 - (y_1(2\pi) + y_2'(2\pi))X - y_1'(2\pi)y_2(2\pi) + y_1(2\pi)y_2'(2\pi)$.

Étudier la réciproque.

- Montrer que λ ne peut être nul puis que $\det(\varphi) = 1$.

Exercice 407 [X PSI 2024 # 404] Soient $E_{n,d} = \{(i_1, ..., i_d) \in \mathbb{N}^d,\ i_1 + \cdots + i_d = n\}$ et
$V_{n,d} = \{f : (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \mapsto x_1^{i_1} \ldots x_d^{i_d},\ (i_1, \ldots, i_d) \in E_{n,d}\}$.

- Montrer que $V_{n,d}$ forme une famille libre et déterminer son cardinal.
- Soit $\Delta : f \in \mathrm{Vect}(V_{n,d}) \mapsto \Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}$. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Delta$.

3) Géométrie

Exercice 408 [X PSI 2024 # 405] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_{2n}$ des points distincts de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe toujours une droite separant ces $2n$ points en deux groupes de n points.

4) Probabilités

Exercice 409 [X PSI 2024 # 406] Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(1/2)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement < < X est multiple de k> > .

- Soient $(p, q) \in (2\mathbb{N}^*)^2$. Les évènements A_p et A_q sont-ils indépendants ?
- Même question pour p et q quelconques dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 410 [X PSI 2024 # 407] Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p et que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = N)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p)$. Déterminer $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 411 [X PSI 2024 # 408] Soit $M = \begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 \\ 0 & X_2 & 1 \\ 0 & 0 & X_3 \end{pmatrix}$ ou X_1, X_2, X_3 sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable.

Exercice 412 [X PSI 2024 # 409] Soient $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Déterminer $\mathbf{E}(\det(A))$ et $\mathbf{V}(\det(A))$.

Exercice 413 [X PSI 2024 # 410] Soit Y une variable aléatoire à support fini inclus dans $\mathbb{R}^+$. Déterminer à quelle condition on a $\mathbf{E}(Y^{1/2^n}) = \mathbf{E}(Y)^{1/2^n}$ pour tout entier naturel n.

VI) X - ESPCI - PC

AUTRE

1) Algèbre

Exercice 414 [X PC 2024 # 411] Un graphe est un couple $G = (S, A)$ ou S est un ensemble fini et A un ensemble de paires de S. Les éléments de S s'appellent les sommets de G et ceux de A les arêtes de G. Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes et f une application de S dans S'. On dit que f est un morphisme de G dans G' si $\forall (u, v) \in S^2, \{u, v\} \in A \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in A'$. On dit que f est un isomorphisme de G dans G' si
$\forall (u, v) \in S^2, \{u, v\} \in A \iff \{f(u), f(v)\} \in A'$.
Donner une majoration du nombre de graphes à n sommets et k arêtes deux à deux non isomorphes.

Exercice 415 [X PC 2024 # 412] Soient $n \geq 2$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un entier $i \in [\![0, n]\!]$ tel que l'on

$$\text{ait} \left| \sum_{k=0}^{i} a_k - \sum_{k=i+1}^{n} a_k \right| \leq \sup_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Exercice 416 [X PC 2024 # 413] Soit $P = X^2 + c_1 X + c_0$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. Déterminer les suites d'entiers naturels (a_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(a_n) = a_{n+1} a_{n+2}$.

Exercice 417 [X PC 2024 # 414] Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour lesquelles il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{N}$, unitaire et de degré k tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(a_n) = \prod_{j=1}^{k} a_{n+j}$.

Exercice 418 [X PC 2024 # 415] Soient A et B deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont toute combinaison linéaire réelle est scindée ou nulle, x et y deux racines de A telles que $x < y$. Montrer que B à une racine dans $[x, y]$.

Exercice 419 [X PC 2024 # 416] Calculer $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{2-z}$.

Exercice 420 [X PC 2024 # 417] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soient $u_1, \dots, u_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer que $\prod_{i \neq j} |u_i - u_j|^{\frac{1}{n(n-1)}} \leq n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 421 [X PC 2024 # 418] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2i\pi \frac{k^2}{n}\right)$.

Exercice 422 [X PC 2024 # 419] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $\mathrm{Re}\,\big(P(X + ia)\big)$, polynôme dont les coefficients sont les parties réelles du polynôme $P(X + ia)$, est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 423 [X PC 2024 # 420] On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leq 1\}$ et $\|P\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |P(z)|$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on définit la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ en posant $P_0 = P$ puis $P_{n+1} = (P_n')^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, si $\|P\| < \varepsilon$, alors $\lim_{n \to +\infty} \|P_n\| = 0$.

Exercice 424 [X PC 2024 # 421] Soit F un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe une infinite d'entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $F(n)$ ne soit pas premier.

Exercice 425 [X PC 2024 # 422] Montrer que $\mathbb{R}^n$ ne s'écrit pas comme reunion finie de sous-espaces vectoriels strictly.

Exercice 426 [X PC 2024 # 423] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour n'importe quelle permutation de ses n^2 coefficients, on obtienne toujours une matrice inversible.

Exercice 427 [X PC 2024 # 424] Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \mapsto F$ est dite antilinéaire si $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, f(x + \lambda y) = f(x) + \overline{\lambda} f(y)$ Pour quels entiers n existe-t-il $f : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ antilinéaire telle que $f \circ f = -\,\mathrm{id}$?

Exercice 428 [X PC 2024 # 425] Soient $n \geq 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Trouver les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

Exercice 429 [X PC 2024 # 426] Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_i + \delta_{i,j} b - 1 \leq i, j \leq n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Calculer $\det(A)$.
- La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 430 [X PC 2024 # 427] Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes ;
(i) A et B admettent au moins une valeur propre commune,
(ii) il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $PA = BP$.

Exercice 431 [X PC 2024 # 428] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = -I_n$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 432 [X PC 2024 # 429] Soit n un entier naturel impair. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = A$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun. Le résultat persiste-t-il pour n pair ?

Exercice 433 [X PC 2024 # 430] Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{R})$ telles que AB est diagonalisable.

- Est-ce que que BA est diagonalisable ?
- Montrer que :

$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(AB)\right) \leq \dim\left(\mathrm{Ker}\,(B\,(AB)\,A)\right) \leq \dim\left(\mathrm{Ker}\,(A\,(BABA)\,B)\right) \leq \dim\left(\mathrm{Ker}\,(AB)\right)$.

- Est-ce que que $(BA)^2$ est diagonalisable ?

Exercice 434 [X PC 2024 # 431] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres complexes de A ont une partie réelle strictement negative et que celles de B ont une partie réelle negative. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $C = AM + MB$.

Exercice 435 [X PC 2024 # 432] Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soient S et S' diagonalisables, N et N' nilpotentes. On suppose $NS = SN$ et $N'S' = S'N'$ et $S + N = S' + N'$. Montrer que $S = S'$ et $N = N'$.

Exercice 436 [X PC 2024 # 433] Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (B, C) de matrices symétriques positives telles que $A = B - C$ et $BC = CB = 0$.

Exercice 437 [X PC 2024 # 434]

- Montrer que toute matrice réelle de taille n symétrique positive admet une racine carrée symétrique positive.
- Soient S et A deux matrices de taille n avec S symétrique définie positive et A antisymétrique. Montrer que AS est $\mathbb{C}$-diagonalisable.

Exercice 438 [X PC 2024 # 435] Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_k(H) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i H A^{k-1-i}$.

- Montrer que φ_k est un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- à quelle condition φ_k est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 439 [X PC 2024 # 436] Soit $f \in \mathcal{L}(S_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ f(M) \geq 0$. Montrer que f est une combinaison linéaire des formes linéaires $\varphi_X : M \mapsto X^T M X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 440 [X PC 2024 # 437] Soit n un entier naturel impair. Soient A et B dans $S_n(\mathbb{R})$. On note $C(A)$ (resp. $C(B)$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A (resp. B).Montrer que $C(A) \cap C(B) =_n$ si et seulement s'il n'existe pas deux sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^n$, stables par A et B, de dimension ≥ 1, tels que $F \oplus G = \mathbb{R}^n$.

Exercice 441 [X PC 2024 # 438] Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices dont les valeurs propres sont strictement supérieures à 1. Montrer que les valeurs propres de AB sont strictement supérieures à 1.

2) Analyse

Exercice 442 [X PC 2024 # 439] On note E l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes appartenant à E. Déterminer l'adhérence de A.

Exercice 443 [X PC 2024 # 440] Chercher les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijectives, continues, dont la réciproque est continue, et telle que, pour tout droite $\mathcal{D}$, $f(\mathcal{D})$ est une droite.

Exercice 444 [X PC 2024 # 446] On note $a = \sqrt{2}$. Pour $n \geq 1$, soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{a < \frac{k}{n} < a+1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} - a}}$. Étudier la convergence de (S_n).

Exercice 445 [X PC 2024 # 449] Soit (a_n) une suite de réels de $]0, 1[$ telle que la série $\sum \frac{a_n}{\ln(1/a_n)}$ converge. Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{\ln(n)}$ converge.

Exercice 446 [X PC 2024 # 450] Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe vérifiant, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^n a_n$.

- Trouver α tel qu'il existe C vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq C n^\alpha$
- On suppose $a_0 > 0$. Montrer que $\sum a_n$ diverge.

Exercice 447 [X PC 2024 # 451] Prouver que la série de terme general 2^{-2^n} converge et que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2^n}$ est irrationnelle.

Exercice 448 [X PC 2024 # 452] Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge. Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{\sum_{k=0}^n a_k u_{n-k}}{\sum_{k=0}^n a_k}$.

- Montrer que, si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum v_n$ converge.
- Est-ce toujours le cas si $\sum u_n$ ne converge pas absolument ?

Exercice 449 [X PC 2024 # 453] Soit $f \in [\,0\,; +\infty\,[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge si et seulement si

$$\sum f(n)$$

Exercice 450 [X PC 2024 # 454] Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer l'inégalité $\prod_{i=1}^k (1 + x_i^k) \geq \left(1 + \prod_{i=1}^k x_i\right)^k$.

Exercice 451 [X PC 2024 # 455] Déterminer les fonctions continues $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 452 [X PC 2024 # 456] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in]0, 1[$ distinct de $\frac{1}{n+2}$.

- Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ telles que, pour tous réels a et b, on ait $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\lambda b + (1 - \lambda a))$.
- Étudier le cas $\lambda = \frac{1}{n+2}$.

Exercice 453 [X PC 2024 # 457] Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $P : x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k \sin(kx)$. Pour tout entier $r \in \mathbb{N}$, on suppose que $(-1)^r P^{(2r)}$ est positive sur $[\,0\,; \pi\,]$. Montrer que P est la fonction $x \mapsto a_1 \sin(x)$.

Exercice 454 [X PC 2024 # 458] Soit $(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une suite doublement indexée à valeurs complexes. On suppose que, pour toute suite complexe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, $\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n u_{k,n} = 0$.
Montrer que $\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{k,n}| = 0$.

Exercice 455 [X PC 2024 # 460] Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telles que $\int_0^1 fg = 0$.

- Montrer que
$$\int_0^1 f^2\left(\int_0^1 g\right)^2 + \int_0^1 g^2\left(\int_0^1 f\right)^2 \geq 4\left(\int_0^1 f\int_0^1 g\right)^2.$$
- Montrer que
$$\int_0^1 f^2\int_0^1 g^2 \geq 4\left(\int_0^1 f\int_0^1 g\right)^2.$$

Exercice 456 [X PC 2024 # 464] Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$. On admet que, si f est continue, alors (P_n) tend uniformément vers f sur $[0,1]$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $f : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}$ afin qu'il existe une suite de polynômes à coefficients entiers qui converge uniformément vers f.

Exercice 457 [X PC 2024 # 465] Soit $f : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5\left(1+\frac{i}{n^3}-z\right)}$.

- Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
- Montrer que la restriction de f à l'ensemble des nombres complexes de module 1 n'est pas continue.

Exercice 458 [X PC 2024 # 466] Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf'(x/2)$.

- Chercher les $f \in \mathcal{S}$ développables en série entière.
- L'espace $\mathcal{S}$ est-il de dimension finie ?

Exercice 459 [X PC 2024 # 467] Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers 0. Pour $t \in]-1,1[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$.

- Vérifier que f est bien définie sur $]-1\,;1\,[$.
- Montrer que $\lim\limits_{t\to 1^-} tf(t) = 0$.
- On suppose de plus qu'il existe des réels $a_1,\ldots,a_r$ et $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_r < \pi$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{r} a_k\cos(n\theta_k)$. Montrer que $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![1,r]\!]$.

Exercice 460 [X PC 2024 # 468] La fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{k!}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers \$1^-\,\$?

Exercice 461 [X PC 2024 # 469] Soit $(a_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série entière $f_n : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}z^k$ à un rayon de convergence supérieur ou egal à 1. On note B l'ensemble des nombres complexes de module ≤ 1. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur B et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in B$, $|f_n(z)| \leq M$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq r\}$ pour tout $r < 1$.

Exercice 462 [X PC 2024 # 470] Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0 telle que $f(z) \underset{z\to 0}{=} O(z^k)$. Montrer que, pour $r > 0$ assez petit, il existe au moins $2k$ nombres complexes z de module r tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 463 [X PC 2024 # 471] Pour $x \geq 0$, on pose $I(x) = \int_0^{\pi/2}\cos(x\cos\theta)\,d\theta$.

- Écrire $I(x)$ sous la forme d'une série.
- Montrer que $I(x) = \mathcal{O}(x^{-1/4})$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 464 [X PC 2024 # 472] On admet le theoreme d'approximation de Weierstrass. Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $a, b > 0$. On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus[\,-a\,;a\,]$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$.

- On suppose que $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in [\,-b\,;b\,]$. Montrer que $f = 0$.
- On suppose que $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus[\,-b\,;b\,]$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 465 [X PC 2024 # 473] Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' - 4xy = 0$.
Ind. Chercher les solutions développables en série entière.

Exercice 466 [X PC 2024 # 474] Soient $p\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ intégrable et $y\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E) : y'' - py = 0$.

- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.
- On admet que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe y vérifiant (E) et $(y(0), y'(0)) = (a,b)$.

Montrer que (E) admet une solution non bornée.

Exercice 467 [X PC 2024 # 475] Soit $X\colon \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^{2n}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $X'(t) = JSX(t)$, ou $J = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 468 [X PC 2024 # 476] Déterminer les extrema globaux et locaux de $f : M \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 469 [X PC 2024 # 477] Soient $d \in \mathbb{N}$ et $\Omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. On suppose que $\nabla(\Omega)(0) = 0$ et on note $D_a^2(\Omega)$ la hessienne en a de Ω. On suppose que $\mathrm{Im}(D_a^2(\Omega)) = F$, ou F est indépendant de a et de rang p.

Montrer qu'il existe un changement de coordonnées f (c'est-a-dire une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$) tel que, pour tout $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $(\Omega \circ f)(x_1, \ldots, x_d)$ ne depende que de $(x_1, \ldots, x_p)$.

Exercice 470 [X PC 2024 # 478] Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}^N$ qui tend vers 0 telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f - \varphi_n$ admette un minimum local en x_n.

3) Probabilités

Exercice 471 [X PC 2024 # 479] On lance une pièce une infinite de fois. On note S_n le nombre de successions de deux pile consécutifs dans les n premiers lancers.

- Trouver $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.
- On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N},\ S_n = 1\}$. Calculer $G_T(t)$ et en déduire sa loi.

Exercice 472 [X PC 2024 # 480] Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $p_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ est croissante sur $[0,1]$. Interpréter d'un point de vue probabiliste.

Exercice 473 [X PC 2024 # 481] On étudie un groupe de cellules. à l'instant initial, $n = 0$, il y en à une. à chaque instant, chaque cellule peut de facon equiprobable : mourir, raster telle qu'elle est, se diviser en 2, se diviser en 3. Calculer la probabilité que le groupe disparaisse.

Exercice 474 [X PC 2024 # 482] Soient $p \in \left]0,1\right[$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par $X_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + 1$ avec une probabilité p et $X_{n+1} = 0$ avec probabilité $1 - p$.

Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Exercice 475 [X PC 2024 # 483] Soit Ω un ensemble. On dit que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone si elle vérifie :

(i) $Ω ∈M,$ (ii) $\mathcal{M}$ est stable par union croissante,

(iii) si $A, B \in \mathcal{M}$ et $B \subset A$, alors $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

- Montrer qu'une intersection de classes monotones est une classe monotone.
- Montrer qu'une classe monotone stable par intersection finie est une tribu.
- Soit $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersection finie. Montrer que la classe monotone D engendrée par C (c'est-a-dire la plus petite classe monotone contenant C) est une tribu.

VII) Autres X/ENS

XENS

Exercice 476 [Ly 2024 # Christophe] Soit E un espace euclidien. Soient $X \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ et $x \in E$. On pose **TODO**

$$\Pi_X(x) = \{y \in X,\ \forall z \in X,\ \|z - x\| \geq \|z - y\|\}$$

Donner une CNS sur x et X pour que $\Pi_X(x) \neq \emptyset$.

Exercice 477 [Lyon 2024 # Christophe] Soit A un ensemble quelconque. Montrer que toutes les bijections de A dans lui meme sont des produits (composees) de deux involutions.

Exercice 478 [ULSR 2024]

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z^2}{1 - z^2}$.
2. On definit (F_n) par $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ \forall n \geq 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Deduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{n!}}$ est-il algebrique ? Indication : cerire les sommes partielles comme des rationnels dont on majorera le denominateur, estimer le reste et raisonner par l'absurde.

Exercice 479 [X 2024] On pose pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $H_f(x) = -f''(x) + x^2 f(x)$.

1. Montrer qu'il existe, a scalaire multiplicatif pres, une unique fonction φ_0 de carre integrable telle que $H_{\varphi_0} = \varphi_0$.
2. Construire φ_n tel que $H_{\varphi_n} = (2n+1)\varphi_n$ et $\varphi_n = P_n \varphi_0$ avec P_n polynome de degre n.

Exercice 480 [ENS 2024]

1. Pour $a \in \mathbb{N}^*$ pair, on pose $W : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(a^k x)}{a^k}$. Montrer que W est continue.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, montrer l'inégalité $\left| \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} - \cos x \right| \leq \dfrac{h}{2}$.
3. En considérant les suites $(h_n = \frac{2\pi}{a^n})$ et $(h'_n = \frac{\pi}{a^n})$, ainsi que les quantités
$$\Delta_n = \frac{W(x + h_n) - W(x)}{h_n} \quad \text{et} \quad \Delta'_n = \frac{W(x + h'_n) - W(x)}{h_n},$$
montrer que pour a assez grand, la fonction W n'est dérivable en aucun point.

Exercice 481 [X 2024] Soit $N \geq 1$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de même loi μ sur $[\![1, N]\!]$ telle que $\mu(1) > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et $E = \{S_i,\ i \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1, P(n \in E) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k) P(n-k \in E)$.
2. Soit $F(z) = \sum_{n \geq 0} P(n \in E) z^n$ et $G(z) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k) z^k$. Montrer que $F(z) = \frac{1}{1-G(z)}$.
3. Montrer que F admet un pôle simple en 1 et que les autres pôles sont en module strictement plus grand que 1.
4. Montrer que ce résultat reste vrai si l'on remplace «$\mu(1) > 0$» par «$\operatorname{pgcd}\{k \mid \mu(k) > 0\} = 1$».
5. On décompose F en éléments simples sous la forme $F(z) = \frac{a}{1-z} + \ldots$. Déterminer a.
6. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} P(n \in E)$.

Exercice 482 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $v = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ et $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \in]0,1[^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$. On définit $\left(v^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} = \left(v_i^{(k)}\right)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\right)^{\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} v_i^{(0)} = v_i \\ v_i^{(k+1)} = (1-t_i)\, v_i^{(k)} + t_i v_{i+1}^{(k)} \end{cases}$.

Montrer que les $\left(v_i^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 483 Soit une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, (b \neq a)$ on pose pour $x \in [a,b] \tau_{a,b,f}(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$ on dit que f est ε-linéaire si $|f(x) - \tau_{a,b,f}(x)| \leq \varepsilon |b-a|$ pour tout $x \in [a,b]$. Soit f 1-lipschitzienne sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c, d \in [a,b]$ tels que f est ε-linéaire sur $[c,d]$ avec $d - c > \alpha_\varepsilon (b-a)$ où α_ε une constante à déterminer.

Exercice 484 Soit $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall v \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha_v \in \mathbb{R} \text{ t.q. } A^k v \to \alpha_v e_1\}$. On pose $\varphi_v : \mathcal{A}_1 \to \mathbb{R} \quad A \mapsto \alpha_v$. Montrer que φ_v est continue, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 485 [ENS 2024] Soit $a > 0$ et $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Déterminer $\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i^a},\ y_i > 0 \text{ et } \sum y_i \leq 1 \right\}$.

VIII) Mines - Ponts - MP

MINES

1) Algèbre

Exercice 486 [Mines MP 2024 # 484] Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Exercice 487 [Mines MP 2024 # 485] Soient $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application définie sur l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ par $f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$ admet un minimum et un maximum à expliciter.

Exercice 488 [Mines MP 2024 # 486] On note φ la fonction indicatrice d'Euler.

- Calculer $\varphi(7)$ et $\varphi(37044)$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln n + \ln 2}$.

Exercice 489 [Mines MP 2024 # 487] Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $a \wedge b = 1$ si et seulement si, pour tout $n \geq ab$, il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = n$.

Exercice 490 [Mines MP 2024 # 488] Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n = 2^{2^n} + 1$.

- Montrer que, si m et n sont deux entiers naturels distincts, $F_m \wedge F_n = 1$.
- Retrouver à l'aide de la question précédente que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 491 [Mines MP 2024 # 489] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer et dénombrer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 492 [Mines MP 2024 # 490] Soit G un groupe fini non reduit à l'élément neutre et tel que : $\forall g \in G,\ g^2 = e$.

- Montrer que G est abelien. - Soit H un sous-groupe strict de G et $a \in G \setminus H$. Montrer que $H \cup aH$ est un sous groupe de G et que l'union est disjointe.
- Montrer que le cardinal de G est une puissance de 2.
- Calculer le produit des éléments de G.

Exercice 493 [Mines MP 2024 # 491] Soient G un groupe fini et $\Omega = G^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme.
On pose : $C = \{(x,y) \in G^2 \ ;\ xy = yx\}$ et $p = \mathbf{P}(C)$.

- Montrer que $p > 0$. Que dire si $p = 1$?

Dans la suite, on suppose que G n'est pas commutatif.

- Calculer p lorsque $G = \mathcal{S}_3$ puis lorsque $G = \mathcal{S}_4$.
- On définit la relation $\sim$ sur G^2 par : $x \sim y \iff \exists g \in G, x = gyg^{-1}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- On note s le nombre de classes d'équivalence. Montrer que : $p = \frac{s}{\operatorname{card} G}$.

Exercice 494 [Mines MP 2024 # 492] Soit G un groupe abelien. Soient a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, et $x \in G$ d'ordre a et $y \in G$ d'ordre b. Montrer que xy est d'ordre ab.

Exercice 495 [Mines MP 2024 # 493] Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative, telle qu'il existe $e \in G$ vérifiant $xe = x$ pour tout $x \in G$, et, pour tout $x \in G$, il existe $x' \in G$ tel que $xx' = e$. Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 496 [Mines MP 2024 # 494] Soit $\alpha = e^{i\theta}$ un nombre complexe de module 1. Calculer $\prod_{k=0}^{n} (\alpha^{2^{-k}} + \bar{\alpha}^{2^{-k}})$.

Exercice 497 [Mines MP 2024 # 495] Soit n un entier ≥ 2. On pose $Q = 1 + 2X + \cdots + nX^{n-1}$. Calculer $\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} Q(\zeta)$, ou $\mathbb{U}_n$ designe le groupe des racines n-iemes de l'unite.

Exercice 498 [Mines MP 2024 # 496] Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ des nombres réels, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des éléments de $\mathbb{N}^*$ et $P = \prod_{k=1}^{m}(X - x_k)^{\alpha_k}$. Quel est le nombre de racines réelles distinctes de P' ?

Exercice 499 [Mines MP 2024 # 497] • Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$.

- Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $2\cos(a\pi) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 500 [Mines MP 2024 # 498] Soient $0 < a_0 < \cdots < a_n$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = (X-1)P$.

- Soient $p \geq 2$ et $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{C}^*$ tels que $|z_1 + \cdots + z_p| = |z_1| + \cdots + |z_p|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $z_k = \lambda z_1$.
- Justifier que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|Q(z)| \leq Q(|z|)$.
- Montrer que les racines de P sont de module strictement inférieur à 1.

Exercice 501 [Mines MP 2024 # 499] Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$.

Exercice 502 [Mines MP 2024 # 500] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

- à quelle condition a-t-on $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$?
- à quelle condition a-t-on $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$?
- à quelle condition a-t-on $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$?

Exercice 503 [Mines MP 2024 # 501] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant. On note $r^+(P)$ le nombre de racines de P dans $\mathbb{R}^{++}$ et $N(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P.

- Que dire de P si $N(P) = 1$? si $N(P) = 2$?
- Montr per que : $r^+(P) \leq r^+(P') + 1$.
- On suppose que $P(0) = 0$. Montr per que : $r^+(P) \leq r^+(P')$.
- Montr per que : $r^+(P) \leq N(P) - 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $0 < x_1 < \cdots < x_n$ des réels et $0 \leq p_1 < \cdots p_n$ des entiers. Montr per que : $\det\left(x_i^{p_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} > 0$.

Exercice 504 [Mines MP 2024 # 502] Soit P un polynôme à coefficients complexes.

- Donner la décomposition en éléments simples de P'/P.
- Montr per que l'enveloppe convexe des racines de P' est incluse dans l'enveloppe convexe des racines de P. Que dire si P est un polynôme à coefficients réels scindé dans $\mathbb{R}$?
- Montr per que si un demi-plan ferme H contient une racine de P' alors H contient une racine de P.

Exercice 505 [Mines MP 2024 # 503] • Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux, montrer que $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix}$ est inversible.

- On pose $\alpha = 2^{1/3}$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $a + b\alpha + c\alpha^2 = 0$.

Montrer que $a = b = c = 0$.

Exercice 506 [Mines MP 2024 # 504] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On suppose que E est de dimension finie. Montr per que les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$; (ii) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$; (iii) $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$.
- En dimension infinie, donner des contre-exemples.
- En dimension finie ou infinie, montrer que : (iii) $\iff$ ((i) et (ii)).

Exercice 507 [Mines MP 2024 # 505] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Montr per que, si F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f, on a $\operatorname{Im}(f) \subset F$.

Exercice 508 [Mines MP 2024 # 506] Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montr per qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi = M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 509 [Mines MP 2024 # 507] Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ tels que : $\forall i, j,\ p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$. Montr per que les p_i sont de rang 1 et que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(p_i)$.

Exercice 510 [Mines MP 2024 # 508] Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

- Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $uvu = u$ et $vuv = v$. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(v)$.
- Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 un supplementaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, F_1 un supplementaire de $\operatorname{Im}(u)$ dans F. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $\operatorname{Ker} v = F_1$, $\operatorname{Im} v = E_1$, $uvu = u$ et $vuv = v$.

Exercice 511 [Mines MP 2024 # 509] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que : $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim E \leq \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.
- On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$, $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u$, $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 512 [Mines MP 2024 # 510] Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $(u - a\,\mathrm{id}) \circ (u - b\,\mathrm{id}) = 0$. On pose $p = \frac{1}{b-a}(u - a\,\mathrm{id})$ et $q = \frac{1}{a-b}(u - b\,\mathrm{id})$.

Déterminer p^2, q^2, $p \circ q$, $q \circ p$ et $p + q$ puis montrer que $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Ker}(q)$.

Exercice 513 [Mines MP 2024 # 511] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, $(e_n)_{n \geq 0}$ une base de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(e_n) = e_{n+1}$. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall v \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi(v) = uv - vu$.

- Montrer que Φ n'est pas injectif et que la dimension de $\operatorname{Ker}\Phi$ est infinie.
- Soient $x_0 \in E$ et $w \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\Phi(v) = w$ et $v(e_0) = x_0$.

Exercice 514 [Mines MP 2024 # 512] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ telle que les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont E et $\{0\}$. Montrer que, pour tout $x \in E$ non nul et tout $y \in E$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

Exercice 515 [Mines MP 2024 # 513] Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent de rang $n-1$. Montrer que u admet exactement $n+1$ sous-espaces stables.

Exercice 516 [Mines MP 2024 # 514] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Trouver les endomorphismes de E qui commutent avec tous les automorphismes de E.

Exercice 517 [Mines MP 2024 # 515]
- Soient $n \geq 2$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers telle que, pour tout i, $b_{i,i}$ soit impair et, pour tout (i,j) avec $i \neq j, b_{i,j}$ soit pair. Montrer que B est inversible.
- La propriété est-elle encore vérifiée lorsqu'on intervertit < < pair > > et < < impair > > ?

Exercice 518 [Mines MP 2024 # 516] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$. Déterminer une condition nécessaire sur n et A pour qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Exercice 519 [Mines MP 2024 # 517] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = B^3$. On suppose que A est de rang 1. Donner une relation entre $\operatorname{tr} A$ et $\operatorname{tr} B$.

Exercice 520 [Mines MP 2024 # 518] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux éléments de $\{-1, 1\}$ telle que $A + D$ soit inversible.

Exercice 521 [Mines MP 2024 # 519] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ réels. On note $V = (x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n}$.
- Calculer le déterminant de la matrice V.
- Montrer que V est inversible et calculer son inverse.

Ind. On pourra interpréter V comme matrice de passage dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 522 [Mines MP 2024 # 520] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre si et seulement s'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que la matrice $(P_i(a_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible.

Exercice 523 [Mines MP 2024 # 521] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $fg - gf = \mathrm{id}$.
- Montrer que : $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ fP(g) - P(g)f = P'(g)$.
- Montrer que $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre.
- Si $E = \mathbb{R}[X]$, donner un exemple de couple (f, g) vérifiant les relations précédentes.

Exercice 524 [Mines MP 2024 # 522] Soient $n \geq 2$ et E un ensemble à n éléments. On pose $N = 2^n - 1$ et $E_1, \ldots, E_N$ les parties non vides de E. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ ou $a_{i,j} = 1$ si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, et 0 sinon. Calculer $\det A$.

Exercice 525 [Mines MP 2024 # 523] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\det((f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}) \neq 0$.

Exercice 526 [Mines MP 2024 # 524] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f_1, \ldots, f_p$ des formes linéaires sur E.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre,
- l'application $\varphi : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ est surjective de E sur $\mathbb{C}^p$,
- il existe $x_1, \ldots, x_p \in E$ tels que $\det((f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq p}) \neq 0$.

Exercice 527 [Mines MP 2024 # 525] Soient $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec A inversible et M de rang 1.
- On suppose que $\det(A + M) = 0$. Que dire de $\operatorname{tr}\left(A^{-1}M\right)$?
- On suppose que $\det(A + M) \neq 0$. Donner une expression de $(A + M)^{-1}$.

Exercice 528 [Mines MP 2024 # 526] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$. Étudier l'inversibilité de M, et le cas echeant, déterminer M^{-1}.

Exercice 529 [Mines MP 2024 # 527] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B nilpotente et $AB = BA$.
- Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A + B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- Calculer $(A + B)^{-1}$ quand A est inversible.

Exercice 530 [Mines MP 2024 # 528] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^2 = 0$ si et seulement si A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $2r \leq n$.

Exercice 531 [Mines MP 2024 # 529] Pour \$n∈N^*,\$ soit $P_n = X^n - X + 1$.
- ▷ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet au plus une racine réelle.
  ▷ Donner les racines des P_n'..
  ▷ Montrer que les P_n sont à racines simples.
- Notons r_1, r_2, r_3 les racines de P_3. Calculer $\begin{pmatrix} r_1 + 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_2 + 1 & 1 \\ 1 & 1 & r_3 + 1 \end{pmatrix}$

Exercice 532 [Mines MP 2024 # 530] • Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, qui stabilise tous les sous-espaces de dimension p. Montrer que u est une homothetie.

- Soient $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A n'est pas scalaire et que M commute avec toutes les matrices semblables à A. Que dire de M ?
- Même question pour deux matrices réelles.

Exercice 533 [Mines MP 2024 # 531] Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, montrer que $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ le sont aussi.

Exercice 534 [Mines MP 2024 # 532] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, si $t \in \mathbb{R}^+$, $\det(A^2 + tI_n) \geq 0$.

Exercice 535 [Mines MP 2024 # 533] Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que $G = \{P(N), P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } P(0) = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 536 [Mines MP 2024 # 534] Soient $n \geq 2$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non inversibles telles que $(AB)^n = 0$.

- Montrer que $(BA)^n = 0$.
- On suppose que $(AB)^{n-1} \neq 0$ et $(BA)^{n-1} \neq 0$. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Ker}((AB)^k) = \mathrm{Ker}(B)$ et $\mathrm{Ker}((BA)^k) = \mathrm{Ker}(A)$.
- Conclure

Exercice 537 [Mines MP 2024 # 535] Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle et non inversible.

- Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(A^p) \oplus \mathrm{Ker}(A^p)$.
- Montrer qu'il existe $r \in [\![1, n-1]\!]$, $A_0 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ nilpotente tels que A est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} A_0 & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right)$
- On suppose qu'il existe $m \geq 2$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $A^m B = A$. Montrer que $A^m B = A^{m-1}B$À $= \cdots = BA^m$.

Exercice 538 [Mines MP 2024 # 536] Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$.

- Calculer le déterminant de la matrice $(P^{(i)}(\alpha_j))_{0 \leq i,j \leq n}$.
- Montrer que $(P(X + \alpha_j))_{0 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 539 [Mines MP 2024 # 537] Soient $n > 2$, $m = 2^n - 2$, $E = [\![1, n]\!]$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$.

- Montrer qu'il existe une unique bijection $g \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ telle que $\forall \alpha \in \mathcal{F}$, $g(\alpha) \cap \alpha = \emptyset$.
- On se donne une enumeration $\alpha_1, ..., \alpha_m$ de $\mathcal{F}$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,j} = -1$ si $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ et 0 sinon. Calculer $\det(A)$.

Exercice 540 [Mines MP 2024 # 538] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $3n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = 2n$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est egale à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ 0 & \\ \hline 0 & 0 \\ I_n & \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & \end{array}\right)$.

Exercice 541 [Mines MP 2024 # 539] Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall M \in G,\ M^2 = I_n$. Montrer que G est fini.

Exercice 542 [Mines MP 2024 # 540] Soit I l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

- Preciser la structure algebrique de I.
- Montrer que $A \in I$ si et seulement si $\det A \in \{-1, 1\}$.
- Pour toute colonne X à coefficients entiers, on note $\alpha(X)$ le pgcd de ses coefficients. Montrer que $A \in I$ si et seulement si, pour toute colonne X à coefficients entiers, $\alpha(AX) = \alpha(X)$.

Exercice 543 [Mines MP 2024 # 541] Déterminer les parties $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $(G, \times)$ est un groupe multiplicatif mais pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que toutes les matrices de G ont même rang.

Exercice 544 [Mines MP 2024 # 542] Soit $f \in \mathrm{GL}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$ vérifiant : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(A)f(B)$.

- Calculer $f(I_n)$.
- On pose $\Delta = \mathrm{Diag}(1, \ldots, n)$. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(\Delta) = P\Delta P^{-1}$. Montrer que, pour toute matrice diagonale D, on a : $f(D) = PDP^{-1}$.
- Expliciter f.

Exercice 545 [Mines MP 2024 # 543] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $AB - BA = cA$.

- Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(A - cI_n)^k B = BA^k$.
- Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-ct} e^{tA} B = Be^{tA}$.

Exercice 546 [Mines MP 2024 # 544] Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est stochastique si : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{i,j} \geq 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(tA)$ soit stochastique pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 547 [Mines MP 2024 # 545] • Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Trouver une relation entre χ_{MN} et χ_{NM}.

- Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On pose $B = (1 + a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on écrit $A^{-1} = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et on pose enfin $S = \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{ij}$. Trouver une relation entre $\det A$, $\det B$ et S.

Exercice 548 [Mines MP 2024 # 546] Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et preciser ses éléments propres.
- Déterminer les éléments propres de la matrice A.

Exercice 549 [Mines MP 2024 # 547] Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_n \\ a_1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$. à quelle condition M est-elle diagonalisable ?

Exercice 550 [Mines MP 2024 # 548] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 \neq b^2$. Diagonaliser si possible la matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = a$ si $i + j$ est pair et $a_{i,j} = b$ sinon.

Exercice 551 [Mines MP 2024 # 549] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

- Justifier que A est diagonalisable lorsque $k \in \mathbb{R}$.
- Montrer que $\chi_A = X^2(X - u_1)(X - u_2)$ avec $u_1 + u_2 = k$ et $u_1^2 + u_2^2 = k^2 + 6$.
- à quelle condition A est-elle diagonalisable ?

Exercice 552 [Mines MP 2024 # 550] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = j$ si $i \neq j$ et 0 sinon.

- Calculer $\det(A + kI_n)$ pour $k \in \{1, 2, ..., n\}$.
- - Montrer que A à n valeurs propres distinctes.
- Pour λ valeur propre de A, montrer que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\lambda + k} = 1$.
- Déterminer la somme et le produit des valeurs propres de A.

Exercice 553 [Mines MP 2024 # 551] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les matrices A et A^T sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 554 [Mines MP 2024 # 552] Soit ω un nombre complexe non réel

- Montrer qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\omega^2 = \alpha\omega + \beta$.
- Montrer que, si $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = \lambda + \mu\omega$.
- Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $2n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u^2 = \alpha u + \beta\,\mathrm{id}_E$. On pose $(\lambda + \mu\omega) * x = \lambda x + \mu u(x)$ pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $x \in E$. Montrer que $(E, +, *)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
- Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel.Montrer que $e = (e_1, u(e_1), \ldots, e_p, u(e_p))$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
- Quelle est la matrice de u dans e ? Son polynôme caractéristique ?

Exercice 555 [Mines MP 2024 # 553] Soient E un espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E, $u \in \mathrm{GL}(E) \setminus \{\mathrm{id}\}$ tel que $\forall x \in H, u(x) = x$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- pour tout supplementaire S de H dans E, il existe $x \in S$ tel que $u(x) \neq x$;
- u est diagonalisable ;

(iii) u admet une valeur propre autre que 1 ;

- $\det(u) \neq 1$;
- l'image de $u - \mathrm{id}$ n'est pas contenue dans H ;
- il existe $\lambda \neq 1$ et une base de E dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, \lambda)$.

Exercice 556 [Mines MP 2024 # 554] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.
Soit $\Phi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \dfrac{su + us}{2}$. Déterminer les éléments propres de Φ puis étudier sa diagonalisabilité.

Exercice 557 [Mines MP 2024 # 555] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices non nulles. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = M + \mathrm{tr}(AM)B$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de f.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.
- Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 558 [Mines MP 2024 # 556] Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur B pour que l'équation $A^3 = B$ admette au moins une solution.

Exercice 559 [Mines MP 2024 # 557] Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $L(P) \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme associe à la fonction polynomiale $x \mapsto \int_0^{+\infty} P(x+t)\, e^{-t} dt$.

- Montrer que L définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que $L = \sum_{k=0}^{+\infty} D^k$ ou D est l'endomorphisme de derivation de $\mathbb{R}[X]$.
- Déterminer les éléments propres de L.
- Déterminer le commutant de L.

Exercice 560 [Mines MP 2024 # 558] Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et φ tel que, pour tout $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(u)\, du$ si $x \neq 0$, $\varphi(f)(0) = f(0)$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de E.
- Trouver les éléments propres de φ.
- Montrer que φ stabilise $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 561 [Mines MP 2024 # 559] Soient $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{C}^0([-1,1], [-1,1])$ surjective et croissante. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par : $\forall f \in E$, $\Phi(f) = f \circ g$. On considére $F \neq \{0\}$ un sous-espace de dimension finie de E stable par Φ.

- Montrer que Φ_F est un automorphisme. - Montrer que 1 est l'unique valeur propre de Φ_F.
- Montrer que $u = \Phi_F - \mathrm{id}_F$ est nilpotent.

Exercice 562 [Mines MP 2024 # 560] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v = P(u)$.

Exercice 563 [Mines MP 2024 # 561] Quelles sont les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'ensemble $\{M^k \;;\; k \in \mathbb{N}\}$ soit fini ?

Exercice 564 [Mines MP 2024 # 562] Trouver les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que PA est diagonalisable pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 565 [Mines MP 2024 # 563] Soit $A = \begin{pmatrix} aM & bM \\ bM & cM \end{pmatrix}$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a, b, $c \in \mathbb{R}$. Étudier la diagonalisabilité de A en fonction de a, b, c et M.

Exercice 566 [Mines MP 2024 # 564] Soient A, B, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BC$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 567 [Mines MP 2024 # 565] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $A^p = I_n$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Soit $m \geq 3$. On suppose que les coefficients de $A - I_n$ sont divisibles par m. Montrer que $A = I_n$.

Exercice 568 [Mines MP 2024 # 566] Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{M} = \left(\overline{M_{i,j}}\right)_{1 \leq i,j \leq, n}$.

- Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{U}$ tel que $\alpha M + \overline{\alpha} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Montrer l'équivalence entre :

(i) $M\overline{M} = \lambda I_n$ avec $\lambda \geq 0$, (ii) $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\exists \mu \in \mathbb{C}$, $M = \mu P \overline{P}^{-1}$.

- Montrer l'équivalence entre : (i) $M\overline{M}$ est diagonalisable et Sp $\left(M\overline{M}\right) \subset \mathbb{R}^+$,

(ii) $M = PD\overline{P}^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale.

Exercice 569 [Mines MP 2024 # 567]

- Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes telle que $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$, $\deg(P_n) = n$.
- Soit $n, N \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que $P_n(A) = 0$. Montrer que A est diagonalisable.
- Soit $n \geq 2$. Résoudre le systeme $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = x_{i-1} + x_{i+1}$ en convenant que $x_0 = x_{n+1} = 0$.

Exercice 570 [Mines MP 2024 # 568] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que A est semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont soit de taille 1, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Exercice 571 [Mines MP 2024 # 569] Soient A et B deux matrices non cotrigonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure et $P^{-1}BP$ triangulaire inférieure.

Exercice 572 [Mines MP 2024 # 570] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Soit F un plan stable par f. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré au plus 2 tel que : $F \subset \operatorname{Ker} P(f)$. - Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré 2 divisant le polynôme minimal de f. Montrer qu'il existe un plan F stable par f tel que $F \subset \operatorname{Ker} P(f)$.

Exercice 573 [Mines MP 2024 # 571] Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur χ_u pour que les seuls sous-espaces stables par u soient $\{0\}$ et E.

Exercice 574 [Mines MP 2024 # 572] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre : (i) $BA = 0$ et B nilpotente, (ii) $\forall M \in E$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

Exercice 575 [Mines MP 2024 # 573] Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\operatorname{sp} A \cap \operatorname{sp} B = \emptyset$.

- Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une unique matrice X telle que $AX - XB = M$.

Exercice 576 [Mines MP 2024 # 574] Quelles sont les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec chaque matrice de leur classe de similitude ?

Exercice 577 [Mines MP 2024 # 575] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- On suppose que $AB - BA = \alpha A$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.
- On suppose que $AB - BA = \alpha A + \beta B$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

Exercice 578 [Mines MP 2024 # 576] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On suppose que A et B admettent une valeur propre commune λ. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AC = CB = \lambda C$.
- On suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AC = CB$, et on note r le rang de C. Montrer que χ_A et χ_B admettent un diviseur commun de degré r.
- Étudier la réciproque.

Exercice 579 [Mines MP 2024 # 577] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $C(A)$ la sous-algèbre des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec A.

- On suppose que A est diagonalisable. Calculer la dimension de $C(A)$. à quelle condition a-t-on $C(A) = \mathbb{C}[A]$?
- Montrer que, sans hypothese sur A, la dimension de $C(A)$ est supérieure ou egale à n.

Exercice 580 [Mines MP 2024 # 578] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $C(A)$ la sous-algèbre des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec A. à quelle condition sur A est-il vrai que $C(A)$ ne contient aucune matrice nilpotente non nulle ?

Exercice 581 [Mines MP 2024 # 579] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

- Supposons $\deg P \geq 2$. Montrer que, si P est scindé à racines simples, P' l'est egalement.
- Calculer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.
- Montrer que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $B = 0$.

Exercice 582 [Mines MP 2024 # 580] Soient E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E telle que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$ pour tout $x \in E$.

- Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.
- On remplace l'hypothese ¬$(e_1, \dots, e_n)$ est libre ▷ par ¬¬ les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont non-nuls ▷. Le résultat subsiste-t-il ?

Exercice 583 [Mines MP 2024 # 581] On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soient $\delta > 0$ et A une partie de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $\forall (x, y) \in A^2, x \neq y \implies \|x - y\| = \delta$.

- Soient $p \in \mathbb{N}$ et $u_0, \dots, u_p \in A$ distincts. On considére la matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par : $m_{i,j} = \langle u_i - u_0, u_j - u_0 \rangle$. Montrer que M est inversible.
- Montrer que A est finie.

Exercice 584 [Mines MP 2024 # 582]

- Montrer que $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)\, Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
- Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, degré et coefficient dominant de T_n.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n.

Calculer $\min_{P \in U_n} \int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Exercice 585 [Mines MP 2024 # 583] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $|\det M| \leq \prod_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2}$.

Exercice 586 [Mines MP 2024 # 584] Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f^k$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 587 [Mines MP 2024 # 585] Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme 1-lipschitzien. Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$.

Exercice 588 [Mines MP 2024 # 586] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente non nulle.
Déterminer l'image de l'application $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x^T M x$.

Exercice 589 [Mines MP 2024 # 587] Soit E un espace vectoriel euclidien. Montrer que l'application $f : x \in E \mapsto \frac{x}{\max(\|x\|, 1)}$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 590 [Mines MP 2024 # 588] Soit (a, b, x_0) une famille libre d'un espace euclidien E. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $u(x_0) = a$ et $u^*(x_0) = b$.

Exercice 591 [Mines MP 2024 # 589] Soient E un espace euclidien, p et q dans $\mathcal{L}(E)$ des projecteurs orthogonaux. Montrer que $q \circ p$ est un projecteur si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.

Exercice 592 [Mines MP 2024 # 590] Soient E un espace euclidien, u et v dans $\mathcal{O}(E)$ telles que $\det(u)\det(v) < 0$. Calculer $\|v - u\|_{\mathrm{op}}$.

Exercice 593 [Mines MP 2024 # 591] Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on appelle $d_n(\mathbb{K})$ la dimension du plus grand sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont diagonalisables.

- Que peut-on dire du spectre réel d'une matrice antisymétrique ?
- Déterminer $d_n(\mathbb{R})$.
- Déterminer $d_2(\mathbb{C})$.

Exercice 594 [Mines MP 2024 # 592] Soit $n \geq 3$. Soient $A, B \in \mathbb{R}^n$ non colinéaires. On pose : $M = AB^T + BA^T$.

- Montrer que M est diagonalisable.

- Déterminer $\operatorname{rg} M$.
- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M.

Exercice 595 [Mines MP 2024 # 593] Soit $J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), M^T JM = J\}$.

- Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.
- Caractériser les éléments de $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap G$.

Exercice 596 [Mines MP 2024 # 594] Décrire $\left\{e^A \; ; \; A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right\}$.

Exercice 597 [Mines MP 2024 # 595] Soient $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{+*}$ continue et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(e^{xA}) > 0$.

Exercice 598 [Mines MP 2024 # 596] • Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), f(Px) = Pf(x)P^{-1}$.

- Même question en remplacant $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $\tilde{\mathcal{O}}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 599 [Mines MP 2024 # 597] • Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$.

- On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ telles que $-1 \notin \mathrm{Sp}(M)$. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}, M \mapsto (I_n + M)(I_n - M)^{-1}$ est une bijection.
- Soit $Q \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation : $(I_n + X)(I_n - X)^{-1} = Q$ d'inconnue $X \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 600 [Mines MP 2024 # 598] Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}\right| \le n \le \sum_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}| \le n\sqrt{n}$.

Exercice 601 [Mines MP 2024 # 599] On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.
Soient $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ et $f : x \mapsto \langle x, e_1\rangle\, e_2 + \langle x, e_1\rangle\, e_1$.

- Si e_1 et e_2 sont linéairement indépendants, montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$.
- Étudier la réciproque.

Exercice 602 [Mines MP 2024 # 600] Soit E un espace réel de dimension $n \ge 2$. Lorsque Φ est un produit scalaire sur E, on note $\mathcal{O}_\Phi(E)$ le groupe des isométries pour Φ, et $\mathcal{S}_\Phi^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs pour Φ.

- On fixe un produit scalaire Φ. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Ψ est un produit scalaire, (ii) $\exists a \in \mathcal{S}_\Phi^{++}(E), \Psi(x, y) = \Phi(a(x), y)$.

- Soit $u \in \mathcal{O}_\Phi(E)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in \mathcal{O}_\Psi(E)$ (on utilisera l'endomorphisme a de la question précédente).
- Soit P l'ensemble des produits scalaires sur E. Déterminer $\bigcap_{\Psi\in P} \mathcal{O}_\Psi(E)$.

Exercice 603 [Mines MP 2024 # 601] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(Me_1, \dots, Me_n)$ soit orthogonale.

Exercice 604 [Mines MP 2024 # 602] Soit k un réel fixe. On pose $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}\, A} \lambda \ge k + 1$ et $\min_{\lambda\in\mathrm{Sp}\, A} \lambda \ge k - 1$.

Exercice 605 [Mines MP 2024 # 603] Soit $\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer l'équivalence des enonces suivants : (i) $x^T Sx \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $\mathrm{Sp}\, S \subset \mathbb{R}^+$, (iii) il existe $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = T^2$.

Desormais, on suppose ces conditions realisées.

- Montrer que, pour tous $1 \le i \ne j \le n$ et $x, y \in \mathbb{R}$, $s_{i,i}x^2 + 2s_{i,j}xy + s_{j,j}y^2 \ge 0$. En déduire que $s_{i,j}^2 \le s_{i,i}s_{j,j}$.
- On suppose de plus les coefficients de S non nuls, et on pose $T = \left(\frac{1}{s_{i,j}}\right)_{1\le i,j\le n}$. Montrer que $T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\operatorname{rg} S = 1$.

Exercice 606 [Mines MP 2024 # 604] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2 + S + I_n$.
- à quelle condition la matrice S est-elle unique ?

Exercice 607 [Mines MP 2024 # 605] Soient $A, C \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

- Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & C \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
- On suppose ici que $B = 0$. Donner une base de diagonalisation de M construite à partir de vecteurs propres de A et C.
- Montrer que, pour tous $E \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $G \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}(EG) = \mathrm{rg}(GE) = \mathrm{rg}(G)$.

- On suppose ici que A est inversible. On pose $P = \begin{pmatrix} I_2 & A^{-1}B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$. Calculer MP. En déduire le rang de M.

Exercice 608 [Mines MP 2024 # 606] Soit $A = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que A est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 609 [Mines MP 2024 # 607] Soit $A_n = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0\leq i,j\leq n}$. Montrer que les valeurs propres de A_n sont dans $]0,\pi[$ et que la plus petite valeur propre de A_n est inférieure à $\frac{1}{2n+1}$. On pourra montrer que, pour $P\in\mathbb{R}[X]$, on a $\int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^\pi P(e^{i\theta})ie^{i\theta}\,d\theta = 0$.

Exercice 610 [Mines MP 2024 # 608] Soient E un espace euclidien, $u\in\mathcal{S}(E)$, a et b deux réels tels que $a<b$, $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x\in[a,b], P(x)>0$. On suppose que $\forall x\in E,\ a\|x\|^2\leq\langle u(x),x\rangle\leq b\|x\|^2$. Montrer que $P(u)\in\mathcal{S}^{++}(E)$.

Exercice 611 [Mines MP 2024 # 609] Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est combinaison linéaire de quatre matrices orthogonales.

Exercice 612 [Mines MP 2024 # 610] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^TA = A^TA$. Montrer que si F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ stable par A alors $F^\perp$ est stable par A^T. On suppose $n=3$. Montrer que A est soit diagonalisable, soit semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\beta\neq 0$.

Exercice 613 [Mines MP 2024 # 611] Soit $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe un unique couple $(O,S)\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M=OS$.
- Déterminer $\sup_{A\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}\mathrm{tr}(AM)$.

Exercice 614 [Mines MP 2024 # 612] Soit $(E,\langle\ \rangle)$ un espace euclidien.

- Soit $u\in\mathcal{S}(E)$. Montrer que $E=\mathrm{Ker}(u)\oplus\mathrm{Im}\,u$.
- Soit $u\in\mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe $h\in\mathcal{S}^+(E)$ tel que $u=h^2$.
- Soient $f,g\in\mathcal{S}^+(E)$ tels que $\mathrm{Ker}(f+g)=\mathrm{Ker}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g$.

Montrer que $\mathrm{Im}(f+g)=\mathrm{Im}\,f+\mathrm{Im}\,g$.

Exercice 615 [Mines MP 2024 # 613] Soient $S\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec S^2. Montrer que A commute avec S.

Exercice 616 [Mines MP 2024 # 614] Soient $A,B\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A^2B^2=B^2A^2$. Montrer que $AB=BA$.

Exercice 617 [Mines MP 2024 # 615] Soient $n,k\in\mathbb{N}^*$. Étudier l'injectivite et la surjectivite de l'application $f\colon\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A)=A^k$.

Exercice 618 [Mines MP 2024 # 616] Soit $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D=\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ avec $\lambda_i>0$ pour tout i telles que $P^TM^TMP=D^2$.
- On note $V_1,\dots,V_n$ les colonnes de MP.Soit Q la matrice dont les colonnes sont $\frac{1}{\lambda_1}V_1,\dots,\frac{1}{\lambda_n}V_n$. Montrer que $Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer qu'il existe O,O' dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M=ODO'$.
- Montrer le même résultat si M est non inversible.

Exercice 619 [Mines MP 2024 # 617] Soit $n\geq 2$

- Déterminer le sous-espace vectoriel engendre par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Déterminer le plus petit sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 620 [Mines MP 2024 # 618] Soit $n\geq 2$.

- Soit $S\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $S=P^TP$.
- Déterminer le sous-espace vectoriel engendre par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Soient $A_1,\dots, A_k\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$.

Montrer que $|\det(\alpha_1A_1+\cdots+\alpha_kA_k)|\leq\det(|\alpha_1|A_1+\cdots+|\alpha_k|A_k)$.

Exercice 621 [Mines MP 2024 # 619] Soient E un espace euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$.

- Montrer que $\|\!|u|\!\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|u(x)\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|u(x)\|$.
- Montrer que $\|\!|u|\!\| = \sup\limits_{\|x\|=1,\|y\|=1}|\langle u(x),y\rangle| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1,\|y\|\leq 1}|\langle u(x),y\rangle|$.
- On suppose u symétrique. Montrer que $\|\!|u|\!\| = \sup\limits_{\|x\|=1}|\langle u(x),x\rangle| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1}|\langle u(x),x\rangle|$.

Exercice 622 [Mines MP 2024 # 620] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne canonique.
Soit $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note r la plus petite valeur propre de AA et R la plus grande. Montrer que $\|A\|^2=R$ et $\|A^{-1}\|^{-2}=r$.

2) Analyse

Exercice 623 [Mines MP 2024 # 621] Soient $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $N : f\mapsto\sqrt{f(0)^2+\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$.

- Montrer que N est une norme sur E.
- Compare N à la norme $\|\|\infty$.

Exercice 624 [Mines MP 2024 # 622] Pour $a\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P)=|P(a)|+\int_0^1|P'|$.

- Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, N_a est une norme.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

Exercice 625 [MINES MP 2024 # 623] On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\left\| \int_a^b f \right\| = \int_a^b \|f\|$ si et seulement s'il existe $\Phi \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ et $u \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall t \in [a,b],\ f(t) = \Phi(t)u$.

Exercice 626 [MINES MP 2024 # 624] On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}$.

- Montrer que $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$ définit une norme sur E.
- Les normes $\|\|$ et $\|\|_\infty$ sur E sont-elles équivalentes ?

Exercice 627 [MINES MP 2024 # 625] Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Construire une norme N sur $\mathbb{R}[X]$ telle que : $N(X^n - Q) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 628 [MINES MP 2024 # 626] Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t)|$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ et $a_n = \inf\limits_{P\in E_n} N(P)$.

- Montrer que $a_n > 0$; calculer a_0 et a_1.
- Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle.

Exercice 629 [MINES MP 2024 # 627] Déterminer les sous-groupes compacts de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 630 [MINES MP 2024 # 628] Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_Q = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |PQ(x)|$.

- Montrer que $\|\ \|_Q$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
- à quelle condition sur Q la norme $\|\ \|_Q$ est-elle équivalente à $\|\ \|_1$ (norme associée au polynôme egal à 1) ?
- Soit $c \in [-1,1]$ une racine de Q. Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(c) = 1$, $P'(c) = 0$ et $\forall x \in [-1,1] \setminus \{c\}$, $0 \le P(x) < 1$.
- Montrer que $\|P^n\|_Q \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.
- Qu'en déduire ?

Exercice 631 [MINES MP 2024 # 629] Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E, $f : [0,1] \to E$ continue. On suppose que $f(0) \in A$ et $f(1) \in E \setminus A$. Montrer que $f([0,1]) \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$.

Exercice 632 [MINES MP 2024 # 630] On munit $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Soit $(x - 1 \le i \le n$ des points distincts de $[a,b]$ et $(y - 1 \le i \le n$ des réels. Montrer que l'adherence de l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X]; \forall i \in [\![1,n]\!], P(x_i) = y_i\}$ est $\{f \in E; \forall i \in [\![1,n]\!], f(x_i) = y_i\}$.

Exercice 633 [MINES MP 2024 # 631] On munit $\mathbb{C}[X]$ de la norme $\|P\| = \max |p_k|$ ou $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$.

Déterminer les valeurs $b \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $f : P \mapsto P(b)$ est continue.

Exercice 634 [MINES MP 2024 # 632] Soient C une partie convexe d'un espace norme E, X une partie de E telle que $C \subset X \subset \overline{C}$. Montrer que X est connexe par arcs.

Exercice 635 [MINES MP 2024 # 633]

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Im}(z)|^n \le |P(z)|$.
- On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables. Montrer que $\mathcal{T}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'adherence de $\mathcal{D}$ est $\mathcal{T}$.

Exercice 636 [MINES MP 2024 # 634]

- Montrer que l'image par une fonction continue d'une partie connexe par arcs est connexe par arcs.
- Montrer qu'une fonction continue injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement monotone.
- Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $F\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix}$. On suppose que F envoie toute matrice inversible sur une matrice inversible.
- Montrer que f est injective et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. - Montrer que $f(0) = 0$.

Exercice 637 [MINES MP 2024 # 643] Déterminer la limite de $u_n = \frac{1}{16^n} \sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}$.

Exercice 638 [MINES MP 2024 # 644] Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+1}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si $u_{k+1} \le u_k$, alors la suite $(u_n)_{n\ge k+1}$ est strictement décroissante.
- Montrer que, si la suite (u_n) est croissante, alors sa croissance est stricte.

Que dire de sa limite ?

- On admet que $e^{e-2} < 9/4$. Montrer que, pour x suffisamment petit, la suite (u_n) converge.

Exercice 639 [MINES MP 2024 # 645] Soit $\alpha > 1$. On considére l'équation : $(E_n)\colon \prod_{k=1}^n (kx + n^2) = \alpha n^{2n}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) possède une unique solution strictement positive. On la note x_n.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n < 2\alpha$.
- Montrer la convergence et calculer la limite de la suite (x_n).

Exercice 640 [MINES MP 2024 # 646] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) \to +\infty$ et $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $\left\{e^{if(n)}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans le cercle unite.

Exercice 641 [Mines MP 2024 # 647] Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n.

- Montrer que si (u_n) converge alors sa limite ℓ est un point fixe de f. Dans la suite on considére a un point fixe de f.
- On suppose que $|f'(a)| > 1$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ et $k > 1$ tel que $|f'(x)| \geq k$ pour $x \in]a-\eta, a+\eta[$. Si $|f'(a)| > 1$ décrire les suites (u_n) qui convergent vers a.
- On suppose que $|f'(a)| < 1$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ et $k \in [0,1[$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour $x \in]a-\eta, a+\eta[$. Montrer que la suite (u_n) converge vers a si et seulement s'il existe un rang p tel que $u_p \in]a-\eta, a+\eta[$.

Exercice 642 [Mines MP 2024 # 648] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+2}$.
Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $u_N > 1$.

- Montrer qu'il existe $n_0 > N$ tel que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.
- La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, trouver sa limite.

Exercice 643 [Mines MP 2024 # 649] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction bornée et telle que $|f(x) - f(y)| < |x-y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \neq y$. On considére une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_1 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = f(u_n) + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. On pose enfin $a_n = |u_{n+1} - u_n|$ pour tout $n \geq 1$.

- Soient p et q des entiers tels que $1 \leq p < q$. Montrer que $a_q - a_p \leq \frac{1}{p}$.
- Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice 644 [Mines MP 2024 # 650] Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

- Montrer que la suite (u_n) converge.
- On suppose $u_0 > 0$ et on pose $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer la convergence de la suite (v_n) vers un réel α puis que $0 \leq \alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$.
- Donner un équivalent de u_n.
- Donner un équivalent de u_n dans le cas $u_0 \in]-1, 0[$.

Exercice 645 [Mines MP 2024 # 651] Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $[0,1]$. On dit que (u_n) est equirepartie si et seulement si, pour tous $\alpha < \beta$ dans $[0,1]$, on a $\frac{1}{n}\operatorname{card}\left\{k \in [\![1,n]\!], \alpha < u_n < \beta\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta - \alpha$.

- On suppose (u_n) equiperaptie. Montrer que (u_n) diverge. Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[0,1]$.
- Montrer l'équivalence entre :

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C}), \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$,
(iii) $\forall m \in \mathbb{N}^*, \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{2\pi i m u_k} = 0$.

Exercice 646 [Mines MP 2024 # 652] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Quelle est la nature de la série $\sum(-1)^{\lfloor n/2\rfloor}u_n$?

Exercice 647 [Mines MP 2024 # 653] Existe-t-il une bijection $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que la série $\sum \frac{f(n)}{n^2}$ converge ?

Exercice 648 [Mines MP 2024 # 654] Soient (u_n) une suite de réels non nuls et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On suppose que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ · Étudier la nature de $\sum u_n$.

Exercice 649 [Mines MP 2024 # 655] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$.

- à quelle condition la série de terme general $u_n = f(n)$ converge-t-elle ?
- à quelle condition la suite de terme general $v_n = \prod_{k=1}^n f(k)$ converge-t-elle ?

Exercice 650 [Mines MP 2024 # 656]

- Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\left|f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2}\max_{t\in[n,n+1]}|f'(t)|$.

- Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$?

Exercice 651 [Mines MP 2024 # 657] Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)dx$. - Étudier le signe de u_n.

- Montr'er que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

Exercice 652 [Mines MP 2024 # 658] Existe-t-il une suite réelle (u_n) telle que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^3$ diverge ?

Exercice 653 [Mines MP 2024 # 659] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

- On suppose $\sum u_n$ convergente et on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. construire à partir de R_n une suite $v_n > 0$ croissante tendant vers $+\infty$ telle que $\sum u_n v_n$ converge.
- On suppose $\sum u_n$ divergente. construire v_n décroissante qui tend vers 0 telle que $\sum u_n v_n$ diverge.

Exercice 654 [Mines MP 2024 # 660] Étudier la convergence de la série $\sum \sin(\pi e n!)$.

Exercice 655 [Mines MP 2024 # 661] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que la série $\sum n(\ln n)^2 u_n^2$ converge. Montr'er que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 656 [Mines MP 2024 # 662] On considére la suite réelle définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ pour tout $n \geq 0$.

Étudier la convergence de la série $\sum(1 - x_n)$.

Exercice 657 [Mines MP 2024 # 663] Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $u_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$.

- Déterminer les valeurs de α pour lesquelles (u_n) converge.
- Trouver alors un équivalent de $\ell - u_n$, ou ℓ designe la limite de la suite.
- Donner un équivalent de u_n lorsque (u_n) diverge.

Exercice 658 [Mines MP 2024 # 664] Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente. On pose $v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=0}^n (1+u_k)}$ pour tout $n \geq 0$. Montr'er que la série $\sum v_n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 659 [Mines MP 2024 # 665] Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln((\exp(u_n) - 1)/u_n)$.

- Déterminer la limite eventuelle de (u_n).
- En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 660 [Mines MP 2024 # 666] Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à la suite u associe Tu telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(Tu)_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$.

- Si u converge vers ℓ, montr'er que Tu converge vers ℓ.
- On suppose que u est à valeurs positives.

On note $\sqrt{u}$ la suite telle que : $\forall n$, $(\sqrt{u})_n = \sqrt{u_n}$. Si Tu tend vers 0, montr'er que $T\sqrt{u}$ tend egalement vers 0.On suppose u positive et décroissante.

- On pose $w_n = \sqrt{n}\, u_n$. Montrer que Tw tend vers 0 si et seulement si w tend vers 0.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $v_n = nu_n$.

- Montrer que $s - Ts = Tv$.
- On suppose que Ts converge. Montrer que Tv tend vers 0 si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 661 [Mines MP 2024 # 667] Soit (u_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et on suppose $u_0 > 0$ et $(|S_n - nu_n|)$ majorée. On suppose enfin $\sum u_n$ divergente.

- Montrer que $\ln S_n \sim \ln n$.
- Montrer que $\forall n$, $S_n \geq \sqrt{n}$.
- Montrer que $\lim u_n > 0$. Conclusion ?

Exercice 662 [Mines MP 2024 # 668] Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Montrer que $\sum f(k)$ converge et donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 663 [Mines MP 2024 # 669] Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{n}$ converge si et seulement si la série $\sum (u_n - u_{n+1}) \ln n$ converge.

Exercice 664 [Mines MP 2024 # 670] Soient $\alpha > 0$ et (a_n) définie par $a_1 > 0$, $a_1 + a_2 > 0$ et $\forall n \geq 2$, $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \sum_{i=1}^n a_i$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 665 [Mines MP 2024 # 671] Nature et somme de la série de terme general $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$.

Exercice 666 [Mines MP 2024 # 672] Soit $x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

Exercice 667 [Mines MP 2024 # 673]

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.

Pour $\alpha > 1$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2$.

- Pour $\alpha > 2$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \dfrac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}$.

Exercice 668 [Mines MP 2024 # 674]

- Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^{u_n}$. On choisit desormais $u_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- Montrer que $\forall N \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![0, N]\!],\ u_n \mid u_N$.
- Montrer que, pour $N, k \in \mathbb{N}$, $u_{N+k} \geq u_N^{k+1}$.
- Montrer la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$.
- Montrer que $u_N \sum_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{u_n} \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$.
- Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{u_n} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 669 [Mines MP 2024 # 675] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice 670 [Mines MP 2024 # 676] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, $2rf(x) \leq \int_{x-r}^{x+r} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 671 [Mines MP 2024 # 677] Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Montrer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I est la différence deux fonctions convexes.

Exercice 672 [Mines MP 2024 # 678] Soit $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Montrer que la derivée n-ieme de f s'écrit sous la forme $\dfrac{P_n(t)}{(1+t^2)^{n+\frac{3}{2}}}$ ou $P_n \in \mathbb{R}[X]$. Trouver une relation linéaire entre P_{n+2}, P_{n+1} et P_n.

Exercice 673 [Mines MP 2024 # 679] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $f\colon \mathbb{R} \to E$ continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0 si et seulement si $x \mapsto \dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ possède une limite quand $x \to 0$.

Exercice 674 [Mines MP 2024 # 680] Soient $I = \,]-3, 9[$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in I \setminus \{3\}$, on pose $g(x) = \tan\left(\dfrac{\pi x}{6}\right) f(x)$. à quelle condition la fonction g se prolonge-t-elle continument à I ? Le prolongement est-il de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ?

Exercice 675 [Mines MP 2024 # 681] Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement monotone par morceaux ?

Exercice 676 [Mines MP 2024 # 682] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) > 0$, $f'(0) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

- Montrer qu'il existe x_1 tel que $f'(x_1) = 0$.
- Montrer qu'il existe une suite (x_n) strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x_n) = 0$.

Exercice 677 [Mines MP 2024 # 683] Montrer que la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ n'admet pas de primitive de la forme $x \mapsto f(x)e^{x^2}$, ou $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction rationnelle.

Exercice 678 [Mines MP 2024 # 684] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(t)+f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Montrer que $f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 679 [Mines MP 2024 # 685] Posons $f : x \neq 0 \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée par continuité en 0.

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que f n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$. Déterminer degré et coefficient dominant de P_n.
- Montrer que les polynômes P_n sont scindés dans $\mathbb{R}$.

Exercice 680 [Mines MP 2024 # 686] Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}^{+*}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}$ non identiquement nulle et telle que $|f'| \leq M|f|$. Montrer que f ne s'annule pas.

Exercice 681 [Mines MP 2024 # 687] Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

- Soit $f \in E$. Montrer $v : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x^{p+1}} \int_0^x t^p f(t)\,\mathrm{d}t$ se prolonge par continuité en 0.

On note $u(f)$ ce prolongement.

- Montrer que u ainsi défini est un endomorphisme injectif de E.
- Déterminer son spectre.

Exercice 682 [Mines MP 2024 # 688] Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer $\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(3x^2 - 2x^3)\,dx$.

Exercice 683 [Mines MP 2024 # 689] Donner un équivalent de $f(x) = \int_1^x t^t dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 684 [Mines MP 2024 # 690] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

- On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer que $\forall x > 0,\ \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$.

- - Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![0, n]\!]$, on note $x_{i,n} = \frac{ix}{n}$.

Montrer que $\sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n}(f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})) \longrightarrow \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$ quand $n \to +\infty$.

- Montrer l'égalité vue en -.
- Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et bijective.

Montrer que $\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt \geq ab$.

Exercice 685 [Mines MP 2024 # 691] Soit f continue et strictement positive sur $[a, b]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_{0,n}, \dots, x_{n,n})$ de $[a, b]$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}} f = \frac{1}{n}\int_a^b f$ - Déterminer la limite de la suite de terme general $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_{k,n})$.

Exercice 686 [Mines MP 2024 # 692] Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on pose : $\varphi_p : x \mapsto f(x+p) - \int_x^{x+p} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x+p-t)^{n-1}\,dt$.

Montrer que φ_p est bornée sur $\mathbb{R}$.

- En déduire que $f', \dots, f^{(n-1)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 687 [Mines MP 2024 # 693]

- Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, l'on ait $\int_0^1 f(t)\varphi(t)dt = 0$. Montrer que $f = 0$.
- Soient maintenant $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telles que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, l'on ait $\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\varphi'(t)\,dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer sa derivée.

Exercice 688 [Mines MP 2024 # 694] Soient $h > 0$, $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ avec $f'' \geq m^2 > 0$, et $E = \{x \in [a,b], |f'(x)| > h\}$.

- On suppose que $[c,d]$, avec $c < d$, est inclus dans E. Montrer que $\left|\int_c^d e^{if(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{3}{h}$.
- Montrer que $\left|\int_{É} e^{if(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{6}{h}$.
- Montrer que $\left|\int_a^b e^{if(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{6}{h} + \frac{2h}{m^2}$.
- Montrer que $\left|\int_a^b e^{if(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{8}{m}$.

Exercice 689 [Mines MP 2024 # 695] Déterminer la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx$.

Exercice 690 [Mines MP 2024 # 696] Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$. Que dire de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^p+t^p}\,\mathrm{d}t$ pour $p \geq 2$?

Exercice 691 [Mines MP 2024 # 697] Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

- Pour $f \in E$, montrer la convergence de $I_1 = \int_0^1 f(t)f'(t)\cot\text{an}(\pi t)dt$ et de $I_2 = \int_0^1 f^2(t)\ (1 + \text{cotan}^2(\pi t))dt$. Comparer I_1 et I_2.
- Montrer que, si $f \in E$, $\int_0^1 (f')^2 \geq \pi^2 \int_0^1 f^2$. Pour quelles f y-a-t-il égalité ?

Exercice 692 [Mines MP 2024 # 698] Convergence et calcul de $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \ln(x)dx$.

Exercice 693 [Mines MP 2024 # 699] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha \sin^2(t))dt$.

Exercice 694 [Mines MP 2024 # 700] Montrer que $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{\sqrt{t}}-1)}$ est définie, continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 695 [Mines MP 2024 # 701]

- Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\sqrt{\sin(2x)}} dx$.
- Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\int_0^{\pi/2} f(\sin(2x))\sin(x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2(y))\cos(y)dy$.

Exercice 696 [Mines MP 2024 # 702]

- Soit $(a,\varepsilon) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Apres avoir simplifie $\ln\left(\frac{1-e^{2ax}}{1-e^{ax}}\right)$, montrer que

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\ln(1+e^{ax})}{x} dx = -\int_1^2 \frac{a\varepsilon}{e^{a\varepsilon y}-1} \ln(y)dy.$$

- Montrer que $\int_1^2 \frac{\ln(1-e^{-a\varepsilon y})}{y} dy = \ln(2)\ln(1-e^{-2a\varepsilon}) - \int_1^2 \ln(y)\frac{a\varepsilon}{e^{a\varepsilon y}-1} dy$.
- En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{e^{ax}-1} dx$.
- Retrouver le résultat précédent par un calcul direct de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x-1} dx$.

Exercice 697 [Mines MP 2024 # 703] Soit F définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0, F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

- Montrer que F est bien définie.
- Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Calculer $\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 698 [Mines MP 2024 # 704] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue. On note F la primitive de f qui s'annule enE 0. Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(t+1)^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+1} dt$ sont de même nature.

Exercice 699 [Mines MP 2024 # 705]

- Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ est convergente.

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

- Soit $\sum u_n$ une série convergente. Montrer que $\sum \frac{u_n}{n}$ est une série convergente.

Exercice 700 [Mines MP 2024 # 706] Trouver un équivalent simple de $\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 701 [Mines MP 2024 # 707] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et T-périodique. - à quelle condition f admet-elle une primitive T-périodique ?

- On suppose à present que $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, et on fixe un réel $a \in]0,1]$. Donner un équivalent de $\int_1^x \frac{f(t)}{t^a}\,\mathrm{d}t$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 702 [Mines MP 2024 # 708] Quelles sont les fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes convexes ?

Exercice 703 [Mines MP 2024 # 709] Soit f continue sur $[0,\pi]$ telle que $\forall n, \int_0^\pi \cos(nt)f(t)dt = 0$. Que dire de f ?

Exercice 704 [Mines MP 2024 # 710] Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 705 [Mines MP 2024 # 711] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

- Montr re qu'en posant $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha x}$, on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.
- Donner la limite puis un équivalent simple de f en $+\infty$.
- Donner la limite puis un équivalent simple de f en 0.

Exercice 706 [Mines MP 2024 # 712] Déterminer le domaine de définition et un équivalent simple en 1^- de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

Exercice 707 [Mines MP 2024 # 713] Pour $n \geq 0$, soit $u_n : x \mapsto \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x+i}$.

- Montr re que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Ex primer $S(x+1)$ en fonction de $S(x)$ et de x.

Exercice 708 [Mines MP 2024 # 714] On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$.

- Déterminer le domaine de définition D de f.
- Étudier la continuité de f sur D.
- Déterminer des équivalents de f aux extremites de D.

Exercice 709 [Mines MP 2024 # 715] • Soit $x \in [0,1[$ Justifier la convergence de $f(x) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right)^{x^n}$. - Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $\ln f(x) = \frac{x-1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ln(1+x^n) + \ln 2$.

- En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $\ln f(x) = \ln 2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{x^m}{1+x+\cdots+x^m}$.
- Montrer que f possède une limite finie en 1 et la déterminer.

Exercice 710 [Mines MP 2024 # 716] On pose $f : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(x+p)}$.

- Déterminer le domaine de définition de f.
- Exprimer $f(x)$ en fonction de : $g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)}$.
- Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.
- Déterminer un équivalent simple de f en 0^+.
- Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^p}{p!(x+p)}$ sur les parties du domaine de définition de f.

Exercice 711 [Mines MP 2024 # 717] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{Arctan}(n+x) - \operatorname{Arctan}(n))$.

- Donner le domaine de définition de f. Étudier sa régularite.
- Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$ et de x.

Exercice 712 [Mines MP 2024 # 718] Domaine de définition et équivalent en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^x}{n^2}$.

Exercice 713 [Mines MP 2024 # 719] Soit u_0 l'identite de $[1,+\infty[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} : x \in [1,+\infty[\mapsto u_n(x) + \frac{1}{u_n(x)}$.

- Montrer que la suite de fonction (u_n) est bien définie.
- Étudier la convergence simple de (u_n) sur $[1,+\infty[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in [1,+\infty[\mapsto \frac{(-1)^n}{u_n(x)}$.

- Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[1,+\infty[$.
- Montrer que la somme de la série de terme general f_n est continue sur $[1,+\infty[$.
- A-t-on convergence normale sur $[1,+\infty[$?

Exercice 714 [Mines MP 2024 # 720] Notons, pour $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.

- Déterminer les modes de convergence de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer que la somme S_α de cette série est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que si $\alpha > 1/2$, S_α est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Pour $\alpha \leq 1/2$, S_α est-elle continue en 0 ?

Exercice 715 [Mines MP 2024 # 721] Pour x réel convenable, on note $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

- Déterminer le domaine $\mathcal{D}$ de définition de ζ.
- Montrer que, pour $x \in \mathcal{D}$, $\zeta(x) = 1 + \frac{1}{x-1} - x \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{x+1}} dt$, ou $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.

En déduire que ζ peut être prolongée sur un ensemble $\mathcal{D}'$.

- Donner un équivalent de ζ en 1.
- Montrer que le prolongement de ζ sur $\mathcal{D}'$ se prolonge par continuité en $\inf(\mathcal{D}')$.

Exercice 716 [Mines MP 2024 # 722] Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+nx}$.

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
- Donner un équivalent de $f(x)$ en 1.

Exercice 717 [Mines MP 2024 # 723] Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \frac{x^n}{n}$.

Exercice 718 [Mines MP 2024 # 724] Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^{-x})$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 719 [Mines MP 2024 # 725] Déterminer le rayon et la somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n$.

Exercice 720 [Mines MP 2024 # 726] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n \sin(nt)\, \mathrm{d}t$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Calculer a_0, a_1, a_2.
- Calculer $f(x)$ pour $|x| < 1$. Preciser le rayon de convergence de f.
- En déduire a_n.

Exercice 721 [Mines MP 2024 # 727] • Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - z}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

- Soient $F \in \mathbb{C}(X)$ sans pole de module 1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto F(e^{\alpha t})$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 722 [Mines MP 2024 # 728] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \nu_2(n)$ (valuation 2-adique).

- Déterminer les valeurs d'adherence de (a_n).
- On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$. La suite (b_n) possède-t-elle une limite ?
- Déterminer le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$.

Exercice 723 [Mines MP 2024 # 729] Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$. - Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0.

- Si $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+2} en fonction de a_n.
- Déterminer le rayon de convergence R de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Calculer la somme. Étudier le comportement en $\pm R$.

Exercice 724 [Mines MP 2024 # 730] On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$ pour tout n. Trouver u_n en considérant la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{n!} x^n$.

Exercice 725 [Mines MP 2024 # 731] La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est définie par $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1+a_n)$.

- Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
- Donner un équivalent de a_n.
- Donner le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$. Y-a-t-il convergence pour $x = R$? pour $x = -R$?
- Donner un équivalent de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ quand x tend vers R^-.

Exercice 726 [Mines MP 2024 # 732] Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, nt \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(nt)}{n} x^n$.

- Déterminer le rayon de convergence R de f.
- Étudier la convergence en $\pm R$. Ind. Poser $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kt)$.
- Exprimer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Exercice 727 [Mines MP 2024 # 733] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que la série $\sum n a_n$ converge absolument. On note $\mathbb{D}$ le disque unite ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

- Montrer que le rayon de convergence de f est ≥ 1.
- On suppose que $a_1 \neq 0$ et que $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| \leq |a_1|$. Montrer que f est injective sur $\mathbb{D}$.

Exercice 728 [Mines MP 2024 # 734] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$ et $a_{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{i+j=n} a_i a_j$ pour $n \geq 2$.

- Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou egal à 1.
- Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de l'équation $xy'' - x = y^2$ sur $]0, 1[$.

Exercice 729 [Mines MP 2024 # 735] Soit (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq a_n \leq n^2$. En déduire le rayon R de $f(x) = \sum a_n x^n$.
- Montrer que f est solution de $(1-x)y' - (2x+1)y = 0$. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 730 [Mines MP 2024 # 736] Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et D son disque ouvert de convergence.

- Montrer que, s'il existe $(z_k) \in (D \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $\forall k \in \mathbb{N}, F(z_k) = 0$, alors F est nulle.
- On suppose que $F(0) \in \mathbb{R}^{+*}$ et que $|F|$ admet un maximum local en 0.

Montrer que F est constante.

Ind. Raisonner par contraposée et montrer l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in D$,

$$|F(z)| \geq |F(0) + a_p z^p| - \sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n||z|^n.$$

Exercice 731 [Mines MP 2024 # 737] Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{b_{n-k}}{k!}$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq \dfrac{1}{\ln^n(2)}$.
- Montrer que la série entière $\sum b_n x^n$ à un rayon de convergence R non nul et que

$\forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \dfrac{1}{2-e^x}$.

- En déduire une expression sommatoire explicite de b_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 732 [Mines MP 2024 # 738] Soit $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mapsto \exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$.

- Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. On écrit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

- Donner une expression sommatoire des a_n.
- Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n).
- Donner un développement asymptotique de $\ln(a_n)$.

Exercice 733 [Mines MP 2024 # 739] Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On pose $A_0 = 1$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \dfrac{1}{k!}X(X-ak)^k$.

- Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(ak)A_k(X)$.

En déduire que $\forall y \in \mathbb{C}^*$, $ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-ak)^k(y+ak)^{n-k}$. - Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n$.

- On note S sa somme. Montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $x(1+S(x))S'(x) = S(x)$.

Donner une expression simple de $h : x \mapsto S(x)\, e^{S(x)}$.

Exercice 734 [Mines MP 2024 # 740] Soit $(a_n)_{n\geq 2}$ une suite réelle telle que la série entière associée est de rayon de convergence supérieur ou egal à 1.

On suppose que $f : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ est injective sur $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

- Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.
- Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\mathrm{Im}(f(z)) > 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(z) > 0$.
- Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r < 1$, $\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(f(re^{it}))\sin(nt)dt$.

Exercice 735 [Mines MP 2024 # 741] Soit (a_n) une suite de réels positifs avec $a_0 > 0$ et $a_1 = 1$. Soient $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. On suppose que le rayon de convergence de S est $R > 0$.

- Soient $n \geq 1$ et $y > a_0$. Montrer qu'il existe un unique $x_n(y) \in \mathbb{R}^+$ tel que $S_n(x_n(y)) = y$. Montrer que la suite $(x_n(y))$ converge vers un réel note $T(y)$. Montrer que $|T(y)| \leq R$.
- On suppose que $|T(y)| \leq R$. Calculer $(S \circ T)(y)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 736 [Mines MP 2024 # 742] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

- Montrer que, pour tout $r \in [0, R[$, $I(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$, puis que la fonction I est croissante sur $[0, R[$.
- Si f n'est pas nulle, montrer que $I(r) > 0$ pour tout $r \in]0, R[$.
- Montrer que la fonction $t \mapsto \ln\big(I(e^t)\big)$ est convexe sur $]-\infty, \ln R[$.

Exercice 737 [Mines MP 2024 # 743] Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 et $f : x \mapsto e^{P(x)}$. Montrer que f est développable en série entière en 0 et que deux coefficients consécutifs de ce développement ne sont jamais simultanement nuls.

Exercice 738 [Mines MP 2024 # 744] Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = o(p_n)$.

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}$.

- Quel est le rayon de convergence de f ?
- Déterminer la limite en 1^- de f puis de $x \mapsto (1-x)f(x)$.

Exercice 739 [Mines MP 2024 # 745] Déterminer un équivalent de $p(n) = \left|\left\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3,\ x + 2y + 3z = n\right\}\right|$.

Exercice 740 [Mines MP 2024 # 746] On dit que la suite $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie $\mathcal{P}$ si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou egal à 1 et si $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ possède une limite finie en 1^-.

- Déterminer les $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- Montrer que si $\sum a_n$ est absolument convergente alors (a_n) vérifie $\mathcal{P}$. Étudier la réciproque.
- Déterminer les $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour toute suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\mathcal{P}$, la suite $(f(a_n))$ vérifie $\mathcal{P}$.

Exercice 741 [Mines MP 2024 # 747] Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont la série de Taylor en 0 à un rayon de convergence $+\infty$.

- Montrer que E est une $\mathbb{R}$ algèbre.

Pour $f \in E$, on pose $T(f) : x \mapsto f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

- Montrer que T est un endomorphisme de E et que $\mathrm{Im}(T)$ est un idéal de E.
- Montrer que $E = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)$.
- Déterminer le spectre de T.

Exercice 742 [Mines MP 2024 # 748] Limite de $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+2x}}}}}$ (ou il y a n racines car \$e\$es) ?

Exercice 743 [Mines MP 2024 # 749] Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t$. Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels I_n est définie. Donner un équivalent de I_n.

Exercice 744 [Mines MP 2024 # 750] Déterminer un développement asymptotique de $u_n = \int_0^1 \frac{du}{1+u^n}$ en $o(1/n^2)$.

Exercice 745 [Mines MP 2024 # 751] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^1 (-t^2 + t - 1)^n\, \mathrm{d}t$.

- Montrer que (u_n) converge vers 0.
- Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

- Trouver un équivalent simple de u_n.

Exercice 746 [MINES MP 2024 # 752] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}dt$.

- Montrer la convergence de I_n.
- Étudier la convergence et la limite eventuelle de (I_n).
- Trouver un équivalent simple de I_n.

Exercice 747 [MINES MP 2024 # 753] Exprimer sous forme de somme $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(t)dt$.

Exercice 748 [MINES MP 2024 # 754]

- Justifier que $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$. - En déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n n^2}$.

Exercice 749 [MINES MP 2024 # 755]

Soient α et β des réels > 0. - Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\alpha n+\beta}$ est convergente. - Exprimer sa somme sous forme intégrale.

Exercice 750 [MINES MP 2024 # 756]

Calculer $\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)dt$.

Exercice 751 [MINES MP 2024 # 757]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$. - Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer sa derivée. - On pose $g(x) = f(x^2)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ est constante, et preciser sa valeur. - En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Exercice 752 [MINES MP 2024 # 758]

Pour tout réel $a > 0$, on pose $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+\arctan(ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Justifier l'existence de $F(a)$, puis calculer cette intégrale.

Exercice 753 [MINES MP 2024 # 759]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x < 0$, on pose : $h_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+x^4)^n}$. - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que h_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et : $\forall x > 0, h_n'(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x)$. - Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, h_n(x) = a_n x^{2-4n}$. - Expliciter la suite (a_n).

Exercice 754 [MINES MP 2024 # 760]

On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}dt$. - Domaine de définition de F ? de continuité ? - Donner un équivalent de F en $+\infty$.

Exercice 755 [MINES MP 2024 # 761]

Soit $f : x \mapsto \int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(t) + 1\right)dt$. - Donner le domaine de définition et étudier la continuité de f. - Donner une expression de $f(x)$.

Exercice 756 [MINES MP 2024 # 762]

- Déterminer le domaine de définition D de : $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. - Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$.

Exercice 757 [MINES MP 2024 # 763]

Soient $\alpha > 0$ et $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{x^\alpha+t^3}$. L'application f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$?

Exercice 758 [MINES MP 2024 # 764] Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}e^{-ixt}dt$ par deux methodes :

- en déterminant le développement en série entière de $f(x)$;
- en montrant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 759 [MINES MP 2024 # 765] Soit f définie par : $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$.

- Déterminer le domaine de définition D_f de f.
- Montrer que f est continue et décroissante.
- Pour tout $x \in D_f$, on pose $g(x) = (x+1)f(x+1)f(x)$.

Montrer que : $\forall x \in D_f, g(x+1) = g(x)$.

- Déterminer des équivalents simples de f aux extremites de D_f.

Exercice 760 [MINES MP 2024 # 766]

- Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$.
- On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
- On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-it^2}dt$ à l'aide de f.

Exercice 761 [MINES MP 2024 # 767] Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ d éivables verifiant : $\forall x > 0, f'(x) = f(1/x)$.

Exercice 762 [Mines MP 2024 # 768] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, monotone et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f(x)$ sont bornées.

Exercice 763 [Mines MP 2024 # 769] On considére l'équation différentielle $(E) : 2xy'' + y' - y = 0$.

- Montrer que (E) possède une unique solution f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et qui soit la somme d'une série entière.
- Donner une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.
- à l'aide du changement de fonction inconnue $y = zf$, r ésoudre (E).

Exercice 764 [Mines MP 2024 # 770]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les solutions de : $(E) : y'' + (\lambda - 1)x^2 y = 0$ sont de la forme $x \mapsto H(x)e^{-x^2/2}$ avec H développable en série entière.

Exercice 765 [Mines MP 2024 # 771] R ésoudre l'équation différentielle $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$.

Exercice 766 [Mines MP 2024 # 772] Déterminer une solution de $(E) : y'' + xy' + y = 1$ développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 767 [Mines MP 2024 # 773] Soit (E) l'équation différentielle $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Résoudre (E) en utilisant le changement de variable $t = \ln x$.
- Résoudre $x^2y'' + xy' + y = \sin(a \ln x)$.

Exercice 768 [Mines MP 2024 # 774] Considérons l'équation différentielle $(E) : x^2y' + y + x^2 = 0$.

- Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer que (E) admet une unique solution qui admet une limite finie en 0.
- Existe-t-il des solutions de (E) admettant une limite finie en $+\infty$?
- Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

Exercice 769 [Mines MP 2024 # 775] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(*)$ l'équation différentielle :
$(1 + x^n)(1 - x^2)y' + 2x(1 + x^n)y = 2(1 - x^2)$.

- Trouver les solutions de $(*)$ sur $]-1, 1[$.
- Existe-il une solution définie sur $\mathbb{R}$?
- Existe-il une solution définie sur $]1, +\infty[$ et bornée ?

Exercice 770 [Mines MP 2024 # 776] Soit f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les fonctions y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et bornées, telles que $y'' - y = f$.

Exercice 771 [Mines MP 2024 # 777] Soit y une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $xy'' + y' + xy = 0$,

- On pose : $\forall x > 0$, $u(x) = \sqrt{x}\, y(x)$. Déterminer une équation différentielle dont u est solution.
- Montrer que $\int_a^b \frac{u(x)v(x)}{4x^2}\,\mathrm{d}x = (uv' - u'v)(b) - (uv' - u'v)(a)$ avec v vérifiant $v'' + v = 0$.
- Montrer que, pour tout $a > 0$, il existe $x_a \in [a, a + \pi[$ tel que $y(x_a) = 0$.
- Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$ s'annule une infinite de fois.

Exercice 772 [Mines MP 2024 # 778] On note S l'ensemble solution de l'équation différentielle $(E) : xy'' + xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (E).
- Pour tout $x > 0$, on pose : $G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt$. Dresser le tableau de variation de G.
- Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et $s : x \mapsto xf(x)$. Montrer que $s \in S$ si et seulement si f' est solution d'une certaine équation différentielle du premier ordre. Résoudre cette équation différentielle.
- Expliciter S à l'aide de G. Étudier les limites des solutions en 0^+.

Exercice 773 [Mines MP 2024 # 779] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction monotone de classe $\mathcal{C}^1$ admettant une limite réelle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 774 [Mines MP 2024 # 780] Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f'' + f \geq 0$. Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) + f(t + \pi) \geq 0$.

Exercice 775 [Mines MP 2024 # 781] Résoudre les systemes différentiels

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 2x + 3y + 3z + te^t \\ y' & = & 3x + 2y + 3z + e^t \\ z' & = & 3x + 3y + 2z + t^2e^t \end{array}\right. ., \quad \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 2y - z \\ +te^t & & \\ y' & = & 3x - 2y \\ +e^t & & \\ z' & = & -2x - 2y + z \\ +t^2e^t & & \end{array}\right. .$$

Exercice 776 [Mines MP 2024 # 782] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considére le systeme différentiel $(S) : Y^{(m)} = AY$ d'inconnue $Y \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si toutes les solutions de (S) sont polynomiales.

Exercice 777 [Mines MP 2024 # 783] On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si les solutions de $Y' = AY$ sont de norme constante.

Exercice 778 [Mines MP 2024 # 784] Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, A une application continue et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{C}^*$ et une application X de classe $\mathcal{C}^1$ non identiquement nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = A(t)X(t)$ et $X(t+T) = \lambda X(t)$.

Exercice 779 [Mines MP 2024 # 785] Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction M de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(0) = I_n$ et $M'(t) = SM(t)S$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. à quelle condition sur S la fonction M est-elle bornée ?

Exercice 780 [Mines MP 2024 # 786] Soient $(E, \langle\ \rangle)$ un espace euclidien, $u \colon \mathbb{R} \to \mathrm{SO}\ (E)$ dérivable. Montrer l'équivalence entre : (i) $\forall s, t \in \mathbb{R}, u(s+t) = u(s)\,u(t)$, (ii) $\exists a \in \mathcal{A}(E), \forall t \in \mathbb{R}, u(t) = e^{at}$.

Exercice 781 [Mines MP 2024 # 787] Déterminer le domaine de définition de $f\ :\ (x,y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n^2}$. Est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 782 [Mines MP 2024 # 788] On pose $f(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$. Ethier la continuité et la différentiabilité de f.

Exercice 783 [Mines MP 2024 # 789] Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et g définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ par : $g(x,y) = f\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) \cdot$ Déterminer les fonctions f qui vérifient : $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 784 [Mines MP 2024 # 790] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique.

On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\frac{1}{2}\sin(x+y), \frac{1}{2}\cos(x-y)\right)$.

- Calculer la différentielle de f en tout point.
- Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|df(x,y)\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- En déduire que f possède au plus un point fixe.

Exercice 785 [Mines MP 2024 # 791]
- Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et minorée. On pose $m = \inf_{\mathbb{R}} f$. On suppose que m n'est pas atteint. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq m + \frac{1}{2^n}$ et $|x_n| \geq n$. En déduire qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $|u_n| \to +\infty$ et $f'(u_n) \to 0$.
- Soient $p \geq 2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ minorée. Pour $\varepsilon > 0$, soit $g_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon\|x\|$. Montrer que g_ε atteint son minimum (la norme est la norme euclidienne standard). En déduire qu'il existe une suite (u_n) telle que $\nabla f(u_n) \to 0$.

Exercice 786 [Mines MP 2024 # 792]
- Soient $n \geq 2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Soient $a, b \in U$ tels que $[a,b] \subset U$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = df_c(b-a)$.
- Application : si on souhaite connaitre la valeur de $\frac{\sqrt{2}}{e+\pi^3}$ à la precision 10^{-20}, avec quelle precision doit-on alors connaitre $\sqrt{2}$, e et π ?

Exercice 787 [Mines MP 2024 # 793] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle qu'en tout point x le spectre de la hessienne soit inclus dans $[1, +\infty[$.

- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle + \frac{1}{2}x^T x$.

Ind. Considérer $\psi : t \mapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx\rangle - \frac{1}{2}t^2 x^T x$.

- En déduire que f admet un minimum.

Exercice 788 [Mines MP 2024 # 794] On munit $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on note $f(x)$ l'unique vecteur y positivement colinéaire à x vérifiant : $\|x\| \times \|y\| = 1$.

- Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle en tout point.
- Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Interpréter $df(x)$ en faisant intervenir la reflexion d'axe $\{x\}^\perp$.
- En déduire que $df(x)$ conserve les angles.

Exercice 789 [Mines MP 2024 # 795] Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des conditions

(i) $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f(tx) = t^\lambda f(x)$:

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \sum_{i=1}^n x_i \partial_i f(x) = \lambda f(x)$.

Exercice 790 [Mines MP 2024 # 796]
- Calculer la différentielle du déterminant au point I_n.

La fonction det atteint-elle un extremum local en I_n ?

- Déterminer points critiques et extrema locaux de la fonction det sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 791 [Mines MP 2024 # 797] On pose $D =]0,1[^2$ et l'on définit f sur D par :

$\forall (x,y) \in D, f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$.

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Déterminer les extrema locaux de f. - En etudiant la restriction de f à $K = \left\{(x,y) \in D\ ;\ (x,y) \in \left[0, \frac{7}{9}\right] \text{ et } x+y \geq \frac{2}{9}\right\}$ d'eterminer les extrema globaux de f.

Exercice 792 [Mines MP 2024 # 798] Soient $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $a \in \mathbb{R}^2$ et γ un arc paramètre plan de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(0) = a$ et, pour tout t, $\|\gamma'(t)\| = 1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $C_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\})$.

- Montrer que $\nabla f(a)$ indique la direction de plus grande pente sur la surface representative de f en a.
- Supposons $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^+ \nabla f(a)$. Montr per que, pour λ suffisamment proche de $\alpha = f(a)$, il existe un unique t_λ voisin de 0 tel que $\gamma(t_\lambda)$ appartient à C_λ. Donner un équivalent de $\|\gamma(t_\lambda) - a\|$ quand $\lambda \to \alpha$.

Exercice 793 [Mines MP 2024 # 799] Soit $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. On considére les assertions : (i) $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n,\ \|df_x(h)\| = \|h\|$, (ii) $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x+h) - f(x)\| = \|h\|$.

- On suppose (i) et on pose, pour tous $i, j, k \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j \partial x_k}$.

Montr per que $a_{i,j,k} = a_{i,k,j} = -a_{k,i,j}$ puis que $a_{i,j,k} = 0$.

- Montr per l'équivalence des assertions (i) et (ii).

Exercice 794 [Mines MP 2024 # 800] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

- On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montr per que $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = Ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montr per que $J_f(x)$ est symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f = \nabla g$.

Exercice 795 [Mines MP 2024 # 801] Extrema de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xe^y + ye^x$.

Exercice 796 [Mines MP 2024 # 802] Soient E un espace euclidien, $\varphi \in E^*$ une forme linéaire et $f : x \mapsto \varphi(x)e^{-\|x\|^2}$. Étudier les extrema de f.

Exercice 797 [Mines MP 2024 # 803] Soient $n \geq 2$ un entier et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que la hessienne de f est toujours à valeurs propres dans $[1, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montr per que la fonction $t \mapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx \rangle - \frac{t^2}{2}\|x\|^2$ est convexe.
- Montr per que f admet un minimum global.

Exercice 798 [Mines MP 2024 # 804] Soient E un espace euclidien, $v \in E$ non nul et $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

- Montr per qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f.
- Montr per que, pour tout $x \in E$ non nul, $\langle f(x), x \rangle > 0$.
- Montr per que $g : x \mapsto \frac{1}{2}\langle f(x), x \rangle - \langle v, x \rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Calculer les derivées partielles de g relativement à la base $(e_1, \dots, e_n)$ et le gradient de g.
- Montr per que g admet un unique point critique c.
- Montr per que g admet un minimum global en c. Existe-t-il d'autres extrema locaux ?

Exercice 799 [Mines MP 2024 # 805] On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle. On note $\mathcal{B}$ la boule unite ouverte et $\mathcal{S}$ la sphere unite. Soit $f : \overline{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

- On suppose que $f_{|\mathcal{S}} \leq 0$ et qu'il existe $\zeta \in \mathcal{B}$ tel que $f(\zeta) > 0$.

Montrer que $\varphi : x \in \overline{\mathcal{B}} \mapsto f(x) + \varepsilon(\|x\|^2 - 1)$ admet un maximum en $\zeta_0 \in \mathcal{B}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit puis prouver que $\Delta f(\zeta_0) < 0$.

- On suppose que $\Delta f = 0$. Montrer que $\min\limits_{\overline{\mathcal{B}}} f = \min\limits_{\mathcal{S}} f$ et $\max\limits_{\overline{\mathcal{B}}} f = \max\limits_{\mathcal{S}} f$.

Exercice 800 [Mines MP 2024 # 806] Déterminer les espaces tangents en I_n aux parties $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 801 [Mines MP 2024 # 807]
- Soient A la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et I l'ensemble des $f \in A$ telles que $f(0) = 0$. Montrer que I est un idéal de A et que tout élément de I s'écrit $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i \theta_i$ ou les f_i sont dans A et les θ_i sont les formes linéaires coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^n$.
- Déterminer les φ de A^* vérifiant, pour tout $(f, g) \in A^2$, $\varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)$.
- Montrer que l'ensemble des formes linéaires de la question précédente est un sous-espace vectoriel de dimension finie de A^*. Quelle est sa dimension ?

3) Probabilités

Exercice 802 [Mines MP 2024 # 808] On considére n ampoules eteintes numérotées de 1 à n. L'ampoule i à une probabilité p_i de s'allumer à un instant donne. On note Y la variable aléatoire comptant le nombre d'ampoules s'allumant.

- Exprimer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$.
- On fixe à present m et on considére des p_i tels que $\mathbf{E}(Y) = m$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_i pour que $\mathbf{V}(Y)$ soit maximal. Donner la loi de Y dans ce cas.

Exercice 803 [Mines MP 2024 # 809] Un magasin dispose d'un stock de N produits. Le nombre de clients qui passent dans une journée suit la loi de Poisson de paramêtre λ et chaque client à une probabilité p d'acheter le produit. Quelle est la probabilité que le magasin soit en rupture de stock avant la fin de la journée ?

Exercice 804 [Mines MP 2024 # 810] On lance N des. à chaque tour, on relance ceux qui n'ont pas donne 6 lors des tours précédents. Soit S_n la variable aléatoire donnant le nombre total de des ayant donne 6 au cours des n premiers tours.

- Montrer que S_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramêtres.
- Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(S_n = N)\right) = 1$.
- On pose $T_N = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = N\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
- Donner la loi de T_N.
- Montrer que T_N admet une espérance et la calculer.

Exercice 805 [Mines MP 2024 # 811] Un peage comporte 3 voies et n voitures se presentent en choisissant aléatoirement et indépendamment une voie. On note X_i le nombre de voitures qui passent par la voie i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

- Déterminer la loi des X_i.

- Calculer $\mathbf{V}(X_1), \mathbf{V}(X_2)$ et $\mathbf{V}(X_1+X_2)$. En déduire $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
- Les variables X_1, X_2, X_3 sont-elles indépendantes deux à deux ? mutuellement indépendantes ?

Exercice 806 [Mines MP 2024 # 812] Une urne contient des boules numérotées de 0 à n. On en prend une poignée au hasard et on note les numéros obtenus. On effectue deux tirages indépendants. Soit X la variables aléatoire correspondant au nombre de numéros communs entre les deux poignées. Déterminer la loi de X.

Exercice 807 [Mines MP 2024 # 813] Soient m, n, p des entiers ≥ 1 tels que $p \leq \min(m, n)$. Une urne contient m boules mauves et n boules noires. On tire simultanement p boules dans l'ume et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules mauves tires. Quelle est la valeur la plus probable de X ?

Exercice 808 [Mines MP 2024 # 814] Une urne contient $a \geq 1$ boules blanches et $b \geq 1$ boules rouges. à chaque tirage, on remet la boule tirée et on ajoute $c \geq 1$ boules de la même couleur. Soit Y la variable aléatoire donnant le rang de la première boule blanche tirée. Donner sa loi. Admet-elle une espérance ? Un moment d'ordre $p \geq 2$?

Exercice 809 [Mines MP 2024 # 815] On dispose de deux urnes A et B, et de $2N$ boules numérotées de 1 à $2N$ reparties aléatoirement dans ces urnes. à chaque iteration, on pioche une boule au hasard et on la change d'urne. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules dans l'urne B à la n^{e} iteration. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (\mathbf{P}(X_n=0)\ \mathbf{P}(X_n=1)\ \cdots\ \mathbf{P}(X_n=2N))^T$.

- Déterminer $M \in \mathcal{M}_{2N+1}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout n, $U_{n+1} = MU_n$.
- Soient $v_0, \ldots, v_{2N}$ des réels et $P = \sum_{k=0}^{2N} v_k X^k$. En notant V le vecteur colonne défini par les coefficients v_k, montrer que $V \in \mathrm{Ker}(M - \lambda I_{2N+1}) \Leftrightarrow \lambda P = XP - \frac{1-X^2}{2N} P'$.
- Montrer les X_n suivent la même loi si et seulement si X_0 suit une certaine loi à déterminer.
- La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 810 [Mines MP 2024 # 816] On lance simultanement deux pièces equilibrées n fois. Soit E_n l'évènement < < les deux pièces donnent le me nombre de pile > > .

- - Pour $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq a+b$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.
- En déduire $\mathbf{P}(E_n)$.
- Déduire combien de fois en moyenne les pièces sont tombées sur Pile lorsque l'évènement E_n est realise.

Exercice 811 [Mines MP 2024 # 817] Soient A et B deux évènements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A \cap B)\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A \cap \overline{B})\mathbf{P}(\overline{A} \cap B)$.

Exercice 812 [Mines MP 2024 # 818] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie.
Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(X \geq n)$ converge et donner sa somme.

Exercice 813 [Mines MP 2024 # 819] Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ et $\mathbf{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right)$.

Exercice 814 [Mines MP 2024 # 820] Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi géométrique de paramètre $1/2$. On pose : $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de (X, Y).

Exercice 815 [Mines MP 2024 # 821] À quelle condition sur α existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbf{P}(X=n) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque cela est realise montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 816 [Mines MP 2024 # 822] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Comparer $\mathbf{E}(X^\alpha)$ et $\mathbf{E}(X)^\alpha$ au sens de $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 817 [Mines MP 2024 # 823] Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ avec X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes, X et Z suivant $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$ et Y suivant $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Déterminer la probabilité que U soit vecteur propre de A.

Exercice 818 [Mines MP 2024 # 824] Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Minorer aussi precisement que possible $\mathbf{E}(X/Y)$.

Exercice 819 [Mines MP 2024 # 825] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 820 [Mines MP 2024 # 826] Soient X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et $Y = X^2+1$.

- Calculer $\mathbf{E}(Y)$.
- Calculer $\mathbf{P}(2X < Y)$.
- Comparer $\mathbf{P}(X \in 2\mathbb{N})$ et $\mathbf{P}(X \in 2\mathbb{N}+1)$.

Exercice 821 [Mines MP 2024 # 827] On suppose que la probabilité de tirer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est $\frac{1}{2^n}$.

- Calculer $\mathbf{P}(A_p)$ ou A_p est l'évènement $\neg n$ est multiple de p.
- Calculer $\mathbf{P}(A_2 \cup A_3)$.
- On note B l'évènement $\neg n$ est premier $\neg n$. Montrer que $\frac{13}{32} < \mathbf{P}(B) < \frac{209}{504}$. En déduire $\mathbf{P}(B)$ à 10^{-2} pres.

Exercice 822 [Mines MP 2024 # 828] Soit A, B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbf{P}(A^B \leq B^A)$.

Exercice 823 [Mines MP 2024 # 829] Soit X une variable de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $Y = \overline{X}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 824 [Mines MP 2024 # 830] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $p = 1/2$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}(S_{2n} = k) \leq \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$.

Exercice 825 [Mines MP 2024 # 831] Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évènements de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{E_n}$. Montrer que si $\sum \mathbf{P}(E_n)$ converge alors Z est d'espérance finie.

Exercice 826 [Mines MP 2024 # 832]
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le développement en série entière de $f : t \mapsto \frac{1}{(1-t)^n}$.
- En déduire que $|\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n,\ k_1 + \cdots + k_n = s\}| = \binom{s+n-1}{n}$.
- Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Déterminer $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} (X_1 + \cdots + X_n = s)\right)$.

Exercice 827 [Mines MP 2024 # 833] Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discretes indépendantes.
- Montrer que $X_1 + X_2, X_3, \ldots, X_n$ sont indépendantes.
- En déduire que, pour tout $r \in [\![2, n-1]\!]$, $X_1 + \cdots + X_r, X_{r+1}, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

Exercice 828 [Mines MP 2024 # 834] Soient $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$, $a_0, \ldots, a_{k-1} \in]0, 1[^k$ tels que $a_0 + \cdots + a_{k-1} = 1$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. On suppose que : $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \mathbf{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \mathbf{P}(X_n = j - i)$.
- Déterminer la loi de X_n.
- Soit $j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ fixe. Étudier le comportement asymptotique de $(\mathbf{P}(X_n = j))_{n\geq 0}$.

Exercice 829 [Mines MP 2024 # 835] Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Y = \int_0^{2\pi} \sin(t)^X dt$. Montrer que Y possède une espérance et la calculer.

Exercice 830 [Mines MP 2024 # 836] Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Y = |X_1 - X_2|$.
- Calculer $\mathbf{P}(Y = 0)$ puis $\mathbf{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
- Montrer que $\mathbf{E}(X_1 - X_2)^2 = 2\,\mathbf{V}(X_1)$. En déduire que Y admet une variance et la calculer.

Exercice 831 [Mines MP 2024 # 837] Soient un espace probabilise $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- Montrer que $\mathbf{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.
- Soit Z une variable aléatoire réelle centrée admettant un moment d'ordre 2. On pose $\mathbf{V}(Z) = \sigma^2$.
- Montrer que pour tous $a > 0$ et $x > 0$, $\mathbf{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(x+a)^2}$.
- En déduire que $\mathbf{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ et $\mathbf{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda+1}$.

Exercice 832 [Mines MP 2024 # 838]
- Rappeler le développement en série entière au voisinage de 0 de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, ainsi que sa validite.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel r pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{P}(X = n) = \frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2} r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Calculer alors l'espérance et la variance de X.

Exercice 833 [Mines MP 2024 # 839] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$.
- Justifier la bonne définition d'une telle loi et calculer l'espérance de X.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement $(n|X)$. Les évènements A_p et A_q sont-ils indépendants si p et q sont deux entiers pairs ?
- Étudier l'indépendance de A_p et A_q pour p et q entiers quelconques.

Exercice 834 [Mines MP 2024 # 840] Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$; $\alpha_n = \mathbf{E}(Y_n)$ et $\beta_n = \mathbf{E}(Z_n)$.
- Déterminer la monotonie des suites (α_n) et (β_n).
- Calculer α_n.
- Déterminer la limite de (β_n). Donner un équivalent de β_n.

Exercice 835 [Mines MP 2024 # 841] Soient $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. On pose $Y = (X + n)!$
- Trouver une condition sur λ pour que Y admette une espérance finie.
- On suppose que $Y \in L^1$. Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Y \geq m) \leq \frac{n!}{m(1-\lambda)^{n+1}}$.

Exercice 836 [Mines MP 2024 # 842]
- Montrer qu'il existe une variable aléatoire telle que : $\forall t \in [0, 1], G_X(t) = \frac{e^{t-1}}{\sqrt{2-t}}$.
- Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 837 [Mines MP 2024 # 843] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que : $\mathbf{E}\left(1/X\right) < +\infty$. On définit F_X sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^+, F_X(t) = \mathbf{E}(e^{-tX})$.

- Montrer que F_X est bien définie, continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\int_0^{+\infty} F_X$. - Soient Y, Z deux variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+Y}\right)$.

Exercice 838 [Mines MP 2024 # 844] Soient X_1,..., X_n des variables aléatoires indépendantes. Notons, pour tout k F_k la fonction de repartition associée à X_k.

On note $X = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

- Montrer que $F_X = \prod_{k=1}^n F_k$ et $F_Y = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - F_k)$.
- Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y < x$. Montrer que $\mathbf{P}(y < Y \leq X \leq x) = \prod_{k=1}^n (F_k(x) - F_k(y))$.
- Supposons que les X_k suivent des lois géométrique de paramètre $p_k \in]0,1[$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 839 [Mines MP 2024 # 845] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une variance.

- Montrer que la fonction generatrice de X est convexe sur $[0,1]$.
- Prouver que $\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) \leq 1 - \frac{2}{3}\mathbf{E}(X) + \frac{1}{6}\mathbf{E}(X^2)$.

Exercice 840 [Mines MP 2024 # 846] Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $n > m + 2$. On définit une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en fixant $u_0 \in \mathbb{R}$ et en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = \frac{k+m}{k+n} u_k$.

- étudier la série $\sum \ln\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^{n-m} \frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $u_k \underset{k \to +\infty}{\sim} Ck^{m-n}$.
- Montrer l'existence d'une variable aléatoire réelle X telle que :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+n)\mathbf{P}(X = k+1) = (k+m)\mathbf{P}(X = k)$

- Montrer que $X \in L^1$ et calculer $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 841 [Mines MP 2024 # 847] Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
- Déterminer un équivalent de $\max\{\mathbf{P}(S_n = k), k \in \mathbb{N}\}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 842 [Mines MP 2024 # 848] Soient $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{G}(p)$ et N une variable indépendante des X_i qui suit la loi $\mathcal{G}(q)$. Soit $S = \sum_{k=1}^N X_k$. Montrer que S est une variable aléatoire et déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 843 [Mines MP 2024 # 849] Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On repartit $2N$ boules entre deux urnes A et B. On tire successivement une boule au hasard dans l'une des urnes, et on la place dans l'autre urne.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules dans l'urne B au $n^{\text{ème}}$ tour et on pose

$U_n = (\mathbf{P}(X_n = 0) \cdots \mathbf{P}(X_n = 2N))^T \in \mathcal{M}_{2N+1,1}(\mathbb{R})$.

- Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_{2N+1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$. - Soit $V = (v_0, \ldots, v_{2N})^T \in \mathcal{M}_{2N+1,1}(\mathbb{R})$. On note $P(X) = v_0 + v_1 X + \ldots + v_{2N} X^{2N}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $V \in \operatorname{Ker}(M - \lambda I_{2N+1})$ si et seulement si $\lambda P = XP + (1 - X^2)P'$.

- Comment choisir X_0 pour que toutes les variables aléatoires X_n soient equidistribuées ?
- La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 844 [Mines MP 2024 # 850] Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$, $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $a_n = \mathbf{E}(Y_n)$ et $b_n = \mathbf{E}(Z_n)$.

- Étudier la monotonie de $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer a_n.
- Déterminer la limite et un équivalent simple de $(b_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 845 [Mines MP 2024 # 851] Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{E}(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right)$.
- Pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{P}(|S_n| \geq a) \leq 2\exp\left(\frac{a^2}{2n}\right)$.
- Montrer que le résultat de la question précédente subsite si $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires bornées par 1 et centrées.

Exercice 846 [Mines MP 2024 # 852] Soit X une variable aléatoire réelle discrete.

- Pour $t \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $\varphi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX})$.
- Montrer que φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que φ_X détermine la loi de X.

Exercice 847 [Mines MP 2024 # 853] Soient $k \leq n \in \mathbb{N}$. Un parking dispose de n places consécutives numérotées de 1 à n. On y dispose des vehicules nécessit chacun k places consécutives pour être gares. Chaque vehicule est successivement place aléatoirement sur les emplacements disponibles jusqu'a ce qu'on ne puisse plus en garer aucun.

Pour $j \in [\![1, n-k+1]\!]$, B_j designe l'évènement $\llcorner$ la première voiture est garée entre les emplacements j et $j+k-1$, $\neq$ et X_n est le nombre d'emplacements residuels libres à la fin du processus.

- Montrer que, pour i, j convenables, $\mathbf{P}_{B_j}(X_n = i) = \mathbf{P}(X_{j-1} + X_{n-(j+k)+1} = i - k)$.

En déduire que $\mathbf{E}(X_n) = k + \frac{2}{n-k+1}\sum_{\ell=0}^{n-k}\mathbf{E}(X_\ell)$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \mathbf{E}(X_0) + \cdots + \mathbf{E}(X_n)$.

Montrer que la somme f de la série entière $\sum S_n t^n$ est au moins définie sur $]0,1[$ et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

- Expliciter f et en déduire une expression de $\mathbf{E}(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

IX) Mines - Ponts - PSI **AUTRE**

1) Algèbre

Exercice 848 [Mines PSI 2024 # 854] Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

- Interpréter géométriquement A.
- Donner l'image du plan P d'équation $x - y - z = 0$ par A.

Exercice 849 [Mines PSI 2024 # 855] Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ representant un projecteur p de rang r dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer la trace de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\Psi(X) = PX - XP$.

Exercice 850 [Mines PSI 2024 # 856] Soient $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Montrer que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x+i+j-2)$ n'est pas inversible.

Exercice 851 [Mines PSI 2024 # 857] Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Exercice 852 [Mines PSI 2024 # 858] On note D_n le nombre de permutations sans point fixe de $[\![1,n]\!]$. On note $D_0 = 1$.

- Soit $M = \left(\binom{j}{i}\right)_{0\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Déterminer M^{-1}.
- Exprimer $n!$ en fonction des D_k pour $0 \le k \le n$.
- En déduire une expression de D_n.

Exercice 853 [Mines PSI 2024 # 859] Soit $r \ge 2$.

- Montrer que l'équation $X^r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- Déterminer les solutions $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de l'équation $X^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 854 [Mines PSI 2024 # 860] Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes distincts. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de terme general \$a_{i,j}= \ .\$. Soit $P\ : x \mapsto \det(A + xI_n)$.

- Montrer que P est un polynôme unitaire de degré n.
- Calculer $P(a_i)$.
- Trouver l'expression de P.
- Décomposer $\frac{P(X)}{(X-a_1)\cdots(X-a_n)}$ en éléments simples.
- Calculer $\det(A + I_n)$.

Exercice 855 [Mines PSI 2024 # 861] Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\exists p \in [\![1,n]\!]$, $A_i^p = 0$ et $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $A_iA_j = A_jA_i$. Montrer que $\prod_{i=1}^n A_i = 0$.

Exercice 856 [Mines PSI 2024 # 862] On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un pseudo-inverse s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$, $B = BAB$ et $A = ABA$.

- Montrer que, si A admet un pseudo-inverse, alors A et A^2 sont de même rang.
- Justifier l'unicité sous reserve d'existence d'un pseudo-inverse.
- Montrer que, si A et A^2 sont de même rang, alors $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplementaires. Étudier la réciproque de la première question.

Exercice 857 [Mines PSI 2024 # 863] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe des complexes deux à deux distincts $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $A + \lambda_i B$ est nilpotente pour tout i.

- Montrer que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de taille n est inférieur ou egal à n.
- Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ (A + \lambda B)^n = 0$.
- Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 858 [Mines PSI 2024 # 864] Soient $n \ge 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+M) = \det(A) + \det(M)$.

- Montrer que A n'est pas inversible.
- Montrer que $A = 0$.Ind._ Écrire $A = PJ_rQ^{-1}$.

Exercice 859 [Mines PSI 2024 # 865]

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré $\le n$ tel que $X + 1 - P_n^2(X)$ soit divisible par X^{n+1}.Ind._ Penser aux développements limites.

- Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B^2 = I_n + N$.

Exercice 860 [Mines PSI 2024 # 866] Soit $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
$\forall i,\ b_{i,i} > 0,\ \forall i \neq j,\ b_{i,j} \le 0$ et $\forall i,\ \sum_{j=1}^n b_{i,j} > 0$.

- Montrer que B est inversible. On prendra $X \in \mathrm{Ker}(B)$ et on étudiera $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$.
- Soit $X \in \mathbb{R}^n$ à coefficients ≥ 0. Montrer que $Y = B^{-1}X$ est à coefficients ≥ 0.
- En déduire que B^{-1} est à coefficients ≥ 0.

Exercice 861 [Mines PSI 2024 # 867] Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $d \in [\![1, n-1]\!]$. Trouver l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent tous les sous-espaces vectoriels de dimension d.

Exercice 862 [Mines PSI 2024 # 868] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$. Montrer que $\det(A+B) = \det(A)$.

Exercice 863 [Mines PSI 2024 # 869] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer qu'il existe d tel que $A^3 + dA = 0$.
- Déterminer d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer A^{2n} en fonction de d, n et A^2.
- Déterminer α et β tels que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_3 + \alpha A + \beta A^2$.

Exercice 864 [Mines PSI 2024 # 870] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ ou $j = e^{2i\pi/3}$.

- La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer une matrice semblable à A, diagonale ou triangulaire.
- Expliciter $C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}),\ AM = MA\}$.
- Soit f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associe à A. Quels sont les sous-espaces vectoriels f_A-stables de $\mathbb{C}^3$?
- Peut-on retrouver C_A par des arguments de stabilité ?

Exercice 865 [Mines PSI 2024 # 871] Soit $k \in \mathbb{C}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de A en fonction de k.

Exercice 866 [Mines PSI 2024 # 872] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On suppose f^2 diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Exercice 867 [Mines PSI 2024 # 873]

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A^2) \subset]0, +\infty[$. Montrer que A est diagonalisable.
- Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & \dots & b & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \ddots & \vdots \\ a & b & \dots & b \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 868 [Mines PSI 2024 # 874] Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f^2 est un projecteur. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que f soit diagonalisable.

Exercice 869 [Mines PSI 2024 # 875] Soient $a \in \mathbb{C}$ et $u : P \in \mathbb{C}[X] \mapsto (X-a)P'$.

- Montrer que u est linéaire.
- Trouver les valeurs propres de u.
- Trouver les P dans $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 870 [Mines PSI 2024 # 876] Soient $E = \mathbb{C}_n[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f\ : P \in E \mapsto P - \alpha(X-\alpha)P'$.

- Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et donner sa matrice dans la base canonique.
- Montrer que f est diagonalisable.
- à quelle condition sur α, l'endomorphisme f est-il inversible ?
- Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $E = \mathrm{Ker}(f^k) \oplus \mathrm{Im}(f^k)$.

Exercice 871 [Mines PSI 2024 # 877] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0_n$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 872 [Mines PSI 2024 # 878] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Donner le spectre de A et ses espaces propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MT = TM$. Quelle est sa structure ? sa dimension ?
- Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 873 [Mines PSI 2024 # 879] Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -14 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ et un unique $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = (X+1)^2(X+2)Q_n(X) + \alpha_n(X+2) + \beta_n(X+1)(X+2) + \gamma_n(X+1)^2$.
- Déterminer A^n.

Exercice 874 [Mines PSI 2024 # 880] Soit u l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{C}[X], \forall z \in \mathbb{C}, u(P)(z) = e^{-z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n$.

- Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
- Trouver les valeurs propres de u.

Exercice 875 [Mines PSI 2024 # 881] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $M^n = I_2$. Prouver que $M^{12} = I_2$. Ind. Montrer que M est $\mathbb{C}$-diagonalisable et considérer sa trace.

Exercice 876 [Mines PSI 2024 # 882] Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

- On suppose $f^{n-1} \neq 0$ et f nilpotent. Montrer que f est cyclique.
- On suppose que f admet n valeurs propres distinctes. Montrer que f est cyclique.
- On suppose f diagonalisable. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit cyclique.

Exercice 877 [Mines PSI 2024 # 883] Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique s'il existe x_0 tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
Soient $E = \text{Vect}(1, \cos, \sin)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u la derivation. Montrer que u est un endomorphisme cyclique non diagonalisable.

Exercice 878 [Mines PSI 2024 # 884] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 879 [Mines PSI 2024 # 885] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice B.

- Montrer que $B^2 = B$.
- On suppose desormais que A est diagonalisable avec p valeurs propres.

En considérant une division euclidienne, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.

- Décrire B à l'aide des éléments propres de A.

Exercice 880 [Mines PSI 2024 # 886]

- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$.
- Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q(M) = 0$.

Exercice 881 [Mines PSI 2024 # 887] Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang r.

- Démontrer le theoreme du rang pour les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$.
- Montrer qu'il existe $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = PJ_rQ$ ou $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$. Montrer que A et B possèdent r valeurs propres communes en tenant compte des multiplicités.
- Que peut-on dire dans - quand $r = n$?

Exercice 882 [Mines PSI 2024 # 888] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f_A(M) = AM$.

- Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, déterminer $P(f_A)$.
- Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.
- Trouver le lien entre χ_A et χ_{f_A}.
- Donner le lien entre les éléments propres de A et ceux de f_A. Retrouver le résultat de la question -.

Exercice 883 [Mines PSI 2024 # 889] Soit E_N l'ensemble des suites à valeurs complexes N-périodiques.

- Montrer que E_N est un espace vectoriel de dimension finie et en déterminer sa dimension. Soit $T\ :\ E_N \to E_N$ définie par $\forall u \in E_N,\ (T(u))_n = u_{n+1}$.
- Montrer que T est un endomorphisme de E_N.
- Déterminer les éléments propres de T de deux facons différentes, en revenant à la définition et matriciellement.
- L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Exercice 884 [Mines PSI 2024 # 890] Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. pour $P, Q \in E$, on note $\Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{3} (P(k) + P(1))(Q(k) + Q(1))$.
Pour tout $i \in [\![0, 3]\!]$, on note $L_i(t) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq 3 \\ k \neq i}} \frac{t-k}{i-k}$.

- Calculer $L_i(j)$ pour tous $i, j \in [\![0, 3]\!]$. En déduire que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de E.
- Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
- Trouver une base orthonormée de E.

Exercice 885 [Mines PSI 2024 # 891] Soient $E = \mathbb{R}_4[X]$, F le sous-espace vectoriel de E forme des polynômes pairs, G le sous-espace vectoriel de E forme des polynômes impairs.
Pour $P, Q \in E$, on note $\Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{4} \big(P(k) + (-1)^k P(-k)\big)\big(Q(k) + (-1)^k Q(-k)\big)$.

- Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
- Montrer que $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.
- Déterminer une base orthonormée de E adaptée à $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Exercice 886 [Mines PSI 2024 # 892] Soit E un espace euclidien de dimension 3. On considére une isométrie indirecte f. Montrer que f se décompose en une rotation d'axe Δ et une reflexion de plan $\Delta^{\perp}$. Cette décomposition est-elle unique ? La rotation et la reflexion commutent-elles ?

Exercice 887 [Mines PSI 2024 # 893] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(M) = 0\}$.

- Montrer que F est un espace vectoriel et donner sa dimension.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner $d(A, F)$ en fonction notamment de $\operatorname{tr}(A)$.

Exercice 888 [Mines PSI 2024 # 894] Soit $(E, \langle\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E.

- Montrer que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.
- On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire donne par : $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Soit

$F = \{P \in E,\ P(1) = P'(1) = 0\}$. Déterminer $F^{\perp}$ et $(F^{\perp})^{\perp}$.

- Pour E préhilbertien, donner une condition suffisante sur F pour que $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

Exercice 889 [Mines PSI 2024 # 895] Soit $(E, \langle\ \rangle)$ un espace euclidien. Pour $x_1, \dots, x_p$ dans E, on note $G(x_1, \dots, x_p)$ la matrice de coefficient $G_{i,j} = \langle x_i, x_j\rangle$.

- Montrer que : G est inversible si et seulement si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
- Montrer que $\operatorname{rg}(G) = \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p)$.

Exercice 890 [Mines PSI 2024 # 896] Soit $(E, \langle\ \rangle)$ un espace euclidien et F une partie fermée, non vide et convexe de E.
Pour $x \in E$ on pose $d(x) = \inf_{f \in F} \|x - f\|$ et $\Gamma(x) = \{f \in F,\ \|x - f\| = d(x, F)\}$.

- Caractériser l'ensemble des x tels que $d(x) = 0$.
- Montrer que d est 1-lipschitzienne. En déduire que $\Gamma(x)$ est non vide.
- En utilisant une identite relative à la norme, montrer que :

$\forall (f, f') \in \Gamma(x)^2,\ f \neq f' \Rightarrow \left\|\frac{1}{2}(f + f') - x\right\|^2 < d(x)^2$.

- Montrer que $\Gamma(x)$ est reduit à un seul élément, que l'on notera $p(x)$.
- Montrer que $p(x)$ est caractérise par : $\forall y \in F,\ \langle x - p(x), y - p(x)\rangle\ \leq 0$.

Exercice 891 [Mines PSI 2024 # 897] On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer sa nature et ses valeurs propres.

Exercice 892 [Mines PSI 2024 # 898]

- Que peut-on dire du spectre d'une matrice orthogonale ?
- Que peut-on dire de la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$? Que décrit-elle ?

Exercice 893 [Mines PSI 2024 # 899] Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.

- Montrer que $u = p - q$ est diagonalisable et que $\operatorname{Sp}(u) \subset [-1, 1]$.
- Déterminer $\operatorname{Ker}(u + \mathrm{id})$ et $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$.

Exercice 894 [Mines PSI 2024 # 900] Soient $(E, \langle\ \rangle)$ un espace euclidien, α un réel et a un vecteur de E unitaire.
On définit $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha \langle x, a\rangle\, a$.

- Montrer que f_α est un endomorphisme de E.
- Soient α, β dans $\mathbb{R}$. Calculer $f_\alpha \circ f_\beta$. Pour quels α, f_α est-il bijectif ?
- Trouver les valeurs et les vecteurs propres de f_α.
- Pour quels α, f_α est-il une isométrie vectorielle ?
- Pour quels α, f_α est-il auto-adjoint ?

Exercice 895 [Mines PSI 2024 # 901] Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit orthogonale.

Exercice 896 [Mines PSI 2024 # 902] Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^T M M^T = I_n$.

Exercice 897 [Mines PSI 2024 # 903] Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

- Montrer que $A^4 - 2A^2 + A = 0$.
- Montrer que 1 n'est pas valeur propre de A.
- Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer l'expression des A possibles.

Exercice 898 [Mines PSI 2024 # 904] On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ$. On pose pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$
$(u(P))\,(x) = \int_0^1 (x + t)^n P(t)dt$.

- Montrer que u est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}_n[X]$. Qu'en deduit-on ?
- Montrer que u est un isomorphisme.

Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u associes aux valeurs propres $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$.

- Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y)$.
- En déduire que $\operatorname{tr}(u) = \frac{2^n}{n+1}$.

Exercice 899 [Mines PSI 2024 # 905] Soit $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $D = \operatorname{diag}(s_{1,1}, \ldots, s_{n,n})$. On suppose S et D semblables. Montrer que $S = D$. Ind. Considérer la trace de S^2.

Exercice 900 [Mines PSI 2024 # 906] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, $X^T A X > 0$.

- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(B) > 0$, puis montrer que $\det(A) \leq \det(B)\det(D)$.

2) Analyse

Exercice 901 [Mines PSI 2024 # 907] Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note, pour $f \in E$, $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

- Montrer que N_φ est une norme si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide. - Montrer que N_φ et $\| \|_\infty$ sont équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est vide.

Exercice 902 [Mines PSI 2024 # 908] Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.

- Soit (u_n) une suite qui converge dans (E, N_1). On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Montrer que (u_n) converge dans (E, N_2).
- On suppose qu'une suite (u_n) converge dans (E, N_1) si et seulement si (u_n) converge dans (E, N_2). Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.
- On prend $E = \mathbb{R}[X]$ et, pour $a \in \mathbb{R}$, $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$. Montrer que, si $a, b \in [0,1]$, N_a et N_b sont équivalentes.
- Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \dfrac{X^n}{2^n}$. Trouver les valeurs de a telles que (P_n) converge pour N_a et déterminer alors la limite.
- En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leq a < b$ et $b > 1$.

Exercice 903 [Mines PSI 2024 # 909] Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$.

- Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
- Dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\left\|\sum a_k X^k\right\| = \max |a_k|$, montrer que la suite (P_n)

de terme general $P_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{X^k}{k}$ est de Cauchy sans être convergente.

- Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
- Montrer que, si (u_n) est de Cauchy et possède une suite extraite convergente, alors (u_n) est convergente.
- On admet le theoreme de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$. Montrer que si E est de dimension finie, alors la suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Exercice 904 [Mines PSI 2024 # 910] Soit E l'ensemble des applications lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $K(f) = \inf\{k \in \mathbb{R}^+,\ f$ est $k-$lishtzienne$\}$.

- Montrer que E est un espace vectoriel.
- Montrer que, pour tout $f \in E$, f est $K(f)$-lipschitzienne.
- Montrer que toute fonction polynomiale P appartient à E et déterminer $K(P)$.
- L'application $f \mapsto K(f)$ est-elle une norme sur E ?
- Prouver que $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \inf_{x \in [0,1]} |f(x)| + K(f)$.
- L'application $f \mapsto \dfrac{K(f)}{\|f\|_\infty}$ est-elle bornée sur $E \setminus \{0\}$?

Exercice 905 [Mines PSI 2024 # 911] Soit $f :\ (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \mapsto x^2 + y^2 + \dfrac{3}{xy}$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Exercice 906 [Mines PSI 2024 # 912] Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & a/n \\ -a/n & 1 \end{pmatrix}$.

- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \left(1 + i\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$. Montrer que $z_n \to e^{i\alpha}$. - Diagonaliser A_n dans $\mathbb{C}$.
- Déterminer $\lim A_n^n$.

Exercice 907 [Mines PSI 2024 # 913] Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et, pour $n \geq 1$, $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$.

- Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque la suite (x_n) est constante.
- Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque $x_n = a\, b^{2^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

- Montrer que la suite (y_n) converge si et seulement si la suite $\left(x_n^{1/2^n}\right)$ est bornée.

Exercice 908 [Mines PSI 2024 # 914] Pour $n \geq 2$, on s'intéresse à l'équation $e^x - x^n = 0$.

- Montrer que cette équation admet exactement deux solutions positives u_n et v_n, avec $u_n < v_n$.
- Montrer que (u_n) tend vers une limite ℓ.
- Trouver un équivalent de $u_n - \ell$.
- Montrer que la suite (v_n) diverge.

Exercice 909 [Mines PSI 2024 # 915] On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_{3n} = \frac{2}{\ln(n+3)}$ et $u_{3n+1} = u_{3n+2} = \frac{-1}{\ln(n+3)}$.

- Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente et calculer sa somme.
- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum a_n$ converge. A-t-on nécessairement la convergence de la série $\sum a_n^2$?
- Montrer, pour tout entier $p \geq 2$, la divergence de la série $\sum u_n^p$.

Exercice 910 [Mines PSI 2024 # 916] On donne $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

- On pose $u_k = \frac{(-1)^k}{k}$. Étudier la convergence et la somme de $\sum_{k\geq 1} u_k$.
- On donne σ bijection de $\mathbb{N}^*$ avec

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\ldots$
$\sigma(k)$	1	3	2	5	7	4	9	11	6	13	15	$\ldots$

Donner $\sigma(k)$.

- Déterminer la somme de la série $\sum_{k\geq 1} u_{\sigma(k)}$.

Exercice 911 [Mines PSI 2024 # 917] Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite définie par $u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}$.

- Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
- Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 912 [Mines PSI 2024 # 918] Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$.

- à quelle condition nécessaire la série $\sum \frac{(-1)^k}{f(k)}$ est-elle convergente ? Cette condition est-elle suffisante ? On suppose par la suite que cette condition est vérifiée. - On suppose de plus que f est croissante à partir d'un certain rang.

On pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{f(k)}$. Déterminer le signe de u_n et la limite de la suite (u_n).

- On suppose egalement que, pour tout k assez grand, $\frac{1}{f(k)} + \frac{1}{f(k+2)} \geq \frac{2}{f(k+1)}$.

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 913 [Mines PSI 2024 # 919] Soit $f\colon\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinite d'antecedents par f.

Exercice 914 [Mines PSI 2024 # 920] Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = 2f - \mathrm{id}$.

- Montrer que f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- On pose $f_0 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que $\left(\frac{1}{n} f_n\right)$ admet une limite, que l'on precisera.
- Déterminer f.

Exercice 915 [Mines PSI 2024 # 921] Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ ou g est à valeurs dans $[0, 1]$ et f décroissante. On pose $c = \int_a^b g$. Montrer que $\int_{b-c}^b f \leq \int_a^b fg \leq \int_a^{a+c} f$.
Ind. On pourra introduire une fonction d'une variable bien choisie.

Exercice 916 [Mines PSI 2024 # 922] Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t) f(t)\, \mathrm{d}t = 1$.

Exercice 917 [Mines PSI 2024 # 923] Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \frac{1-(te^{i\theta})^n}{1-te^{i\theta}}\, d\theta$.
- En déduire que $\sum \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}\, d\theta$.
- En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi-\theta}{2}$.
- Déterminer de même $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k}$.

Exercice 918 [Mines PSI 2024 # 924] Calculer $\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-x} dx$.

Exercice 919 [Mines PSI 2024 # 925] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)-\cos(nx)}{\cos(t)-\cos(x)} dt$.

- Montrer que $I_n(x)$ est bien définie.
- Calculer $I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x)$ et trouver une relation de récurrence.

Exercice 920 [Mines PSI 2024 # 926]

- Justifier que $I = \int_0^{+\infty} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor \mathrm{d}x$ converge.
- Calculer explicitement I en admettant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 921 [Mines PSI 2024 # 927]

Soit $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ continue par morceaux telle que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, 1[$. Étudier l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 922 [Mines PSI 2024 # 928] On définit f sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 2x^7 + x$.

- Montrer que f realise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction $F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sin(2x^7 + x)$ est-elle intégrable en $+\infty$?
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Exercice 923 [Mines PSI 2024 # 929] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. On se propose de prouver l'existence d'un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

- Étudier le cas particulier ou $f = \sin$.
- Traiter le cas general.

Exercice 924 [Mines PSI 2024 # 930]

Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$. Déterminer la limite puis un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 925 [Mines PSI 2024 # 931] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

- Soient $I_1 = \int_0^1 f(x)f'(x)\,\mathrm{cotan}(\pi x)\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_0^1 f^2(x)(1 + \mathrm{cotan}^2(\pi x))\,\mathrm{d}x$. Montrer que I_1 et I_2 sont convergentes et exprimer I_1 en fonction de I_2.
- En déduire que $\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 (f')^2$.

Exercice 926 [Mines PSI 2024 # 932] Soit la suite de fonctions définies par $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

- Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
- Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n).
- Calculer $\int_0^{+\infty} f_n$ puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Est-ce coherent avec les theoremes du cours ?

Exercice 927 [Mines PSI 2024 # 933] Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\forall x > 0,\ f_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right)$.

Exercice 928 [Mines PSI 2024 # 934] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

- Trouver les domaines de définition/continuité/dérivabilité de f.
- Trouver la limite de f en $+\infty$ puis un équivalent.

Exercice 929 [Mines PSI 2024 # 935] Pour $a \in \mathbb{R}$, on considére la suite de fonctions définie par $f_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto e^{-n^a}e^{inx}$.

- Pour quelles valeurs de a, la série $\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?

On suppose cette condition remplie dans la suite. On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

- Montr'er que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- En utilisant le theoreme de Fubini, montrer que S est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 930 [Mines PSI 2024 # 936]

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$.
- Montr'er que pour tout $x \in [0, R[$, $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2} = x\int_0^1 \frac{\ln(t)}{xt-1}\,\mathrm{d}t$.
- Que se passe-t-il pour $x = 1$?

Exercice 931 [Mines PSI 2024 # 937] Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}x^n$.

- Déterminer le rayon de convergence de f.
- Quel est le domaine de définition de f ? La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, déterminer sa derivée.
- Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f.
- Que vaut $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}\frac{(-1)^n}{4^n}$?

Exercice 932 [Mines PSI 2024 # 938] Soient $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Déterminer le rayon de convergence de f et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
- Montr'er que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut F' ?
- Montr'er que F est développable en série entière et déterminer ce développement.

Exercice 933 [Mines PSI 2024 # 939] On cherche à déterminer le cardinal m_n de l'ensemble M_n forme des n-uplets $(a - 1 \leq i \leq n$ tels que : (i) $\forall i,\ a_i \in \{-1, 0, 1\}$, (ii) $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, (iii) $\forall p \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^p a_i \geq 0$.

On pose $m_0 = 1$.

- Calculer m_1, m_2 et m_3.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a - 1 \leq i \leq n \in M_n$ tel que $a_1 = 1$.Montrer qu'il existe $r \in [0, n-2]$, $(b_1, \dots, b_r) \in M_r$, $(c_1, \dots, c_{n-r-2}) \in M_{n-r-2}$ tels que $(a_1, \dots, a_n) = (1, b_1, \dots, b_r, -1, c_1, \dots, c_{n-r-2})$ et justifier l'unicité de cette décomposition.
- En déduire une formule de récurrence sur les $m_1, \dots, m_n$.
- Soit : $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} m_nx^n$. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est > 0 et déterminer f.

Exercice 934 [Mines PSI 2024 # 940] Soit $g : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.

- Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0.
- Donner un encadrement du rayon de convergence.

Exercice 935 [Mines PSI 2024 # 941] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n}$.

- Trouver l'ensemble de définition de f.
- Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
- Calculer $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ pour $x \in]1, +\infty[$.

Exercice 936 [Mines PSI 2024 # 942] On pose $f(x,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^s}$.

- Calculer $f(x,0)$ et $f(x,1)$ lorsque cela est possible.
- Donner le rayon de convergence de $x \mapsto f(x,s)$.
- Déterminer l'ensemble de définition de $x \mapsto f(x,s)$, en discutant selon les valeurs de s.
- Déterminer une relation entre $f(x,s)$ et $f(x,s-1)$. En déduire $f(x,-1)$ et $f(x,-2)$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de $f(x,-p)$ lorsque $x \to 1^-$.

Exercice 937 [Mines PSI 2024 # 943] On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n+1}$.
- Montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$ et déterminer la limite de $(u_n - \sqrt{n})$.
- Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$.
- Calculer $\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Exercice 938 [Mines PSI 2024 # 944] Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et l'on note R le rayon de convergence de cette série entière.

- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 1\frac{}{2^n\leq}$ a$_n\leq$ 1\,$. En déduire un encadrement de R.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.
- En déduire que : $\forall x \in]-R, R[,\ (2x - x^2)f'(x) + (1-x)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. - Trouver ainsi une expression de $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
- Trouver une autre expression de $f(x)$ en montrant que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(1+t^2)x}{2}\right)^n dt = \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{(1+t^2)x}{2}} dt \text{ et en calculant cette intégrale.}$$

Exercice 939 [Mines PSI 2024 # 945] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$_ :

- Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} |\sin(t)|\, e^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t$ convergent et déterminer leur valeur.
- Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{sh}(t)}\, \mathrm{d}t$ converge.
- Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{sh}(t)}\, \mathrm{d}t = \sum_{n\geq 0} \frac{2}{1+(2n+1)^2}$.
- Adapter les questions précédentes pour déterminer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{ch}(t)}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 940 [Mines PSI 2024 # 946] Soient $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, \mathrm{d}x$ et $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$.

- Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \geq 1$.
- Montrer que I est bien définie.
- Déterminer la nature de $\sum u_{n \cdot \text{Ind} \cdot}$_ Effectuer un changement de variable.

Exercice 941 [Mines PSI 2024 # 947] Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 f(t^n)dt$. Limite de $(I$_n$)\,$?

Exercice 942 [Mines PSI 2024 # 948]

- Soient a et b deux réels > 0. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+bn}$.
- Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n}$.

Exercice 943 [Mines PSI 2024 # 949] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\, \mathrm{d}t$.

- Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\arctan(u)| \leq |u|$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer le développement en éléments simples de $t \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2(1+t^2)}$ pour $|x| \neq 1$.
- Montrer que $f(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de f sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 944 [Mines PSI 2024 # 950] Soit $f :\ \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(t+1)}$.

- Déterminer le domaine de définition D de f.
- Montr e que f est continue sur D.
- Montr e que la courbe representative de f admet la droite $x = 1/2$ pour axe de symétrie.
- Justifier l'existence d'une borne inférieure pour f ; la déterminer.

- Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 945 [Mines PSI 2024 # 951] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(xt)\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

- Montr e que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montr e que la suite (u_n) possède une limite et la déterminer.
- Trouver un équivalent de u_n en $+\infty$.

Exercice 946 [Mines PSI 2024 # 952] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^t} dt$.

- Montr e que f est définie au moins sur un intervalle de la forme $]-\alpha,\alpha[$ avec $\alpha > 0$.
- Montr e que f est développable en série entière au voisinage de 0.
- Calculer ce développement et en déduire une expression $f(x)$.

Exercice 947 [Mines PSI 2024 # 953] Soit $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- Montr e que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner f'.
- Soit $g : x \mapsto e^{x^2} f(x)$. Montr e que g est solution de $(E) : y' - 2xy = 1$ avec $y(0) = 0$.
- Déterminer les solutions de (E) développables en série entière et preciser le rayon.
- La fonction g est-elle développable en série entière ?

Exercice 948 [Mines PSI 2024 # 954] Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

- Montr e que Γ est définie sur $]0,+\infty[$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$. Montr e plus que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
- Étudier la convexite de Γ et celle de $\ln \circ \Gamma$.
- Pour tout $x > 0$, etablir : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}(1-t/n)^n\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)$.
- Exprimer $\int_0^n t^{x-1}(1-t/n)^n\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,du$.
- Montr e que la suite de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ converge simplement vers Γ. Ind. Procéed par intégrations par parties successives.

Exercice 949 [Mines PSI 2024 # 955] On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(2xt) e^{-t^2} dt$.

- Montr e que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Trouver une relation entre f et f'. - En déduire une expression simple de $f(x)$.

Exercice 950 [Mines PSI 2024 # 956] Soit \$F: \ x$\mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\{} \sqrt{1+t^4}\}e^{\text{-xt}}\{\mathrm{d}\}\mathrm{t}$\,\$.

- Déterminer le domaine de définition I de F.

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et donner son sens de variation.

- Déterminer les limites de F aux bornes de I.
- Calculer $G(x) = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-xt}\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.
- Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{6}{x^4}$.

Ind. On pourra étudier $\mid F - G \mid$ et utiliser la relation de Chasles.

Exercice 951 [Mines PSI 2024 # 957] On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Que vaut $f(0)$?
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
- Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- à l'aide d'un changement de variable affine, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2g'(x)g(x)$.
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2$.
- En déduire la limite de g en $+\infty$ puis conclure que $\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 952 [Mines PSI 2024 # 958] Soit f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Soit $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 953 [Mines PSI 2024 # 959] Soit (E) l'équation différentielle : $x^2 y'(x) + y(x) = x^2$.

- Montrer que (E) n'admet pas de solution développable en série entière.
- Résoudre l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$.
- Montrer qu'il existe une unique solution tendant vers 0 en 0^+.

Exercice 954 [Mines PSI 2024 # 960] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{-x/t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle $2xy'' + y' - 2y = 0$.
- Résoudre l'équation en posant $y(x) = z(\sqrt{x})$.

Exercice 955 [Mines PSI 2024 # 961] On s'intéresse aux solutions $f : x \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de l'équation différentielle
$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$.

- Montrer que $a_0 = 1/2$, $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2$, $a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$. - En déduire l'unicité de f.
- Déterminer les a_n, le rayon de convergence de f puis exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 956 [Mines PSI 2024 # 962] On note (E) l'équation différentielle $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$.

- Déterminer les solutions de (E) non nulles développables en série entière. Preciser le rayon de convergence.
- Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur un intervalle raisonnable.
- Les raccorder entre elles.

Exercice 957 [Mines PSI 2024 # 963] On note (E) l'équation différentielle $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2(1+x)$.

- Trouver les solutions de l'équation homogène associée de la forme $x \mapsto x^\alpha$, ou $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Trouver une solution particuliere de (E), d'abord sur $]0, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 0[$.

Ind. On la cherchera sous la forme $x\alpha(x) + x^2\beta(x)$, ou α et β sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $x\alpha'(x) + x^2\beta'(x) = 0$.

- L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 958 [Mines PSI 2024 # 964] Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on définit $f_{a,b,c} : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Soit $F = \left\{f_{a,b,c},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

- Montr e que F est un espace vectoriel, en donner la dimension et une base.
- Trouver $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in F, \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = Mf(t)$.
- La matrice M est-elle inversible ?
- Quelles sont les valeurs propres de M ? Pouvait-on s'y attendre ?

Exercice 959 [Mines PSI 2024 # 965]

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. à l'aide d'un changement de variables classique, résoudre l'équation $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.
- Résoudre $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}f(x,y)$ d'inconnue

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

Exercice 960 [Mines PSI 2024 # 966] Soit $J : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x\sin(\theta))\, d\theta$.

- Montr e que J est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- Montr e que J est développable en série entière et déterminer le rayon de convergence.
- Montr e que $xJ''(x) + J'(x) + J(x) = 0$.
- Soit $(x,y) \mapsto \varphi(x,y) = J\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Montr e que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et que $\Delta\varphi + \varphi = 0$.

Exercice 961 [Mines PSI 2024 # 967] On pose $f(x,y) = \frac{1}{1-y^2}\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$. On note Ω l'ensemble de définition de f.

- Representer Ω et montrer que c'est un ouvert.
- Monter que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. - Comparer $f(1/x,y)$ et $f(x,y)$. Donner une interprétation géométrique pour $x > 0$ et $y \in]0,1[$.
- Montrer que f vérifie : $2yf + (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x} - (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercice 962 [Mines PSI 2024 # 968]

- Résoudre $(1-t^2)y'' - 2ty' = 0$ sur $I =]-1,1[$.
- Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $g(x,y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$.

Déterminer l'ensemble des fonctions f telles que g soit non constante et de laplacien nul, c'est-a-dire telles que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

Exercice 963 [Mines PSI 2024 # 969] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\rho : x \mapsto \|x\|^2$.

- Montrer que $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
- Soient $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) = g(\|x\|^2)$.

Déterminer les fonctions g vérifiant $\Delta f = 0$.

Exercice 964 [Mines PSI 2024 # 970] Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$. Soient a, b, c des réels > 0 et $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $(x,y) \mapsto x^a y^b (1-x-y)^c$. Montrer l'existence d'extrema locaux pour f et les déterminer.

3) Probabilités

Exercice 965 [Mines PSI 2024 # 971] On considére une classe de PSI constituée de N eleves, dont n provenant de PCSI et $N-n$ de MPSI. On envoie successivement au tableau des eleves choisis au hasard. Un eleve peut passer plusieurs fois au tableau.

- Quelle est la probabilité qu'au cours des n premiers passages, il n'y ait que des eleves de PCSI ?
- Quelle est la probabilité qu'au cours des $n+5$ premiers passages, il y ait n eleves de PCSI ?
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On note X_i la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour faire passer i eleves de PCSI distincts au tableau. Déterminer la loi de X_i.

Exercice 966 [Mines PSI 2024 # 972] On considére initialement une urne contenant une boule blanche et une boule rouge. On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on rajoute deux boules de la même couleur que celle trée. On repete indéfiniment le processus.

- Calculer la probabilité de ne tirer que des boules rouges lors des n premiers tirages ?
- Calculer la probabilité de tirer indéfiniment uniquement des boules rouges ?
- Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au 42-ieme tirage.
- Le résultat de la question - reste-t-il vrai si on rajoute 3 boules (au lieu de 2) ? 4 boules ?

Exercice 967 [Mines PSI 2024 # 973]
- Calculer $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.
- On dispose de p unres contenant chacune p boules. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, l'urne i contient i boules noires et $p-i$ blanches. On choisit une des urnes aléatoirement et on en tire successivement des boules avec remise. On note $A_{n,p}$ l'évènement : on tire $2n$ boules et on a autant de boules noires que de boules blanches.
- Exprimer $P(A_{n,p})$ sous forme d'une somme.
- Déterminer la limite de $\mathbf{P}(A_{n,p})$ quand n tend vers $+\infty$.
- Déterminer la limite de $\mathbf{P}(A_{n,p})$ quand p tend vers $+\infty$.

Exercice 968 [Mines PSI 2024 # 974] On considére des lancers indépendants avec la probabilité $p \in]0,1[$ d'avoir pile. On pose par convention $T_0 = 0$ et pour $r \in \mathbb{N}^*$, T_r est la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécessaires pour avoir r piles. On pose $Z_r = T_r - T_{r-1}$ pour $r \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminer la loi de Z_r.
- Déterminer la fonction generatrice de T_r.
- Pour tout $x \in]0,1[$, calculer $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}$ et en déduire la loi de T_r.
- Calculer $\mathbf{E}(T_r)$ de deux facons différentes.

Exercice 969 [Mines PSI 2024 # 975] Soient $s > 1$ et $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbf{P}(n \text{ divise } X)$.
- Soit p un nombre premier et $v_p(k) = \max\{i \in \mathbb{N}, p^i \text{ divise } k\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer la loi de $v_p(X)$ puis son espérance.

Exercice 970 [Mines PSI 2024 # 976] On effectue des lancers avec une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in]0,1[$. On lance la pièce jusqu'a obtenir pile pour la deuxieme fois. On note X le nombre de faces obtenues au cours de l'experience.

- Donner la loi de X.
- Montrer que $\mathbf{E}(X) < +\infty$ et la calculer.
- On prend une urne et, si $X = n$, on pose $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans l'une. Donner la loi de Y ou Y est le numéro de la boule tirée dans l'urne. Calculer ensuite l'esprance de Y ainsi que sa variance.

Exercice 971 [Mines PSI 2024 # 977]
- Soit $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$. Déterminer le rayon de convergence et donner une expression de S.
- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction generatrice $G_X = \lambda S$. Déterminer λ et la loi de X.
- Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 972 [Mines PSI 2024 # 978] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$. On considére une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k} p^k$.

- Quelle est la valeur de a ?
- Déterminer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ si elles existent.

Exercice 973 [Mines PSI 2024 # 979] Soit (X_k) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramêtre $2/3$. On pose $A_k = (X_{2k-1}X_{2k} = 0)$, $B_p = \bigcap_{k=0}^{p} A_k$.
Soit $T = \min\{k \geq 2, X_{k-1} = X_k = 1\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 1$ et en déduire que $\mathbf{P}(T \in \mathbb{N}) = 1$.
- Établir une relation de récurrence linéaire d'ordre deux vérifiée par $(\mathbf{P}(T = n))$.
- Calculer l'espérance de T.

Exercice 974 [Mines PSI 2024 # 980] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$, ou p et q sont éléments de $]0,1[$. On pose $U = \dfrac{X}{Y}$.

- Donner la loi de U.
- Calculer l'espérance de U.
- Si $p = q$, montrer que $\mathbf{E}(U) > 1$.

Exercice 975 [Mines PSI 2024 # 981] Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$. On note U la matrice ligne $\begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix}$ et $M = U^T U$.

- Déterminer les lois de $\mathrm{rg}(M)$ et $\mathrm{Tr}(M)$.

- Déterminer la probabilité que M soit une matrice de projecteur.
- Dans cette question, on prend $n=2$. On note V la matrice ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = VMV^T$.

Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 976 [Mines PSI 2024 # 982] Soient $a, b > 0$, X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(a)$, $Y \sim \mathcal{P}(b)$, $\mathbf{P}(Z=1) = 1-p$ et $\mathbf{P}(Z=-1) = p$.

Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ YZ & X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable

Exercice 977 [Mines PSI 2024 # 983] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On définit $(S_n)_{n\geq 0}$ par $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = S_{n-1} + X_n$.

- Déterminer la loi de $\dfrac{S_n + n}{2}$. En déduire $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.
- On pose $A_n = |S_n|$.
- Déterminer $A_n(\Omega)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, etablir : $\mathbf{E}(A_{n+1}) = \mathbf{E}(A_n) + \mathbf{P}(S_n = 0)$.

Ind. Exprimer $\mathbf{E}(A_{n+1})$ et appliquer la formule des probabilités totales à X_{n+1}.

- En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{E}(A_{2n}) = \mathbf{E}(A_{2n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k$.

X) Mines - Ponts - PC **AUTRE**

1) Algèbre

Exercice 978 [Mines PC 2024 # 984] Soient A un ensemble de réels de cardinal $n \geq 2$ et $B = \{a + a',\ (a, a') \in A^2\}$.

- Montrer que $2n - 1 \leq \operatorname{Card} B \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- Donner des exemples de parties pour lesquelles les bornes sont atteintes.
- Généraliser à $B_k = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_k\ ;\ a_1, ..., a_k \in A\}$.

Exercice 979 [Mines PC 2024 # 985] Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

Exercice 980 [Mines PC 2024 # 986] Déterminer les polynômes réels P vérifiant $P(X)P(X+1) = P(X^2)$.

Exercice 981 [Mines PC 2024 # 987]

- Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. Montrer que ses racines rationnelles sont dans $\mathbb{Z}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un polynôme unitaire $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.
- Montrer que $\cos(\pi\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

Exercice 982 [Mines PC 2024 # 988] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{P(k)}{\prod_{i\neq k}(k-i)}$.

Exercice 983 [Mines PC 2024 # 989] Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $(*)$ $(1+iX)^{2n+1} - (1-iX)^{2n+1} = 2iXQ_n(X)$.

- Montrer qu'il existe un unique $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$. Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.
- Déterminer les racines de Q_n.
- Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \left(4 + \tan^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

Exercice 984 [Mines PC 2024 # 990] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. On pose $Q = P + P' + \cdots + P^{(n)}$.

- Montrer que Q est minore sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que Q est positif sur $\mathbb{R}$.

Exercice 985 [Mines PC 2024 # 991] L'union de deux sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace vectoriel ?

Exercice 986 [Mines PC 2024 # 992] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 987 [Mines PC 2024 # 993] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \{S_1, \ldots, S_k\}$ l'ensemble des parties non vides de $\{1, \ldots, n\}$. Soit $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ définie par \$a_{i,j}= \ .\$.Déterminer le rang de A.

Exercice 988 [Mines PC 2024 # 994]

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $|\mathrm{rg}A - \mathrm{rg}B| \leq \mathrm{rg}(A+B) \leq \mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B$.
- Soit $(v_1, ..., v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ tel que $\sum_{i=1}^{k} v_i(v_i)^T = I_n$. Montrer que $k \geq n$.

Exercice 989 [Mines PC 2024 # 995] Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que : $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA$. Montrer que $\det(A - B) \in \{-1, 0, 1\}$.

Exercice 990 [Mines PC 2024 # 996]

- Four $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$. Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}),\ A \mapsto f_A$ est un isomorphisme.
- Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $g(AB) = g(BA)$. Montrer que g est proportionnelle à la trace.
- Soit h un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ h(AB) = h(BA)$. Montrer que h préserve la trace.

Exercice 991 [Mines PC 2024 # 997] Trouver $\dim(\mathrm{Vect}(A))$ dans les deux cas suivants :

- $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\, M^n = \mathrm{Diag}(1,2)\}$ avec $n \geq 2$,
- $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\, M^2 = I_2\}$.

Exercice 992 [Mines PC 2024 # 998] Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $S(A)$ l'ensemble des matrices semblables à A. Déterminer les matrices A telles que $S(A)$ est fini.

Exercice 993 [Mines PC 2024 # 999] Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.

- Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que $\varphi_\sigma : s \mapsto s \circ \sigma$ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$.
- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note f_σ l'endomorphisme de E défini par $\forall i \in [\![1,n]\!]\ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. On pose $p_n = \frac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma$. Montrer que p_n est un projecteur et expliciter son image et son noyau.

Exercice 994 [Mines PC 2024 # 1000] Soient $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi : P \in E \mapsto P - P'$.

- Montrer que φ est bijectif de deux manieres différentes.
- Soit Q l'antecedent de P par φ. On suppose que $Q \geq 0$. Montrer que $P \geq 0$. Exprimer P en fonction de Q.

Exercice 995 [Mines PC 2024 # 1001] Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $(AB)^2 = AB$. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{rg}(B)$. Montrer que $BA = I_2$.

Exercice 996 [Mines PC 2024 # 1002] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ une forme linéaire sur E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.
- Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On pose $L = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^T L^T = \lambda L^T$.
- Trouver toutes les droites stables par l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 997 [Mines PC 2024 # 1003] Soient $n \geq 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?

Exercice 998 [Mines PC 2024 # 1004] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = -4\,\mathrm{id}$ ou E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. - Déterminer le noyau et l'image de f. L'endomorphisme f est-il inversible ? Si c'est le cas, déterminer f^{-1}. - Montrer que n est nécessairement pair. - Pour $x \neq 0$, montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre. - On suppose maintenant que $n = 4$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la

$$\text{matrice de } f \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 999 [Mines PC 2024 # 1005] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. R \$ ´{e}\$soudre $X + X^T = \mathrm{tr}(X)\,A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1000 [Mines PC 2024 # 1006]

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, (X, AX) est l \$ ´{e}\$e. Que dire de A ?
- Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 1001 [Mines PC 2024 # 1007] Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme nilpotent tel que tout sous-espace de E stable par u admet un supplementaire stable par u. Montrer que u est l'endomorphisme nul.

Exercice 1002 [Mines PC 2024 # 1008] Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v = \mathcal{L}(F,G)$ et $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si les trois conditions suivantes sont realisées - u est injective, - v est surjective, - $F = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, v$.

Exercice 1003 [Mines PC 2024 # 1009] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v)$ et $u^2 \circ v = u$.

- Montrer que $v \circ u \circ v = v$.
- Montrer que $u \circ v$ est un projecteur
- Montrer que $u \circ v \circ u = u$ puis que $v^2 \circ u = v$.

Exercice 1004 [Mines PC 2024 # 1010] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Que dire de la trace d'un projecteur de E ? Montrer que, pour p projecteur de E, $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplementaires dans E.
- Soient p, q deux projecteurs de E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 1005 [Mines PC 2024 # 1011] Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(F)$.

Exercice 1006 [Mines PC 2024 # 1012] Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Soit $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si u est injectif, v est surjectif et $\mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, v = F$.

Exercice 1007 [Mines PC 2024 # 1013] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que $\mathrm{rg}(v) \leq \mathrm{rg}(u \circ v) + \dim(\mathrm{Ker}\, u)$. - On suppose que u est nilpotent d'indice p. Montrer que $\left(\dim(\mathrm{Ker}\, u^k)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante puis stationnaire.

Exercice 1008 [Mines PC 2024 # 1014]

- Existe-t-il deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle de trace nulle. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ telle que la famille (u, Au) soit libre.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Exercice 1009 [Mines PC 2024 # 1015] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}(AB - BA) = 1$.
Montrer que $A(\mathrm{Ker}(B)) \subset \mathrm{Ker}(B))$ ou $A(\mathrm{Im}(B)) \subset \mathrm{Im}(B))$

Exercice 1010 [Mines PC 2024 # 1016] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $f_1, \ldots, f_p$ des formes linéaires sur E. Prouver l'équivalence des trois assertions suivantes :

- $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre,
- $u : x \in E \mapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in \mathbb{K}^p$ est surjective,
- il existe $x_1, \ldots, x_p \in E$ tels que $\det(f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq p} \neq 0$.

Exercice 1011 [Mines PC 2024 # 1017] Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 1012 [Mines PC 2024 # 1018] Soient $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & b_n \\ a_1 & \ldots & a_n & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 1013 [Mines PC 2024 # 1019] Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 1014 [Mines PC 2024 # 1020] Redémontrer qu'une matrice diagonalisable à un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Exercice 1015 [Mines PC 2024 # 1021] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Monter que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et qu'elle admet une unique valeur propre réelle strictement positive a.
- Montrer que $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Déterminer la nature de la série $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^n$.

Exercice 1016 [Mines PC 2024 # 1022] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
- Soient v et w dans $\mathcal{L}(E)$ tels que v est diagonalisable, w est nilpotent et $v \circ w = w \circ v$. Montrer que $v + w$ et v ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 1017 [Mines PC 2024 # 1023] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de spectre vide.

- Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $\mathrm{Ker}\, P(u) \neq \{0\}$.
- Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et stable par u.
- En déduire que tout endomorphisme de E admet un sous-espace vectoriel stable de dimension 1 ou 2.

Exercice 1018 [Mines PC 2024 # 1024] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, ou E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.

Exercice 1019 [Mines PC 2024 # 1025] Soient f, g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $f \circ g = f + g$.

- Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, g$ et que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.
- On suppose de plus que f est diagonalisable. Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.
- Montrer qu'aucune valeur propre de $f \circ g$ n'appartient à $]0, 4[$.

Exercice 1020 [Mines PC 2024 # 1026] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.

Exercice 1021 [Mines PC 2024 # 1027] Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \mathrm{diag}(1, 2, -1, -1)$.

Exercice 1022 [Mines PC 2024 # 1028] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

- Exprimer le rang de B en fonction du rang de A.
- Étudier la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

Exercice 1023 [Mines PC 2024 # 1029] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

- Trouver une relation entre les valeurs propres de A et celles de B ainsi qu'entre les sous-espaces propres de A et ceux de B.
- Déterminer les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction des dimensions des sous-espaces propres de A.
- Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 1024 [Mines PC 2024 # 1030] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Peut-on trigonaliser A et B dans une même base ?

Exercice 1025 [Mines PC 2024 # 1031] Soient $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$. On pose $A = (\alpha_i \beta_j)_{1 \leq i,j \leq n}$.

- Quel est le rang de A ?
- Montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A) A$. - Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(M) = 1$. Montrer qu'il existe $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ telles que $M = X^T Y$.
- Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = 0_3$.
- à quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 1026 [Mines PC 2024 # 1032] Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_3$ et $M \neq I_3$.

- La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Donner ses valeurs propres.
- La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Montrer que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{1, j, j^2\}$ et que les multiplicités de j et j^2 sont les memes. Donner le spectre de M.
- Montrer que A et M sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, puis dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 1027 [Mines PC 2024 # 1033] Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{C}*)^2$ tels que $\lambda \neq \mu$. On suppose : $I_n = A + B,\ M = \lambda A + \mu B,\ M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

- Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.
- Montrer que A et B sont des projecteurs.
- La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver $\operatorname{Sp}(M)$.

Exercice 1028 [Mines PC 2024 # 1034] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.
On note $\Psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MB - BM$.

- Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Psi(A^k) = kA^k$.

Calculer $\operatorname{tr}(A)$.

- Montrer que si A n'est pas nilpotente alors Ψ à une infinite de valeurs propres. Conclure

Exercice 1029 [Mines PC 2024 # 1035] Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$.

- On considére $\Phi \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi : M \mapsto \operatorname{Tr}(A)M - \operatorname{Tr}(M)A$.
- Trouver $\operatorname{Ker} \Phi$ et $\operatorname{Im} \Phi$.
- Déterminer les éléments propres de Φ.
- Déterminer la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de Φ.
- On considére $\Psi \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Psi : M \mapsto \operatorname{Tr}(A)M + \operatorname{Tr}(M)A$.
- Trouver les éléments propres de Ψ.
- Montrer que Ψ est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 1030 [Mines PC 2024 # 1036] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par $f_A(M) = AM$. Montrer que A et f_A ont les memes valeurs propres.

Exercice 1031 [Mines PC 2024 # 1037] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On cherche le nombre de solutions de l'équation $B^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Montrer que, si B est solution, alors $AB = BA$.
- Montrer que si A est diagonalisable et à un sous-espace propre de dimension ≥ 2 alors il y a une infinite de solutions.
- Traiter le cas ou A admet trois valeur propres réelles distinctes. - Traiter le cas ou $A = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. - Cas general ?

Exercice 1032 [Mines PC 2024 # 1038] On note $D : P \mapsto P'$ l'endomorphisme derivation de $\mathbb{R}[X]$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D et déterminer la matrice de l'endomorphisme induit par D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie non nulle stable par D.
- Montrer qu'il existe un entier n et un polynôme R de degré n tel que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{R}_n[X]$.
- Montrer que la famille $(D^j(R))_{0 \leq j \leq n}$ est libre.
- En déduire que $F = \mathbb{R}_n[X]$.
- Expliciter tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ stables par D.

Exercice 1033 [Mines PC 2024 # 1039] On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Soit Φ l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $\Phi(f)$ définie par : $\Phi(f)(0) = f(0)$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Phi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
- Déterminer les valeurs propres de Φ et les espaces propres associes.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Φ stabilise $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme induit par Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est-il diagonalisable ?

Exercice 1034 [Mines PC 2024 # 1040] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^n} = I_2$. Montrer que $A^2 = I_2$ ou qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^k} = -I_2$.

Exercice 1035 [Mines PC 2024 # 1041] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

- Montrer que $\dim(E) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, quelle est la dimension maximale de E ?

Exercice 1036 [Mines PC 2024 # 1042] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux egaux à $1, 2, \ldots, n$. Montrer que A est triangulaire supérieure.

Exercice 1037 [Mines PC 2024 # 1043] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une limite $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $B^2 = B$, $BA = AB$. Déterminer $\mathrm{Ker}(B)$ et $\mathrm{Im}(B)$.
- Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C}\,,\ |z| < 1\} \cup \{1\}$. Montrer que si 1 n'est pas valeur propre de A alors $B = 0$.
- Montrer que la multiplicité de 1 dans le polynôme caractéristique de A est egale à la dimension de $\mathrm{Ker}(A - I_n)$.

Exercice 1038 [Mines PC 2024 # 1044] Soient a, b deux réels et n un entier.
Montrer que $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P' - nP$ est un endomorphisme et déterminer ses éléments propres. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 1039 [Mines PC 2024 # 1045]

- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = I_n + A + A^3$. Montr are A est un polynôme en B.
- Le résultat de - subsiste-t-il lorsque A est complexe ?

Exercice 1040 [Mines PC 2024 # 1046]

- Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non trigonalisable. Montr are A est $\mathbb{C}$-diagonalisable.
- Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Montr are l'une des conditions suivantes est realisées :
- A est $\mathbb{R}$-trigonalisable ; - A est $\mathbb{C}$-diagonalisable ;
- A est $\mathbb{R}$-semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 1041 [Mines PC 2024 # 1047] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Soit L l'ensemble $L = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.

- Montr are qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que la famille $(x_0, Ax_0, A^2x_0, \ldots, A^{n-1}x_0)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
- En déduire que la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est une base de L.

Exercice 1042 [Mines PC 2024 # 1048] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un automorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{u^k(x)\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$ est fini.

- Montr are qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^N = \mathrm{id}$.
- L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 1043 [Mines PC 2024 # 1049] Soit $(u_1, ..., u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \neq j$, $\langle u_i, u_j\rangle < 0$.
Montr are que toute sous-famille de $(u_1, ..., u_p)$ de cardinal $(p-1)$ est libre.

Exercice 1044 [Mines PC 2024 # 1050] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente non nulle.

- Montr are qu'il existe $V \in \mathbb{R}^n$ tel que $AV \neq 0$ et $A^2V = 0$.
- On note $\langle\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Déterminer l'ensemble $\{\langle AX, X\rangle\ ;\ X \in \mathbb{R}^n\}$.

- Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\{\langle BX, X\rangle\ ;\ X \in \mathbb{R}^n\} = \{0\}$.

Exercice 1045 [Mines PC 2024 # 1051] Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des réels. Pour $P, Q \in E$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$.

- Montr are que $\langle\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.
- Trouver une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.
- Soit H l'ensemble des $Q \in E$ tels que $\sum_{k=0}^n Q(a_k) = 0$. Montr are que H est un sous-espace vectoriel de E et preciser sa dimension.
- Pour $P \in E$, déterminer $d(P, H)$.

Exercice 1046 [Mines PC 2024 # 1052] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. Preciser le spectre et les sous-espaces propres.

Exercice 1047 [Mines PC 2024 # 1053]

- Montrer que $\varphi : P \mapsto (X^2-1)P'' + 2XP'$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est symétrique pour le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{+} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

- Déterminer les valeurs propres de φ.
- Montrer qu'il existe une unique base orthonormée de vecteurs propres $(P_0, \ldots, P_n)$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg P_k = k$ et $\langle P_k, X^k \rangle > 0$.
- On pose $Q_k(X) = (-1)^k P_k(-X)$. Montrer que $(Q_0, \ldots, Q_n)$ vérifie les propriétés de -.

Que peut-on en déduire ?

- Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $]-1, 1[$.

Exercice 1048 [Mines PC 2024 # 1054] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\Phi_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\Phi_{a,b} : M \mapsto aM + bM^T$.

- Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\Phi_{a,b}$.
- Déterminer $\mathrm{Tr}(\Phi_{a,b})$ puis son polynôme caractéristique.
- à quelle condition $\Phi_{a,b}$ est-il un automorphisme ? Déterminer alors $\Phi_{a,b}^{-1}$.
- L'endomorphisme $\Phi_{a,b}$ est-il autoadjoint ?

Exercice 1049 [Mines PC 2024 # 1055] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$.

- Montrer que toute valeur propre de A vérifie $\lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ et que A est diagonalisable.
- Montrer que n est multiple de 4.

Exercice 1050 [Mines PC 2024 # 1056] Soient $(E, \langle \quad \rangle)$ un espace euclidien, a et b deux vecteurs libres de E et $f \colon x \in E \mapsto \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$.

- Déterminer le noyau et l'image de f.
- Déterminer les éléments propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Aurait-on pu le prevoir sans étudier les éléments propres ?

Exercice 1051 [Mines PC 2024 # 1057] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X = 0$. Montrer que $\det(A) \geq 0$.

Exercice 1052 [Mines PC 2024 # 1058] Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de spectre $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\|X\|^4 \leq \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle$.
- Montrer que $\langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle \leq \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|X\|^4$.
- Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_0, \ldots, P_n)$ de E telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$ et $\langle P_k, X^k \rangle > 0$.

Exercice 1053 [Mines PC 2024 # 1059] Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$. On note $\alpha(t) \leq \beta(t) \leq \gamma(t)$ les valeurs propres de $M(t)$.

- Montrer que $\alpha(t) < 0 < \beta(t) < 2 < \gamma(t)$.
- Montrer que, lorsque $t \to +\infty$, $\alpha(t) \to 0$, $\beta(t) \to 2$ et que $\gamma(t) = t + O\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Exercice 1054 [Mines PC 2024 # 1060] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est antisymétrique si et seulement si pour toute $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice $P^{-1}MP$ est à diagonale nulle.

Exercice 1055 [Mines PC 2024 # 1061] Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\sum_{i,j} m_{i,j}^2 = n, \quad \left| \sum_{i,j} m_{i,j} \right| \leq n, \quad n \leq \sum_{i,j} |m_{i,j}| \leq n \ln(n).$$

Exercice 1056 [Mines PC 2024 # 1062] Soient E un espace euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux. On considére $h = p \circ q$.

- Montrer que $\mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par h.
- Montrer que p et q sont autoadjoints.
- On pose $F = \mathrm{Im}(q) + \mathrm{Ker}(p)$. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$. En déduire que h est diagonalisable.
- Montrer que le spectre de h est contenu dans le segment $[0, 1]$.

Exercice 1057 [Mines PC 2024 # 1063] Soient $n \geq 2$, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe une matrice C telle que $C^2 = A^{-1}$.
- Montrer, en posant $D = CBC$, que $(\det(I_n + D))^{\frac{1}{n}} \geq 1 + (\det D)^{\frac{1}{n}}$.
- En déduire que $(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 1058 [Mines PC 2024 # 1064] Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$. Étudier l'unicité d'une telle décomposition.

Exercice 1059 [Mines PC 2024 # 1065] Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $ABA = B$ et $BAB = A$.

- Montrer que $A^2 = B^2$.
- On suppose que A est inversible. Montrer que A et B sont des symétries orthogonales qui commutent.
- On ne suppose plus que A est inversible. Montrer que $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, B$ et $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$.

2) Analyse

Exercice 1060 [Mines PC 2024 # 1066] Les parties $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x^2(x-1)(x-3) + y^2(y^2-4) = 0\right\}$ et $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ 2x^2 - y(y-1) = 0\right\}$ sont elles fermées ? bornées ?

Exercice 1061 [Mines PC 2024 # 1067] Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ et un ouvert Ω dense dans E tels que $\forall x \in \Omega$, $\frac{\|u^{k+1}(x)\|}{\|u^k(x)\|} \xrightarrow[k\to+\infty]{} m$.

Exercice 1062 [Mines PC 2024 # 1068]

- Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $\{Q(A) \ ; \ Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que B à n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = Q(A)$.
- Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que $\{Q(A) \ ; \ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$ est une partie dense de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Cet ensemble est-il ferme ? borne ?

Exercice 1063 [Mines PC 2024 # 1069] Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles convergeant vers a et b respectivement. Montrer que $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ab$.

Exercice 1064 [Mines PC 2024 # 1070] Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle définie par $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = nu_n - 1$. Montrer que $u_1 = e - 1$ si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $u_n = O(n^a)$.

Exercice 1065 [Mines PC 2024 # 1071] Pour n et p dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{1}{p^n}\left(\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{p}} + \sqrt[n]{1+\dfrac{2}{p}} + \cdots + \sqrt[n]{1+\dfrac{p}{p}}\right)^n$.

- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}$.
- Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,p}$.

Exercice 1066 [Mines PC 2024 # 1072] On pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^n \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$ et $x_n = \min\{t > 0, \ S_n(t) = 0\}$.

- Montrer que x_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Étudier les variations et la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1067 [Mines PC 2024 # 1073] Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $x_0 > 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^{-1}$. Montrer que $x_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 1068 [Mines PC 2024 # 1074] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n la solution de $e^x = n - x$. Limite, équivalent et développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 1069 [Mines PC 2024 # 1075] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de la série de terme general $u_n = n^\alpha \prod_{k=1}^n \left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$?

Exercice 1070 [Mines PC 2024 # 1076] Nature de la série de terme general $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^n}$.

Exercice 1071 [Mines PC 2024 # 1077] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k}$, $H_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k}$, $u_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{(-1)^k \ln k}{k}$, $v_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{\ln k}{k}$ et $w_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{\ln(2k)}{k}$.

- Montrer que (x_n) converge vers un réel ℓ à déterminer. Montrer que $x_n = \ell + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
- Exprimer u_{2n} en fonction de v_{2n} et w_n.
- Montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
- Établir la convergence de (u_n) et preciser sa limite.

Exercice 1072 [Mines PC 2024 # 1078] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $a_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 2$, $a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor}$. Montrer que $\sum \dfrac{1}{a_n^2}$ converge.

Exercice 1073 [Mines PC 2024 # 1079] Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $f' \leq 0$ et $f(0) = 1$. On pose $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n f(a_n)$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decroit et tend vers 0. Étudier la nature de la série $\sum a_n$.

Exercice 1074 [Mines PC 2024 # 1080] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ et $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Exercice 1075 [Mines PC 2024 # 1081] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n^{(0)} = \frac{(-1)^n}{n}$, $R_n^{(1)} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ et pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, $R_n^{(\ell)} = \sum_{k=n}^{+\infty} R_k^{(\ell-1)}$. Justifier l'existence et étudier le signe de $R_n^{(\ell)}$. Ind. Calculer $\int_0^1 t^k \, \mathrm{d}t$.

Exercice 1076 [Mines PC 2024 # 1082] Soit f une fonction continue et injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
En considérant $g_x : t \mapsto f(x+t) - f(x)$ montrer que f est strictement monotone.

Exercice 1077 [Mines PC 2024 # 1083] Déterminer les applications $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que l'image de tout segment est un segment de même longueur.

Exercice 1078 [Mines PC 2024 # 1084] Soit $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ telle que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^p)^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que f est continue si et seulement si f est linéaire.

Exercice 1079 [Mines PC 2024 # 1085] Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.

Exercice 1080 [Mines PC 2024 # 1086] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $(*)\colon \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\,(x+y)\,f\,(x-y) = (f\,(x)\,f\,(y))^2$.

- Donner toutes les valeurs que peut prendre $f\,(0)$.
- Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f\,(x_0) = 0$, on a $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$. En déduire que si f s'annule en un point, f est identiquement nulle.
- Trouver toutes les fonctions continues vérifiant $(*)$.

Exercice 1081 [Mines PC 2024 # 1087] Soient f, g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f\,(x) = g\,(x)$.

Exercice 1082 [Mines PC 2024 # 1088] Soit f : $[0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable et non nulle pour laquelle il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $f'\,(x) \le Mf\,(x)$. Montrer que f ne s'annule pas.

Exercice 1083 [Mines PC 2024 # 1089] Montrer que $x \mapsto \cos(x)$ admet un unique point fixe. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f dérivable telle que $\cos = f \circ f$.

Exercice 1084 [Mines PC 2024 # 1090] Soit f une fonction telle que, pour $0 < x < 1$, $f\,(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$. Trouver $g \in \mathcal{C}^\infty\,(]-\infty,1[)$ telle que $g\,|_{0,1}\,[= f$.

Exercice 1085 [Mines PC 2024 # 1091] Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b]\,,\mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $x \in\,]a,b[$ tel que $f'(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$.

Exercice 1086 [Mines PC 2024 # 1092] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1+f')^2 \le 1$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 1087 [Mines PC 2024 # 1093] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ telle que $f(0) = 0$. Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Déterminer, pour $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\lim\limits_{x\to 0} g^{(k)}(x)$.

Exercice 1088 [Mines PC 2024 # 1094] Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^a \exp\left(t^2\right) dt = 1$. On définit alors $x \mapsto a\,(x)$. Montrer que a est $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que le graphe de a est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

Exercice 1089 [Mines PC 2024 # 1095] Trouver un équivalent simple en 0 de $f : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \dfrac{e^t}{\arcsin t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1090 [Mines PC 2024 # 1096] Calculer $\int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \tan(x)\right) dx$.

Exercice 1091 [Mines PC 2024 # 1097] Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1]\,,\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Déterminer la limite de (nU_n).

Exercice 1092 [Mines PC 2024 # 1098] Soit $f\colon$ $[0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$ pour $0 \le k \le n$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]0,1[$.

Exercice 1093 [Mines PC 2024 # 1099] Soit x un nombre complexe de module différent de 1. Calculer $I = \int_0^{2\pi} \dfrac{dt}{x - e^{it}}$:

- en utilisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$,
- par une autre methode.

Exercice 1094 [Mines PC 2024 # 1100] Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b]\,,\mathbb{R}^{+*})$. On pose $m = \inf\limits_{[a,b]} \dfrac{f}{g}$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} \dfrac{f}{g}$. Montrer que $\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \le \dfrac{(M+m)^2}{4Mm}\left(\int_a^b fg\right)^2$.

Exercice 1095 [Mines PC 2024 # 1101] Soient $c \in \mathbb{R}$, u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^+$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u\,(x) \le c + \int_0^x v\,(t)\,u\,(t)\,dt$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u\,(x) \le c\exp\left(\int_0^x v\,(t)\,dt\right)$.

Exercice 1096 [Mines PC 2024 # 1102] Montrer qu'il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}^1\,(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π-périodique, on ait $\sup_{\mathbb{R}} |f| \le A\int_0^{2\pi} |f| + B\int_0^{2\pi} |f'|$. L'inégalité subsiste-elle si on enleve une hypothese.

Exercice 1097 [Mines PC 2024 # 1103] On considére une fonction f : $[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'on dispose de $x_0 \in]a,b[$, $y_0 > f(x_0)$ et qu'un cercle C de centre (x_0,y_0) passant par $(x_0, f(x_0))$ est au-dessus du graphe de f. Montrer que $f'(x_0) = 0$.

Exercice 1098 [Mines PC 2024 # 1104] Soit M : $t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{-t} & (t-1)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que l'application N : $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \sup_{1\le i,j\le 2} |a_{i,j}|$ est une norme.

Déterminer $\varphi(t) = N(M(t))$ et tracer le graphe de φ. La fonction φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

- Déterminer la primitive Φ de φ telle que $\Phi(0) = 0$. Φ est-elle $\mathcal{C}^1$?
- Soit F la primitive de M telle que $F(0) = 0$. Prouver $\forall t \ge 0, N(F(t)) \le \Phi(t)$.

Exercice 1099 [Mines PC 2024 # 1105] Nature de l'intégrale $\$\{\int_0^{+\infty\frac{\sin(x)}{\{}\sqrt{x}+\sin}(x)\}\}\$dx$?

Exercice 1100 [Mines PC 2024 # 1106] Pour $\alpha > 0$ déterminer la nature de $\int_0^{+\infty}\left(1+\ln(\operatorname{sh} x^{\alpha}) - 2\operatorname{sh}(\ln(x^{^{\alpha}}+1))\right)dx$.

Exercice 1101 [Mines PC 2024 # 1107] Nature de $\int_1^{+\infty}\frac{\ln|1-x|\cos(\ln(x))}{x^{\alpha}(1+x)}dx$ et $\int_0^1\frac{\ln|1-x|\cos(\ln(x))}{x^{\alpha}(1+x)}dx$?

Exercice 1102 [Mines PC 2024 # 1108] Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}|\sin x|^x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1103 [Mines PC 2024 # 1109] Existence et calcul des intégrales $I=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1104 [Mines PC 2024 # 1110] On considére $E=\{f\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0)=f(1)=0\}$. Soit $f\in E$.

- Montrer que $I(f)=\int_0^1\frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)}f'(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie, et que

$I(f)=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{f(t)^2}{\sin(\pi t)^2}\,\mathrm{d}t$

- En considérant $\int_0^1\left(\pi\frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)}f(t)-f'(t)\right)^2\mathrm{d}t$, montrer que

$\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\geq\pi^2\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$.

- Déterminer les fonctions f pour lesquelles il y a égalité dans -.

Exercice 1105 [Mines PC 2024 # 1111] Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t\mapsto e^{-(t-p\pi)^2}\sin(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale est nulle.

Exercice 1106 [Mines PC 2024 # 1112] Existence et calcul de $\int_0^{+\infty}e^{-t}\left(\ln(t)-\frac{1}{t}+\frac{1}{1-e^{-t}}\right)dt$.

Exercice 1107 [Mines PC 2024 # 1113] Soit $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue, positive, décroissante et telle que $\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $tf(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Ind. Considérer $\int_t^{2t}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1108 [Mines PC 2024 # 1114] Soit $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\int_0^{+\infty}f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty}t^2f(t)^2\,\mathrm{d}t$ convergent. Montrer que $\int_0^{+\infty}f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge et que

$$\int_0^{+\infty}f(t)^2\,\mathrm{d}t\leq\left(\int_0^{+\infty}f^{'}(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty}t^2f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Exercice 1109 [Mines PC 2024 # 1115] Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $A_n(x)=\sum_{k=1}^n\frac{x^k}{k}$.

- Montrer que, pour tout $y\geq 0$, il existe un unique $x\geq 0$ tel que $A_n(x)=y$. On pose $f_n(y)=x$.
- Étudier la monotonie de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer que la suite converge simplement vers une fonction f.
- Montrer que $\forall x\geq 0, 0\leq f(x)<1$.
- Montrer que $\forall x\geq 0, f(x)=1-e^{-x}$.

Exercice 1110 [Mines PC 2024 # 1116] Soit $f:x\mapsto\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)$.

- Montrer que f est bien définie sur $[\,0\,;1\,]$.
- Montrer que f est continue et intégrable sur $[\,0\,;1\,]$.
- Calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Montrer que f est dérivable. Est-elle de classe $\mathcal{C}^k$?

Exercice 1111 [Mines PC 2024 # 1117] Soit $f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x^2}$.

- Déterminer le domaine de définition et de continuité de f.
- Déterminer la limite de f et un équivalent en $+\infty$.
- Déterminer la limite de f et un équivalent en 0.

Exercice 1112 [Mines PC 2024 # 1118] Soit $F:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-n^2x^2}$. Déterminer les limites et équivalents de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 1113 [Mines PC 2024 # 1119] Soit $f:x\mapsto\dfrac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n-x)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+x)^2}$.

On note $(*)$ la propriété : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, g\left(\dfrac{x}{2}\right)+g\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=4g\left(x\right)$.

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et 1-périodique.
- Montrer que f vérifie $(*)$.
- Montrer que, si g est continue sur $\mathbb{R}$, 1-périodique et vérifie $(*)$ alors g est nulle.
- Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $f\left(x\right)=\dfrac{\pi^2}{\sin^2\left(\pi x\right)}$.

Exercice 1114 [Mines PC 2024 # 1120] Preciser le domaine de définition de $f:x\mapsto\sum_{n\geq 0}e^{-n}e^{in^2x}$. Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$. Est-elle développable en série entière ?

Exercice 1115 [Mines PC 2024 # 1121] Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum e^{-x}\dfrac{x^k}{k!}$.

Exercice 1116 [Mines PC 2024 # 1122] Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $u_n(x) = x^\alpha e^{-n^2 x}$ puis $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- Montrer que f_α est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Trouver les α pour lesquels la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Trouver la limite puis un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
- Trouver la limite puis un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 1117 [Mines PC 2024 # 1123] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$.
Trouver f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

Exercice 1118 [Mines PC 2024 # 1124] Soit $f : x \in]-1, 1[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 1119 [Mines PC 2024 # 1125] On s'intéresse à la série entière suivante : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ avec $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t$.

- Déterminer la limite de la suite (u_n).
- Déterminer le domaine de convergence de la série entière.
- Déterminer la limite de f à la borne de droite du domaine de convergence.

Exercice 1120 [Mines PC 2024 # 1126] Soit N un entier qui n'est pas un carré parfait. On pose $a = \sqrt{N}$.

- Montrer qu'il existe une suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $na - p_n \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.
- Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(na\pi) > cn^{-1}$. - En déduire le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\sin(n\pi\sqrt{2})}$.

Exercice 1121 [Mines PC 2024 # 1127] On pose $b_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = -\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k} b_k$.

- Montrer que, pour tout n, $|b_n| \leq n!$.
- Pour $|z| < 1$, montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = \frac{z}{e^z - 1}$.
- Montrer que $x \mapsto \operatorname{cotan}(x) - \frac{1}{x}$ est développable en série entière.
- Quel est le lien entre les deux dernieres questions ? On pourra poser $z = 2i\pi x$.

Exercice 1122 [Mines PC 2024 # 1128] Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

- Déterminer le rayon de convergence R de S. Montrer que S est solution de l'équation différentielle $x(x-4)y' + (x+2)y = 2$.
- En déduire $S(x)$ pour tout $x \in]0, R[$.
- Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$

Exercice 1123 [Mines PC 2024 # 1129] Montrer qu'il existe une fonction φ développable en série entière en 0 vérifiant au voisinage de 0 : $\varphi'(x) = x + \varphi^2(x)$.

Exercice 1124 [Mines PC 2024 # 1130] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$.

- Que dire de I_n ?
- Montrer que (I_n) et (J_n) convergent vers la même limite. Trouver cette limite.

Exercice 1125 [Mines PC 2024 # 1131] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt[n]{1+t^n}}$. Montrer que chaque intégrale I_n est convergente puis déterminer la limite de la suite (I_n).

Exercice 1126 [Mines PC 2024 # 1132] Pour $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+\cdots+t^n}$.
Justifier que I_n existe puis déterminer un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 1127 [Mines PC 2024 # 1133] Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

- Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer I_n et $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
- Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$.
- Donner un développement asymptotique à deux termes de I_n.

Exercice 1128 [Mines PC 2024 # 1134] Soient $a > -1$ et $b > 0$. On définit les suites (I_n) et (J_n) par $J_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx}\,\mathrm{d}x$ et $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^a e^{-nx}}{\sqrt{1+x^b}}\,\mathrm{d}x$.

- Étudier l'existence de J_n et en déduire celle de I_n.
- Déterminer la limite de (J_n).
- Exprimer J_n à l'aide de la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et retrouver ainsi la limite de la suite.
- Déterminer un équivalent de I_n à l'aide de J_n.

Exercice 1129 [Mines PC 2024 # 1135] Montrer : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+kp}$. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+2k}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k}$.

Exercice 1130 [Mines PC 2024 # 1136] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

- Déterminer la limite de (I_n).
- Justifier l'existence de $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.
- Montrer que $I_n \sim \frac{J}{n}$.
- Montrer que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Exercice 1131 [Mines PC 2024 # 1137] • Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

- On pose $J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I = 2J$.
- Exprimer J à l'aide de la somme d'une série.
- On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer J.

Exercice 1132 [Mines PC 2024 # 1138] On considére $J = \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que J est bien définie et que $J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$. En déduire la valeur de J.

Exercice 1133 [Mines PC 2024 # 1139] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} t}{t} e^{-xt} dt$.

- Déterminer le domaine de définition et la limite en $+\infty$ de F.
- Donner une expression simple de $F(x)$.

Exercice 1134 [Mines PC 2024 # 1140] Étudier $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} dt$.

Exercice 1135 [Mines PC 2024 # 1141] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

- Montr are F est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
- Montr are F est dérivable et calculer F'.
- En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t^2)}{t^2} dt$.

Exercice 1136 [Mines PC 2024 # 1142] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - a^{-bt}}{t} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$, ou $0 < a < b$.

- Montr are que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$.
- Montr are qu'il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right) + C$.
- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et conclure quant à la constante C.

Exercice 1137 [Mines PC 2024 # 1143] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-|x-t|}\, dt$.

- Montr are g est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée.
- Montr are que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle $(*) : y'' - y = f(x)$.
- Soit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et bornée sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation $(*)$. A-t-on $g=h\,$?

Exercice 1138 [Mines PC 2024 # 1144] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \mathrm{e}^{-t} dt$. Trouver le domaine de définition de F et exprimer F sans le signe intégral.

Exercice 1139 [Mines PC 2024 # 1145] Soit $F : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{x+1}} dt$.

- Déterminer le domaine de définition de F.
- Montr are F.
- Pour $x \geq 1$, donner l'expression de $F(x)$.

Exercice 1140 [Mines PC 2024 # 1146] Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^1 \ln(t) \ln(1-t^x)\, dt$.

- La fonction f est-elle bien définie ?
- Écrire f comme la somme d'une série.
- Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 1141 [Mines PC 2024 # 1147] Pour $x > 0$, on pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t+t^2}} dt$.

- Calculer $F'(x)$.
- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$, puis déterminer un équivalent de F en $+\infty$. - Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = +\infty$, puis déterminer un équivalent de F en 0.

Exercice 1142 [Mines PC 2024 # 1148] Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^{+*})$. Pour $x > 0$, on pose $N_f(x) = \left(\int_0^1 f(t)^x\,\mathrm{d}t\right)^{1/x}$.

- Montrer que N_f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Déterminer la limite de $N_f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
- Déterminer la limite $\dfrac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)^x\,\mathrm{d}t - 1\right)$ lorsque $x \to 0^+$.
- Déterminer la limite de $N_f(x)$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 1143 [Mines PC 2024 # 1149] Soit f une fonction continue de $[a,b] \times [c,d]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right) dy$.

Ind. Considérer $g : t \mapsto \int_a^b \left(\int_c^t f(x,y)dy\right) dx$.

Exercice 1144 [Mines PC 2024 # 1150] Soit $(E) : x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$.

- Trouver les solutions de (E) développables en série entière et déterminer leur rayon de convergence.
- Écrire ces fonctions à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 1145 [Mines PC 2024 # 1151] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) > 0$. Soit $x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : (i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x'(t) = Ax(t)$, (ii) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = 0$.
Montrer qu'il existe une forme linéaire $\ell \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non nulle telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\ell(x(t)) = 0$.

Exercice 1146 [Mines PC 2024 # 1152] On définit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $u \in E$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on considére le systeme d'équations différentielles $(L) \colon \forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall t \in [0,1], x_i'(t) = \lambda_i x_i(t) + u(t)$.

- Résoudre le systeme (L).
- Pour $i \in [\![1, n$, on note $\varphi_i(u)$ la valeur en $t = 1$ de la solution de la i-eme équation de (L) qui s'annule en $t = 0$. On note $\Phi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$. Montrer que, pour tout $i \in 1, n]\!]$, $\varphi_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et que $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$.
- Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on définit un élément de F en posant $f_i : s \mapsto e^{\lambda_i(1-s)}$. Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 1147 [Mines PC 2024 # 1153] Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Déterminer f.

Exercice 1148 [Mines PC 2024 # 1154] Déterminer les extrema de $f(x,y) = x\ln y - y\ln x$ pour $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

Exercice 1149 [Mines PC 2024 # 1155] Trouver les extrema de $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

3) Probabilités

Exercice 1150 [Mines PC 2024 # 1156] Une poite contient n boules numérotées de 1 à n. On tire des boules, une à une, avec remise, tant que le numéro de la boule tirée est supérieur au précédent. On note Z le nombre de boules tires. Déterminer la loi de Z.

Exercice 1151 [Mines PC 2024 # 1157] Une urne contient deux boules. L'une est blanche et l'autre est soit blanche soit noire avec probabilité $1/2$. On tire successivement deux boules de l'urne sans remise. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au second tirage sachant qu'on a tire une boule blanche au premier tirage ?

Exercice 1152 [Mines PC 2024 # 1158] Soient $a \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $N = an$. On dispose de N boules indiscernables et n unres numérotées de 1 à n. On dépose les N boules dans les unres. On note T_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i est vide, et 0 sinon. On note Y_n le nombre d'urnes vides et $S_n = \dfrac{1}{n}Y_n$.

- Donner la loi de T_i. Calculer l'espérance et la variance de T_i.
- Calculer l'espérance et la variance de S_n. Étudier les limites de $(\mathbf{E}(S_n))$ et $(\mathbf{V}(S_n))$.

Exercice 1153 [Mines PC 2024 # 1159] Une panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une à une, on s'arrête lorsqu'on a mange toutes les pommes vertes. Déterminer la probabilité d'avoir mange toutes les pommes.

Exercice 1154 [Mines PC 2024 # 1160] On repartit N objets dans $N-1$ boites. Probabilité pour qu'aucune boite ne soit vide ?

Exercice 1155 [Mines PC 2024 # 1161] La durée de vie (en jours) d'une ampoule suit la loi géométrique de paramêtre $\dfrac{1}{2}$.

- Quelle est la durée de vie moyenne de cette ampoule ?
- L'ampoule à deja vecu n jours. Quelle est la durée de vie moyenne de cette ampoule à partir du n-eme jour ?

Exercice 1156 [Mines PC 2024 # 1162] On considére deux des et, pour $i \in [\![1, 6]\!]$, on note p_i (respectivement q_i) la probabilité que le premier de (respectivement le second de) donne le résultat i. On note P et Q les fonctions generatrices des deux des. On note R la fonction generatrice de la somme des deux des.

- Donner R.
- On suppose d'orenavant que R est egale à la fonction generatrice de la somme de deux des non pipes.
- Quelles sont les racines de R ?
- Montrer que les deux des ne sont pas pipes.

Exercice 1157 [Mines PC 2024 # 1163] Dans un magasin, on a n caisses et np clients. Chaque client choisit une caisse de facon indépendante et avec la même probabilité pour chacune des caisses. On note X_i le nombre de clients à la caisse numéro i.

- En écrivant X_i comme une somme de variables aléatoires indépendantes, déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i.
- Pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

Exercice 1158 [Mines PC 2024 # 1164] Soient A et B deux évènements. Montrer que $|\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)| \leq \dfrac{1}{4}$.

Exercice 1159 [Mines PC 2024 # 1165] Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X sachant $(Y = n)$ est la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

- Montrer que $Y + 1 - X$ et X ont même loi.
- On suppose X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Montrer que X et $Y + 1 - X$ sont indépendantes.

Exercice 1160 [Mines PC 2024 # 1166]

- On munit l'ensemble des fonctions $f\colon [\![1,n \to 1,n-1]\!]$ de la loi uniforme. Déterminer la probabilité pour que f soit surjective.
- Même question avec $f\colon [\![1,n \to 1,n-2]\!]$.

Exercice 1161 [Mines PC 2024 # 1167] Soient U une variable aléatoire discrete, n et ℓ deux entiers naturels tels que $n \geq \ell+3$ et $\mathbf{P}\left(U>n\right)\mathbf{P}\left(U>\ell\right)>0$. On pose $Y=\left\lfloor \frac{U}{2}\right\rfloor$ et $Z=\left\lfloor \frac{U+1}{2}\right\rfloor$.

- Montrer que Y et Z ne sont pas indépendantes.
- On suppose que $U \sim \mathcal{B}\left(n,p\right)$ avec $n \geq 4$ pair. Montrer que Y ne suit pas une loi binomiale.

Exercice 1162 [Mines PC 2024 # 1168] Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $|Z|+1 \sim \mathcal{G}(p)$ et telle que $\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}(Z=n)=\mathbf{P}(Z=-n)$. Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & Z & Z \\ Z & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer la loi du rang de A.
- Déterminer la probabilité pour que A soit diagonalisable.

Exercice 1163 [Mines PC 2024 # 1169] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramêtres p et q respectivement. En notant $M=\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, donner la probabilité pour M soit diagonalisable.

Exercice 1164 [Mines PC 2024 # 1170] Soit $M=(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice aléatoire réelle ou les $(1+X_{i,j})$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$.

- Déterminer la probabilité que M soit symétrique.
- Déterminer la probabilité que M soit orthogonale.

Exercice 1165 [Mines PC 2024 # 1171] Soit a un réel. On pose $g : t \mapsto \frac{a\,e^t}{2-t}$.

- Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont g soit la fonction generatrice.

On suppose maintenant que a est egal à cette valeur et que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont g est la fonction generatrice.

- Trouver la probabilité que X soit pair.
- Quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & X & 0 \\ -X & -X & 0 \\ X & X & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 1166 [Mines PC 2024 # 1172] Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$. On suppose que $X \leq Y$, que $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Y=i)>0, \forall 1 \leq k \leq i, \mathbf{P}(X=k|Y=i)=\dfrac{1}{i}$. Montrer que X et $Y-X+1$ ont la même loi.

Exercice 1167 [Mines PC 2024 # 1173] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramêtre $p \in]0,1[$. On pose $M=(X_iX-1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

- Déterminer la loi du rang de M, de la trace de M.
- Quelle est la probabilité que M soit un projecteur ?

Exercice 1168 [Mines PC 2024 # 1174] Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n$, $\mathbf{P}\left(T>n\right)>0$. Pour tout entier naturel n, on pose $\theta_n=\mathbf{P}\left(T=n\,|\,T\geq n\right)$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n \in [0,1[$.
- Exprimer θ_n en fonction de $\mathbf{P}\left(T\geq n\right)$. En déduire que $\sum\theta_n$ diverge.

Exercice 1169 [Mines PC 2024 # 1175] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1]$.

- Soit U une variable aléatoire telle que $U \sim \mathcal{B}\left(n,p\right)$. Déterminer la fonction generatrice de U.
- Soient Y et Z deux variables aléatoires dicretes indépendantes telles que $U=Y+Z$ et $U \sim \mathcal{B}\left(n,p\right)$. Montrer que Y et Z suivent des lois binomiales (pas nécessairement de memes paramêtres).

Exercice 1170 [Mines PC 2024 # 1176]

- Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1\,;1\,[$. Montrer que $\sum_{n=r-1}^{+\infty}\binom{n}{r-1}x^{n-r+1}=\dfrac{1}{(1-x)^r}$.
- Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Soit X le rang du r-eme succès. Quelle est la loi de X ? Déterminer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(X(X+1))$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 1171 [Mines PC 2024 # 1177] Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramêtre λ.

- Montrer que $\mathbf{P}(X \geq \lambda+1) \leq \lambda$.
- Montrer que $\mathbf{P}\left(X \leq \dfrac{\lambda}{3}\right) \leq \dfrac{9}{4\lambda}$.

Exercice 1172 [Mines PC 2024 # 1178] Soient X et Y deux variables aléatoires discretes à valeurs strictement positives indépendantes et suivant la même loi. Montrer que $\mathbf{E}(X/Y) \geq 1$.

Exercice 1173 [Mines PC 2024 # 1179]

- Montrer qu'il existe une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y=n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

- Si $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ est un variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on définit le$_{\text{taux}}$ de defaillance_ de X pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geq n)$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)$.
- En déduire $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction des x_k pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Quelle variable aléatoire admet un taux de defaillance constant à partir du rang 1 ?
- Calculer le taux de defaillance de la variable Y introduite à la première question.

Exercice 1174 [Mines PC 2024 # 1180] Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, 1[$ tel que la série $\sum p_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit X_n une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p_n. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} X_k$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer l'évènement $(S \geq k)$ à l'aide des évènements $(S_n \geq k)$. En déduire que S est une variable aléatoire.
- Montrer que S est presque-surement finie.
- Montrer que S admet une espérance et la calculer.

Exercice 1175 [Mines PC 2024 # 1181] Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi géométrique de paramètre p.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

- Montrer que $\mathbf{E}(M_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 - (1 - q^k)^n$ ou $q = 1 - p$.
- Soit $f_n : t \mapsto 1 - (1 - q^t)^n$. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donner un équivalent de $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$.
- En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(M_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

XI) Centrale - MP **CENT**

1) Algèbre

Exercice 1176 [Centrale MP 2024 # 1182] Un entier $n \geq 2$ est un faux premier (FP) s'il n'est pas premier et si, pour tout $a \in \mathbb{Z}$ premier à n, $a^{n-1} \equiv 1\ [n]$.

- Montrer que, si n est FP, n est impair.
- On suppose que n s'écrit $\prod_{i=1}^{r} p_i$ ou $r \geq 2$, les p_i sont des nombres premiers impairs distincts tels que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $p_i - 1$ divise $n - 1$. Montrer que n est FP.
- On admet que, pour tout p premier impair et tout $v \in \mathbb{N}^*$, le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p^v\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. En déduire la réciproque de la question précédente.

Exercice 1177 [Centrale MP 2024 # 1183] Soient G un groupe admettant un nombre fini de generateurs, H un groupe fini, $f : G \to G$ un morphisme de groupes surjectif et $g : G \to H$ un morphisme de groupes.

- Montrer que l'ensemble des morphismes de groupes de G vers H est fini.
- Soit $a \in \operatorname{Ker} f$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $b_n \in G$ tel que $f^n(b_n) = a$, puis calculer $g \circ f^m(b_n)$ pour tout $m > n$.
- Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.
- On pose $\Gamma = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\ \det M = 1\}$. Montrer que Γ est un groupe, engendre par les matrices $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Montrer que tout endomorphisme surjectif de Γ est bijectif.

Exercice 1178 [Centrale MP 2024 # 1184] On note $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1. Soit q un entier ≥ 2 fixe. On pose $H_q = \left\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \exists n \in \mathbb{N},\ z^{q^n} = 1\right\}$.

- Montrer que H_q est un sous-groupe dense de $\mathbb{U}$.
- Soit f un endomorphisme du groupe H_q, continu en 1. Montrer que f se prolonge de maniere unique en un endomorphisme continu $\overline{f}$ du groupe $\mathbb{U}$.
- En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) = z^m$ pour tout $z \in H_q$.

Exercice 1179 [Centrale MP 2024 # 1185]

- Rappeler, pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, la définition de $P \circ Q$ et preciser le degré de de ce polynôme.
- Montrer que seuls les polynômes de degré 1 possèdent un inverse pour la loi $\circ$.
- On pose $P = X^2 + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe au plus un polynôme de degré n qui commute avec P.

Exercice 1180 [Centrale MP 2024 # 1186]

- Soit I un idéal de $\mathbb{Q}[X]$ distinct de $\{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme $\mu \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $I = \mu\mathbb{Q}[X]$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $I_\lambda = \{P \in \mathbb{Q}[X],\ P(\lambda) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irreductible. Montrer que les racines complexes de P sont simples.
- Soient $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ racine de P avec multiplicité $m > \dfrac{\deg P}{2}$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Exercice 1181 [Centrale MP 2024 # 1187]

- Rappeler la définition d'une $\mathbb{K}$-algèbre et d'un endomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre.
- Soit φ un endomorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}(X)$. Montrer que $\varphi(X) \neq 0$.
- Déterminer les endomorphismes de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}(X)$.

- Déterminer les automorphismes de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 1182 [Centrale MP 2024 # 1188] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$. Soit $E = \{[A, B], (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2\}$.

- Montrer que $\operatorname{tr}(M) = 0$ pour toute matrice $M \in E$.
- Montrer que l'ensemble E est stable par similitude matricielle et par multiplication par un scalaire.
- Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
- Montrer que E est egal à l'ensemble des matrices de trace nulle.

Exercice 1183 [Centrale MP 2024 # 1189] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, $p = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$, $V^G = \{x \in E \,;\, \forall g \in G,\ g(x) = x\}$.

- Montrer que, si $h \in G$, $g \in G \mapsto h \circ g \in G$ est une bijection de G sur lui-meme, puis que p est un projecteur.
- Montrer que $\dim(V^G) = \dfrac{1}{|G|} \sum \operatorname{tr}(g)$.
- Montrer que tout sous-espace V de E stable par tous les éléments de G admet un supplementaire stable par tous les éléments de G. On pourra partir d'un projecteur q de E sur V et considérer $\dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ q \circ g^{-1}$.

Exercice 1184 [Centrale MP 2024 # 1190] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Calculer, en fonction de $\operatorname{tr} u$ et de $\operatorname{tr}(u^2)$, les coefficients de X^{n-1} et de X^{n-2} du polynôme caractéristique de u.
- On suppose u de rang 2.
- Montrer que l'on peut écrire $\chi_u = X^{n-2} P(X)$, ou P est un polynôme de degré 2 dont on precisera les coefficients en fonction de $\operatorname{tr} u$ et $\operatorname{tr}(u^2)$.
- à quelle condition l'endomorphisme u est-il trigonalisable ?

Exercice 1185 [Centrale MP 2024 # 1191] Pour $a \in \mathbb{Z}$, on pose $S_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Donner le lien entre l'inverse d'une matrice carrée inversible et sa comatrice.
- Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ (ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles et dont l'inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$) est un groupe et que $S_a, T_a \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.
- Que vaut $T_b S_a T_b^{-1}$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$?
- Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de polynôme caractéristique $X^2 - 1$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $M = PS_0P^{-1}$ ou $M = PS_1P^{-1}$.

Exercice 1186 [Centrale MP 2024 # 1192] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.

- Cours : lemme des noyaux (avec demonstration).
- Soit u et v deux symétries telles que $u \circ v = -v \circ u$. Montrer que n est pair.
- On pose $n = 2p$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de u et v sont respectivement : $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.
- Quels sont les entiers k pour lesquels il existe des symétries $s_1, \ldots, s_k$ vérifiant :

$\forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2,\ (i \neq j \implies s_i \circ s_j = -s_j \circ s_i)$?

Exercice 1187 [Centrale MP 2024 # 1193]

- Montrer que les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.
- Montrer que, pour $p, q \in \mathbb{Q}$ avec $p \neq q$, il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux dans leur ensemble tels que $p = a/c$ et $q = b/c$.
- Existe-t-il $x, y, z \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que $x^2 + y^2 = 3z^2$?
- Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ symétrique dont $\sqrt{2}$ est valeur propre ?

Exercice 1188 [Centrale MP 2024 # 1194]

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, rappeler la définition des polynômes minimal π_A et caractéristique χ_A.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur π_A pour que A soit trigonalisable.
- Donner la définition et la dimension du sous-espace caractéristique de A associe à la valeur propre λ.
- Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que, si χ_A est scindé, alors χ_{A^k} l'est aussi.
- Trouver un contre-exemple à la réciproque.

Ind. On pourra examiner le cas des rotations.

- On suppose χ_{A^2} scindé à racines dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose : $\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ A^p X = X$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 1189 [Centrale MP 2024 # 1195] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.

- Donner et démontrer la décomposition en éléments simples de P'/P.

En déduire que : $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A),\ \frac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)} = \mathrm{tr}\big((xI_n - A)^{-1}\big)$.

- Pour tous $j \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{C}$, on pose $B_j = \sum_{i=0}^{j} a_i A^{j-i}$ puis $Q(x) = \sum_{j=1}^{n} x^{n-j} B_{j-1}$.

Montrer que $Q(x)(xI_n - A) = \chi_A(x) I_n$ et $\mathrm{tr}\big(Q(x)\big) = \chi_A'(x)$.

- Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $S_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k$. Montrer que : $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\sum_{i=0}^{j} a_i S_{j-i} = (n-j) a_j.$$

Exercice 1190 [Centrale MP 2024 # 1196] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont toutes les racines complexes ont un module majore par 1.
Soit $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in S_n$.
On note $z_1, ..., z_n$ les racines de P eventuellement confondues.

- - Rappeler les relations coefficients-racines pour un polynôme complexe.
- Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], |a_k| \leq \binom{n}{k}$.
- Conclure que S_n est fini.
- Montrer que P est le polynôme caractéristique de la matrice
- - Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ \exists Q_p \in S_n,\ \forall 1 \leq i \leq n, Q_p(z_i^p) = 0$.
- Conclure que les racines non nulles de P sont de module 1.

Exercice 1191 [Centrale MP 2024 # 1197] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier premier impair. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} sont à coefficients entiers.

- Rappeler la définition de la comatrice.
- Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont le déterminant vaut ± 1.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$ et que $A = \frac{1}{p}(M - I_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M = I_n$.
- Déterminer un majorant des cardinaux des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 1192 [Centrale MP 2024 # 1198]

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1. - Pour $a \in \mathbb{Z}$, soient $T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, calculer $T_b S_a {T_b}^{-1}$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $M^2 = I_2$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $PMP^{-1} \in \{S_0, S_1\}$.
- Existe-t-il $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $S_1 = QS_0Q^{-1}$?

Exercice 1193 [Centrale MP 2024 # 1199]

- Rappeler le theoreme de Cayley-Hamilton et le prouver dans le cas diagonalisable. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.
- Montrer que $\chi_A(B)$ et $\chi_B(A)$ sont inversibles.
- Montrer que, pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AD - DB = C$.
- Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables.
- En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les matrices A et B pour que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 1194 [Centrale MP 2024 # 1200]

- Rappeler les définitions de morphisme de groupes et d'ordre d'un élément.

On appelle representation de degré n un morphisme de groupes de $\mathcal{S}_3$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

- Soit f une representation de $\mathcal{S}_3$. Soit σ un élément de $\mathcal{S}_3$. Montrer que $f(\sigma)$ est diagonalisable. Montrer que l'image de f est entièrement déterminée par l'image de la transposition (1 2) et du cycle (1 2 3).
- Donner les representations de degré 1.
- Donner un exemple de representation de degré 3.

Exercice 1195 [Centrale MP 2024 # 1202] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs et telle que la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1.

- Montrer que 1 est valeur propre de M puis que toute valeur propre complexe de M vérifie $|\lambda| \leq 1$.
- On suppose que tous les coefficients diagonaux de M sont strictement positifs. Montrer que 1 est la seule valeur propre de M de module 1.
- Montrer que $\mathrm{Ker}(M - I_n)^2 = \mathrm{Ker}(M - I_n)$.

Exercice 1196 [Centrale MP 2024 # 1203] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On designe par μ_A son polynôme minimal.

- Montrer que tout idéal de $\mathbb{C}[X]$ est de la forme $P\mathbb{C}[X]$, ou $P \in \mathbb{C}[X]$.
- Pour $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul, on note $\mu_{A,x}$ le generateur unitaire de l'idéal annulateur ponctuel $\{P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)x = 0\}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\mu_{A,x} = \mu_A$. - Soit A une matrice diagonale par blocs dont la diagonale vaut (A_1, A_2) ou A_1 et A_2 sont des matrices de Frobenius (compagnon) et $\chi_{A_1} \wedge \chi_{A_2} = 1$. Montrer que A est semblable à une matrice de Frobenius.

Exercice 1197 [Centrale MP 2024 # 1204] • Définir l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.

- Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = \exp(A)$.
- Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = \exp\big(P(B)\big)$.
- Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $M = I_n + A$ avec A nilpotente. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp\big(P(M)\big)$.

Exercice 1198 [Centrale MP 2024 # 1205] • Justifier la définition de l'exponentielle de matrice.

- Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$.
- Considérons une matrice A diagonalisable. Calculer $\exp(A)$ en utilisant des matrices de passage. Montrer que $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.
- Dans cette question, on admet l'existence et l'unicité de la décomposition de Jordan-Dunford. En notant $D+N$ la décomposition de Jordan-Dunford de A, montrer que la décomposition de $\exp(A)$ est $\exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$.

Exercice 1199 [Centrale MP 2024 # 1206] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

- Montrer que, pour tout hyperplan H de E, il existe $a \in E$ tel que $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$.
- Soit $(x_0, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que $\langle x_i, x_j\rangle = \alpha$ pour tous $i \neq j$, ou α est un réel strictement negatif fixe. Déterminer α.
- Montrer l'existence d'une telle famille.

Exercice 1200 [Centrale MP 2024 # 1207] Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(E, \langle\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On considére une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et deux familles $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ d'éléments de E. On note respectivement A et B les matrices representatives des familles précédentes dans la base $\mathcal{B}$.

- Exprimer les coordonnées et la norme d'un vecteur x de E à l'aide des éléments de $\mathcal{B}$.
- Explorer les coefficients de A, B et A^TB à l'aide de produits scalaires.
- On suppose ici que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E. D'eduire de la question précédente que l'on peut choisir $y_1, \ldots, y_n$ de telle sorte que $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{i,j}$. Montrer que, ainsi choisis, $(y_1, \ldots, y_n)$ est une base de E.
- On suppose ici que :

(i) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\|x_i\| = 1$ et $\forall i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle < 0$,
(ii) $\exists v \in E,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \langle x_i, v\rangle > 0$.
Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E.

Exercice 1201 [Centrale MP 2024 # 1208] • Rappeler le procede d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

- Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure telles que $M = OT$. - Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, C_1,..., C_n ses colonnes. Montrer que $|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n \|C_i\|$. - On suppose que le résultat précédent est vérifie pour des matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec le produit scalaire hermitien $((x_1, \ldots, x_n), (w_1, \ldots, w_n)) \mapsto \sum_{k=1}^n x_i \overline{w_i}$.

Soit $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$. Trouver le maximum et les points realisant le maximum de $f : (z_1, \ldots, z_n) \in \overline{\mathbb{D}}^n \mapsto \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|$.

Exercice 1202 [Centrale MP 2024 # 1209] On note E l'ensemble des fonctions réelles, continues et de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$. - - Définir la notion de fonction intégrable sur $[0, +\infty[$.

- Montrer que, pour $f, g \in E$, fg est intégrable et en déduire que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Pour $(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} fg$.
- Montrer que $\langle\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.
- Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'' \in E$. Montrer que $f' \in E$.
- Exprimer $\langle f', f'\rangle + \langle f, f''\rangle$, $\langle f, f'\rangle$, $\langle f', f''\rangle$ en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.
- On pose $A = \begin{pmatrix} \langle f, f\rangle & \langle f', f\rangle & \langle f'', f\rangle \\ \langle f, f'\rangle & \langle f', f'\rangle & \langle f'', f'\rangle \\ \langle f, f''\rangle & \langle f', f''\rangle & \langle f'', f''\rangle \end{pmatrix}$.

Montrer que $\det(A) \geq 0$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 1203 [Centrale MP 2024 # 1210] Soit E un espace vectoriel euclidien.

- Montrer que toutes les valeurs propres d'une isométrie vectorielle de E sont de module 1.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont toutes les valeurs propres sont de module 1 et vérifiant : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.

Exercice 1204 [Centrale MP 2024 # 1211] Pour tout $t \in\,]-1,1[$, on note $\omega(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$. Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$.

- Montrer que $\langle\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- On pose $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$. Montrer que φ est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer ses valeurs propres.
- Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres de degrés echelonnes.

Exercice 1205 [Centrale MP 2024 # 1212] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 2$ si $i = j$, $a_{i,j} = -1$ si $|i-j| = 1$ ou $|i-j| = n-1$, $a_{i,j} = 0$ sinon.

- Montrer que les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont orthogonaux.
- Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles.
- Montrer que le spectre de A est inclus dans $[0,4]$.
- Lister les valeurs propres de A.

Exercice 1206 [Centrale MP 2024 # 1213] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ I_n + M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

- Montrer que $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe.
- Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \Omega$.

On pose $f : M \in \Omega \mapsto (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$.

- Montrter que, pour tout $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \Omega$, $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $f(f(M)) = M$.
- Montrter que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale J à coefficients diagonaux dans $\{-1,1\}$ telle que $\det(M + J) \neq 0$.

Ind. On pourra faire une récurrence et comparer deux déterminants.

- Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrter qu'il existe une matrice diagonale J à coefficients diagonaux dans $\{-1,1\}$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = Jf(A)$.

Exercice 1207 [Centrale MP 2024 # 1214] Soient A une matrice réelle antisymétrique de taille n et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associe.

- Enoncer le theoreme du rang.
- On suppose A inversible. Montrter que n est pair.
- On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Que dire de f^* ?
- Montrter que A est semblable à une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ ou A'' est inversible.
- En déduire que le rang de A est pair.
- On suppose n pair et l'on prend une autre matrice antisymétrique B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrter que les sous-espaces propres de AB sont de dimension supérieure à 2.

Ind. On pourra commencer par le sous-espace propre associe à la valeur propre nulle.

Exercice 1208 [Centrale MP 2024 # 1215]
- Rappeler la définition d'un matrice symétrique définie positive. Caractérisation a l'aide du spectre ?
- Montrer que l'exponentielle définit une bijection continue de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Montrter que sa réciproque est continue.

Exercice 1209 [Centrale MP 2024 # 1216]
- Rappeler la définition d'une matrice définie positive. Caractérisation a l'aide du spectre ?
- Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Montrter qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$.
- Montrter son unicité. On la note $\sqrt{A}$.

Ind. Considérer les sous-espaces propres de l'endomorphisme canoniquement associe à A.

- Soient A et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrter que l'équation $XA^{-1}X = B$ admet une unique solution dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ qui est : $A\#B = \sqrt{A}\sqrt{\sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}}\sqrt{A}$ (moyenne géométrique de A et B).
- Montrter les relations : $A\#A = A$, $A\#B = B\#A$, $(A\#B)^{-1} = A^{-1}\#B^{-1}$.

Exercice 1210 [Centrale MP 2024 # 1217] Soient E et F des espaces vectoriels euclidiens de dimensions respectives n et m.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrter qu'il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in F$, $\langle u(x), y\rangle_F = \langle x, u^*(y)\rangle_E$.
- Montrter que u^*u est autoadjoint positif. - Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang r. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$, $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $(PMQ)_{i,i} = \sigma_i$ si $i \leq r$, les autres coefficients etant nuls.

Exercice 1211 [Centrale MP 2024 # 1218] Soit E un espace euclidien.

- Soit $s \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe un unique $r \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $s = r^2$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in \mathrm{Ker}(u)^\perp$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
- Montrer que $\forall x, y \in \mathrm{Ker}(u)^\perp$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
- Montrer que u^*u est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(u)^\perp$.

Exercice 1212 [Centrale MP 2024 # 1219]
- Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{sp}(M) \subset \mathbb{R}^+$.
- Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^+)$ c'est-a-dire symétrique à coefficients positifs. Est-ce que toutes les valeurs propres de M peuvent être strictement negatives ? Peut-on trouver M avec une unique valeur propre strictement positive ?
- Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $X_1, \dots, X_n$ une base orthonormée de vecteurs propres associes aux valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $B(\alpha) = \begin{pmatrix} A & \alpha X_n \\ \alpha X_n^T & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ sont valeurs propres de $B(\alpha)$ et exprimer les deux restantes en fonction de λ_n et α.

Exercice 1213 [Centrale MP 2024 # 1220] Soient E un espace euclidien et u, v dans $\mathcal{S}(E)$ avec $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

- Caractériser spectralement le fait que $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

- Montrer qu'il existe un unique $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ u + u \circ w = v$ puis que $w^* = w$.
- A-t-on l'équivalence $v \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow w \in \mathcal{S}^{++}(E)$?

Exercice 1214 [Centrale MP 2024 # 1221]
- Soit $M \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$. Montrer que le spectre de M est inclus dans $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\langle Mx, x\rangle \geq 0$.
- Soient $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telles que $\sum_{i=1}^n M_i^T M_i = I_d$. On pose, pour $X \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$,

$\mathcal{L}(X) = \sum_{i=1}^n M_i^T X M_i$. Montrer que $\mathcal{L}$ préserve le caractere symétrique positif.

- Donner $p \in \mathbb{N}, \Pi\colon \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ morphisme d'algèbre vérifiant $\Pi\left(X^T\right) = \Pi(X)^T$ et $V \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ vérifiant $V^T V = I_d$ tels que $\forall X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(X) = V^T \Pi(X) V$.

Pour $M, N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on note $M \geq N$ si et seulement si $M - N$ est symétrique positive.
- Montrer $\mathcal{L}\left(X^T X\right) \geq \mathcal{L}\left(X^T\right) \mathcal{L}(X)$.
- On suppose qu'il existe $\mathcal{K}$ du même type que $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{L} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \mathcal{L} = \mathcal{I}$. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}\left(X^T X\right) = \mathcal{L}\left(X^T\right) \mathcal{L}(X)$.

2) Analyse

Exercice 1215 [Centrale MP 2024 # 1222]
- Formuler et démontrer le cas d'égalité du theoreme des accroissements finis. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines réelles des polynômes de $\mathcal{E}$.
- Montrer que $A \setminus \{0\}$ est stable par $x \mapsto -x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
- Montrer que $A \cap]2, +\infty[= \emptyset$.

Exercice 1216 [Centrale MP 2024 # 1224] Soit $A = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $\|P\|_A = \max_{0 \leq k \leq n} |P(a_k)|$. On pose $d_{n,A} = \inf_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} \|X^n - P\|_A$.
- Montrer que $\| \;\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(b_0, \ldots, b_n)$ de réels tel que $X^n - P = \sum_{k=0}^n b_k \prod_{j \neq k}(X - a_j)$. Montrer que $\sum_{k=0}^n b_k = 1$.
- Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\prod_{j \neq k} |a_k - a_j| \geq \frac{n!}{\binom{n}{k}}$.
- Montrer que $\|X^n - P\|_A \geq \frac{n!}{2^n}$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Calculer $d_{n,A}$.

Exercice 1217 [Centrale MP 2024 # 1225] Soient $a < b$ des réels fixes. On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ de la norme $\| \;\|_\infty$. On fixe enfin un entier $n \geq 0$ et $f \in E$, et on pose $m = d(f, \mathbb{R}_n[X])$.
- On pose $C = \{g \in \mathbb{R}_n[X] \;;\; \|f - g\|_\infty \leq m + 1\}$. Montrer que C est compact et non vide. En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $m = \|f - p\|_\infty$.
- Montrer que l'équation $|f(x) - p(x)| = m$ admet au moins $n + 2$ solutions.
- En déduire que p est unique.

Exercice 1218 [Centrale MP 2024 # 1226] Notons $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme ∞. Pour $f \in \mathcal{C}$, notons $Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$ si $x \in [0, 1[$ et $Af(1) = 0$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ soit convergente. La démontrer.
- Justifier que, pour tout $f \in \mathcal{C}$, Af est correctement définie.
- Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}$, $Af \in \mathcal{C}$.
- Montrer que A est un endomorphisme continu de $\mathcal{C}$; calculer sa norme subordonnée.
- Étudier la dérivabilité de Af pour une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1219 [Centrale MP 2024 # 1227]
- Soient E et E' deux espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}(E, E')$.

Montrer que u est continue sur E si et seulement si elle est continue en 0.
On considére desormais l'espace $E = \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.
Pour φ forme linéaire sur E, on pose $N(\varphi) = \sup\{|\varphi(f)|,\; f \in S_{\| \|_\infty}(0, 1)\} \in [0, +\infty]$.
- Calculer $N(\varphi)$ avec $\varphi : f \mapsto \int_{-1}^0 f - \int_0^1 f$.

Exercice 1220 [Centrale MP 2024 # 1228] Soit (λ_n) une suite de réels positifs strictement croissante telle que $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n \to +\infty$ et la série de terme general $\frac{1}{\lambda_n}$ diverge. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ fixe, on pose $Q_0 : x \mapsto x^m$ et, pour tout n,

$$Q_{n+1} : x \mapsto (\lambda_{n+1} - m)\, x^{\lambda_{n+1}} \int_x^1 Q_n(t)\, t^{-(1+\lambda_{n+1})} dt.$$

- Rappeler le theoreme de Weierstrass.
- Montrer que la suite (Q_n) est bornée sur $[0, 1]$ et que, pour tout n, $\|Q_n\|_\infty \leq \prod_{j=1}^n \left|1 - \frac{m}{\lambda_j}\right|$.

En déduire que (Q_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
- Montrer que, toute fonction continue sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions appartenant à $\mathrm{Vect}\left\{x \mapsto x^{\lambda_n},\; n \in \mathbb{N}\right\}$.

Exercice 1221 [CENTRALE MP 2024 # 1229] • Enoncer et démontrer le theoreme des bornes atteintes.

Soit C une partie convexe compacte non vide d'un espace euclidien E.

- Soit $x \in E$.
- Montrer l'existence et unicité d'un vecteur $p(x) \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - p(x)\|$.
- Soit $y \in C$. Montrer que $y = p(x)$ si et seulement si $\forall c \in C$, $\langle x - p(x), c - p(x) \rangle \leq 0$.
- Montrer que l'application p définie dans ce qui precede est continue.

Exercice 1222 [CENTRALE MP 2024 # 1230] Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$. On munit $\mathbb{C}^n$ d'une norme $\| \ \|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\| \ \|$ d'operateur associe.

- L'application $A \mapsto \rho(A)$ est-elle une norme ?
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$.
- Montrer que, pour toute norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $N(A^k)^{1/k} \to \rho(A)$.

Exercice 1223 [CENTRALE MP 2024 # 1231] On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $\pm\infty$. On munit E de la norme $\| \ \|_\infty$ et on définit $T(f)$ pour tout $f \in E$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x-t|} f(t) dt$$

- Rappeler le theoreme de Heine.
- Montrer que f est uniformément continue.
- Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$ puis que T est continu.
- Déterminer sa norme d'operateur.

Exercice 1224 [CENTRALE MP 2024 # 1232] Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on pose $\|M\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|$.

- Montrer que $\| \ \|$ est une norme et que $\forall A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
- Définir $\exp(A)$ et montrer que $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.
- On pose $K = \max(\|A\|, \|B\|)$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|A^n - B^n\| \leq nK^{n-1}\|A - B\|$.
- Trouver $\lim_{n \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{A/n}\mathrm{e}^{B/n}\right)^n$.

Exercice 1225 [CENTRALE MP 2024 # 1233] • Rappeler la définition de la borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$. - On note X une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite de X convergent vers la borne inférieure de X. Réciproquement, prouver que si une suite de X converge vers un minorant m de X, alors m est la borne inférieure de X.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_\alpha = \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \det(M) \geq \alpha\}$ pour $\alpha > 0$. On souhaite prouver que, si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\inf\limits_{M \in S_\alpha} \mathrm{tr}(AM) = n(\alpha \det(A))^{1/n}$. Prouver ce résultat lorsque $A = I_n$ puis lorsque $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- Est-ce toujours le cas lorsque $\alpha = 0$?

Exercice 1226 [CENTRALE MP 2024 # 1234] On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $[-1, 1]$.

- Montrer la continuité du déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que le déterminant admet un maximum α sur $\mathcal{A}$.
- Montrer que le maximum est atteint en une matrice inversible A de déterminant strictement positif et à coefficients dans $\{-1, 1\}$.
- Montrer que $\alpha \leq n^{n/2}$ avec égalité si et seulement si les colonnes de A sont deux à deux orthogonales pour le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1227 [CENTRALE MP 2024 # 1235] • Montrer que les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont ses convexes.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Γ_n l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\{0, 1\}$. Justifier l'existence de $a_n = \max\limits_{M \in \Gamma_n} \det(M)$ et étudier son comportement quand $n \to +\infty$.
- On note C_n l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $[0, 1]$.

Montrer que $\det(C_n) = [-a_n, a_n]$.

Exercice 1228 [CENTRALE MP 2024 # 1236] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(\omega_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite d-périodique.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $S_n(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda + \omega_k}{k}$.

- Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que, si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.

La réciproque est-elle vraie ?

- Montrer qu'il existe au plus un complexe λ tel que la suite $(S_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- Montrer l'existence de $\Omega, \alpha \in \mathbb{C}$ tels que $S_{(m+1)d}(0) - S_{md}(0) = \frac{\Omega}{md} + \frac{\alpha}{m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)$ quand $m \to +\infty$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que la suite $(S_n(\lambda))$ converge.

Exercice 1229 [CENTRALE MP 2024 # 1237] Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n$ ou $\sum |v_n|$ converge.

- Étudier la convergence de $a_{n+1} - a_n$ ou $a_n = \ln(n^\alpha u_n)$. En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \sim \frac{K}{n^\alpha}$.
- On prend $u_n = n^{-n} n! e^n$. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \sim K\sqrt{n}$.

- On suppose maintenant que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que si $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge, et que si $\alpha < 1$ alors elle diverge.

Exercice 1230 [Centrale MP 2024 # 1238] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $d_n = \operatorname{card}\{p \in [\![1, n]\!] \ ; \ p \mid n\}$.
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on définit $f(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} d_k$.

- Cours : Montrer que $H_n \sim \ln n$.
- Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
- Déterminer le deuxième terme du développement asymptotique de f.

Exercice 1231 [Centrale MP 2024 # 1239] -Enoncer le theoreme de Rolle. -Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$. Montrer que le theoreme reste vrai pour $f : \ ]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable et admettant en a et b une même limite finie. -On définit la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \exp$
-Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} f(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
-Quel est le degré de P_n ? -Que dire du nombre de zéros de $f^{(n)}$?

Exercice 1232 [Centrale MP 2024 # 1240] Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions uniformément continues de A dans $\mathbb{R}$.

- Pour $n = 1$ et A un segment, montrer que $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ si et seulement si $f \in \mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$.
- Montrer que $\mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$ est stable par composition. Est-il stable par produit ?
- Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ et f une fonction continue et T-périodique. Montrer que $f \in \mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$.

Exercice 1233 [Centrale MP 2024 # 1241] Soient E l'espace vectoriel des suites réelles et Δ l'endomorphisme de E défini par : pour $u \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $[\Delta(u)]_n = u_{n+1} - u_n$. -Démontrer le theoreme des accroissements finis. -Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in]n, n+p[$ tel que $[\Delta^p u]_n = f^{(p)}(x)$.

Exercice 1234 [Centrale MP 2024 # 1242] -Soient I un intervalle non vide et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $a \in I$, l'application $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable, de derivée f.
Pour $h > 0$, soit $W_h = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \int_{x+h}^{x+2h} f(t)dt = 2\int_x^{x+h} f(t)dt \right\}$._ -Montrer que, pour tout $h > 0$, W_h est un espace vectoriel de dimension infinie. -Existe-t-il des fonctions non bornées appartenant à W_h ?

Exercice 1235 [Centrale MP 2024 # 1243] On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit la suite (f_n) de fonctions de E par $f_0 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t)dt$.

- s Énoncer le theoreme de derivation terme à terme.
- On se place dans le cas ou f est constante. Montrer que la suite (f_n) et la série $\sum f_n$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$. Y a-t-il convergence uniforme ?
- On revient au cas general.
  - ▷ Montrer la convergence simple de la suite (f_n) et de la série $\sum f_n$.
  - ▷ Montrer que l'application $T : f \in E \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est un automorphisme de l'espace vectoriel E.

Exercice 1236 [Centrale MP 2024 # 1244] Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n(x) = \dfrac{1}{(1+x)\cdots(1+x^n)}$.

- Étudier la convergence simple de (g_n) sur $\mathbb{R}^+$.
- Étudier la convergence uniforme de (g_n) sur $[1, +\infty[$ et sur tout segment.

Exercice 1237 [Centrale MP 2024 # 1245] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n comptes avec multiplicité, $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, $\Lambda(n) = \sum_{d \mid n} \lambda(d)$.

- Montrer que, si m et n sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$ et $\Lambda(mn) = \Lambda(m)\Lambda(n)$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de $\Lambda(n)$.
- Montrer que, si $|z| < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda(n) z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n^2}$.

Exercice 1238 [Centrale MP 2024 # 1246]

- Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, montrer que la suite $\left(\sum_{k=-n}^{n} \dfrac{1}{x-k} \right)_{n \geq 1}$ converge. On note $f(x)$ sa limite.
- Montrer que f est continue et 1-périodique sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, exprimer $f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ en fonction de $f(x)$.
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$.

Exercice 1239 [Centrale MP 2024 # 1247]

- Retrouver le développement en série entière de la fonction $\arctan$ et montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 4\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$.

Montrer que $\left| \pi - S_n + (-1)^n \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} \right) \right| \leq \dfrac{1}{n^3}$.

Exercice 1240 [Centrale MP 2024 # 1248] • Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner $R > 0$ tel que : $\forall x \in \left]-R, R\right[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. Que vaut $\binom{\alpha}{n}$? - Soit $\beta > 0$. Montrer que $p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\beta}{k}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

- Soit $(\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \alpha + \alpha'' \\ n \end{pmatrix} = \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} \begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ q \end{pmatrix}$.
- Soit $0 < x < y$. Montrer que $(x+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n y^{\alpha - n}$.
- Montrer que $2^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix}$ pour tout $\alpha > -1$.

Exercice 1241 [Centrale MP 2024 # 1249] • Soit $\sum a_n z^n$ une série entière qui converge sur $]-\alpha, \alpha[$, avec $\alpha > 0$. Montrer que sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$.

- Est-ce que toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert contenant 0 est développable en série entière au voisinage de 0 ?
- Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert contenant 0. Montrer qu'elle est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si :

Exercice 1242 [Centrale MP 2024 # 1250] Soient $R > 0$ et $\mathcal{A}_R$ l'ensemble des fonctions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développables en série entière de rayon $\geq R$.

- Montrer que $\mathcal{A}_R$ est une $\mathbb{R}$-algèbre pour des lois que l'on precisera.
- Déterminer les morphismes d'algèbre de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit Φ un morphisme d'algèbre de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que δ est une Φ-derivation si δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et si : $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\delta(PQ) = \Phi(P)\delta(Q) + \Phi(Q)\delta(P)$. Déterminer les Φ-derivations.
- Déterminer les morphismes d'algèbres Φ de $\mathcal{A}_R$ dans $\mathbb{R}$, puis les Φ-derivations de $\mathcal{A}_R$.

Exercice 1243 [Centrale MP 2024 # 1251] • Montrer que la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

- Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $C, a, \delta > 0$ vérifiant $|f^{(n)}(x)| \leq C a^n n!$ pour tous $n \geq 0$ et $x \in [-\delta, \delta]$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
- Étudier la réciproque.

Exercice 1244 [Centrale MP 2024 # 1252]

Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0, telle que $f(0) \neq 0$. Montrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1245 [Centrale MP 2024 # 1253] Soit $f : t \in [0, \pi/2[\mapsto -\ln(\cos(t))$.

- Montrer que $f(t) \geq t^2/2$ pour tout $t \in [0, \pi/2[$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 1246 [Centrale MP 2024 # 1256] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $X' = -AX + B$. On suppose que l'ensemble $S = \left\{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ AU = B\right\}$ est non vide.

- Montrer que les valeurs propres de A sont positives.
- Quelles sont les solutions constantes de (E) ?
- Soient X et Y deux solutions de (E). Montrer que $t \mapsto \|X(t) - Y(t)\|$ est décroissante. En déduire que toute solution est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit X une solution de (E). Montrer que $X(t)$ admet une limite X_∞ quand t tend vers $+\infty$.
- Montrer que $\|X(0) - X_\infty\| = \inf_{U \in S} \|X(0) - U\|$.

Exercice 1247 [Centrale MP 2024 # 1257] • Montrer que toute série numerique absolument convergente est convergente.

On définit $s(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ pour tout complexe z et $\varphi(z) = |s(z)|$.

- Est-ce que s est bornée sur $\mathbb{C}$? Le cas echeant, donner un majorant de φ.
- Memes questions sur $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leq 1\}$.
- Montrer que φ admet deux extrema sur D et trouver les points ou ils sont attentions.

Exercice 1248 [Centrale MP 2024 # 1258] Soit $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T A$.

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer sa différentielle.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{d}f(A)$ en fonction du rang de A.

Exercice 1249 [Centrale MP 2024 # 1259] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$.

- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, calculer $\nabla f(x)$.
- Montrer que $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et montrer que $f(\omega) = \min\{f(x)\ ;\ x \in \mathbb{R}^n\}$.

- Soit $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(x_j)_{j\geq 0}$ une suite telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $x_{j+1} = x_j - \gamma\nabla f(x_j)$. Montrer que, pour $j \in \mathbb{N}$, $x_{j+1} - \omega = (I_n - \gamma A)(x_j - \omega)$.
- Montrer que, pour γ bien choisi, $(x_j)_{j\geq 0}$ converge vers ω indépendamment du choix de x_0. Comment choisir γ pour que la vitesse de convergence soit la meilleure possible ?

Exercice 1250 [Centrale MP 2024 # 1260] • Soit G un ensemble non vide. Rappeler les conditions sur la loi $*$ pour que $(G, *)$ soit un groupe.

- Rappeler la définition de la différentielle d'une application en un point. Faire le lien avec les derivées partielles dans le cas $\mathcal{C}^1$.
- Soit $*$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$, d'élément neutre note e. On suppose que $f : (x, y) \mapsto x * y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_2 f(x * y, e) = \partial_2 f(x, y) \times \partial_2 f(y, e)$. En déduire que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\partial_2 f(y, e) > 0$.
- Montrer qu'il existe un $\mathcal{C}^1$-diffeomorphisme φ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ tel que $\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3) Géométrie

Exercice 1251 [Centrale MP 2024 # 1261] • Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable. On suppose que f admet un extremum en $a \in \mathbb{R}^n$. Rappeler la valeur de $\nabla f(a)$ (avec demonstration).

- Soit $\theta \in [0, \pi]$. Soient A et B du cercle unite de $\mathbb{R}^2$ tels que $(\widehat{OA, OB})(= \theta$. Exprimer l'aire de la$_{\text{lunule_}}$ constituée des points exterieurs au disque unite et intérieurs au disque de diamêtre $[AB]$.
- Soient A, B et C trois points du cercle unite tels que les trois angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$ soient dans $[0, \pi]$. Maximiser la somme des aires des trois lunules qu'ils définissent.

4) Probabilités

Exercice 1252 [Centrale MP 2024 # 1262] Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes de même loi géometrique de paramètre $p \in]0{,}1[$.

- Déterminer la loi de $\min(X, Y)$.
- Montrer que $\min(X, Y)$ et $X - Y$ sont indépendantes.

Exercice 1253 [Centrale MP 2024 # 1263] • Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

- Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, ε_1, ε_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramêtre $p \in]0, 1[$ et $Q = \varepsilon_1 X + \varepsilon_2$. Déterminer la probabilité que $Q(A)$ soit inversible.
- Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(u)$ soit diagonalisable et $Q'(u)$ inversible. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 1254 [Centrale MP 2024 # 1264] La fonction de repartition d'une variable aléatoire réelle X est $F_X : t \mapsto \mathbf{P}(X \leq t)$.

- Montruer que, pour une variable aléatoire X, F_X est croissante de limite 1 en $+\infty$.

Soient E un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$, (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans E et X une variable à valeurs dans E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\mathbf{P}(X_n = x) \to \mathbf{P}(X = x)$.

- Montruer que $\sum_{x\in E} |\mathbf{P}(X_n = x) - \mathbf{P}(X = x)| \to 0$.

Ind. Pour $\varepsilon > 0$ fixe, considérer une partie finie $I \subset E$ telle que $\mathbf{P}(X \in I) > 1 - \varepsilon$.

- Montruer que (F_{X_n}) converge uniformément vers F_X.

Exercice 1255 [Centrale MP 2024 # 1265] • Soient p un réel > 1 et $q = \dfrac{p}{p-1}$.

- Montrer que $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$.
- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On suppose que $X \in L^p$ et $Y \in L^q$. Montrer que $XY \in L^1$ et que $\mathbf{E}(|XY|) \leq \mathbf{E}(X^p)^{1/p}\mathbf{E}(Y^q)^{1/q}$.
- Soient maintenant deux réels tels que $1 \leq p < q$. Montrer que si $X \in L^q$, alors $X \in L^p$ et que $\mathbf{E}(X^p)^{1/p} \leq \mathbf{E}(X^q)^{1/q}$.
- Soient $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes et p un réel ≥ 1. Montrer que, si $X \in \text{Vect}(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$, alors $\mathbf{E}(X^p)^{1/p} \leq C\sqrt{p}\,\mathbf{E}(X^2)^{1/2}$, ou C est une constante absolue.

Exercice 1256 [Centrale MP 2024 # 1266] • s En utilisant une comparaison série-intégrale, dont on rappellera le principe, donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

- On dit que $n \in \mathbb{N}^*$ est sans facteur carré s'il n'existe pas de $k \geq 2$ tel que k^2 divise n. Montrer que pour tout $i \geq 1$, i s'écrit d'une unique maniere sous la forme $i = ma^2$, ou $a \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ est sans facteur carré.
- Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & X \end{pmatrix}$. Soit p_n la probabilité que M ne soit pas inversible. Montrer que $p_n = O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

Exercice 1257 [Centrale MP 2024 # 1267] Une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires entières est dite transiente si, pour toute partie bornée A de $\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_n \in A) < +\infty$. - Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \sim \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{i}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi de $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$? La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est-elle transiente ?

- Soient $p \in]0,1[$ et $(R_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_i = 1) = p, \mathbf{P}(X_i = -1) = 1 - p$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est-elle transiente ?

Exercice 1258 [Centrale MP 2024 # 1268] Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. On suppose que $\mu = \frac{\ln 2}{|\ln q|}$ n'est pas un entier.

- Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. Montrer qu'il existe un unique entier m tel que $\mathbf{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$.
- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p. On pose $Y_n = \mathbf{1}_{X_n \geq m}$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_{2n-1}$ pour $n \geq 1$. Montrer que $\mathbf{P}(S_n \geq n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.