Exercices 2025

Table des matières

I) ENS MP **XENS**

1) Algèbre

Exercice 1 [ENS L 2025 # 1] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un chemin auto-évitant de longueur n de $\mathbb{Z}^2$ est une suite injective de points $a_0, \ldots, a_n$ de $\mathbb{Z}^2$ telle que $a_0 = (0,0)$ et, pour tout i, $\|a_{i+1}a_i\| = 1$ pour la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$. On note A_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n.

1. Montrer que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A_{m+n} \leqslant A_m A_n$.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour n assez grand, $(2+\varepsilon)^n \leqslant A_n \leqslant (3-\varepsilon)^n$.

1. Montrer que $\left(\sqrt[n]{A_n}\right)$ converge.

Exercice 2 [ENS SR 2025 # 2] Un sous-ensemble non vide S de $\mathbb{Z}$ est dit direct si, pour $x, y, s, t \in S$, la condition $x + y = s + t$ implique que $\{x, y\} = \{s, t\}$.

1. Les ensembles $\{1, 3, 6\}$ et $\{1, 3, 6, 10, 15\}$ sont-ils directs ?

1. Trouvez un ensemble infini direct.

1. Montrer qu'il existe $B > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout ensemble direct S inclus dans $[\![0, n]\!]$, on ait $|S| \leq B n^{1/2}$,

1. Montrer qu'il existe $A > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un ensemble direct S inclus dans $[\![0, n]\!]$ tel que $A n^{1/3} \leq |S|$.
   Indication : On pourra rajouter des éléments un à un à un ensemble de $[\![0, n]\!]$.

1. Existe-t-il un ensemble S direct inclus dans $\mathbb{N}$ tel que $S + S = \mathbb{N}$?

1. Existe-t-il un ensemble S direct inclus dans $\mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{N}$ soit inclus dans S+S ?

1. Existe-t-il un ensemble S direct inclus dans $\mathbb{Z}$ tel que $S + S = \mathbb{Z}$?

Exercice 3 [ENS L 2025 # 3] Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$, $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = u_n + u_{n+1}$. Montrer que, pour tout nombre premier p, p divise u_p.

Exercice 4 [ENS SR 2025 # 4] On considère la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Exprimer F_n en fonction de n.

1. Montrer que $F_{p+q} = F_p F_{q+1} + F_{p-1} F_q$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

1. Calculer $F_m \wedge F_n$ pour tous $m, n \geq 0$.

Exercice 5 [ENS L 2025 # 5] On note d_n le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $d_n = O(n^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 6 [ENS PLSR 2025 # 6] 1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 3\ [4]$.

1. Soient p un nombre premier et $n \geq 2$. Soit $k = \frac{(np)^p - 1}{np - 1}$.

1. Montrer que $k \equiv 1 [p]$.

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si d divise k alors $d \equiv 1 [p]$.

1. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo p.

Exercice 7 [ENS SR 2025 # 7] 1. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

1. Soit $n \geq 3$. On considère sa décomposition en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ où les p_i sont premiers distincts et supérieurs à 3, les α_i dans $\mathbb{N}^*$.
   On admet que, pour tout i, $(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.
   Montrer que la proportion d'éléments d'ordre pair dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est supérieure ou égale à $1 - \frac{1}{2r}$.

1. Déterminer le nombre de solutions de $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Caractériser les éléments $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ d'ordre $r = 2\ell$ pair tel que $x^\ell \neq -1$.

Exercice 8 [ENS PLSR 2025 # 8] Soient p un nombre premier impair, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $q = p^\alpha$ et $f : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ une fonction. Une partie D de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est dite f-génératrice si : $\forall y \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \exists n \geq 2, \exists d_1, \ldots, d_n \in D, y = f(\ldots f(f(d_1, d_2), d_3), \ldots d_n)$.

1. On considère le cas où $f : (x, y) \mapsto x - y$. Déterminer les parties f-génératrices de cardinal minimal et calculer leur nombre.

1. E Dans la suite de l'exercice, on considère le cas où $f : (x, y) \mapsto xy$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de partie f-génératrice de cardinal 1.

1. On admet que le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. Montrer qu'il existe une partie f-génératrice de cardinal 2.

1. Caractériser les parties f-génératrices de cardinal 2.

Exercice 9 [ENS L 2025 # 9] Dénombrer les morphismes de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ dans le groupe des automorphismes de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 10 [ENS P 2025 # 10] Soit A un anneau tel que tout élément de $a \in A$ est nilpotent ou idempotent, c'est-à-dire tel que $a^2 = a$.

1. Montrer que tout élément de A est idempotent.

1. Montrer que A est commutatif.

1. On suppose que A est fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Exercice 11 [ENS PLSR 2025 # 11] On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \left\{a + ib\sqrt{2}; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Rappeler la démonstration du fait que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ dont les idéaux sont principaux.

1. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

1. Trouver les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 + 2 = y^3$.

Exercice 12 [ENS PLSR 2025 # 12] Soit $(A, +)$ un groupe abélien. On dit qu'il est sans torsion lorsque $n \cdot x \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in A \setminus \0\$. Un ordre de groupe sur $(A, +)$ est une relation d'ordre totale $\leq$ sur l'ensemble A telle que $\forall (x, y, z) \in A^3,\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

1. Montrer que si $(A, +)$ possède un ordre de groupe alors il est sans torsion.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}^n, +)$ possède un ordre de groupe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^m$ pour un $m \in [0, n]$.

Exercice 13 [ENS PLSR 2025 # 13] Soit $r \in \mathbb{N}^*, r \geq 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique suite presque nulle $(a_{k,r}(n))_{k\geq 0}$ telle que $n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,r}(n) r^k$ avec, $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{k,r}(n) \in [\![0, r-1]\!]$.

1. Montrer que $(a_{k,r}(n))_{n\geq 1}$ est périodique et trouver sa période.

1. Montrer que $(a_{k,r}(n^n))_{n\geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 14 [ENS PLSR 2025 # 14] On pose $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3} : x \leq y \leq z, x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.

1. Déterminer les éléments de S vérifiant $x = y$ ou $y = z$.

1. Montrer qu'une infinité d'éléments de S vérifient $x = 1$.

1. On pose $f\colon (x, y, z) \mapsto (y, z, 3yz - x)$ et $g\colon (x, y, z) \mapsto (x, z, 3xz - y)$.
   Montrer S est l'ensemble des images de $(1, 1, 1)$ par toutes les composées de f et g.

Exercice 15 [ENS PLSR 2025 # 15] 1. Soit A un anneau commutatif. Rappeler la définition d'un idéal de A.

1. Un idéal I de A dit maximal si A est le seul idéal J de A tel que $I \subsetneq J \subset A$.
   Montrer qu'un idéal maximal de A ne contient pas d'élément inversible.

1. On pose $U = \mathcal{F}(\{0, 1\}, \mathbb{R})$. Donner les idéaux maximaux de U.

1. On pose $V = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Donner les idéaux maximaux de V.

Exercice 16 [ENS PLSR 2025 # 16] Soit A un anneau commutatif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Sigma_n(A) = \{c_1^2 + \cdots + c_n^2, (c_1, \ldots, c_n) \in A^n\}$.

1. Montrer que $\Sigma_2(A)$ est stable par multiplication.

1. Est-ce que $\Sigma_3(A)$ est stable par multiplication quel que soit l'anneau A envisagé ?

1. On suppose que A est un corps de caractéristique différente de 2 et que n est une puissance de 2. Soient $c_1, \ldots, c_n$ dans A et $s = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(A)$ dont la première ligne est $(c_1 \cdots c_n)$ et qui vérifie $MM^T = M^T M = sI_n$.

1. En déduire que $\Sigma_{2^n}(A)$ est stable par multiplication.

Exercice 17 [ENS SR 2025 # 17] Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre (donc commutatif). On suppose que A est euclidien, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $t\colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\forall (a, b) \in A \times (A \setminus \{0\}), \exists (q, r) \in A^2,\ a = bq + r$ et ($r = 0$ ou $t(r) < t(b)$).

- $\forall (a,b) \in A \setminus (A\setminus\{0\})^2, t(ab) \geq t(a)$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont euclidiens, tout comme n'importe quel corps $\mathbb{K}$.

1. Montrer que tout idéal de A est principal.

1. On suppose que $t(1_A) = 0$. Montrer que les éléments inversibles de A sont les $u \in A \setminus \{0\}$ tels que t(u)=0.

1. E On suppose dans toute la suite de l'exercice que dans l'hypothèse (i) il y a en plus unicité du couple (q,r) solution.

1. Montrer que $t(a+b) \leq \max(t(a), t(b))$ quels que soient $a \in A \setminus \{0\}$ et $b \in A \setminus \{0\}$ tels que $a+b \neq 0$.

1. Montrer que $A^\times \cup \{0\}$ est un sous-corps de A.

1. Montrer que A est un corps ou est isomorphe à $\mathbb{K}[X]$ pour un corps $\mathbb{K}$.

Exercice 18 [ENS PLSR 2025 # 18] Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n appartienne à l'anneau $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et que x_n soit l'image de x_{n+1} par l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée font de $\mathbb{Z}_p$ un anneau contenant un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est intègre.

1. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}_p$.

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que p divise $P(x)$ et que p ne divise pas $P'(x)$. Montrer que P admet une racine y dans $\mathbb{Z}_p$ telle que $y_1 = \bar{x}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 19 [ENS P 2025 # 19] On considère $P = X^n - a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n \in \mathbb{R}[X]$, scindé sur $\mathbb{R}$ et de racines réelles $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\left|x_k - \frac{a_1}{n}\right| \leqslant \frac{n-1}{n}\sqrt{a_1^2 - \frac{2n}{n-1}a_2}$.

Exercice 20 [ENS 2025 # 20] Soient $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $f(\mathbb{Q}) = g(\mathbb{Q})$. Montrer que $\deg f = \deg g$.

Exercice 21 [ENS 2025 # 21] Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $m < n$. Soit $\mathcal{P}_{n,m}$ l'ensemble des polynômes complexes de degré n dont 0 est racine d'ordre m et dont les autres racines sont de module ≥ 1. Déterminer $\inf\{|z| \; ; \; z \in \mathbb{C}^*, \; \exists P \in \mathcal{P}_{n,m}, \; P'(z) = 0\}$.

Exercice 22 [ENS SR 2025 # 22] Soit $I = \{P \in \mathbb{C}[X] : \forall n \in \mathbb{Z}, \; P(n) \in \mathbb{Z}\}$. On pose $H_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ et $D_n(P) = \Delta^n(P)(0)$.

1. Montrer que $(H_n)_{n\geq 0}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que, pour tout n, $H_n \in I$.

1. sV2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(H_n) = H_{n-1}$.

1. sV2 Montrer que $I \subset \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que $I = \{\sum_{i=0}^n a_i H_i \; ; \; n \in \mathbb{N}, \; (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$.

1. Soient $P_1, P_2 \in I$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P_1(n)$ soit premier avec $P_2(n)$. Montrer qu'il existe $U_1, U_2 \in I$ tels que $U_1P_1 + U_2P_2 = 1$.

Exercice 23 [ENS PLSR 2025 # 23] Soit $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $C_H = \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \; MH = HM\}$.

1. Montrer que C_H est un sous-groupe infini de $GL_2(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $C_H = \mathbb{Z}[H] \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, où $\mathbb{Z}[H] = \{xI + yH, (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que C_H est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ et en donner un système de générateurs.

Exercice 24 [ENS L 2025 # 24] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le signe de $\det(A^k + B^k)$.

Exercice 25 [ENS SR 2025 # 25] Soient $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ et $x_0, \ldots, x_{n-1}$ des réels > 0. On souhaite montrer que :

$$\det\left(\frac{d^j}{dx^j}(f(x)^{x_i})\right)_{0\leqslant i,j<n} = f(x)^{\sum_{0\leqslant i<n}(x_i-i)} f'(x)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{0\leqslant i<j<n}(x_j - x_i).$$

1.

1. Soit $(p_j)_{0\leq j<n}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout j, p_j est de degré j et de coefficient dominant d_j. Montrer que $\det(p_j(x_i))_{0\leq i,j<n} = d_0 \times \cdots \times d_{n-1} \prod(x_j - x_i)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $p_j \in \mathbb{R}[X]$ de degré j et de coefficient dominant $f'(x)^j$ tel que : $\forall z \in \mathbb{R}$, $\frac{d^j}{dx^j}(f(x)^z) = f(x)^{z-j}p_j(z)$.

1. Démontrer le résultat annoncé. Que dire dans des cas particuliers ?

1. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.
   Pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, on note $c_{i,j}$ le coefficient en x^j de f^i. Calculer $\det((c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n})$.

Exercice 26 [ENS L 2025 # 26] Soit $A \in GL_3(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à A^{-1} si et seulement s'il existe $B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = BC, B^2 = C^2 = I_3$.

Exercice 27 [ENS P 2025 # 27] Soit $n \geq 2$. On note $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des matrices M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M\overline{M}$ appartient à $\mathbb{C}^* I_n$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $A \sim B$ s'il existe $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $A = \lambda \overline{M} B M^{-1}$. Justifier que $\sim$ induit une relation d'équivalence sur $\mathcal{R}_n$. Déterminer les classes d'équivalence sur $\mathcal{R}_n$.

Exercice 28 [ENS P 2025 # 28] On note G_n l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Soit $\Phi : G_n \to \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$ une application telle que $\forall V, W \in G_n,\ \Phi(V \cap W) + \Phi(V + W) \leqslant \Phi(V) + \Phi(W)$

et $\Phi(\{0\}) \geq 0$. Montrer qu'il existe un unique $V_0 \in G_n$ de dimension maximale tel que $\inf_{V \in G_n \setminus \{(0)\}} \frac{\Phi(V)}{\dim V} = \frac{\Phi(\hat{V}_0)}{\dim V_0}$.

Exercice 29 [ENS PLSR 2025 # 29] Soient G un groupe admettant une partie génératrice finie et H un groupe fini.

1. Montrer que l'ensemble E des morphismes de groupes de G vers H est fini.

b) Soit ψ un endomorphisme surjectif du groupe G. Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi) \subset \bigcap \mathrm{Ker}(\varphi)$.

1. On pose $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \det(M) = 1\}$.

1. Montrer que G est un groupe multiplicatif.

1. Montrer que G est engendré par $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que tout endomorphisme surjectif du groupe G est bijectif.

Exercice 30 [ENS PLSR 2025 # 30] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\det(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = \gamma > 2$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$, on pose $(k, U) = \begin{pmatrix} A^k & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'ensemble $G_A = \{(k, U); k \in \mathbb{Z}, U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})\}$ est un groupe pour la loi de multiplication matricielle. Est-il abélien ?

1. Montrer l'existence d'un morphisme injectif de groupes de G_A dans le groupe

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Soit D_A le sous-groupe de G_A engendré par les éléments $ghg^{-1}h^{-1}$ où $(g, h) \in G_A^2$. Montrer que $D_A = \{(0, (I_2 - A)U), U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})\}$.

Exercice 31 [ENS L 2025 # 31] 1. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \ldots, F_r) \in \mathbb{C}(X)^r$. On pose $M_r = (F_j^{(i-1)})_{1\leq i,j\leq r} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}(X))$. Montrer que la famille $(F_1, \ldots, F_r)$ est liée si et seulement si la matrice M_r

n'est pas inversible.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(X))$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $A^{(p)} = (A_{i,j}^{(p)})$ la matrice des dérivées $p^{\text{èmes}}$ des coefficients de A.

Montrer que les matrices $A^{(p)}$ pour $p \in \mathbb{N}$ commutent deux à deux si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}^*, (F_1, \ldots, F_r) \in (\mathbb{C}(X))^r$ et des matrices $C_1, \ldots, C_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux telles que $A = F_1 C_1 + \cdots + F_r C_r$.

Exercice 32 [ENS SR 2025 # 32] Soit $S = \begin{pmatrix} (0) & 1 \\ & \ddots \\ 1 & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier la diagonalisabilité de S et donner ses valeurs propres.

1. Donner une base orthonormale de vecteurs propres de S.

1. Caractériser les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par S.

1. Soient $\omega = \exp(2i\pi/n)$ et $A = \left(\frac{\omega^{jk}}{\sqrt{n}}\right)_{1\leq j,k\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer les puissances de A. En déduire que A est diagonalisable.

1. On suppose n impair. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

Exercice 33 [ENS SR 2025 # 33] 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est suffisamment proche de M, alors N admet n valeurs propres distinctes.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. À quelle condition la matrice $A + \varepsilon B$ admet-elle deux valeurs propres distinctes pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit ?

1. Même question en demandant que $A + \varepsilon B$ soit diagonalisable pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit.

Exercice 34 [ENS L 2025 # 34] Soient $\mathbb{K}$ un corps et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que χ_A est irréductible et qu'il existe $B \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $B^{-1}AB$ commute avec A, mais que B ne commute pas avec A. Montrer que B^2 est scalaire.

Exercice 35 [ENS L 2025 # 35] Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}(AB - BA) = 1$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

Exercice 36 [ENS PLSR 2025 # 36] Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 1$ et $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, B$.

1. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ et $B = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$.

1. Pour $P, Q \in GL_2(\mathbb{R})$, on pose $\Psi_{P,Q} : M \mapsto PMQ$. On pose $\tau : M \mapsto M^T$. Soit $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ qui conserve le rang. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Psi = \Psi_{P,Q}$ ou $\Psi = \Psi_{P,Q} \circ \tau$.

Exercice 37 [ENS PLSR 2025 # 37] Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, $C \in \mathbb{C}\ \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ telle que $C = AX - XB$.

Exercice 38 [ENS PLSR 2025 # 38] Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de Bourdaud si $\chi_M = \prod (X - m_{i,i})$.

1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice de Bourdaud si et seulement si elle est trigonalisable sur K.

1. Montrer qu'une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est de Bourdaud si et seulement si elle est diagonale.

1. Est-il vrai que toute matrice de Bourdaud de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ?

1. On dit que A est normale si $A^T A = AA^T$. Déterminer les matrices réelles normales et de Bourdaud.

Exercice 39 [ENS SR 2025 # 39] Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. On pose $e^M = \begin{pmatrix} M_1 & \varphi_{A,B}(C) \\ M_2 & M_2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer M_1, M_2, M_3.

1. Montrer que $\varphi_{A,B}$ est linéaire.

1. Montrer que, si A et B sont diagonalisables, alors $\varphi_{A,B}$ l'est aussi, et préciser son spectre.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{e^x e^y}{xy}$ si $x \neq y$, et $f(x, x) = e^x$. Montrer que fest de classe C^∞.

1. On suppose que $\varphi_{A,B}$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont distinctes. Montrer que A et B sont diagonalisables.

Exercice 40 [ENS SR 2025 # 40] Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose [A, B] = AB BA. Soit $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ stable par [,].

1. Calculer les [A,B] pour les $A, B \in \{X, Y, H\}$ où $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\rho : A \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ linéaire telle que, pour tous $A, B \in A$, $\rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)]$. Montrer que $\rho(H)$ admet une valeur propre α.

Montrer que $\rho(X)(E_\alpha(\rho(H))) \subset \mathrm{Ker}(\rho(H) - (\alpha + 2)I_n)$.
Montrer que $\rho(Y)\ (E_\alpha(\rho(H))) \subset \mathrm{Ker}\ (\rho(H)(\alpha 2)I_n)$.

1. On suppose que, si V est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ stable par tous les $\rho(A)$, pour $A \in \mathcal{A}$,

alors $V = \mathbb{C}^n$ ou $V = \{0\}$. Déterminer les ρ possibles.

Exercice 41 [ENS U 2025 # 41] Soient k un corps de caractéristique nulle, E un k-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On écrit $\pi_u = \prod_i P_i^{n_i}$, le polynôme minimal de u, où les P_i sont irréductibles
distincts et les n_i dans $\mathbb{N}^*$. On pose $f = P_1 \times \cdots \times P_r$. On définit une suite en posant $u_0 = u$
et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n f(u_n) f'(u_n)^{-1}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie.

1. Montrer que (u_n) est stationnaire de valeur ultime $d \in \mathcal{L}(E)$ où d est un polynôme en u, u-d est nilpotent et d est annulé par f.

Exercice 42 [ENS L 2025 # 42] Déterminer le cardinal minimal p d'un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Vect}(G) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si G_1 et G_2 conviennent et sont de cardinal p, sont-ils conjugués ?

Exercice 43 [ENS L 2025 # 43] On dit que la propriété $MT(n, \mathbb{K})$ est vraie si, pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ soit diagonalisable, A et B commutent.

1. Montrer que, si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonalisables et commutent, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable.

1. On suppose que $n \geq 2$. La propriété $MT(n, \mathbb{R})$ est-elle vraie ?

1. Montrer que $MT(2, \mathbb{C})$ est vraie.

1. On suppose que $n \geq 2$. La propriété $MT(n, \mathbb{F}_2)$ est-elle vraie ?

1. Soit $p \geq 3$ un nombre premier. La propriété $MT(2, \mathbb{F}_p)$ est-elle vraie ?

Exercice 44 [ENS L 2025 # 44] Quelle est l'image de l'application $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M^{2n+1}$?

Exercice 45 [ENS SR 2025 # 45] 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB = BA. Justifier que $e^{A+B} = e^A e^B$.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$.

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ convenable, on pose $\log A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (AI_n)^k$. Pour quelles

matrices $\log A$ est-il défini ? Montrer les égalités $\exp(\log A) = A$ et $\log(\exp A) = A$. Pour chaque égalité, déterminer les matrices A qui la satisfont.

1. Montrer que, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} e^{A+B}$.

Exercice 46 [ENS PLSR 2025 # 46] Soient $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence égal à $+\infty$.

1. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, justifier la définition de $f^*(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k$.

1. Montrer que f^* est continue.

c) On suppose que f est surjective. Montrer que f induit une surjection de l'ensemble des matrices diagonalisables sur lui-même.

1. On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda$ et $f'(z) \neq 0$. Montrer que f^* est une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lui-même.

Exercice 47 [ENS L 2025 # 47] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe un ensemble $F_n \subset \mathbb{R}^d$ de cardinal n tel que, pour toute partie G de F_n, il existe $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $G = \{x \in F_n, \langle \omega, x \rangle + b > 0\}$.

Exercice 48 [ENS P 2025 # 48] Pour $\omega \in \mathbb{R}$, on pose $R(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu. Montrer qu'il existe $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = P \begin{pmatrix} e^{tR(\omega_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{tR(\omega_r)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_{r-2r} \end{pmatrix}.$$

Exercice 49 [ENS L 2025 # 49] Soient u et v deux endomorphismes autoadjoints positifs d'un espace euclidien. Montrer que $v \circ u$ est diagonalisable.

Exercice 50 [ENS P 2025 # 50] Déterminer l'ensemble des symétries linéaires sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui fixent un hyperplan et stabilisent l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 51 [ENS P 2025 # 51] Soit $H = (H_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tous $i \neq j$, $H_{i,j} \leq 0$. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on dit que i et j sont connectés s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \ldots, k_m \in [\![1,n]\!]$ tels que $k_1 = i$, $k_m = j$ et, pour tout $\ell \in [\![1, m-1]\!]$, $H_{k_\ell, k_{\ell+1}} \neq 0$. Montrer que i et j sont connectés si et seulement si $H_{i,j}^{-1} > 0$, où $H_{i,j}^{-1}$ est le coefficient d'indice (i,j) de H^{-1}.

Exercice 52 [ENS PLSR 2025 # 52] On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})^2$. On pose C = AB et on s'intéresse aux valeurs propres réelles de C.

1. Donner un exemple de n, A et B tels que χ_C n'admette aucune racine réelle.

1. On suppose A inversible. On note $\varphi : (\mathbb{C}^{2n})^2 \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(X, Y) = X^T A^{-1} Y$. Montrer que les sous-espaces caractéristiques $F_\lambda(C)$ de C sont deux à deux φ -orthogonaux, *i.e.* pour tous λ et μ distinctes dans $\operatorname{Sp} C$, $\forall (X, Y) \in F_\lambda(C) \times F_\mu(C)$, $\varphi(X, Y) = 0$.

1. Que peut-on en déduire ?

Exercice 53 [ENS PLSR 2025 # 53] On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure canonique d'espace euclidien orienté, et on note $\mathbf{B}$ sa base canonique.

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique endomorphisme z_u de $\mathbb{R}^3$ tel que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\det_{\mathbf{B}}(u, x, y) = \langle z_u(x), y \rangle$, et montrer qu'alors $z_u = -z_u$.

1. Soient $u \in \mathbb{R}^3$ unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$. On munit le plan $\{u\}^\perp$ de l'orientation dont les bases directes sont les bases (x,y) de $\{u\}^\perp$ telles que (x,y,u) soit une base directe de $\mathbb{R}^3$. On note $r_{u,\theta}$ la rotation de $\mathbb{R}^3$ fixant u et induisant sur $\{u\}^\perp$ la rotation d'angle de mesure θ. On note enfin p_u la projection orthogonale sur $\mathbb{R}u$. Exprimer $\operatorname{tr}(r_{u,\theta})$ en fonction de θ, et montrer que $r_{u,\theta} = (\cos\theta).\operatorname{id} + (1-\cos\theta).\, p_u + (\sin\theta).\, z_u$.

1. Soient u,v des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$. On pose $\tau = \arccos(\langle u, v\rangle)$. Soit $(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que $r_{u,\varphi} \circ r_{v,\psi}$ est une rotation, et montrer qu'elle s'écrit $r_{w,\theta}$ pour un vecteur unitaire w et un réel θ vérifiant $|\cos(\theta/2)| = |\cos(\varphi/2)\cos(\psi/2) - \cos(\tau)\sin(\varphi/2)\sin(\psi/2)|$.

Exercice 54 [ENS PLSR 2025 # 54] 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables et telles que AB = BA. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales.

1. Montrer que l'application $\Phi : (S, O) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto SO \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est bien définie et bijective, et que Φ^{-1} est continue.

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $M_0 = M$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_{k+1} = \frac{M_k}{2}(I_n + (M_k^T M_k)^{-1})$, et étudier sa convergence.

Exercice 55 [ENS PLSR 2025 # 55] On pose $V = \{1, 2, \dots, n\}$ et $F = \mathcal{P}_2(V)$ l'ensemble des paires de V. Soient $E \subset F$ et $n_i = |\{j \in V,\ \{i, j\} \in E\}|$ pour $i \in V$. On définit la matrice $L = (\ell_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\ell_{i,j} = n_i$ si i=j,-1 si $\{i, j\} \in E$ et 0 sinon. On note $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres (avec multiplicité) de L.

1. Montrer que $\lambda_1 = 0$.

1. Montrer que $\lambda_2 = \min_{X\in\{(1,\dots,1)\}^\perp\setminus\{0\}} \frac{X^T LX}{X^T X}$.

1. Pour $S \subset V$, on note $\partial S = \{\{i, j\},\ \{i, j\} \in E \text{ avec } i \in S \text{ et } j \notin S\}$.

Montrer que $\frac{\lambda_2}{2} \leqslant \min_{\substack{S\subset V \\ 0<|S|\leqslant \frac{n}{2}}} \frac{|\partial S|}{|S|}$.

Exercice 56 [ENS P 2025 # 56] Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on note $A \geq B$ lorsque $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on écrit $A = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et les $\lambda_i > 0$, et on pose, pour $r \in \mathbb{R}$, $A^r = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1^r, \dots, \lambda_n^r)P^{-1}$; cette définition ne dépend pas de l'écriture de A sous la forme précédente.

1. Montrer que $M \mapsto M^{-1}$ est décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Est-ce que $M \mapsto M^2$ est croissante sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$?

1. Montrer que $M \mapsto M^r$ est convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque $r \in [-1, 0]$. Ceci signifie que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et tout $t \in [0, 1[$, $(tA + (1-t)B)^r \leqslant tA^r + (1-t)B^r$.

Exercice 57 [ENS PLSR 2025 # 57] On dit d'une norme $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ qu'elle est invariante orthogonalement lorsque $\forall M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \forall (P, Q) \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})^2,\ \mathcal{N}(M) = \mathcal{N}(PMQ)$.

1. Donner un exemple d'une telle norme.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $(P, Q) \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})^2$ tel que $A = PDQ$ où $D = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ avec $\forall i \in [1, r],\ \sigma_i > 0$.

1. On se donne une norme $\mathcal{N}$ invariante orthogonalement sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

On note $T(A) = \sup\{\|AX\|, \|X\| = 1\}$ où $\|\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow T(A) = \alpha\mathcal{N}(A)$.

Exercice 58 [ENS SR 2025 # 58] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur qui lui est subordonnée.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Que dire des valeurs propres et des espaces propres de A ?

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A.

- Soient $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \alpha \in \mathbb{R}$ et $y = Ax\alpha x$. Montrer que $\min_{1\leqslant i\leqslant r} |\lambda_i \alpha| \leqslant \frac{\|y\|}{\|x\|}$.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A. Soient enfin $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et α une valeur propre de A + B. Montrer que $\min_{1\leq i\leq r} |\lambda_i \alpha| \leq ||P||_{\mathrm{op}}||P^{-1}||_{\mathrm{op}}||B||_{\mathrm{op}}$.

Exercice 59 [ENS NIL 2025 # 59] Soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que SA est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 60 [ENS P 2025 # 60] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ toute application $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $q(x) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_i x_j$ pour tout $x = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_i x_j\ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ tels que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les éléments de G. Montrer que les formes quadratiques invariantes par G constituent une droite vectorielle.

Exercice 61 [ENS SR 2025 # 61] Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $\nabla_H : (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto x^T Hy$ et $Q_H : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x^T Hx$.

1. Soit $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la norme d'opérateur de H à l'aide de Q_H.

1. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de leur structure euclidienne canonique. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, comment déterminer la norme d'opérateur de A pour ces normes ?

1. Soient J, K deux ensembles finis non vides, $(a_{j,k})_{(j,k)\in J\times K} \in (\mathbb{R}^+)^{J\times K}$. On suppose qu'il existe C_1 et C_2 tels que : $\forall j \in J, \sum_{k\in K} a_{j,k} \leqslant C_1$ et $\forall k \in K, \sum_{j\in J} a_{j,k} \leqslant C_2$. On

ordonne J et K et on note A la matrice des $a_{j,k}$. Montrer que $||A||_{\text{op}} \leqslant \sqrt{C_1 C_2}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J = K = [1, n]$, on pose, pour $1 \leqslant j, k \leqslant n$, $a^n_{j,k} = \frac{1}{(j-k)^2}$ si $j \neq k$, et $a^n_{j,k} = 0$ sinon. On note enfin $A^n = \left(a^n_{j,k}\right)_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de $(\|A^n\|_{\text{op}})_{n \geq 1}$.

Exercice 62 [ENS PLSR 2025 # 62] L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée notée $\|\|_{op}$. Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, on définit le conditionnement de M comme le réel cond $(M) = ||M||_{\text{op}}||M^{-1}||_{\text{op}}$.

1. Calculer cond(M) dans le cas où M est symétrique définie positive.

1. Montrer que, pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $cond(M) \geq 1$ et $cond(M^T) = cond(M)$.

1. Que dire des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{cond}(M) = 1$?

1. Pour A et B dans S_n^{++}, montrer que $Cond(A + B) \leq max(Cond(A), Cond(B))$.

Exercice 63 [ENS SR 2025 # 63] On note E l'ensemble des matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in E$ si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$A = UU^T$. Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, E)$.

1. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(α) il existe $u : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, a(t) = u(t)u(t)^T$; (β) il existe $z : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, z(t)^T a(t) z(t) > 0$.

1. Soient $0 \leq b \leq c$. On suppose qu'il existe $(i, j) \in [1, n]^2$ avec $i \neq j$ tel que, pour tout $t \in [b, c]$, $a_{i,i}(t) > 0$ et $a_{j,j}(t) > 0$. Montrer qu'il existe $z : [b, c] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in [b, c], z(t)^T a(t) z(t) > 0$ et, en outre, $z(b) = e_i, z(c) = \pm e_i$ (les e_k sont les

vecteurs de la base canonique).

1. En considérant l'ensemble des $d \geq 0$ tels qu'existe $z : [0, d] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue vérifiant $\forall t \in [0, d], z(t)^T a(t) z(t) > 0$ et $z(d) = \pm e_i$, montrer que a vérifie la propriété (α).

Exercice 64 [ENS SR 2025 # 64] Soient $n \geq 2$, $a : [0, 1] \to \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ continue et $A = \int_0^1 a(t)dt$.

1. Montrer que A appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A=0. Exprimer Ker(A).

1. Montrer que $M = \left(\frac{1}{1+i+j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. On suppose a à valeurs dans l'ensemble des matrices de projecteurs orthogonaux. Donner une condition pour que A soit une matrice de projecteur orthogonal.

1. Soit $\Gamma : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$. Soient $0 < \alpha < \beta$.

Montrer que $\begin{pmatrix} \Gamma(2\alpha) & \Gamma(\alpha+\beta) \\ \Gamma(\alpha+\beta) & \Gamma(2\beta) \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

1. En déduire que $\ln(\Gamma)$ est convexe

Exercice 65 [ENS P 2025 # 65] Soit $(O_n)_{n \geq 0}$ une suite d'ouverts non majorés de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $O_n \cap x\mathbb{N}$ soit infini.

Exercice 66 [ENS L 2025 # 66] Soit E un ensemble non vide. Soit $d : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $x, y, z \in E$:

- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(z, y))$.

Ainsi d est une distance sur E. Pour $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on note $B(x, r) = \{y \in E, d(x, y) \leq r\}$ la boule fermée de centre x et de rayon r. On suppose que, pour tout $x \in E$ et tous r, r' vérifiant 0 < r < r', on a $B(x, r) \subsetneq B(x, r')$. Enfin, on suppose qu'il existe une suite d'éléments de E dense dans (E,d). Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E et une suite $(r_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, B(z_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(z_n, r_n)$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(z_n, r_n) = \emptyset$.

Exercice 67 [ENS PLSR 2025 # 67] On note E l'ensemble des fonctions lipschitziennes 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha \in]0, 1]$ et $f \in E$, on pose

$$||f||_\alpha = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Démontrer que $\|\|_\alpha$ est une norme sur E.

1. On note $F = E \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Démontrer que F est un fermé de E pour la norme $\| \cdot \|_1$.

Exercice 68 [ENS P 2025 # 68] Soient E l'espace des suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$ nulles à partir d'un certain rang, et $T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose T continu pour la norme $\| \|_1$ et pour la norme $\| \|_\infty$. Montrer que T est continu pour la norme $\| \|_2$.

Exercice 69 [ENS SR 2025 # 69] Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$.

1. La forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(0)$ est-elle continue pour $\| \cdot \|_\infty$? pour $\| \cdot \|_1$? Dans chaque cas calculer l'adhérence de $\operatorname{Ker} \varphi$.

1. Soit $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f(x)\cos(2\pi x)dx$. Montrer que φ est continue pour $\| \cdot \|_1$ et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 70 [ENS L 2025 # 70] Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$.

$$\text{Si } a = (a_n)_{n\geq 0} \in [0,1]^{\mathbb{N}}, \text{ on pose, pour } f, g \in E, \langle f, g\rangle_a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(a_n)\, g(a_n)}{2^n}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\langle\ ,\ \rangle_a$ soit un produit scalaire sur E. On note alors $\| \|_a$ la norme associée.

1. Si $a, b \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ vérifient les hypothèses de a), donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\|\|_a$ et $\|\|_b$ soient équivalentes.

Exercice 71 [ENS NIL 2025 # 71] Soient $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{x\})$ est compact.

1. Montrer que f admet un extremum global.

Exercice 72 [ENS P 2025 # 72] Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension infinie et K une partie bornée de E dont la frontière est compacte. Montrer que K est d'intérieur vide dans E.

Peut-on généraliser le résultat à n'importe quel espace vectoriel normé de dimension infinie ?

Exercice 73 [ENS P 2025 # 73] Pour x,y réels et $\varepsilon > 0$, on dit que $x \approx_\varepsilon y$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que |x-y-k|<
ε. Soient λ_1, λ_2 deux réels non nuls. Montrer que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$ si et seulement si, pour tout $(a_1, a_2) \in [0,1]^2$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x\lambda_1 \approx_\varepsilon a_1$ et $x\lambda_2 \approx_\varepsilon a_2$.

Exercice 74 [ENS P 2025 # 74] Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 2$ et C une partie non vide, convexe et bornée de E. Montrer que la frontière de C est connexe par arcs.

Exercice 75 [ENS PLSR 2025 # 75] Soient E un espace vectoriel normé et $f : E \to E$ une application telle que f(0) = 0 et $\forall x, y \in E, ||f(x)f(y)|| = ||xy||$.

On pose, pour $x, y \in E$, ||f(x) - f(y)|| = ||x - y||. $\left\| \frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\|$.

1. Montrer que $\forall x, y \in E, df(x,y) \leq \frac{1}{2}\|xy\|$.

1. Montrer que f est linéaire si et seulement si df est identiquement nulle.

1. Trouver une fonction vérifiant les propriétés de la fonction f, non linéaire et non surjective.

1. On suppose que f est surjective. Montrer que f est linéaire.

Exercice 76 [ENS P 2025 # 76] On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des normes $\|\|_2$ et $\|\|_\infty$. Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. Soit $F = \operatorname{Vect}(x \mapsto x^{n_k}, k \geq 0)$. À quelle condition F est-il dense dans E pour la norme $\|\|_2$? pour la norme $\|\|_\infty$?

Exercice 77 [ENS L 2025 # 77] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $D = \{\ell 2^{-k} + 2^{-k}[0,1]; (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour tout intervalle I de D, on note $\log(I)$ la longueur de I et on pose $M_I(f) = \frac{1}{\log(I)} \int_I f$. On pose $||f|| = \sup \left\{ \frac{1}{\log(I)} \int_\Gamma |f M_I(f)|\ ;\ I \in D \right\}$.

1. On suppose ||f|| finie. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $(I, J) \in D^2$ avec $I \subset J$ tels que $\log(J) = 2^m \log(I)$. Démontrer que $|M_I(f) M_I(f)| \leq 2m||f||$

$2^m \log(I)$. Démontrer que $|M_I(f) M_J(f)| \leq 2m||f||$.

1. On suppose que ||f|| = 1 et $M_{[0,1]}(f) = 0$.

On note $F_k = \{I \in D : I \subset [0,1], M_I(f) > 5k$ et I maximal pour cette propriété$\}$. On pose $\Omega_k = \bigcup_{I \in F_k} I$ et et $\log(\Omega_k) = \sum_{I \in F_k} \log(F_I)$.

Montrer que, pour $k \geq 1$, $\log(\Omega_k) \leqslant \frac{1}{3} \log(\Omega_{k-1})$.

Exercice 78 [ENS PLSR 2025 # 78] On munit les espaces $\ell^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ et $\ell^2_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ de leurs normes usuelles $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$. On pose $H = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\ ;\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^2 (1 + n^2) < +\infty \right\}$.

1. Définir un produit scalaire sur H. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Quelles inclusions a-t-on entre $\ell^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, $\ell^2_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ et H ? Montrer que ces inclusions sont continues (i.e. les injections canoniques sont continues).

1. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Montrer que $u \in H$ si et seulement si l'application $\mu_u : H \to H$ définie par $\forall v \in H,\ \mu_u(v) = u * v$ avec $(u * v)_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ est bien définie et continue.

Exercice 79 [ENS P 2025 # 79] On note ℓ^1 l'ensemble des suites sommables de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On munit ℓ^1 de la norme définie, pour $u = (u_n)_{n\geq 0}$, par $||u||_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. Soient $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^1 et $u \in \ell^1$. Montrer l'équivalence entre :

- la suite $(u^{\overline{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u pour la norme $\|\|_1$,

- pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, $\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n u_n^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n u_n$.

Exercice 80 [ENS L 2025 # 80] On note $S=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$ et $\Gamma=\{\gamma\in\mathcal{C}^0([0,1],S)\ ;\ \gamma(0)=\gamma(1)=1\}$.

1. Soit $\gamma\in\Gamma$, montrer qu'il existe $\theta:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\forall t,\ \gamma(t)=e^{i2\pi\theta(t)}$.

1. On prend $\gamma_0,\gamma_1\in\Gamma$. On note F la propriété : « il existe $h\in\mathcal{C}([0,1]^2,S)$ tel que $\forall x\in[0,1],\ h(x,\cdot)\in\Gamma,\ h(0,\cdot)=\gamma_0$ et $h(1,\cdot)=\gamma_1$ ». On pose $\gamma_0=1$ et $\gamma_1:t\mapsto e^{2i\pi t}$. Montrer que γ_0 et γ_1 ne vérifient pas F.

1. On note D le disque fermé unité de $\mathbb{C}$. Existe-t-il $f\in\mathcal{C}^0(D,S)$ telle que $f|_S=\mathrm{id}$?

Exercice 81 [ENS PLSR 2025 # 81] 1. Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle qu'il existe $x^*\in\mathbb{R}$ vérifiant $f(x^*)=0$ et $f'(x^*)\neq 0$.
On définit par récurrence une suite (x_k) avec $x_0\in\mathbb{R}$ et $x_{k+1}=x_k\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que, pour $x_0\in[x^*\varepsilon,x^*+\varepsilon]$, la suite (x_k) est bien définie et converge vers x^*.

1. Avec $f:x\mapsto e^x 1$, quelles sont les valeurs de $x_0\in\mathbb{R}$ pour lesquelles la suite (x_k)

précédente est stationnaire ? c) On revient au cas général et on suppose f" > 0 et f' ne s'annule pas sur ℝ. Pour quelles valeurs de $x_0\in\mathbb{R}$ la suite (x_k) est-elle stationnaire ?

Exercice 82 [ENS L 2025 # 82] Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b],[a,b])$. On suppose dans les questions a) et b) que f n'a pas de point de période 2, c'est-à-dire que $\forall x\in[a,b], f(x)\neq x\Rightarrow (f\circ f)(x)\neq x$.

1. Soit $c\in[a,b]$ tel que f(c) > c. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $f^k(c)>c$.

1. Soit $x_0\in[a,b]$, on pose pour tout n, $x_{n+1}=f(x_n)$. Démontrer que la suite (x_n)

converge.

1. Démontrer que la suite (x_n) converge pour tout choix de x_0 si et seulement si f n'a pas de point de période 2.

Exercice 83 [ENS PLSR 2025 # 83] 1. Déterminer la nature des séries $\sum\frac{\sin n}{n}$, $\sum\frac{\sin^2 n}{n}$, $\sum\frac{|\sin n|}{n}$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $Q\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in[1,Q]$ tels que $|qxp|\leqslant\frac{1}{Q}$.

En déduire qu'il existe une infinité de couples (p,q) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tels que $\left|x\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2}$.

1. On admet que π est irrationnel. Déterminer la nature de la série $\sum\frac{1}{n\sin(n)}$.

Exercice 84 [ENS P 2025 # 84] Soit (a_n) une suite de réels décroissante de limite nulle. Pour $P\subset\mathbb{N}$, on note $A(P)=\sum_{n\in P}a_n$. On suppose $A(\mathbb{N})=A_\infty\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$\{A(P),\ P\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\}=[0,A_\infty] \text{ si et seulement si } \forall n\in\mathbb{N},\ a_n\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k.$$

Exercice 85 [ENS L 2025 # 85] 1. Pour quels réels **s** la somme $\sum_{n,m\in\mathbb{N}^*}\frac{|n-m|^s}{nm(n^2-m^2)^2}$ est-elle finie ?

b) Pour $n=(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2$, on note $|n|=\sqrt{n_1^2+n_2^2}$.

Pour quels réels s la somme $\sum_{(n,m)\in(\mathbb{Z}^2\setminus\{0\})^2}\frac{|n-m|^s}{|n||m|(1+(|n|-|m|)^2)}$ est-elle finie?

Exercice 86 [ENS PLSR 2025 # 86] On note S l'ensemble des suites croissantes à termes dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

1. Pour $a\in S$, montrer que $\varphi(a)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$ appartient à]0,1].

1. Montrer que φ définit une bijection de S sur]0,1].

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a\in S$ pour que $\varphi(a)\in\mathbb{Q}$.

Exercice 87 [ENS L 2025 # 87] Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{+*}$ décroissante de limite nulle. Soit $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ croissante. On suppose que, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$, il existe une unique suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\alpha=\sum_{i=0}^{+\infty}f(n_i)$ et, pour tout $i\in\mathbb{N}$, $n_{i+1}\geq\varphi(n_i)$. Montrer que $\varphi(0)=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(n-1)=\sum_{i=0}^{+\infty}f\left(\varphi^i(n)\right)$, où φ^i désigne l'itérée i-ème de φ pour la composition des applications.

Exercice 88 [ENS P 2025 # 88] Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

- f(x) = O(x) ;
- $\sum_{r\neq els}f(a_n)$ converge absolument pour toute série $\sum_{r\neq els}a_n$ absolument convergente à termes
- $\sum f(a_n)$ converge pour toute série $\sum a_n$ absolument convergente à termes réels.

Exercice 89 [ENS P 2025 # 89] Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\sum f(a_n)$ converge pour toute série convergente $\sum a_n$ à termes réels. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(x)=\lambda x$ pour x voisin de 0.

Exercice 90 [ENS SR 2025 # 90] 1. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ avec a < b et $f:[a,b]\to[a,b]$.

1. Si f est continue, montrer que f possède un point fixe.

1. Si f est croissante, montrer que f possède un point fixe.

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que l'ensemble dis(f) des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

1. Construire $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{Q}$.

Exercice 91 [ENS P 2025 # 91] Trouver les $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Exercice 92 [ENS PLSR 2025 # 92] Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement égale à $+\infty$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $f^*(y) = \sup\{xy - f(x); x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}, f^*(x) < +\infty\}$ est un intervalle (éventuellement vide) sur lequel f^* est convexe.

1. Montrer que, si f est dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$, alors $f = f$.

1. On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, que f"> 0 sur $\mathbb{R}$ et que $\frac{f(x)}{|x|} \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f^* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = f'(x) \Leftrightarrow x = (f^*)'(y)$.

Exercice 93 [ENS SR 2025 # 93] Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on pose $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $B_n(u_1)$ et $B_n(u_2)$ où $u_n : x \mapsto x^n$.

***b*) Montrer que, pour tout** $x \in [0,1], \sum_{k=0}^{n} \left|x \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$.

1. En déduire que si f est M-lipschitzienne, alors $|B_n(f)(x) f(x)| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}$ pour tout x.

Exercice 94 [ENS L 2025 # 94] Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

- f est croissante, à valeurs dans [0, 1], f est continue à droite,
- $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists b_k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x)^k = f(x + b_k)$.

Exercice 95 [ENS PLSR 2025 # 95] 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|b| < \pi$.
Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + e^z = a + ib$.

1. Montrer que l'application $z \mapsto ze^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 96 [ENS P 2025 # 96] Soient $\sigma > 0$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) + f(y) - f(x+y)| \leq \sigma$. Montrer que f est la somme d'une fonction linéaire $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et d'une fonction bornée par σ.

Exercice 97 [ENS L 2025 # 97] Une partie E de [0, 1] est dite négligeable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\geq 0}$ d'intervalles de [0,1] dont la réunion contient X et dont la somme des longueurs est majorée par ε. Soit f une fonction dérivable de [0,1] dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une partie négligeable E de [0,1] telle que, pour tout $x \in [0,1] \setminus E$, on ait $f'(x) \geq 0$. Montrer que f est croissante.

Exercice 98 [ENS P 2025 # 98] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ et $(Q_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ deux familles de polynômes réels, f la fonction de $\mathbb{P}$ dens $\mathbb{P}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{P}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{n} P_n(x) e^{Q_k(x)}$. Montrer que si
fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1} P_k(x)\, e^{Q_k(x)}$. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors f ne possède qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 99 [ENS P 2025 # 99] Soit n un entier impair supérieur ou égal à 3. Déterminer les fonctions continues f de [0,1] dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $k \in [1, n-1]$, $\int_0^1 (f(x^{1/k}))^{n-k}\, dx = \frac{k}{n}$.

Exercice 100 [ENS P 2025 # 100] Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $ka_k \leq (k+1)a_{k+1}$. Montrer que $\int_0^\pi \max_{1\leq k\leq n} \left(a_k \frac{|\sin(kx)|}{x}\right) dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} + O(1)$.

Exercice 101 [ENS PLSR 2025 # 101] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Quelle est la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Déterminer la vitesse de convergence.

b. On suppose désormais f 1-périodique et de classe C^2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geq 1, \left|S_n - \int_0^1 f(t)\, dt\right| \leq \frac{C}{n^2}$.

c. On suppose désormais f 1-périodique et de classe C^3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geq 1, \left|S_n - \int_0^1 f(t)\, dt\right| \leq \frac{C}{n^3}$.

d. Que dire si f est 1-périodique et de classe C^∞ ?

Exercice 102 [ENS P 2025 # 102] Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que a < b, f une fonction continue de $[a,b] \times [-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $I(\lambda) = \int_a^b f(t, \sin(\lambda t))\, dt$. Montrer que $I(\lambda)$ admet une limite que l'on déterminera lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice 103 [ENS SR 2025 # 103] Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on note $e(y) = e^{2i\pi y}$.
Soit $f\colon t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{N} x_n e(nt)$. Soient $R \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \ldots, t_R) \in \mathbb{R}^R$.

1.

1. Montrer que $\sum_{r=1}^{R} |f(t_r)|^2 \leq NR \sum_{k=1}^{N} |x_k|^2$.

1. Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\Delta(t) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |n-t|$. On suppose les t_i distincts. Soit $\delta > 0$ tel que $\delta \leq \min_{1\leq i\neq j\leq R} \Delta(t_i - t_j)$. Montrer que $\sum_{r=1}^{R} |f(t_r)|^2 \leq (2N\pi + \delta^{-1}) \sum_{r=1}^{N} |x_k|^2$.Ind. On pourra montrer que, pour une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$,

$$|g(a)| \leq \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} |g(t)|dt + \frac{1}{2} \int_{a-h}^{a+h} |g'(t)|dt$$

.

Exercice 104 [ENS PLSR 2025 # 104] On note E l'ensemble des fonctions 1-périodiques et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n(f) = \int_0^1 e^{-2in\pi t} f(t)dt$.

1. Montrer que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

1. On suppose que f(0)=0. Montrer qu'il existe $g \in E$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = g(t)\,(e^{2i\pi t} - 1)$.

Exercice 105 [ENS P 2025 # 105] Soient a,b> 0 et $m \in \mathbb{Z}$. Calculer $I_m(a,b) = \int_a^{+\infty} e^{-ax-\frac{b}{x}} x^{m-\frac{1}{2}} dx$.

Exercice 106 [ENS L 2025 # 106] Soit $n \geq 2$. Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t^2 A} dt$ converge.

Exercice 107 [ENS PLSR 2025 # 107] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne. On suppose qu'il existe R > 0 tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$, f(x) = 0.

1. Montrer que $\varepsilon \mapsto \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ admet une limite en 0^+.

On note vp $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx\right)$ cette limite.

1. On note $T_f\colon x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(y) \ln|yx| dy + \int_x^{+\infty} f(y) \ln|yx| dy$. Justifier que T_f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose f de classe C^1. Montrer que T_f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (T_f)'(x) = \text{vp}\left(\int_{-y}^{+\infty} \frac{f(y+x)}{y} dy\right)$$

.

Exercice 108 [ENS SR 2025 # 108] 1. Pour $(p,k) \in \mathbb{N}^2$, montrer la convergence de $I_{p,k} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^k x^p}{1xy}\, dx\, dy$ et l'exprimer sous forme de la somme d'une série numérique.

1. On note $d_n = \text{ppcm}(1,\ldots,n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_{p,k} \in \frac{1}{d_p^2}\mathbb{Z}$ si p > k, et $I_{p,p} \in \zeta(2) + \frac{1}{d^2}\mathbb{Z}$.

1. On pose $P_n = \frac{1}{n!} D^n(X^n(1X)^n)$. Montrer que P_n est à coefficients entiers.

1. Montrer que $I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dxdy$ converge, et en donner une expression simplifiée.- e) Montrer que $I_n \in \frac{1}{d^2}(\mathbb{Z} + \zeta(2)\mathbb{Z})$.

Exercice 109 [ENS L 2025 # 109] Déterminer les segments S de $\mathbb{R}$ non réduits à un point tels que l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de S dans $\mathbb{R}$ soit dense dans $(\mathcal{C}^0(S,\mathbb{R}), \|\|_\infty)$.

Exercice 110 [ENS L 2025 # 110] On note E l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant pour limites respectives 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Soient $F, G, H \in E$, avec G et H continues.
On suppose qu'il existe quatre suites réelles a,b,c,d telles que $(x \mapsto F(a_n x + b_n))_n$ et $(x \mapsto F(c_n x + d_n))_n$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$, respectivement vers G et H. Montrer qu'il existe deux réels $\lambda > 0$ et μ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = G(\lambda x + \mu)$.

Exercice 111 [ENS L 2025 # 111] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de [0,1] dans]0,1], convergeant simplement vers une fonction f.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $t_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{i}$. Montrer que la suite (t_n) converge simplement

vers f.

1. On suppose que f_0 est à valeurs strictement positives et que, pour tout $n \geq 1$, la fonction

f_n est dérivable, croissante et que $f_n' \geq \frac{nf_n}{\sigma_n}$, où $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f_i$. On suppose également que $\sup \sigma_n(1/2) < +\infty$. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1/2[$, il existe $C_x > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$ n assez grand, $f_n(x) \leq e^{-C_x n}$.

1. On enlève l'hypothèse sur $\sigma_n(1/2)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que :

(i) $\forall x < x_0,\ \exists C_x > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ f_n(x) \leq e^{-C_x n}$; (ii) $\forall x > x_0,\ f(x) \geq x - x_0$.

Exercice 112 [ENS P 2025 # 112] Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{4^n}\right)$.

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(\inf\{f(t), t \geq x\}) = 0$.

1. Montrer que $0 < \lim_{x\to+\infty}\left(\sup\left\{\frac{|f(t)|}{\ln(\ln t)},\ t \geq x\right\}\right) < +\infty$.

Exercice 113 [ENS L 2025 # 113] Soit (λ_n) une suite de réels > 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2\lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq 3\lambda_n$. Montrer que :

$$\forall \alpha > 0,\ \exists (c_1, c_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \forall t \in [1/2, 1[,\ \frac{c_1}{(1-t)^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^\alpha t^{\lambda_n} \leq \frac{c_2}{(1-t)^\alpha}$$

.

Exercice 114 [ENS SR 2025 # 114] On pose : $\forall x > 0, \eta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Montrer que η est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$. Étudier sa limite en $+\infty$.
1. Montrer que η est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
1. Calculer $\eta(1)$.
1. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |e^z 1| \leq e^{|z|}1$.
1. Montrer que $\eta(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re} z > 0$.

Exercice 115 [ENS P 2025 # 115] 1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $L_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L_n(1) = 1$ et $(1 - X^2)L_n'' - 2XL_n' + n(n+1)L_n = 0$.

1. Montrer que $\forall x \in [-1, 1],\ \forall z \in]-1, 1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} L_n(x) z^n$.

Exercice 116 [ENS PLSR 2025 # 116] Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telles que f(1)=g(1)=1 et, pour tout $x \in [0, 1[, |f(x)| < 1$. On suppose qu'il existe C> 0 et $M \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 - f(1 - x) \underset{x \to 0^+}{\sim} Cx^{1/M}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 g(x) f(x)^n dx$.

1. Déterminer un équivalent de u_n.
1. Montrer l'existence de C' tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} 1 \right| \leq \frac{C'}{n}$.

Exercice 117 [ENS SR 2025 # 117] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + tx\right) dt$.

1. Montrer la définition de f sur $\mathbb{R}^+$
1. Soit $x \geq 0$. Montrer que Re $\left[\int_0^{+\infty} \exp\left(i\left(\frac{(t+i\varepsilon)^3}{3} + (t + i\varepsilon)x\right)\right) dt\right] \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} f(x)$.

Exercice 118 [ENS SR 2025 # 118] On note E l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable de $\mathbb{R}^{+*}$ dans C.

1. On convient que

$$\sqrt{+\infty} = +\infty$$

. Pour f continue de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{C}$, montrer que

$$\sqrt{\int_0^{+\infty} |f|^2} = \sup \left\{ \int_0^{+\infty} |fg|\ ;\ g \in E \text{ tel que } \int_0^{+\infty} |g|^2 = 1 \right\}$$

.

1. Soit $f \in E$. Montrer que $\Phi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x} dt$ appartient à E.

Exercice 119 [ENS P 2025 # 119] Soient $K \in \mathcal{C}^0([0, 1]^2, \mathbb{R})$ telle que $||K||_\infty < 1$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Étudier l'exis- tence et l'unicité de $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0, 1],\ g(x) \int_{\mathbb{R}}^1 K(x, t) g(t)\, dt = f(x)$.

Exercice 120 [ENS L 2025 # 120] Soient $\alpha, \theta \in]0, 1[$. Pour $f : [1, +\infty[\to [0, 1]$ continue, on pose $\|f\|_\alpha = \sup_{s \to \infty} s^\alpha |f(s)|$ et $F_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, [0, 1]),\ \|f\|_\alpha < +\infty\}$.

1. Pour $f \in F_\alpha$, on pose $T(f) : s \geq 1 \mapsto 1 - \left(1 - \frac{1}{s}\right)^\theta + \theta(s-1)^\theta \int_{-\infty}^{+\infty} (s + t - 1)^{-\theta - 1} f(t) dt$.

Montrer que T est une application lipschitzienne de F_α dans F_α (pour $\| \cdot \|_\alpha$).- b) On admet que, pour tout $\alpha \in]0, 1 - \theta[$, T possède un unique point fixe $f_\alpha \in F_\alpha$. Montrer que f_α ne dépend pas de α ; on le note f_0. Montrer que $\int_t^{+\infty} t^{-\theta} f_0(t) dt = +\infty$.

Exercice 121 [ENS PLSR 2025 # 121] 1. Expliciter le terme général d'une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la relation de ré- currence $na_{n+1} = (n + 1)a_n$ pour tout n.

1. Résoudre x(x-1)y" + 3xy' + y = 0 sur]-1,1[.

Exercice 122 [ENS PLSR 2025 # 122] Résoudre $x^2 y'' + xy' + (x^2 1/4)y = 0$ sur]0, 1[.

Exercice 123 [ENS P 2025 # 123] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b, \psi \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^{+*})$ croissante. Soit $y \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ non nulle et vérifiant $y'' + \psi(x)y = 0$. Montrer que les points où |y| admet un extremum local forment une suite finie $(a_1, \ldots, a_n)$ (éventuellement vide) et que la suite des valeurs $(|y(a_1)|, \ldots, |y(a_n)|)$ est décroissante.

Exercice 124 [ENS PLSR 2025 # 124] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. On suppose que $f'' + f' + f \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
1. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré 1 ou 2 et à racines simples dans $\mathbb{C}$.

On pose $\partial_P f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que, quelle que soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\partial_P f \xrightarrow[+\infty]{} 0$ implique $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\forall (x,y,z) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})^3, \quad \begin{cases} x' + ax + by + cz \xrightarrow{+\infty} 0 \\ y' + bx + cy + az \xrightarrow{+\infty} 0 \\ z' + cx + ay + bz \xrightarrow{+\infty} 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \xrightarrow{+\infty} 0 \\ y \xrightarrow{+\infty} 0 \\ z \xrightarrow{+\infty} 0 \end{cases}$$

Exercice 125 [ENS SR 2025 # 125] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ continue. On regarde l'équation (1) : $X'(t) = A(t)X(t)$.

1. Décrire l'ensemble des solutions de (1).

1. On suppose qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $D : I \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = P^{-1}D(t)P$.

Trouver une condition sur D pour que les solutions de (1) aient une limite quand $t \to +\infty$.

Exercice 126 [ENS P 2025 # 126] Soit $n \geq 2$. Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue. On considère les solutions de l'équation différentielle $() : x'(t) = A(t)x(t)$.

1. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue et à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans $]-\infty, -1]$ telles que, pour tout t, $A(t) = PD(t)P^{-1}$. Les solutions de () ont-elles toutes pour limite 0 en $+\infty$?

1. On suppose qu'il existe $P : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients dans $]-\infty, -1]$ telles que, pour tout t, $A(t) = P(t)DP^{-1}(t)$. Les solutions de () ont-elles toutes pour limite 0 en $+\infty$?

Exercice 127 [ENS PLSR 2025 # 127] On fixe un intervalle non trivial I.- a) Soient a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Soit f une solution non nulle sur I de y" + ay' + by = 0. Montrer que les zéros de f sont isolés : pour tout zéro t_0 de f il existe un $\delta > 0$ tel que f n'ait pas de zéro dans $|t_0\delta, t_0 + \delta| \setminus \{t_0\}$.

1. Soient p_1, p_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I$, $p_1(t) \geq p_2(t)$. Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telles que $f'' + p_1 f = 0$ et $g'' + p_2 g = 0$. Soient $t_1 < t_2$ deux zéros de f entre lesquels f n'admet aucun autre zéro. Montrer qu'il existe un zéro de g dans $[t_1, t_2]$, ainsi que dans $[t_1, t_2]$.

1. Soient p,q deux fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in [0,1],\ q(t) > 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ la solution sur [0,1] de l'équation différentielle $y'' + (p(t) + \lambda q(t))y = 0$ avec la condition initiale $f_\lambda(0) = 0$ et $f'_\lambda(0) = 1$. On note N_λ le nombre de zéros de f_λ. Montrer que $\lambda \mapsto N_\lambda$ est croissante et déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

1. On admet que $(x, \lambda) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mapsto f_\lambda(x)$ est continue. Montrer que l'ensemble

$\{\lambda \in \mathbb{R},\ f_\lambda(1) = 0\}$ est l'ensemble des termes d'une suite réelle strictement croissante.

1. Montrer que $(\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Exercice 128 [ENS PLSR 2025 # 128] Soit $\mu \in \mathbb{R}^+$. On considère $(E_\mu) : y''\mu(1 - y^2)y' + y = 0$.

1. Résoudre (E_0).

1. Soient x_0 et x_1 deux fonctions bornées et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et $\omega_1 \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des fonctions $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables par rapport à la seconde variable telles que :

- $\omega(\mu) = 1 + \omega_1 \mu + o(\mu)$;
- il existe $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que $\forall k \in \{0,1,2\},\ \forall (\tau, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ |(\partial_2)^k \varepsilon(\tau, \mu)| \leq C(\tau)\mu^2$;
- pour $x : (\tau, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \varepsilon(\tau, \mu)$, la fonction $t \mapsto x(\omega(\mu)t, \mu)$ est solution de (E_μ) sur $\mathbb{R}^+$ pour μ voisin de 0.

Calculer alors ω_1 et donner une expression explicite de x_0 et x_1 en fonction de quelques constantes inconnues.

Exercice 129 [ENS L 2025 # 129] Soit A une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, X'(t) = A(t)X(t) X(t)A(t). Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, X(t) est semblable à X(0).

Exercice 130 [ENS SR 2025 # 130] Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \frac{e^x e^y}{xy}$ si $x \neq y$ et $f(x,x) = e^x$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 131 [ENS P 2025 # 131] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $L \geq \ell > 0$ des réels. On suppose qu'en tout point de $\mathbb{R}^d$ la hessienne de f a son spectre inclus dans $[\ell, L]$. Soit $\tau \in]0, 2/L[$ ainsi qu'une suite u à termes dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \tau \nabla f(u_n)$. Montrer que u converge.

Exercice 132 [ENS PLSR 2025 # 132] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f tend vers $+\infty$ en ∞, que ∇f est lipschitzienne et que les points critiques de f sont isolés dans $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe un réel $\tau > 0$ tel que, quel que soit le choix de $a \in \mathbb{R}^d$, la suite définie par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \tau \nabla f(x_n)$ soit convergente. On commencera par le cas où $d = 1$ et $f \colon x \mapsto \frac{x^2}{2}$.

Exercice 133 [ENS L 2025 # 133] Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On pose $L = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} \in G\}$.

1. Montrer que L est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ind. Considérer $\left(e^{tA/k}e^{tB/k}\right)^k$.

1. Montrer que $\forall(A,B)\in L^2$, $ABBA \in L$.

1. Que peut-on dire de L pour $G=\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 134 [ENS PLSR 2025 # 134] Soit $n \geq 2$ un entier. Une application f de classe C^2 définie sur un ouvert O de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si, pour tout $x \in O$, df_x est composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.

1. On suppose que n=2 et que f vérifie $\mathcal{P}$. On note $f=(f_1,f_2)$. Montrer que f_1 et f_2 sont harmoniques, c'est-à-dire que $\Delta f_1 = 0$ et $\Delta f_2 = 0$.

1. Montrer que le résultat de la question a) est faux si $n \geq 3$. On pourra considérer l'application $f\colon x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$.

Exercice 135 [ENS P 2025 # 135] Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que f est harmonique si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. On dit que f est homogène de degré $\lambda\geq 0$ si, pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ et tout $t\in\mathbb{R}^+$, $f(tx,ty)=t^\lambda f(x,y)$. Soit $\lambda \geq 0$. Déterminer les fonctions harmoniques et homogènes de degré λ.

2) Géométrie

Exercice 136 [ENS L 2025 # 136] Montrer qu'il n'existe aucun triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont dans $\mathbb{N}^*$ et dont l'aire est un carré parfait non nul.

Exercice 137 [ENS P 2025 # 137] Soient a, b, c, d dans $\mathbb{R}^{+*}$. Quelle est l'aire maximale d'un quadrilatère dont les côtés successifs ont pour longueurs a, b, c, d ?

Exercice 138 [ENS PLSR 2025 # 138] 1. Quelle est l'aire maximale possible pour un rectangle de périmètre 1 ?

1. On considère un entier $n\geq 3$ et une liste strictement croissante $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ à termes dans $[0,2\pi]$. Déterminer la valeur maximale possible pour le périmètre du polygone de sommets $e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}$ (dans cet ordre).

1. Soit $z_1,\ldots,z_n$ des nombres complexes. On convient que $z_0=z_n$. On définit l'aire algé-

brique du polygone $z_1\cdots z_n$ comme $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{Re}(z_k)\,\mathrm{Im}(z_{k+1})-\mathrm{Im}(z_k)\,\mathrm{Re}(z_{k+1}))$. On fixe un réel p> 0. Parmi les listes $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ telles que le périmètre de $z_1\cdots z_n$ soit égal à p, déterminer celles qui maximisent l'aire algébrique du polygone associé.

3) Probabilités

Exercice 139 [ENS PLSR 2025 # 139] 1. Calculer la variance d'une variable de Poisson.

1. Soient $a\in\mathbb{N}^*$ et p un nombre premier. Calculer $\mathbf{E}(X^p$ modulo $p)$ où $X\sim\mathcal{P}(a)$.

Exercice 140 [ENS SR 2025 # 140] Soient $p\in[0,1]$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi Bernoulli de paramètre p. On pose $S_0=1$ et, pour $n\geq 0$, $S_{n+1}=\begin{matrix} 3S_n+1 & \text{si } X_n=1 \\ \frac{S_n}{2} & \text{si } X_n=0 \end{matrix}$

1. Étudier les cas $p=0$ et $p=1$. On supposera que $0<p<1$ dans toute la suite de l'exercice.

1. Donner une formule de récurrence vérifiée par la suite $(\mathbf{E}(S_n))_{n\geq 0}$, et étudier son comportement quand $n\to+\infty$.

1. Montrer que $\mathbf{P}((S_n)_{n\geq 0}$ est bornée$)=0$.

Exercice 141 [ENS SR 2025 # 141] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}(X_1^4)<+\infty$. On pose $T_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n\geq 1$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(X_1)$.

Exercice 142 [ENS L 2025 # 142] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ (resp. $(Y_n)_{n\geq 1}$) une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $T=\inf\{n\geq 2\ ;\ X_n\notin\{X_1,\ldots,X_{n-1}\}\}$ et $S=\inf\{n\geq 2\ ;\ Y_n\notin\{Y_1,\ldots,Y_{n-1}\}\}$. On suppose que $T\sim S$. Que peut-on dire du lien entre les suites (X_n) et (Y_n) ?

Exercice 143 [ENS P 2025 # 143] Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\beta>1$. Soit $(Y_p)_{p\in\mathcal{P}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbf{P}(Y_p=k)=(1-p^{-\beta})p^{-k\beta}$ pour $k\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathcal{P}$. On pose $Z=\sum_{n\in\mathcal{P}}Y_p\ln p$ et $X=\exp Z$.

1. Donner la loi de X.

1. En déduire que $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^\beta}=\frac{1}{\zeta(\beta)}$ où μ est la fonction de Möbius, définie par $\mu(n)=0$ si n est divisible par un carré >1, et $\mu(n)=(-1)^m$, où m est le nombre de ses facteurs premiers, sinon.

Exercice 144 [ENS L 2025 # 144] Montrer qu'il existe $C>0$ tel que pour tout $n\geq 1$ et tout $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\in\{\pm1\}^{n^2}$, il existe $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\{\pm1\}^n$ tels que $\sum_{1\leq i\leq n}a_{i,j}x_iy_j\geq Cn^{3/2}$.

Exercice 145 [ENS MP 2025 # 145] Soient $\theta\in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathbf{P}(X>0)>0$. Montrer que $\mathbf{P}(X\geq\theta\,\mathbf{E}(X))\geq\frac{(1-\theta)^2\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

Exercice 146 [ENS P 2025 # 146] Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$. Soit $E_n=\{e_1,\ldots,e_n\}$ un ensemble de cardinal n. Soient $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur S_n. Si $i,j\in[1,n]$, on pose $e_ie_j=e_{\sigma_i(j)}$. Montrer que la probabilité que $(E,)$ soit un groupe, sachant que admet un neutre, tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 147 [ENS L 2025 # 147] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_n = e_i) = \mathbf{P}(X_n = -e_i) = \frac{1}{2d}$ pour $1 \leq i \leq d$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_k$ et $S_0 = 0$.
Soit $T = \inf\{n > 0, S_n = 0\}$ et $p_d = \mathbf{P}(T < +\infty)$. On admet que $p_d < 1$ pour $d \geq 3$. Montrer que $p_d \to 0$ lorsque $d \to +\infty$.

Exercice 148 [ENS P 2025 # 148] Soient $p \in]0, 1/2[$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telle que $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_n = -1) = p$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer l'existence de $c, C_1, C_2 > 0$ tels que $\forall u \geq 0,\ C_1 e^{-cu} \leq \mathbf{P}\left(\sup_{n \geq 1} S_n \geq u\right) \leq C_2 e^{-cu}$.

Exercice 149 [ENS PLSR 2025 # 149] 1. Soit X une variable aléatoire réelle et $s > 0$ tel que $\mathbf{E}(e^{sX})$ soit finie. Démontrer que $\forall a > 0, \mathbf{P}(X \geq a) \leq e^{-sa}\mathbf{E}(e^{sX})$.

1. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variable aléatoires i.i.d. à valeurs dans [0, 1].

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Démontrer que $\forall t > 0, \mathbf{P}(|S_n - \mathbf{E}(S_n)| \geq t) \leq 2e^{-t^2/(2n)}$.

Exercice 150 [ENS PLSR 2025 # 150] Soit $(E, \mathcal{P}(E))$ un espace probabilisable avec E dénombrable.

1. Rappeler la définition d'une probabilité sur cet espace.

1. Pour A et B probabilités sur cet espace, on pose $d(A, B) = \max\limits_{S \subset E} A(S)B(S)$. Montrer que $d(A, B) = \frac{1}{2}\sum_x |A(\{x\}) - B(\{x\})|$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans E de lois respectives A et B. Montrer que $P(X \neq Y) \geq d(A, B)$.

1. Les deux lois A et B étant fixées, montrer qu'on peut construire X et Y de façon à assurer l'égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 151 [ENS PLSR 2025 # 151] Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans [0, n]. On pose $p_k = \mathbf{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbf{P}(Y = k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et $d(p, q) = \max_{S \subset [\![0,n]\!]} \overline{\mathbf{P}}(X \in S) - \mathbf{P}(Y \in S)$.

1. Montrer que $d(p, q) \geq 0$. Que dire si d(p,q) = 0 ?

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Comparer $\mathbf{E}(\varphi(X))$ et $\varphi(\mathbf{E}(X))$.

1. On suppose de plus qu'il existe au moins deux éléments k de [0,n] tels que $p_k > 0$. On suppose de plus que φ strictement convexe, c'est-à-dire telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in]0, 1[\ \ x \neq y \Rightarrow \varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$. Montrer que $\mathbf{E}(\varphi(X)) > \varphi(\mathbf{E}(X))$.

1. On suppose que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ p_k > 0$ et $q_k > 0$. On pose $H(p, q) = \sum_{k=0}^{n} p_k \ln\left(\frac{p_k}{q_k}\right)$.

Montrer que $H(p, q) \geq 0$. Que dire si H(p,q) = 0 ?

Exercice 152 [ENS L 2025 # 152] On considère $r_0 = 0$ et $(r_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose $p_{i,j} = r_i$ si $j = i+1, 1 - r_i$ si $j = i - 1$ et 0 sinon.On admet l'existence d'une famille de variables aléatoires $(X_k^i)_{(i,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$ telles que

- $X_0^{i_0} = i_0$ p.s. pour tout $i_0 \in \mathbb{N}^*$,
- $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_k^{i_k} = i_{k-1})\right) = \prod_{i=1}^{n} p_{i_{k-1}, i_k}$ pour tout $(i_0, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^{*k+1}$.

On pose, pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, $\tau_j^i = \inf\{k \in [\![0, +\infty]\!],\ X_k^i = j\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
Soit $b \in \mathbb{N}$. Calculer, pour $i \in [0, b]$, $\hat{p_i} = \mathbf{P}(\tau_0^i < \tau_b^i)$ en fonction des $\gamma_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{1-r_i}{r_i}$.

Exercice 153 [ENS PLSR 2025 # 153] Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes et $X_0 = k \in \mathbb{Z}$ (constante). On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_0 + \cdots + X_n$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

1. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$. Que dire de la loi de $(S_n)_{n \geq m}$ conditionnée par $(S_1 = k_1, \ldots, S_m = k_m)$?

1. Soient $k, N \in \mathbb{N}^*$ avec $N \geq k$. On considère que la marche aléatoire s'arrête dès que $S_n = 0$ ou $S_n = N$. On admet que l'arrêt est presque sûr. Déterminer la probabilité p_k que la marche s'arrête sur 0 en partant de k.

1. Déterminer le temps moyen d'arrêt (en 0 ou N cette fois) en partant de k.

Exercice 154 [ENS P 2025 # 154] On considère n variables aléatoires de Rademacher indépendantes $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$. Montrer que, pour tout réel $p > 0$, il existe $(c_p, C_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que,
pour tout

$$(z_1, \ldots z_n) \in \mathbb{C}^n$$

, $c_p\left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i z_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p\left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 155 [ENS L 2025 # 155] Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X_n = -k) = ce^{-|k|}$ où c est à déterminer. Déterminer la loi du rayon de convergence de la série entière aléatoire $\sum X_n z^n$.

Exercice 156 [ENS P 2025 # 156] Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de [0,1]. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_n le graphe aléatoire G_{n,p_n} d'Erdös-Renyi, c'est-à-dire un graphe aléatoire de sommets [1,n] et une famille $(X_{\{i,j\}})_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2([1,n])}$ de variables de Bernoulli i.i.d. de paramètre p_n, avec $X_{\{i,j\}} = 1$ si et seulement s'il existe une arête reliant i et j. On note I_n le nombre de sommets isolés deG_n.

1. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geq (1 + \varepsilon)\frac{\ln(n)}{n}$. Montrer que $\mathbf{P}(I_n \geq 1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

1. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leq (1-\varepsilon)\frac{\ln(n)}{n}$. Montrer que $\mathbf{P}(I_n \geq 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 157 [ENS L 2025 # 157] Montrer qu'il existe un réel c> 0 vérifiant la condition suivante : quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelle que soit S partie non vide de $\mathbb{U}_n$, il existe un entier naturel $p \leq \frac{cn}{|S|}$ ainsi
qu'une p-liste $(z_1, \dots, z_p)$ d'éléments de $\mathbb{U}_n$ telle que $|\bigcup_{k=1}^{p} z_k S| \geq \frac{n}{2}$.

Exercice 158 [ENS PLSR 2025 # 158] Soit $p \in [0, 1/2]$. On fixe une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ et telles que $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = p$ et $P(X_1 = 0) = p$
valeurs dans

$$\{-1, 0, 1\}$$

et telles que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = 1) = 1 - 2p$. Pour $b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(b, a, n) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k = b\right)$.

1. On suppose $a = 2^{k-1}$. Calculer P(0, a, n) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose p = 1/4 et $a = (1)_{k\in\mathbb{N}}$. Calculer P(0, a, n) pour tout $n \in N$.

1. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles $b \mapsto P(b, a, n)$ est maximale en 0 pour tout $a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$.

Exercice 159 [ENS PLSR 2025 # 159] Soit $n \geq 3$. Une alpiniste dispose de n lieux possibles pour planter sa tente, lieux numérotés de 1 à n. Elle peut visiter chacun de ces lieux successivement, à partir du numéro 1, et doit décider si elle y plante sa tente. Lorsqu'elle visite le lieu k, elle peut savoir si elle préfère ce lieu à tous les lieux précédemment visités, mais ne sait pas si elle le préfère aux lieux non encore visités. Une fois un lieu visité, si l'alpiniste a refusé d'y installer sa tente elle ne pourra plus revenir sur ce lieu. L'alpiniste a pour objectif de maximiser la probabilité d'avoir choisi celui des n lieux qui a sa préférence parmi les n lieux.

1. Déterminer une stratégie optimale pour l'alpiniste lorsque n=3.

1. On fixe un $k \in [0, n-1]$. L'alpiniste suit la stratégie décrite ci-après : elle visite automatiquement les k+1 premiers lieux ; étant donné $\ell \in [k+1, n-1]$, si l'alpiniste visite le ℓ-ième lieu alors elle l'écarte si et seulement s'il n'a pas sa préférence parmi tous les lieux déjà visités. Déterminer la probabilité $p_{n,k}$ pour que l'alpiniste s'installe sur le lieu ayant sa préférence parmi les n lieux.

1. On fixe un k_n maximisant $p_{n,k}$ lorsque k parcourt $[0, n-1]$. Étudier le comportement asymptotique de k_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 160 [ENS L 2025 # 160] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles discrètes. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $f_n(t) = \frac{1}{n}\left|\{k \in [1, n], X_k \leq t\}\right|$. Montrer qu'il existe une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{P}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\right)$
0 pour tout réel $\varepsilon > 0$.

Exercice 161 [ENS L 2025 # 161] Pour deux variables aléatoires réelles bornées X et Y, sur des espaces probabilisés a **priori** distincts, on note $X \leq_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leq \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On se donne, sur un espace probabilisé, deux suites $(M, X_1, X_2, \dots)$ et $(N, Y_1, Y_2, \dots)$ de variables aléatoires indépendantes bornées vérifiant les conditions suivantes :

- les X_n, où $n \in \mathbb{N}^*$, sont identiquement distribuées et positives ;
- les Y_n, où $n \in \mathbb{N}^*$, sont identiquement distribuées et positives ;
- M et N sont à valeurs dans $\mathbb{N}$:
- $M \preccurlyeq_c N$ et $X_1 \preccurlyeq_c Y_1$.

On pose $S = \sum_{k=1}^{M} X_k$ et $T = \sum_{k=1}^{N} Y_k$. Montrer que $S \preccurlyeq_c T$.

Exercice 162 [ENS L 2025 # 162] Soient E une partie bornée et au plus dénombrable de $\mathbb{R}^+$, et $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux lois de probabilité sur E. Déterminer, en fonction de ces lois, la plus petite constante $K_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ telle que, pour tout couple (X,Y) de variables aléatoires réelles à valeurs dans E telles que $X \sim \mathcal{L}$ et $Y \sim \mathcal{L}'$, on ait l'inégalité $\mathbf{E}(XY) \leq K_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$.

Exercice 163 [ENS SR 2025 # 163] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbf{E}\left(\|X\|^2\right) < +\infty$. On note $C(X) = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de covariance.

1. Que dire de C(X) si les X_i sont indépendantes ?

1. Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $Y = \langle v, X\rangle$. Exprimer $\mathbf{V}(Y)$ en fonction de C(X).

1. On suppose les X_i centrées. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Z = AX. Exprimer $\mathbf{E}(\|Z\|^2)$ en fonction de C(X).

1. Caractériser les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un vecteur aléatoire X tel que A = C(X).

1. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $P(X \in H) = 1$ si et seulement si $H^\perp \subset \mathrm{Ker}(C(X))$.

Exercice 164 [ENS SR 2025 # 164] Soit $\alpha > 0$. On considère l'équation différentielle () : $(y' = -x, x' = \alpha^2 y)$ avec $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

1. Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est fixé, justifier l'existence et l'unicité d'une solution de () vérifiant $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Pour cette solution, on pose $I(t) = y^2(t)$ et $J(t) = \alpha^2 x^2(t)$.

1. Montrer que les applications $T \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt$ et $T \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T J(t)dt$ admettent une

limite finie en $+\infty$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires x_0, y_0 indépendantes à valeurs dans $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}\left(x_0 = \frac{k}{N}\right) = \mathbf{P}\left(y_0 = \frac{k}{N}\right) = \gamma_N \exp\left(-(k/N)^2\right)$.

1. Justifier l'existence de $\gamma_N \in \mathbb{R}^+$ pour lequel ces conditions définissent la loi des deux variables aléatoires.

1. On fixe t et on considère, pour $N \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $f_N(t) = I(t) + J(t)$ (les fonctions I et J sont associées aux variables aléatoires x_0 et y_0). Montrer que $\mathbf{E}\left(e^{-f_N(t)}\right)$ possède une limite quand $N \to +\infty$.

II) ENS PSI **AUTRE**

1) Algèbre

Exercice 165 [ENS PSI 2025 # 165] 1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i,j \in [1,n], a_{i,i} = 2, a_{i,j} = -1$ si $|i-j| = 1, a_{i,j} = 0$ si $|i-j| \ge 2$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$ où ≥ 0 signifie que toutes les coordonnées sont positives ou nulles.

1. En déduire que A est inversible.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{i\ne i} |a_{i,j}|$.

1. Montrer que A est inversible.

1. Soit E et F les matrices de taille n définies par $e_{i,j} = a_{i,j}$ si $j \ge i, e_{i,j} = 0$ si $j < i$ et $f_{i,j} = -a_{i,j}$ si $j < i, f_{i,j} = 0$ si $j \ge i$. Montrer que, si $(u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ vérifie Ev = Fu, alors $||v||_\infty \le ||u||_\infty$.

1. Montrer qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall u, v \in \mathbb{R}^n, Ev = Fu \Rightarrow ||v||_\infty \le k||u||_\infty$.

1. Soient $b \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et (x_k) la suite définie par $\forall k \in \mathbb{N}$, $Ex_{k+1} = Fx_k + b$. Montrer que la suite (x_k) est bien définie et que la suite (x_k) converge. Déterminer sa limite.

Exercice 166 [ENS PSI 2025 # 166] Soit $f\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$. Spectre de f ? Diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 167 [ENS PSI 2025 # 167] 1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La suite $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$ peut-elle être dense dans $\mathbb{C}$?

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1. Pour $X \in \mathbb{C}^2$, la suite $\left(A^k X\right)_{k\in\mathbb{N}}$ peut-elle être dense dans $\mathbb{C}^2$?

1. Soient $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}), X \in \mathbb{C}^m$. La suite $(A^k X)_{k\in\mathbb{N}}$ peut-elle être dense dans $\mathbb{C}^m$?

1. Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ qui n'admet pas de valeur propre réelle.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}), a > 0, \theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\sin\theta & * & \cdots & * \\ a\sin\theta & a\cos\theta & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} P^{-1}$$

.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), X \in \mathbb{R}^m$. La suite $(A^k X)_{k\in\mathbb{N}}$ peut-elle être dense dans $\mathbb{R}^m$?

Exercice 168 [ENS PSI 2025 # 168] On dit que $P = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation s'il existe une permutation σ de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ p_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$. On dit que $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une H-matrice si tous ses coefficients valent ± 1 et si ses colonnes forment une famille orthogonale pour le produit scalaire canonique.

1. Soit P une matrice de permutation. Montrer que P est orthogonale et que P^T est une matrice de permutation.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$.Montrer que M est une H-matrice si et seulement si $M^T M = nI_n$.
   c. Soient $D \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ une matrice diagonale, M une H-matrice de taille n, et P une matrice de permutation de taille n. Montrer que DM, M^T, MD et PM sont des H-matrices. On suppose dans les dernières questions qu'il existe une H-matrice de taille $n \ge 3$.
   d. Montrer qu'il existe une H-matrice $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'ayant que des 1 en première ligne.

1. Montrer que $\forall i,j \in [\![2,n]\!]$ avec $i \ne j$, on a $\sum_{k=1}^n (s_{i,k}+1)(s_{j,k}+1) = n$.

1. En déduire que n est un multiple de 4. On écrit n=4k avec $k \in \mathbb{N}^*$.

g) Montrer qu'il existe une H-matrice de taille n dont les trois premières lignes sont présentées en quatre blocs de taille k de la forme suivante :

Exercice 169 [ENS PSI 2025 # 169] Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ est noté $\langle x, y\rangle = x^T y$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique $(A^+, A^-) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R})$ tel que $A = A^+ + A^-$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle Ax, x\rangle = \langle A^+ x, x\rangle$.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ les valeurs propres de A^+ et $E_1, \dots, E_\ell$ les sous-espaces propres associés. On suppose de plus que A et A^+ commutent.

1. Montrer que $\forall x \in E_i$, $Ax \in E_i$ et $A^- x \in E_i$.

1. Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$ et F_μ le sous-espace propre associé. Montrer qu'il existe j tel que $\mu = \lambda_j$ et $F_\mu \subset E_j$.

1. Soit $i \in [1, \ell]$. On suppose $\dim(E_i) = 1$. Montrer que $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)$ et $E_i \subset \mathrm{Ker}(A^-)$.

1. Montrer que si A est diagonalisable alors A est symétrique.

Exercice 170 [ENS PSI 2025 # 170] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMA^T$.

1. On suppose A diagonalisable.

1. Montrer que **u** est diagonalisable.

b. Montrer que $tr(u) = [tr(A)]^2$. *c.* Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est stable par u. On note u_S l'endomorphisme induit par u sur

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

. Montrer que $\mathrm{tr}(u_S) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A^2) + [\mathrm{tr}(A)]^2)$.

1. On suppose désormais que $\tilde{A}^m = I_n$ pour un entier $m \geq 1$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b. Montrer qu'il existe des entiers r,s tels que $r + 2s \leq n$ et des entiers $k_1 \leq \dots \leq k_s$ tels que $\mathrm{tr}(A) = r + 2\sum_{s=1}^{s} \cos\left(\frac{2k_i\pi}{m}\right)$. *c.* Montrer que $\{A^k, k \in \mathbb{N}\}$ est fini. *d.* On pose $N = \mathrm{Card}(\{A^k, k \in \mathbb{N}\})$. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{tr}(A^k)$.

Exercice 171 [# 171] 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k \geq 0$.

1. Montrer que f est continue.

b. On suppose k < 1. Montrer que f admet un unique point fixe. *c.* Donner un exemple de fonction 1-lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'a pas de point fixe.

1. On considère $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme N. Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction 1lipschitzienne. Soit Ω l'ensemble des vecteurs x de E tels que la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $\Omega = \emptyset$ ou $\Omega = E$.

1. On suppose $E = \mathbb{C}$ et f(z) = az + b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit 1-lipschitzienne. En supposant cette condition réalisée, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Omega = E$.

Exercice 172 [ENS PSI 2025 # 172] Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension 2 muni d'une base (e_1, e_2) vérifiant la propriété () : $\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, ||\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2|| = |||\lambda_1||e_1 + ||\lambda_2||e_2||$.

1. Rappeler la définition d'un espace euclidien.

1. Donner un exemple d'espace vectoriel normé et d'une base où la propriété () est vérifiée.

1. Donner un exemple d'espace vectoriel normé et d'une base où la propriété () n'est pas vérifiée.

1. On veut montrer le résultat () : pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$, si $|\alpha_1| \leq |\beta_1|$ et $|\alpha_2| \leq |\beta_2|$ alors $||\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2|| \leq ||\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2||$. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et on définit la fonction $f(\mu) = \|\mu e_1 + \lambda e_2\|$.

- Montrer que $f\left(\frac{\mu+\mu'}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(\mu) + \frac{1}{2}f(\mu')$ pour tout $(\mu, \mu') \in \mathbb{R}^2$.

- En déduire que f est convexe.

- Montrer que f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$. iv) En déduire la validité de l'implication ().

Exercice 173 [ENS PSI 2025 # 173] Nature, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, de la série $\sum(-1)^n \frac{n^\alpha}{n^{2\alpha}+(-1)^n}$.

Exercice 174 [ENS PSI 2025 # 174] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{pq}{p+q}$.

1. Montrer que $(H_n \ln(n+1))$ converge. On note sa limite γ.

1. Déterminer un équivalent de S_n.

1. Donner un développement asymptotique à deux termes de S_n.

Exercice 175 [ENS PSI 2025 # 175] Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note D(f) l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+1)f(x)$.

1. Montrer que D induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (on identifie un polynôme et la fonction polynomiale associée). Quel est son noyau ? son image ?

1. Soient $f \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]x, x+n[$ tel que $D^n(f)(x) = f^{(n)}(c)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^\lambda \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{N}$.

Exercice 176 [ENS PSI 2025 # 176] Soit G l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos(2k\pi x) + b_k \sin(2k\pi x))$$

avec (a_n) et (b_n) sommables. Soit F l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 1-périodiques.

1. Si $f \in G$, montrer que les a_k et b_k sont uniquement déterminés par f.

Si $a \in \mathbb{R}$ est fixé, on pose, pour $f \in F$, $T(f) : x \mapsto f(x+a)f(x)$.

1. Si $a \in \mathbb{Z}$, que vaut T ? c) Si $a \in \mathbb{Q}$, décrire Ker(T).

1. Si $a = \sqrt{2}$, décrire Ker(T).

1. Oue vaut Im$(T|_G)$ pour $a = \sqrt{2}$?

Exercice 177 [ENS PSI 2025 # 177] Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ convexe, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.

1. Soit $t \in I$. Pour tout $x \in I \setminus \{t\}$, on pose $\Delta_t(x) = \frac{f(x)f(t)}{xt}$.

1. Montrer que Δ_t est croissante sur $I \setminus \{t\}$.

1. Justifier l'existence de $f'(t^+) = \lim_{x \to t^+} \Delta_t(x)$. iii) On pose $a_t : x \mapsto f(t) + f'(t^+)(x-t)$. Montrer que $f(x) = \sup_{t \in I} a_t(x)$.

1. On dit que f est log-convexe lorsque $f > 0$ sur I et $\ln \circ f$ convexe

1. Montrer que si f est log-convexe, alors elle est convexe.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$. Montrer que f est log-convexe si et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\alpha x} f(x)$ est convexe. iii) Montrer que la somme de deux fonctions log-convexes est log-convexe.

1. On pose $\Gamma : x \mapsto \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Justifier que Γ est définie, de classe $\mathcal{C}^2$, et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que Γ est log-convexe.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer : $\Gamma(x+n) = \Gamma(x)\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$ et $\Gamma(n+1) = n!$.

1. Montrer que $\ln(n) \leq \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\Gamma(n+1+x)}{\Gamma(n+1)}\right) \leq \ln(n+1)$.

Exercice 178 [ENS PSI 2025 # 178] 1. Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ décroissante, positive, et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f(x) = o(1/x) quand $x \to +\infty$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, positive et intégrable qui n'est pas négligeable devant 1/x en $+\infty$.

Exercice 179 [ENS PSI 2025 # 179] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, strictement décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(x^n)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) > 0$ et que $\lim_{x\to\infty} f = 0$.

1. Soit $a \in [0, 1[$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur [0,a]. Cette suite est-elle uniformément convergente sur $[0, 1]$?

1. Soit $b \in]1, +\infty[$. Mêmes questions pour les intervalles $[b, +\infty[$ et $]1, +\infty[$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. La suite de terme général $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$ est-elle convergente ?

Exercice 180 [ENS PSI 2025 # 180] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec a < b et I = [a,b]. Soit $f\colon I \to I$ continue. La notation f^n désigne $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

On suppose qu'il existe $\omega \in I$ tel que $\forall x \in I$, $f^n(x) \to \omega$ quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ω est l'unique point fixe de f^k.

1. Montrer que $f(I) \neq I$.

1. Montrer que $\cap_{n\geq 1} f^n(I) = \{\omega\}$.

1. Montrer que la suite (f^n) converge uniformément vers la fonction constante égale à ω.

Exercice 181 [ENS PSI 2025 # 181] Pour $n \geq 1$, on note b_n le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n.
On pose
$$b_0 = 1$$
et $B : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$.
réflexive ($\forall x \in E, x \sim x$),

1. Montrer que b_n est le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble de cardinal n. Cette notion étant hors-programme, nous en donnons la définition. Une relation ~ sur l'en-

semble E est dite d'équivalence lorsque c'est une relation : symétrique ($\forall (x, y) \in E^2, x \sim y \Rightarrow y \sim x$), - transitive ($\forall (x, y, z) \in E^3, x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$).

1. Calculer b_0, b_1, b_2.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k$.
1. Montrer que B est dérivable sur un intervalle ouvert non vide, en déduire une équation différentielle vérifiée par B puis la résoudre.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Exercice 182 [ENS PSI 2025 # 182] 1. Calculer $\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{t} dt$. On donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Soient $x \in [0, 1]$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec 0 < a < b. Montrer que l'équation $y^a y^b = x^a x^b$ d'inconnue y admet deux solutions, sauf pour une valeur x_0 de x que l'on déterminera.
1. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_0) = x_0$ et, pour $x \neq x_0$, f(x) est l'unique solution différente de x de l'équation $y^a - y^b = x^a - x^b$. Montrer que f est décroissante et continue.
1. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que l'équation $x^{b-a} = \frac{1-t^a}{1-t^b}$ admet une unique solution $t \in$

]0,1[. On la note g(x).

1. Calculer $I = \int_0^1 -\frac{\ln(f(x))}{x} dx$. On utilisera le changement de variable t = g(x).

Exercice 183 [ENS PSI 2025 # 183] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$. Soit $J : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle \langle v, x\rangle$.

1. Calculer le gradient de J et montrer que $\forall x, h \in \mathbb{R}^n, J(x+h) - J(x) = \langle \nabla J(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle$.
1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- il existe $x \in \mathrm{Ker}(B)$ tel que $\forall z \in \mathrm{Ker}(B), J(z) \geq J(x)$;
- il existe $x \in \mathrm{Ker}(B)$ tel que $\nabla J(x) \in \mathrm{Ker}(B)^\perp$;
- le système (S) : $\begin{cases} Ax + B^T y = v \\ Bx = 0 \end{cases}$

1. Montrer que si $Ker(B) = \{0\}$ alors (S) admet au moins une solution.
1. Montrer que (S) admet au plus une solution si et seulement si $Ker(B^T) = \{0\}$.
1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0, \beta \geq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $J(x) \geq \alpha||x||^2\beta||x||$.
1. En déduire que (S) admet au moins une solution.

Exercice 184 [ENS PSI 2025 # 184] Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien.

1.
1. Montrer que la fonction $x \mapsto ||x||$ est de classe C^1 sur $E \setminus \{0\}$. Calculer sa différentielle.
1. Soient H un sous-espace vectoriel de E et $a \in E$.

Soit $x \in H$ tel que $||x - a|| = \inf_{y \in H} ||y - a||$. Montrer que $x - a \in H^\perp$.

1.
1. Soient $a, b \in E$ et $\varphi : x \in E \mapsto ||xa|| + ||xb||$. Calculer la différentielle de φ là où elle existe, et déterminer les points où celle-ci s'annule.
1.) Déterminer les extrema de φ sur E.
1. Soit $\rho : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (1-y)^2}$. Déterminer les extrema de ρ.
1. Soient A, B et C trois points du plan formant un triangle aigu. Soit $\Psi : M \mapsto AM + BM + CM$.
1. Montrer que Ψ admet un minimum en un point O tel que, pour tout couple $(M, N) \in \{A, B, C\}^2$ de points distincts, l'angle non orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ vaut $\frac{2\pi}{3}$.
1. Que se passe-t-il si A, B et C forment un triangle équilatéral ?
1. Que peut-on conclure dans le cas général ?

2) Probabilités

Exercice 185 [ENS PSI 2025 # 185] 1. Soient N boules rouges et M boules noires dans une urne. Combien y a-t-il de suites de tirages successifs sans remise d'une boule jusqu'à vider l'urne ?

On considère désormais une urne contenant n> 2 boules rouges et 2N-n> 2 boules noires. On effectue des tirages successifs sans remises de deux boules à la fois jusqu'à vider l'urne. On note X le nombre de tirages ayant donné deux boules rouges.

1. On suppose $n > N$. Déterminer $P(X \geq 1)$.

1. Majorer X.

On suppose n pair et on note A l'événement « les $\frac{n}{2}$ premiers tirages sont constitués de deux boules rouges » et B l'événement « les $\frac{n}{2} - 1$ premiers tirages sont constitués de deux boules rouges et les deux tirages suivants d'une boule rouge et d'une boule noire ». Sont-ils équiprobables ?

1. Soit un entier $k < N$. Déterminer P(X = k).

1. Déterminer $\mathbf{E}(X)$.

1. On suppose que $n = \lfloor \lambda N \rfloor$ avec $\lambda < 1$. Montrer que $\mathbf{E}(X) \sim \frac{\lambda^2}{4} N$.

Exercice 186 [ENS PSI 2025 # 186] 1. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$, on note $||f||_p = \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p}$.

- Montrer que $\|\|_2$ et $\|\|_4$ sont des normes sur E.
- Montrer que $\| \cdot \|_4 \geq \| \cdot \|_2$.
- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par $\forall x \in [0, 1/2n],\ f_n(x) = 0$,
  $\forall x \in [1/n, 1], f_n(x) = x^{-1/4}$ et f_n est affine sur $[1/2n, 1/n]$. Comparer $||f_n||_2$ et $||f_n||_4$. Qu'en déduit-on ?

1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
   Pour
   $$a = (a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*},\ n \geq 1$$
   et $p \geq 2$, on note $N_{n,p}(a) = \left(\mathbf{E} \left(|\sum_{k=1}^n a_k X_k|^p \right) \right)^{1/p}$.

- Calculer $N_{n,2}(a)$.
- Calculer $N_{n,4}^4(a)$ en fonction de $N_{n,2}(a)$.

Exercice 187 [ENS PSI 2025 # 187] Soit S_n l'ensemble des permutations de [1, n], que l'on munit de la probabilité uniforme.

1. Pour $k, \ell \in [1, n]$ avec $k \neq \ell$, on note $\tau_{k,\ell} \in \mathcal{S}_n$ la transposition définie par $\tau_{k,\ell}(k) = \ell$, $\tau_{k,\ell}(\ell) = k$ et $\forall j \in [1, n] \setminus \{k, \ell\}, \tau_{k,\ell}(j) = j$.

- Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, expliciter $\sigma \circ \tau_{k,\ell} \circ \sigma^{-1}$.
- Déterminer tous les $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tels que $\forall \alpha \in \mathcal{S}_n, \sigma \circ \alpha = \alpha \circ \sigma$.

1. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $Z_\sigma = \{\alpha \in \mathcal{S}_n,\ \sigma \circ \alpha = \alpha \circ \sigma\}$.

- Montrer que Z_σ est stable par composition et passage à l'inverse.
- Pour $\sigma \neq id$, montrer que $2|Z_\sigma| \leq |S_n|$.

1. On tire indépendamment et avec remise deux éléments σ et τ de S_n.

- Montrer que $\forall n \geq 3, p_n = \mathbf{P}(\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma) \leq \frac{7}{12}$.
- Déterminer p_3.

1. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $C_\sigma = \{\alpha \circ \sigma \circ \alpha^{-1},\ \alpha \in S_n\}$.

- Montrer que $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ |C_\sigma| = \frac{n!}{|Z_\sigma|}$.
- Montrer que $\forall \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n, C_\sigma = C_\tau$ ou $C_\sigma \cap C_\tau = \emptyset$.

Exercice 188 [ENS PSI 2025 # 188] Soit $n \geq 2$. On se place dans $\mathbb{N}^2$ et on considère le rectangle $[0, n] \times [0, 2]$. On appelle recouvrement de $[0, n] \times [0, 2]$ tout ensemble fini formé de rectangles translatés de $[0, 1] \times [0, 2]$ (rectangles verticaux) et de $[0, 2] \times [0, 1]$ (rectangles horizontaux) qui recouvrent $[0, n] \times [0, 2]$ sans que leurs intérieurs ne se chevauchent.

On note u_n le nombre de recouvrements de $[0, n] \times [0, 2]$. On munit l'ensemble des recouvrements de $[0, n] \times [0, 2]$ de la probabilité uniforme.

1. Calculer u_1, u_2, u_3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. En déduire une expression de u_n.

1. On note $P_{1,n}$ la probabilité qu'il y ait un rectangle vertical tout à gauche.

Calculer $P_{1,n}$ et montrer que $(P_{1,n})$ admet une limite L.
c. On note V_n le nombre de rectangles verticaux. Calculer $\mathbf{E}(V_n)$.Ind. On pourra écrire $V_n = \sum_{i=1}^{n} U_{i,n}$ où $U_{i,n}$ est l'indicatrice de l'événement : « il y a un
rectangle vertical en position i ».
d. Montrer que $\frac{\mathbf{E}(V_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.
Ind. Découper la somme entre $[1, \sqrt{n}]$, $[\sqrt{n}, n-\sqrt{n}]$ et $[n-\sqrt{n}, n]$.

1. On note $V_{i,j,n}$ l'événement : « il y a un rectangle vertical en i et en j ». Calculer $\mathbf{E}(V_{i,j,n})$.

1. Calculer $V(V_n)$, puis en donner un équivalent quand $n \to +\infty$.

Exercice 189 [ENS PSI 2025 # 189] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_{m,n} = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$ où les a_i, b_j sont des éléments distincts. Soit $H_{m,n}$ l'ensemble des bijections f de $A_{m,n}$ sur $[\![1, m+n]\!]$ telles que, pour tout $(i,j) \in [\![1, m]\!]$, $i < j$ implique $f(a_i) < f(a_j)$ et, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i < j$ implique $f(b_i) < f(b_j)$.

1. Calculer le cardinal de $H_{m,n}$.

Soit $f_{m,n}$ suivant la loi uniforme sur $H_{m,n}$.

1. Calculer $\mathbf{P}(f_{m,n}(a_m) = i)$.

1. Pour $c, k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{P}(f_{cn,n}(a_{cn}) = (c+1)n - k)$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$.

1. Calculer $P(f_{2m,n}(a_m) = i)$.

1. Soit $t \geq 0$. donner un équivalent de $\mathbf{P}(f_{2n,2n}(a_n) = 2n + \lfloor t\sqrt{n} \rfloor)$. Ind. Commencer avec $t = 0$ et utiliser l'équivalent de Stirling lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 190 [ENS PSI 2025 # 190] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ convexe.

- Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, on a $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

- On suppose f de classe C^2 sur I avec f" > 0. Montrer que, si les λ_i sont dans]0,1[et les x_i sont distincts, l'inégalité du i) est stricte.

1. Soient Ω un ensemble fini, P_1 et P_2 des probabilités sur Ω. On pose

$$TV(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \sup_{A \in \mathcal{P}(\Omega)} |\mathbf{P}_1(A) - \mathbf{P}_2(A)| \text{ et } N_1(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \sum_{\omega \in \Omega} |\mathbf{P}_1(\{\omega\}) - \mathbf{P}_2(\{\omega\})|$$

.

- Montrer que $TV(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \frac{1}{2} N_1(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$

- Montrer que $TV(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \sum_{\omega \in \Omega} \max(\mathbf{P}_1(\{\omega\}), \mathbf{P}_2(\{\omega\}))1$

- Montrer que

$$1 - TV^2(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \geq \left(\sum_{\omega \in \Omega} \sqrt{\mathbf{P}_1(\{\omega\})\mathbf{P}_2(\{\omega\})}\right)^2.$$

1. On garde les hypothèse de la question b) et on suppose que, pour tout $\omega \in \Omega$, la condition $\mathbf{P}_2(\{\omega\}) = 0$ implique $\mathbf{P}_1(\{\omega\}) = 0$. On pose $D(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}_1(\{\omega\}) \ln\left(\frac{\mathbf{P}_1(\{\omega\})}{\mathbf{P}_2(\{\omega\})}\right)$ avec la convention $0 \ln 0 = 0$.

- Montrer que $D(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \geq 0$

- Montrer que $\left(\sum_{\omega \in \Omega} \sqrt{\mathbf{P}_1(\{\omega\})\mathbf{P}_2(\{\omega\})}\right)^2 \geq e^{-D(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)}$.

- Conclure.

Exercice 191 [ENS PSI 2025 # 191] Soient $n \geq 2$ et $p \in \{1, \dots, n\}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $A^T A$ est inversible. On pose $P = A(A^T A)^{-1} A^T$.
On considère des variables aléatoires i.i.d. $(z_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'espérance nulle et ayant un moment d'ordre 4. On pose $\sigma = \sqrt{\mathbf{V}(z_1)}$ et $Z = (z_1 \dots z_n)^T$.
On considère une matrice colonne $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On pose $Y = AX_0 + Z$ et $X = (A^T A)^{-1} A^T Y$. On pose enfin $T = ||A(X - X_0)||^2$, où || || est la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que rg(A) = p.

1. Montrer que P est un projecteur orthogonal de rang p. Déterminer son image et son noyau.

1. Montrer que $T = Z^T P Z$.

1. On note $P_{i,j}$ les coefficients de P. On pose $T_1 = \sum_{i=1}^{n} P_{i,i} z_i^2$ et $T_2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} P_{i,j} z_i z_j$.

Exprimer $\mathbf{E}(T_1)$, $\mathbf{E}(T_2)$ et $\mathbf{E}(T_1T_2)$ en fonction de σ et p.

1. Déterminer $\mathbf{E}(T_1^2)$ et $\mathbf{E}(T_2^2)$.

1. En déduire l'espérance et la variance de T.

Exercice 192 [ENS PSI 2025 # 192] Soit Y une variable aléatoire. On dit que Y est k-divisible ($k \in \mathbb{N}^*$) s'il existe un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_k)$ où les X_i sont i.i.d. tel que $Y \sim (X_1 + \cdots + X_n)$. On dit que Y est infiniment divisible si elle est k-divisible pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendante suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ et ν. Donner la loi de X+Y. En déduire que si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors Y est infiniment divisible.

1. Soit Y une variable aléatoire. On suppose qu'il existe A> 0 tel que $\mathbf{P}(Y \in [-A, A]) = 1$ et que Y est k-divisible pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc $Y \sim (X_1 + \cdots + X_k)$ où les X_i sont i.i.d.

- Montrer que, pour tout i, $P(X_i \in [-A/k, A/k]) = 1$.
- Montrer que, pour tout $i \in [1, k]$, $\mathbf{V}(X_i) \leq \left(\frac{A}{k}\right)^2$. En déduire une majoration de $\mathbf{V}(Y)$.
- Que peut-on dire si la variable aléatoire Y vérifie $\mathbf{P}(Y \in [-A, A]) = 1$ et qu'elle est infiniment divisible ?

1. Soient $p \in]0, 1[$ et Y une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(\lambda)$. Si $k \geq 2$, montrer que Y n'est pas k divisible.

1. Soient $p \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et Y une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n, p)$. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y est-elle k-divisible ?

Exercice 193 [ENS PSI 2025 # 193] On dit que le spectre d'une matrice est simple lorsque toutes les valeurs propres de la matrice sont simples. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ considéré comme un vecteur colonne et $c \in \mathbb{R}$.L'objectif des deux premières questions est d'établir une démonstration de la proposition suivante : si le spectre de M n'est pas simple, alors b est orthogonal à un des vecteurs propres Soit λ une valeur propre non simple de M.

1. Montrer que l'on dispose de $v \in \mathbb{R}^n$, un vecteur propre de M, associé à la valeur propre λ, tel que $v_{n+1} = 0$.

1. Montrer que λ est aussi valeur propre de A et conclure.

Notons

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_5 & X_2 \\ 0 & X_5 & -1 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

où les X_i sont des variables aléatoires indé-

1. On note B l'événement : « le spectre de N est simple ». Montrer que $P(B) \geq 3p^3 2p^4$.

Exercice 194 [ENS PSI 2025 # 194] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour

$$n \in \mathbb{N}^*$$

, soient $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k^\alpha}$ où $\alpha > 3/4$.

1.

- Pour $(i, j, k, \ell) \in [1, n]^4$, calculer $\mathbf{E}(X_i X_j X_k X_\ell)$.
- En déduire $\mathbf{E}(S_n^4)$.
- Soit $(x_k)_{k\geq 1}$ une suite de réels > 0 et $B_{n,p} = \bigcup_{k \in [\![n, n+p]\!]} (|S_k| \geq x_k)$.
  Montrer que
  $$\mathbf{P}(B_{n,p}) \leq 3 \sum_{k \in [n, n+p]} \frac{k^2}{x_k^4}.$$

1.

- Exprimer Y_n en fonction des S_k.
- Montrer que (Y_n) converge presque sûrement.

Exercice 195 [ENS PSI 2025 # 195] 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ convexe.

- Soit $t_0 \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe g affine telle que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*} : f(t) \geq g(t)$ et $f(t_0) = g(t_0)$.
- Soit Z une variable aléatoire réelle telle que Z et f(Z) sont d'espérance finie. Montrer que $f(\mathbf{E}(Z)) \leq \mathbf{E}(f(Z))$.

1. Pour X variable aléatoire réelle et $t \in \mathbb{R}$, on pose si possible $\Psi_X(t) = \ln(\mathbf{E}(e^{tX}))$. Calculer Ψ_X lorsque X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

1. Pour X variable aléatoire discrète réelle et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi_X(\theta) = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}(t\theta\Psi_X(t))$.

- Montrer que Φ_X est positive et convexe sur son ensemble de définition.
- Montrer que Φ_X est définie en $\mu = \mathbf{E}(X)$ et que $\Phi_X(\mu) = 0$.
- Montrer que Φ_X est décroissante pour $\theta < \mu$ et croissante pour $\theta > \mu$.

1. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

- Calculer Φ_X.
- Donner un majorant de $P(X \geq 2\lambda)$.

III) ENS PC **AUTRE**

Exercice 196 [ENS PC 2025 # 196] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2i\pi k^2}{n}\right)$.

Exercice 197 [ENS PC 2025 # 197] Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\operatorname{tr}(A^2) \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$. Cas d'égalité ?

Exercice 198 [ENS PC 2025 # 198] Soient

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

et $F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $(D+F)^k$

Exercice 199 [ENS PC 2025 # 199] Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \beta\,\operatorname{tr}$.

Exercice 200 [ENS PC 2025 # 200] Soit $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^n$. Existe-t-il nécessairement $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que : $\operatorname{tr}\left(\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i A_i\right)^2\right) \geq \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}\left(A_i^2\right)$?

Exercice 201 [ENS PC 2025 # 201] Soit $R : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par R(0) = 0 et, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, $R(P) = X^n P\left(\frac{1}{Y}\right)$.

1. L'application R est-elle linéaire ? bijective ?

1. Trouver tous les polynômes P tels que R(P') = R(P)'.

Exercice 202 [ENS PC 2025 # 202] Soient M et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = N^2 = 0$ et $MN + NM = I_2$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $M = PE_{1,2}P^{-1}$ et $N = PE_{2,1}P^{-1}$.

Exercice 203 [ENS PC 2025 # 203] Soit $(A_1, \ldots, A_m) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^m$ tel que, $\forall (i,j) \in [1,m]^2$, $A_iA_j \in \{A_1, \ldots, A_m\}$. Montrer que $|\det(A_j)| = 1$ pour tout $j \in [1,m]$.

Exercice 204 [ENS PC 2025 # 204] Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. On pose $f_N : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} t^k N^k$.

1. Montrer que f_N est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f_N s'annule alors N = 0.

Exercice 205 [ENS PC 2025 # 205] Soient $A, B \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note, pour $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, [X, Y] = XY - YX. Montrer que $[[A,B]^2, C] = 0$.

Exercice 206 [ENS PC 2025 # 206] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $E = \{AM, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$. Déterminer la dimension de E.

Exercice 207 [ENS PC 2025 # 207] 1. Soient A, B, C des espaces vectoriels. On note $A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C$ lorsque $f_1 \in \mathcal{L}(A,B)$, $f_2 \in \mathcal{L}(B,C)$ et $\operatorname{Im}(f_1) = \operatorname{Ker}(f_2)$. Que peut-on dire si $A = \{0\}$? si $C = \{0\}$?b) Soient A, B, C, D, E, F des espaces vectoriels. On suppose que

où h_1 et h_3 sont des isomorphismes et où $h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1$ et $h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2$. Montrer que h_2 est un isomorphisme.

Exercice 208 [ENS PC 2025 # 208] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_k$ des éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui ne sont pas des monômes tels que $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \exists i \in [1,k], P_i(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 209 [ENS PC 2025 # 209] Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{rg} A = p$ et $\operatorname{rg} B = q$. Déterminer les valeurs possibles de $\operatorname{rg}(AB)$.

Exercice 210 [ENS PC 2025 # 210] Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sans valeur propre complexe commune. Montrer que $\Phi : M \mapsto AM - MB$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 211 [ENS PC 2025 # 211] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n > p > \operatorname{rg}(A)$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Déterminer les $x \in \mathbb{R}^p$ tels que $||Axb|| = \min_{y\in\mathbb{R}^p} ||Ayb||$.

Exercice 212 [ENS PC 2025 # 212] Soient E un espace euclidien et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux qui commutent. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal.

Exercice 213 [ENS PC 2025 # 213] Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & x \\ x^T & a \end{pmatrix}$.

On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \mu_{n+1}$ les valeurs propres de M. Montrer que $\mu_1 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \lambda_n \leq \mu_{n+1}$.

Exercice 214 [ENS PC 2025 # 214] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$, on note $A \leq B$ si $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On pose $\Phi : A \mapsto A^T A$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que Φ est convexe, c'est-à-dire : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\Phi((1 - \lambda)A + \lambda B) \leq (1 - \lambda)\Phi(A) + \lambda\Phi(B)$.

1) Analyse

Exercice 215 [ENS PC 2025 # 215] Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \|M^n X\| = +\infty$.

Exercice 216 [ENS PC 2025 # 216] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on définit [A,B] = AB BA. Soient A et B dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices définie par $F_0 = B$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $F_{p+1} = [A, F_p]$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe des réels $c_{0,n}, c_{1,n}, \ldots, c_{n,n}$ tels que

$$F_n = \sum_{i=0}^{n} c_{i,n} A^{n-i} B A^i$$

.b) Soit $A \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que la suite (F_n) tende vers la matrice nulle, et ce quelle que soit la matrice B à partir de laquelle la suite (F_n) a été construite.

Exercice 217 [ENS PC 2025 # 217] Soit $\gamma \in]0, 1]$. Soit $(x_n)_{n\geq 1} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leq x_n + x_n^{1-\gamma}$. Montrer qu'il existe d> 0 tel que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ x_n \leq d n^{1/\gamma}$.

Exercice 218 [ENS PC 2025 # 218] Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles.

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - x_n$. Si $y_n \to 0$, la suite (x_n) converge-t-elle nécessairement ?

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$. Montrer que, si $y_n \to 0$, alors $x_n \to 0$.

Exercice 219 [ENS PC 2025 # 219] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_{n,N})_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double réelle.
On suppose que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} x_{n,N} = \alpha$. Montrer qu'il existe $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} x_{n,N_n} = \alpha$.

Exercice 220 [ENS PC 2025 # 220] Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge.

1. Montrer que $\sum \frac{u_n}{(u_1+\cdots+u_n)^2}$ converge.

1. Montrer que $\sum \frac{u_n}{u_1+\cdots+u_n}$ diverge.
   c. Soit $(x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. On suppose, que pour toute $(y_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$, la convergence de $\sum y_n^2$ implique celle de $\sum x_n y_n$. Montrer que $\sum x_n^2$ converge.

Exercice 221 [ENS PC 2025 # 221] Soient a > 0 et $f \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - 1| < \frac{1}{1+x^2}$.
Montrer qu'il existe $g \in C^0([0, +\infty[\,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)g(x + a)$.

Exercice 222 [ENS PC 2025 # 222]
1. Déterminer les fonctions f : $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, f(xy) = f(x) + f(y).

1. Déterminer les fonctions f : $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, f(xy) = f(x) f(y).

Exercice 223 [ENS PC 2025 # 223] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que f" est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f'(x))^2 \leq C f(x)$.

Exercice 224 [ENS PC 2025 # 224] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f, f' et f" sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \right.$
0.

Exercice 225 [ENS PC 2025 # 225] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui tend vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$ et telle que la famille de fonctions $(f, x \mapsto f(x + 1), x \mapsto f(x + 2))$ est liée. Que dire de f ?

Exercice 226 [ENS PC 2025 # 227] Soient

$$a, b \in \mathbb{R}$$

avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ intégrable.
On suppose the

$$a, b \in \mathbb{R}$$

avec $a < b \in f \in C\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ integrable.
On suppose que :

$$\forall x \in [a, b],\ f'(x) \geq 1$$

. Peut-on avoir $\int_{\mathbb{R}} f = \frac{(b-a)^2}{2}$?

Exercice 227 [ENS PC 2025 # 228] Trouver toutes les

$$f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^{+*})$$

telles que $\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{1}{f} = 1$.

Exercice 228 [ENS PC 2025 # 229] Soient

$$a < b$$

deux réels.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b]), \mathbb{R})$ telle que $|\varphi'| \geq 1$ et $\varphi'' > 0$.

1. Soit

$$\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b]), \mathbb{R}$$

) telle que $|\varphi'| \geq 1$ et $\varphi'' > 0$. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\left|\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x))\,dx\right| \leq \frac{4}{\lambda}$.

b. Montrer que, pour tout

$$\varphi \in C^2([a,b], \mathbb{R})$$

et pour tout $\alpha > 0$, si $|\varphi'| \geq \alpha$ et $\varphi'' > 0$ alors

$$\left|\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x))\,dx\right| \leq \frac{4}{\alpha\lambda}$$

. *c*. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ telle que $\varphi'' \geq 1$.

Montrer que, pour tout

$$\lambda > 0$$

, $\left|\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x))dx\right| \leq \frac{8}{\sqrt{\lambda}}$.

d. Soit

$$\varphi \in C^k([a,b], \mathbb{R})$$

, où $k \in \mathbb{N}^*$, telle que $\varphi^{(k)} \geq 1$.

$$\text{Trouver } C > 0 \text{ et } \alpha > 0 \text{ tels que } \forall\lambda > 0, \left|\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x))dx\right| \leq \frac{C}{\lambda^\alpha}$$

.

Exercice 229 [ENS PC 2025 # 230] Soit E un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées et $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de carré intégrable.

l'espace des fonctions bornées et

$$L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

l'espace des fonctions de carré intégrable.

1. On suppose qu'il existe un sous espace vectoriel G de E constitué de fonctions bornées

sur

$$\mathbb{R}^+$$

tel que $E = \text{Vect}(x \mapsto e^x) + \text{Vect}(x \mapsto e^{-x}) + G$ et que la seule fonction dans G qui soit de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$ est la fonction nulle. Montrer que $E \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$.

1. On suppose que E vérifie les hypothèses de la question *a*) et qu'on dispose de deux sousespaces F_1 et F_2 de E tels que dim $F_1 = \dim F_2 = 2$, que toutes les fonctions de F_1 sont bornées sur $\mathbb{R}^-$, et que la seule fonction de F_2 bornée sur $\mathbb{R}^-$ est la fonction nulle. Montrer que $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = 1$.

Exercice 230 [ENS PC 2025 # 231] On définit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = e^{-x} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_{-1}^{+\infty} \frac{f_n(t+1)}{1+t^2}\, e^t\, dt$$

.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge sur un intervalle $[x_0, +\infty[$, où x_0 est judicieusement choisi.

Exercice 231 [ENS PC 2025 # 232] 1. Soient f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et J une partie finie

On suppose que $f^{(i)}(0) = 0$ si $i \notin J$ et $f^{(i)}(1) = 0$ si $i \in J$. Que dire de f ?

1. La propriété est-elle encore vérifiée si J est une partie infinie de $\mathbb{N}$?

Exercice 232 [ENS PC 2025 # 233] Pour $a > 0$, on pose $f(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+a^2x^2}}$

1. Justifier la définition de f(a).

1. Montrer que $f(a) = O\left(\frac{\ln a}{a}\right)$.

Exercice 233 [ENS PC 2025 # 234] Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)\exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{1}{4}x^2\right)$.

Exercice 234 [ENS PC 2025 # 235] Pour $n \in \mathbb{N}$, donner un équivalent de $A_n(t) = \int_0^1 \sin^2(xt)\, x^{n-2}\, dx$ lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 235 [ENS PC 2025 # 236] Soit $h \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que h(0) = h(1) = 0 et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto h(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Soit $g\colon y \in \mathbb{R} \mapsto \int_a^1 |x-y| f(x)dx$.

1. Montrer que g est deux fois dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = 2f(x)$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que q soit bornée.

Exercice 236 [ENS PC 2025 # 237] Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |h(x)| \leq \frac{1}{1+|x|}$ et $|h'(x)| \leq \frac{1}{1+|x|^2}$. Montrer la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\, dx\, dy$ où $\varphi(x,y) = \frac{h(x)-h(y)}{x-y}$ si $x \neq y$, et

Exercice 237 [ENS PC 2025 # 238] Soit, pour

$$x \in \mathbb{R}$$

, $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(xy)\, dy$.

1. Calculer explicitement f.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k-ième de f est bornée par k!.

1. En quels points x y a-t-il égalité entre k! et $|f^{(k)}(x)|$?

Exercice 238 [ENS PC 2025 # 239] 1. Donner les solutions de l'équation différentielle : $x''x = \cos(2t)$.

1. Soient c> 0 et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que f(t)=0 pour tout t vérifiant $|t| \geq c$.

Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle x" x = f(t) vérifiant $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$.
$\varphi(x,y) = h'(x)$ sinon.

2) Géométrie

Exercice 239 [ENS PC 2025 # 240] Soit $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2+bx+c$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et a > 0. On pose $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq f(x)\}$ et $\mathcal{C} = \{(x,f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$. Soient v un vecteur non nul du plan, $X \in E$ et $\Delta = \{X + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\Delta \cap \mathcal{C}$ est non vide.

Exercice 240 [ENS PC 2025 # 241] 1. Soit ABC un « vrai » triangle tel que ABC soit aigu (et non droit).Montrer que : $AC^2 < AB^2 + BC^2$.

1. Soient e_1, e_2 et e_3 des vecteurs non nuls orthogonaux de $\mathbb{R}^3$. On pose : $d_1 = \{te_1; t > 0\}, d_2 = \{te_2; t > 0\}, d_3 = \{te_3; t > 0\}$. Montrer que tout triangle $A_1A_2A_3$, où $A_i \in d_i$, est aigu, c'est-à-dire que ses trois angles sont aigus.

3) Probabilités

Exercice 241 [ENS PC 2025 # 242] Deux joueurs de tennis sont de même niveau. Ils disputent un match. Quelle est la probabilité que le match se termine par un tie-break ?

Exercice 242 [ENS PC 2025 # 243] On lance n fois une pièce avec une probabilité p d'obtenir face. On pose A_n : « on n'obtient jamais deux faces de suite ». Donner un équivalent de $\mathbf{P}(A_n)$.

Exercice 243 [ENS PC 2025 # 244] On considère une urne contenant initialement n+1 boules : n blanches et une rouge. On tire une par une des boules dans l'urne. Si on tire la boule rouge, on s'arrête, sinon on a une chance sur deux de remette la boule et continuer, une chance sur deux de s'arrêter. On pose X_n le nombre de boules tirées lorsque l'on s'arrête. Donner $\mathbf{E}(X_n)$.

Exercice 244 [ENS PC 2025 # 245] Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On lance N fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité qu'on obtienne un nombre pair de face ?

Exercice 245 [ENS PC 2025 # 246] Soit S_n l'ensemble des permutations de [1, n] muni de la probabilité uniforme.

1. Donner la loi de la variable aléatoire K qui donne la taille du cycle contenant 1.

1. Déterminer l'espérance et la variance du nombre N de cycles.

Exercice 246 [ENS PC 2025 # 247] Soit σ une permutation aléatoire de [1, 2n] suivant la loi uniforme.
On pose

$$Y = \sum_{i=0}^{n-1} |\sigma(2i) - \sigma(2i+1)|$$

. Calculer $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 247 [ENS PC 2025 # 248] Soient Y, Z deux variables aléatoires à valeurs dans [0, n]. Montrer que si, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, $\mathbf{E}(P(Y)|Q(Z)) = \mathbf{E}(P(Y))|\mathbf{E}(Q(Z))$, alors Y et Z sont indépendantes.

Exercice 248 [ENS PC 2025 # 249] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_0, \ldots, A_d$ des variables aléatoires indépendantes. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k suit la loi géométrique de paramètre 1/(k+1). On note $P = \sum_{k=0}^{a} A_k X^k$ et R la variable aléatoire la loi telle que, conditionnelleme
Calculer $\mathbf{E}(R)$.

Exercice 249 [ENS PC 2025 # 250] Soit a > 0. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' \geq 2a$. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles et admettant une variance. Montrer que $\mathbf{E}(f(X))f(\mathbf{E}(X)) \geq a\mathbf{V}(X)$.

Exercice 250 [ENS PC 2025 # 251] Un mobile se déplace sur l'axe des réels. Soit $\varepsilon > 0$. Son mouvement est décrit par une fonction x dérivable sur tous les intervalles [n, n+1] et y vérifiant $x'(t) = \varepsilon x(t)$, admettant en chaque $n \in \mathbb{N}^*$ une limite finie à gauche $x(n^-)$ et une limite finie à droite $x(n^+)$, et telle que x(0) = 0.

Soit $T \in \mathbb{N}$. À chaque instant $t = n \in [0, T]$, on lance une pièce équilibrée. Si on fait Pile $x(n^+) = x(n^-) + n$, si on fait Face $x(n^+) = x(n^-) - n$, avec la convention $x(0^-) = 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ assez grand tel que, pour tout $T \in \mathbb{N}$, x reste de signe constant sur [0, T].

Exercice 251 [ENS PC 2025 # 252] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!]^2)$. On note $X = (X_1, X_2)$. On pose $Y_0 = 0$ et, pour $k \in [0, n-1], Y_{k+1}(\omega) = Y_k(\omega) + 2$ si $X_1(\omega) \leq k$ et $X_2(\omega) \geq Y_{X_1}(\omega),$ et $Y_{k+1}(\omega) = 0\ Y_k(\omega) + 1$ sinon.

1. Justifier que Y_k est bien définie pour $0 \leq k \leq n$.

1. Déterminer la limite de $\left(\frac{\mathbf{E}(Y_n)}{n}\right)$.

Exercice 252 [ENS PC 2025 # 253] Soient n et d dans $\mathbb{N}^*$. On note $[-n, n]^d$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont des entiers compris entre -n et n. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-n, n]^d$.

1. Déterminer $\mathbf{E}(\|X\|_1)$ et en trouver un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

1. Déterminer $\mathbf{E}(\|X\|_\infty)$ et en trouver un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 253 [ENS PC 2025 # 254] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans [1,d]. On note $p_k = \mathbf{P}(X_1 = k)$. Soit N_k la variable aléatoire égale au nombre de fois que la valeur k est obtenue. Donner la matrice $(Cov(N_i, N_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ et préciser son rang.

Exercice 254 [ENS PC 2025 # 255] 1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

Montrer que, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}\left(e^{\gamma X}\right) \leq e^{\gamma^2/2}$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soient $(c_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_N = c_1 X_1 + \cdots + c_N X_N$.

1. Montrer que, pour tout t > 0, $\mathbf{E}(e^{tY_N}) \leq e^{t^2(c_1^2 + \cdots + c_N^2)/2}$.

c) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|Y_N| > \lambda) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{2(c_1^2 + \cdots + c_N^2)}}$.
d) Montrer que $N^{10}\ \mathbf{P}(|X_1 + \cdots + X_N| > N^{3/4}) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

IV) X MP **XENS**

1) Algèbre

Exercice 255 [X MP 2025 # 256] Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre réel $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ est-il rationnel ?

Exercice 256 [X MP 2025 # 257] On étudie l'équation $x^2 + y^2 = N(1 + xy)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, où $N \in \mathbb{N}$.

1. Traiter les cas x = y, N = 0, N = 1.- b) On suppose $N \geq 2$ et on se donne (x,y) solution avec $x \neq y$. Montrer qu'on peut se ramener à $x > y \geq 0$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que (y, z) soit solution et tel que y > z.

En déduire que N est un carré parfait.

1. On considère maintenant l'équation $x^2 + y^2 = -N(1 + xy)$ dans $\mathbb{Z}^2$. En adaptant la méthode précédente, trouver tous les couples solutions.

Exercice 257 [X MP 2025 # 258] Soient $a \in \mathbb{N}$ avec $a \geq 2$ et $P = X^2 + X + a$. On suppose que, pour tout $n \in [0, a-1]$, P(n) est premier. Soit $k \in [1, a-2]$.

1. Montrer que si k+1 est un carré alors P(a+k) n'est pas premier.

1. Montrer que si P(a+k) n'est pas premier alors k+1 est un carré.

Exercice 258 [X MP 2025 # 259] 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 1-périodique. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} f(x + ka) \leq \sum_{k=0}^{n} f(y + ka)$. Montrer que f est constante.

1. Soient p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valuation p-adique de n !.

1. Soient $m, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{\prod_{j=1}^{m} \binom{2jk}{jk}}{\prod_{j=1}^{m} \binom{2j}{j}} \in \mathbb{N}$.

Exercice 259 [X MP 2025 # 260] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour une partie I de [1, n], on appelle composante de I tout sous-ensemble maximal de I formé d'entiers consécutifs. On note c(I) le nombre de composantes de I.

1. Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est dite i-adaptée lorsque, pour tout $i \in I$, les entiers $\sigma(i)$ et $\sigma(i+1)$ sont consécutifs. Dénombrer les permutations I-adaptées en fonction de |I| et c(I).

1. Soient $c \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, n]$. Dénombrer les parties I de [1, n] telles que |I| = p et c(I) = c.

Exercice 260 [X MP 2025 # 261] Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'entiers relatifs. On dit que les deux séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ sont congrues modulo m si $a_n \equiv b_n \mod m$ pour tout $n \geq 0$. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \mod m$.

1. Soit p un nombre premier. Montrer que $(e^z - 1)^{p-1} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} - \frac{z^{n(p-1)}}{(n(p-1))!} \mod p$.

1. Soit $m > 4$ un entier non premier.

Montrer que m divise (m-1) !, et que $(e^z - 1)^{m-1} \equiv 0 \mod m$.

Exercice 261 [X MP 2025 # 262] Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est dit maximal lorsque $H \neq G$ et aucun sous-groupe de G n'est compris strictement entre H et G. Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \varepsilon(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe maximal de $\mathcal{S}_n$.

1. Soit $k \in [1, n]$. Montrer que $\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \sigma(k) = k\}$ est un sous-groupe maximal de $\mathcal{S}_n$.

1. On suppose que G est fini, et on se donne un sous-groupe H de G tel que $\frac{|G|}{|H|}$ soit un nombre premier. Montrer que H est maximal.

Exercice 262 [X MP 2025 # 263] Soit φ un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Z}$ nul sur l'ensemble $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ des suites presque nulles. Montrer que φ est nul.

Exercice 263 [X MP 2025 # 264] On pose

$$\alpha = \frac{12 + 5i}{13}$$

.

1. Montrer que α n'est pas une racine de l'unité.

1. Le nombre α est-il racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$? dans $\mathbb{Z}$?

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que α soit racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers dont toutes les racines complexes sont de module 1. Montrer que α est racine de l'unité.

Exercice 264 [X MP 2025 # 265]
1. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, $z \in \mathbb{C}$ une racine de $A = P^2 + Q^2$. Est-ce que z est racine de $B = P'^2 + Q'^2$? Que dire si z est racine multiple de A ?

1. Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, P s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si

$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

1. Montrer que tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$ si et seulement s c) Montrer que tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Est-ce que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ peut s'écrire $U^3 + V^3$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$? Ind. Montrera que le plus petit facteur premier p de P(a+k) est supérieur ou égal à a, puis que P(a+k-p)=p.

Exercice 265 [X MP 2025 # 266] On admet le résultat suivant. Soient $c \in \mathbb{C}$, U un voisinage de c dans $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de c et telle que $f(z) = O((z-c)^k)$. Alors il existe $r > 0$ et $z_1, \dots, z_{2k} \in U$ distincts tels que : $\forall i \in [1, 2k], f(z_i) \in \mathbb{R}$ et $|c - z_i| = r$.

1. Soient $A, B \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que les polynômes non nuls de $\mathrm{Vect}(A, B)$ sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'entre deux racines de A (au sens large) se trouve au moins une racine de B.

1. Démontrer le résultat admis.

Exercice 266 [X MP 2025 # 267] Soient $F \in \mathbb{R}(X)$, $A = \{x \in \mathbb{Q}, F(x) \in \mathbb{Q}\}$ et $A' = \{x \in \mathbb{Z}, F(x) \in \mathbb{Z}\}$.

1. On suppose A infini. Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.

1. On suppose A' infini. Que peut-on dire de F ?

Exercice 267 [X MP 2025 # 268] Soit $f = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ un polynôme de degré n à coefficients entiers et dont toutes les racines complexes appartiennent à $\mathbb{Q}^*$. On pose $H = \max(|c_0|, \dots, |c_n|)$.

1. Montrer que pour le complexe i on a $|f(i)|^2 \leq H^2 \left(\frac{n^2}{2} + n + 1\right)$.

1. Montrer que $|f(i)| < 2^n$.

1. En déduire que si $n \geq 10$ alors $n \leq 5 \log_2(H)$.

Exercice 268 [X MP 2025 # 269] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 269 [X MP 2025 # 270] Soient A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $k = \dim \mathrm{Ker}(AB)$. Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de $\mathrm{Ker}(BA)$?

Exercice 270 [X MP 2025 # 271] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C_n = \{-1, 1\}^n$. On pose $H = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ f(C_n) = C_n\}$. Montrer que H est un groupe pour la loi de composition et déterminer son cardinal.

Exercice 271 [X MP 2025 # 272] Soient $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que la matrice $A = XY + YX - \mathrm{tr}(X)Y - \mathrm{tr}(Y)X + (\mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y) - \mathrm{tr}(XY))I_2$ est nulle.

Exercice 272 [X MP 2025 # 273] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ tels que P soit scindé à racines simples, $\deg P = n$ et $\deg Q \leq n$. On admet qu'il existe une matrice $B = (b_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ avec $x \neq y$, on ait

$$\frac{P(x)Q(y) - P(y)Q(x)}{x - y} = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} b_{i,j} x^i y^j$$

.

Montrer que dim Ker $B = |\{z \in \mathbb{C},\ P(z) = Q(z) = 0\}|$.

Exercice 273 [X MP 2025 # 274] Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u et v dans $\mathcal{L}(E)$, $c = u \circ v - v \circ u$, on suppose $\operatorname{rg} c = 1$.

1. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de c est égale à $E_{n-1,n}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\operatorname{Im} c) \subset \operatorname{Ker} c$.

1. Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E non trivial tel que $u(F) \subset F$. Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Étudier la réciproque.

Exercice 274 [X MP 2025 # 275] On fixe un entier $n \geq 1$ et, pour $k \in [1, n]$, on note $\mathcal{R}_k$ l'ensemble des matrices de rang k de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{R}_1 = \{XY^T, (X, Y) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^2\}$.

1. Montrer que $\mathcal{R}_2$ est l'ensemble des matrices de la forme $X_1Y_1^T + X_2Y_2^T$ avec (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) couples libres de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $M \in \mathcal{R}_1$. Décrire l'ensemble des couples $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $M = XY^T$.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ conservant le rang.

Soient X_1, X_2, Y_0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et P_1, P_2, Q_1, Q_2 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\varphi(X_1Y_0^T) = P_1Q_1^T$ et $\varphi(X_2Y_0^T) = P_2Q_2^T$, avec (P_1, P_2) libre. Montrer qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $Q_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \varphi\left(XY_0^T\right) = AXQ_0^T$.

Exercice 275 [X MP 2025 # 276] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Pour $k \in [0, n]$, on pose $N(k) = \{N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \forall i, j \in [1, n], i > j - k \implies N_{i,j} = 0\}$ et $T(k) = \{I_n + N; N \in N(k)\}$.

1. Montrer que, pour tout $k \in [0, n]$, $T(k)$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

1. Construire pour, $k \in [\![0, n-1]\!]$, un morphisme de groupes $\varphi_k : T(k) \to G(k)$ où $G(k)$ est un groupe abélien bien choisi tel que $Ker(\varphi(k)) = T(k+1)$.

1. Pour un groupe G, on note $D(G)$ le sous-groupe engendré par $\{ghg^{-1}h^{-1}; g, h \in G\}$. Montrer que $T(0)$ est résoluble *i*.e. qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $D^q(T(0)) = \{I_n\}$.

Exercice 276 [X MP 2025 # 277] 1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux distincts. Montrer que l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $X^2 = D$ est fini non vide, déterminer son cardinal.

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = I_n + N$.

Exercice 277 [X MP 2025 # 278] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $R(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^2 = A\}$.

1. Déterminer le cardinal maximal d'une famille de matrices de $R(I_n)$ non semblables deux à deux à deux.

1. On suppose A diagonalisable avec n valeurs propres distinctes. Déterminer le cardinal de $R(A)$.

1. Est-il vrai que, si A est diagonalisable, toutes les matrices de $R(A)$ le sont ?

1. Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet-elle une racine carrée ?

1. On pose $U_n = \{I_n + N, N \text{ nilpotente}\}$. Montrer que toute matrice A de U_n admet une unique racine carrée dans U_n.

Exercice 278 [X MP 2025 # 279] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{IA} = \sup\{r \in \mathbb{N}; \exists A_1, \dots, A_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall i, A_i^2 = I_n \text{ et } \forall i \neq j, A_iA_j = -A_jA_i\}$.

1. Si n est impair, montrer que $\mathcal{IA}(n) = 1$.

1. Soient $s, t \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{IA}(2^s(2t + 1)) = 2s + 1$.

Exercice 279 [X MP 2025 # 280] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

1. Soient

$$b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$$

et $M = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$.

- À quelle condition la matrice M est-elle diagonalisable ?
- À quelle condition existe-t-il $x \in \mathbb{R}^3$ tel que (x, Mx, M^2x) soit une base de $\mathbb{R}^3$?
- On suppose que $b_1b_2b_3 = 1$. Montrer qu'il existe un unique $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que M soit semblable à la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 280 [X MP 2025 # 281] \$ \$ Soient V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$.

1. On suppose que G = GL(V). Que vaut Vect(G) ? La réciproque est-elle vraie ?

On suppose maintenant que, pour tout $g \in G$, g id est nilpotent.

1. Quels sont les éléments diagonalisables de G ?
1. On suppose que G est fini et que $Vect(G) = \mathcal{L}(V)$. Quelle est la dimension de V ?
1. Si G n'est plus fini mais que $Vect(G) = \mathcal{L}(V)$, quelle est la dimension de V ?

Exercice 281 [X MP 2025 # 282] 1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R > 0. Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice complexe dont les valeurs propres sont de module strictement inférieur à R. Montrer que $\sum a_n M^n$ converge.

1. Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R> 0 telle que, pour toute matrice M à spectre inclus dans $\overline{D(0, R)}$ et admettant une valeur propre de module R, la série $\sum a_n M^n$ diverge ?
1. Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R> 0 telle que, pour toute matrice M à spectre inclus dans $\overline{D(0, R)}$ admettant une valeur propre de module R, la série $\sum a_n M^n$ converge ?d) Soit $f\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R > 0.

On pose

$$f^{(k)} : z \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^n.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_M = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont distincts
et de module $< R$ et les α_i dans $\mathbb{N}^*$.

- Montrer l'existence de $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$\forall i \in [1, r], \forall k \in [0, \alpha_i 1], f^{(k)}(\lambda_i) = P^{(k)}(\lambda_i)$.

- On suppose que M est diagonalisable. Montrer que f(M) = P(M).
- Est-ce toujours le cas si on ne suppose plus M diagonalisable ?

Exercice 282 [X MP 2025 # 283] Soient $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})$, g une surjection continue croissante de [-1,1] sur luimême. On considère F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie stable par $f \mapsto f \circ g$. On note φ l'endomorphisme de F défini par $\varphi : f \mapsto f \circ g$.

1. Montrer que 1 est la seule valeur propre de φ.
1. En déduire que $\varphi = \mathrm{id}_F$.
1. Que peut-on dire des valeurs propres possibles de φ si q n'est plus supposée surjective ?

Exercice 283 [X MP 2025 # 284] Soit p un nombre premier, A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Démontrer que $\mathrm{tr}((A+B)^p) \equiv \mathrm{tr}(A^p) + \mathrm{tr}(B^p) \pmod p$.

Exercice 284 [X MP 2025 # 285] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit matriciel. On note $D = \{\delta \in \mathcal{L}(H) : \forall (A, B) \in H^2,\ \delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)\}$.

1. Soit $C \in H$. Montrer que $\delta : A \mapsto CAAC$ est dans D, et exprimer simplement e^δ.
1. Soit $\delta \in D$. Montrer que $\forall A, B \in H$, $e^\delta(AB) = e^\delta(A)e^\delta(B)$.
1. Retrouver le résultat de la question précédente en considérant l'application $f\colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t\delta}\left(e^{t\delta}(A)e^{t\delta}(B)\right)$ et en calculant f'.
1. Soit $\delta \in D$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note H_λ le sous-espace caractéristique de δ associé à λ (éventuellement $\{0\}$). Soient λ, $\mu \in \mathbb{C}$, $A \in H_\lambda$ et $B \in H_\mu$. Montrer que $AB \in H_{\lambda+\mu}$.

Exercice 285 [X MP 2025 # 286] 1. Soient $k, m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^m$ tels que $\langle v_i, v_j \rangle \leq -1/k$ pour tous i,$j$distincts. Montrer que $n \leq k+1$.

1. Montrer qu'il existe une famille $(v_1, \dots, v_{k+1})$ de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^k$ tels que $\langle v_i, v_j \rangle = -1/k$ pour tous i, j distincts.

Exercice 286 [X MP 2025 # 287] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que Tr(f id) = 0 et rg(f id) = 1 si et seulement s'il existe $a \in E$ et $\ell \in E^*$ tel que $\ell(a) = 0$ et $f = id + \ell a$. On dit alors que f est une transvection.

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire telle que : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists y \in E, \varphi(x,y) \neq 0$ et $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$.
Soit $G = \{u \in GL(E) : \forall x, y \in E, \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x,y)\}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de GL(E).- c) Montrer que G contient les applications de la forme id $+\lambda\varphi(a,\cdot)$ a avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in E$.

1. Montrer que G est engendré par les transvections de la forme indiquée en c).

Exercice 287 [X MP 2025 # 288] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\alpha_O = |\det(\psi_O)|$ où $\psi_O : A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto O^T AO$.

Exercice 288 [X MP 2025 # 289] Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $-1 \notin Sp(M)$, on pose $T(M) = (I_n M)(I_n + M)^{-1}$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $-1 \notin \mathrm{Sp}(M)$.

1. Montrer que T est bien définie sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

1. Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $T(A) \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

1. Si $B \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$, montrer que $T(B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $T \circ T(A)$ si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$. Calculer T(A).

1. Déduire des questions précédentes que toute matrice de $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ est orthosemblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 289 [X MP 2025 # 290] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto \langle M^{-1}x, y\rangle$ définit un

produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soient $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que MN est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectre inclus dans $i\mathbb{R}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectre inclus dans $i\mathbb{R}$. Existe-t-il $M \in$

$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que A = MN ?

Exercice 290 [X MP 2025 # 291] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_{2n}$. Montrer l'équivalence : $M^T J \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T JM = J$.

1. On note $C = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), M^2 = -I_{2n}$ et $M^T J \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})\}$. Montrer que, pour tout $M \in C$, $M + J \in GL_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Pour $M \in C$, on note $S_M = (M+J)^{-1}(M-J)$. Montrer que $S_M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, ||S_M X||_2 < ||X||_2$.

1. Montrer que, pour pour tout $M \in C$, $S_M J + JS_M = 0$.

Exercice 291 [X MP 2025 # 292] Les espaces $\mathbb{R}^p$ sont munis de leurs normes euclidiennes canoniques. Soient d et D des entiers ≥ 1. Étant donné $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^d$, on dit que $(p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$ s'il existe $q_0, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}^D$ vérifiant $\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|$ pour tous $i, j \in [0, n]$.

1. On suppose que $(p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$. Soit p une combinaison linéaire à coefficients rationnels de $p_0, \ldots, p_n$. Montrer que $(p, p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$.

1. Soient $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^d$ tels que $||p_i p_j||^2 \in \mathbb{Q}$ pour tous $i, j \in [0, n]$. Montrer que $(p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^{4d}$. On admettra que tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers.

Exercice 292 [X MP 2025 # 293] 1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si et seulement si, pour tout $k \in [1, n]$, $\det((a_{i,j})_{1}$
0.

1. On pose $A_k = (t^{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq k}$ où $t \in \mathbb{R}^{+*}$. Calculer $\det A_k$.

1. On pose $A = \left(\frac{1}{1+|i-j|}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Démontrer que A est symétrique définie positive.

Exercice 293 [X MP 2025 # 294] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ une base or-

thonormée de F. On pose : $\tau_F(A) = \sum_{i=1}^k \langle f_i, Af_i\rangle$. Montrer que $\tau_F(A)$ ne dépend pas de la
base orthonormée choisie.
Dans la suite de l'exercice, on suppose $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on note $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A, comptées avec multiplicité.

1. Déterminer le meilleur encadrement possible de $\tau_F(A)$ en fonction de F et de Sp(A).

1. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = A + tE_{1,1}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lambda_1(t) \geq \cdots \geq \lambda_n(t)$ les valeurs propres de A(t). Montrer que : $\forall t \geq 0, \lambda_n(t) \geq \lambda_n$ et $\lambda_1 \geq \lambda_2(t)$.

1. Déterminer un équivalent simple de $\lambda_1(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

2) Analyse

Exercice 294 [X MP 2025 # 295] 1. Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E. Montrer que si N_1 et N_2 ont la même sphère unité alors $N_1 = N_2$.

1. On pose $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$. Soit $(f,g) \in E^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|xf+yg\|_\infty$ soit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, dont on note $\|\|$ la norme. Soit p une autre norme sur E. On note S et S_p les sphères unité respectives pour $\|\|$ et p. Montrer que $d : x \in S \mapsto \sup |\langle x, y\rangle|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, que $k = \sup \|y\|$ est un réel strictement positif, et enfin $y \in S_p$ que d est k-lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|$.

1. On note $B = \{f \in E,\ p(f) \leq 1\}$ et, pour $x \in S$, $D_x = \{z \in E; |\langle x, z\rangle| \leq d(x)\}$. Montrer que $B = \bigcap_{x\in S} D_x$.

Exercice 295 [X MP 2025 # 296] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que tout convexe non borné contient au moins une demi-droite. On pourra commencer par le cas d'un convexe fermé.

Exercice 296 [X MP 2025 # 297] Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit R_k la borne inférieure de l'ensemble E_k des $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tels qu'il existe une boule fermée de $\mathbb{R}^2$ euclidien de rayon r contenant au moins k points de $\mathbb{Z}^2$.

1. Calculer R_k pour k = 2, 3, 4.

1. Si $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que R_k est le minimum de E_k.

1. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $4R_k^2$ est entier.

1. Donner un équivalent de R_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Exercice 297 [X MP 2025 # 298] Soit E l'espace des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$. On munit E de la norme $\|\|_\infty$. Déterminer les formes linéaires continues φ sur E telles que, pour tout $(f,g) \in E^2$ tel que $\varphi(fg) = 0$, on ait $\varphi(f) = 0$ ou $\varphi(g) = 0$.

Exercice 298 [X MP 2025 # 299] Soit $\rho : [0,1] \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue telle que, pour tout t, $\rho(t)^2 = \rho(t)$.

1. Montrer que $t \mapsto \operatorname{rg}\rho(t)$ est constante.

1. Montrer l'existence de $u \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ telle que $\forall t, \rho(t) = u(t)\rho(0)u^{-1}(t)$.

1. On suppose de plus que $\rho(1) = \rho(0)$. Montrer que l'on peut choisir u de sorte que l'on ait aussi $u(0) = u(1)$.

Exercice 299 [X MP 2025 # 300] Soit $n \geq 2$. On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire les $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 m_{i,j} \geq 0$. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de permutation associée à σ ; la matrice P_σ est dans $\mathcal{B}_n$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un élément M de $\mathcal{B}_n$ est dit extrémal lorsqu'il ne peut pas s'écrire M=(1-t)A+tB avec

A, B éléments distincts dans $\mathcal{B}_n$ et $t \in]0,1[$.

1. Montrer que les P_σ sont des points extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

1. On fixe un élément M de $\mathcal{B}_n$.
   Pour une partie $I \subset [\![1,n]\!]$, on note $\mathcal{F}(I) = \{i \in [\![1,n]\!] : \exists j \in I, m_{i,j} > 0\}$.

1. Montrer que $|I| \leq |\mathcal{F}(I)|$.

1. Montrer qu'il existe une injection $f\colon [1,n] \to [1,n]$ telle que, pour tout $i \in [1,n]$, $m_{i,f(i)} > 0$.

1. En déduire l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est l'enveloppe convexe des P_σ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Exercice 300 [X MP 2025 # 301] On munit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall\theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge.

1. Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_{3^n}(x)$.

- Montrer que f est bien définie et continue sur [-1, 1].
- Montrer que $d(f, \mathbb{R}_{3^n}[X]) = \inf_{P\in\mathbb{R}_{3^n}[X]} \|fP\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Ind. On pourra considérer les points $x_k = \cos(\pi(1 + k3^{-n-1}))$ pour $k \in [0, 3^{n+1}]$.

Exercice 301 [X MP 2025 # 302] Soient K une fonction continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$, E l'espace des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$.- a) Si $f \in E$, soit $T_K(f)$ la fonction de [0,1] dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1], T_K(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)f(y)dy$. Montrer que T_K est un endomorphisme continu de l'espace normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

1. On suppose que K est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, que $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et que l'espace propre $E_\lambda(T_K)$ contient une fonction non identiquement nulle à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $E_\lambda(T_K)$ est de dimension 1.

Exercice 302 [X MP 2025 # 303] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \to 0$. Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 303 [X MP 2025 # 304] Soient a < b réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $t\in[a,b]$, il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers tels que $tu_n-k_n\longrightarrow 0$ quand $n\to+\infty$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 304 [X MP 2025 # 305] Soient $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$ et $\beta=1/\alpha$. Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $z_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $z_{n+1}=\frac{\alpha n+1}{\alpha(n+1)}z_n$.

1. Donner un équivalent de z_n et sa valeur exacte lorsque $\beta\in\mathbb{N}^*$.

1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.

- On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $\mu_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x_k$ et $y_n=\alpha x_n+(1-\alpha)\mu_n$. On suppose que $y_n\to x\in\mathbb{R}$. Montrer que $x_n\to x$.

Exercice 305 [X MP 2025 # 306] Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=|\{(p,q)\in\mathbb{N}^2,p^2+q^2=n\}|$.

1. Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum u_k$.

1. Étudier la nature de la suite (u_n).

1. Montrer que (u_n) n'est pas bornée.

Exercice 306 [X MP 2025 # 307] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$.

1. On suppose que $a_0=1/2$. Montrer que $\frac{1}{a_n}n\sim\ln n$ quand $n\to+\infty$.

1. On suppose $a_0>1$. Déterminer la limite de (a_n) puis un équivalent de a_n.

1. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n.

Exercice 307 [X MP 2025 # 308] 1. Pour $n\geq 3$, justifier l'existence de $x_n,y_n\in\mathbb{R}$ avec $0<x_n<y_n$ solutions de $x-n\ln x=0$.

1. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n et y_n.

Exercice 308 [X MP 2025 # 309] Construire une suite strictement croissante $(p_n)_{n\geq 2}$ d'entiers avec $p_2=2$ telle qu'il existe C> 0 vérifiant, pour tout $n\geq 2$, $\sum_{k=n}^{p_{n+1}-1}\frac{1}{\ln k}\geq C$, et telle que la série de terme général $2^{-(p_{n+1}-p_n)}$ diverge.

Exercice 309 [X MP 2025 # 310] On pose $\alpha=4\sum_{k=0}^{499999}\frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer qu'exactement une des 16 premières décimales de α diffère de la décimale de π correspondante.

Exercice 310 [X MP 2025 # 311] Soient p> 0 et q> 0 tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout

$$(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)\in(\mathbb{R}^+)^{2n},\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

.

Exercice 311 [X MP 2025 # 312] Soit $f\colon\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(x)\to 0$ quand $x\to 0^+$ et quand $x\to+\infty$. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $f^{(n)}(x_n)=0$.

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $x^nf^{(n)}(x)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}0$.

1. On pose $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ pour tout x > 0. Montrer que, pour tout $n\geq 0$, il existe $a_{n,0},\dots,a_{n,n}\in\mathbb{Z}$ tels que $g^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\frac{f^{(n-k)}(x)}{x^{k+1}}$ pour tout x> 0.

1. Montrer que, pour tout $n\geq 0$, $(-1)^ng^{(n)}(x)>0$ pour tout x > 0.

Exercice 312 [X MP 2025 # 313] Soit $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que : $f^2\leq 1$ et $(f')^2+(f'')^2\leq 1$. Le but est de montrer par l'absurde que $g=f^2+(f')^2\leq 1$. On suppose donc qu'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que : $f(t)^2+f'(t)^2>1$.
On pose : $E=\{x\in\mathbb{R};\forall y\in[\min(t,x),\max(t,x)],f(y)^2+f'(y)^2>1\}$.

1. Montrer que E est un intervalle ouvert.

1. Montrer que f' ne s'annule pas sur E.

1. Conclure.

Exercice 313 [X MP 2025 # 314] Si $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ est une famille de fonctions de]-1,1[dans $\mathbb{R}$, on dit que $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ vérifie (C) si $\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\varphi_4$ sur]0, 1[et $\varphi_2<\varphi_4<\varphi_1<\varphi_3$ sur]-1, 0[.

1. Montrer qu'il n'existe pas de famille $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ de fonctions polynomiales vérifiant (C). Ind. On pourra étudier la valuation de $\varphi_i-\varphi_j$ pour $i\neq j$.

1. Existe-t-il une famille $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ de fonctions de classe C^∞ vérifiant (C) ?

Exercice 314 [X MP 2025 # 315] Soit $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $(*)$: $\forall x\in\mathbb{R},s(x+1)=s(x)+\frac{1}{1+x^2}$ et $s(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$.

1. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $s(x)\geq 0$.

1. A-t-on existence et unicité de s vérifiant () ? Déterminer les s solutions.

1. Que se passe-t-il si on remplace la condition $s(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par la condition $s(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$?

Exercice 315 [X MP 2025 # 316] 1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que f est affine si et seulement si, pour tout réel x, on a $\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(}{h^2}$

0.b) Montrer que le résultat de la question précédente peut tomber en défaut sans hypothèse de continuité.

Exercice 316 [X MP 2025 # 317] Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$. On suppose qu'il existe $\alpha, \eta > 0$ tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha F(x)F(y) \leq F(x+y) \leq \eta F(x)F(y)$$

.

1. On suppose que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{F'}{F}$ est bornée. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ bornée tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = e^{\gamma x}H(x)$.

1. On revient au cas général. Montrer qu'il existe une unique fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\frac{F}{G}$ soit bornée et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ G(x+y) = G(x)G(y)$.

Exercice 317 [X MP 2025 # 318] Soient $M, m \in \mathbb{R}$ avec 0 < m < M, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},[m,M])$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$. Soit () l'équation fonctionnelle $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = 1 + \frac{g(qt)}{f(t)}$.

1. On suppose m > 2 ou M < 1/2. Montrer qu'il existe une unique solution bornée de ().

1. Montrer que les solutions bornées de () ne s'annulent pas.

Exercice 318 [X MP 2025 # 319] Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(G_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n P^{(n)}$$

.

1. Expliciter (G_n) pour φ vérifiant : $\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = \int_0^x P(t)dt$.

1. On suppose que, pour tout $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, si P admet un minimum local en a alors $\varphi(P)(a) = 0$. Montrer qu'il existe $Q \in E$ tel que, pour tout $P \in E, \varphi(P) = QP'$.

1. On suppose que, pour tout $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, si P admet un minimum local en a alors $\varphi(P)(a) \geq 0$. Montrer qu'il existe $Q, R \in E$ tels que, pour tout $P \in E, \varphi(P) = QP' +$

RP" avec R positif sur $\mathbb{R}$.

1. Donner une preuve directe de l'égalité trouvée en b).

Exercice 319 [X MP 2025 # 320] Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe quatre réels strictement positifs α, β, A, B tels que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)f(y)| \leq A|xy|^\alpha$ et $|g(x)g(y)| \leq B|xy|^\beta$ et $\alpha + \beta > 1$. On pose $\zeta : s \in]1,+\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. On fixe deux réels $a < b$.

1. Pour une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de [a,b], on pose $J(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k))$

$g(x_k))$. Montrer que $|J(\sigma) f(a)(g(b) g(a))| \leq AB\zeta(\alpha+\beta)(2(b-a))^{\alpha+\beta}$.

1. Montrer qu'il existe un réel $I_{a,b}(f,g)$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de [a,b], $\max_k |x_{k+1} x_k| < \delta \Rightarrow |J(\sigma) I_{a,b}(f,g)| < \varepsilon$.

Exercice 320 [X MP 2025 # 321] On note S l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $\gamma : [0,1] \to S$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une fonction continue $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$ pour tout $t \in [0,1]$.

Exercice 321 [X MP 2025 # 322] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose $h : t \in [0,1] \mapsto \inf_{s\in[0,t]} f(s)$ et g=f-2h.

1. Montrer que g est continue, positive et que g(0) = 0.

1. Montrer que si f est affine par morceaux alors g l'est aussi.

1. On suppose que f atteint son minimum en 1. On pose $q : t \in [0,1] \mapsto \inf_{s\in[t,1]} g(s)$. Montrer que f = g - 2q.

Exercice 322 [X MP 2025 # 323] Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On pose $\Psi(x) = \sum_{\substack{p\in\mathcal{P},\alpha\in\mathbb{N}^* \\ p^\alpha \leq x}} \ln p$ et $T(x) = \sum_{1\leq n\leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que $T(x) = \sum_{1\leq n\leq n} \ln(n) = x\ln(x) x + O(\ln x)$ quand $x \to +\infty$.

1. Montrer que $T(x) 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}\Psi\left(\frac{x}{n}\right) = x\ln 2 + O(\ln x)$.

Exercice 323 [X MP 2025 # 324] Soit f une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, de réciproque notée g.

1. Montrer que, pour $x \geq 0$, $\int_a^x f(t)dt + \int_a^{f(x)} g(t)dt = xf(x)$.

1. Déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, xy \leq \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(t)dt$.

Exercice 324 [X MP 2025 # 325] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive sur]0,1[.

1. Calculer $\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 f(x)^p dx\right)^{1/p}$.

1. Calculer $\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^1 f(x)^p dx\right)^{1/p}$.

Exercice 325 [X MP 2025 # 326] Soit f la fonction 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in[0,1[, f(x)=x-\frac{1}{2}$. Pour i et j dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^1 f(ix)f(jx)dx$.

Exercice 326 [X MP 2025 # 327] Pour a, b > 0, on définit $J_{a,b}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{(a\cos\theta)^2+(b\sin\theta)^2}}$.

1. Montrer que $J_{a,b}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$.

1. Montrer que $J_{a,b}=J_{\frac{a+b}{2}}\sqrt{ab}$

Exercice 327 [X MP 2025 # 328] Déterminer les réels α et β tels que $\int_0^{+\infty}|\sin t|^\alpha t^\beta dt<+\infty$.329. [nil] a) Pour $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note $I_f=\left\{p>0,\int_{\mathbb{R}}|f|^p<+\infty\right\}$. Montrer que I_f

Exercice 328 [X MP 2025 # 329] 1. Pour

$$f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

, on note $I_f=\{p>0,\int_{\mathbb{R}}|f|^p<+\infty\}$. Montrer que est un intervalle et exhiber f telle que $I_f=]a,b[,]0,b[$ ou $]b,+\infty[$ pour $0<a<b$.

1. Déterminer $\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^1|f|^p\right)^{1/p}$.

Exercice 329 [X MP 2025 # 330] Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $g\colon x\in\mathbb{R}^*\mapsto f\left(x-\frac{1}{x}\right)$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Exprimer $\int_{-\infty}^0 g+\int_0^{+\infty}g$ en fonction de $\int_{-\infty}^{+\infty}f$.

Exercice 330 [X MP 2025 # 331] On rappelle que $\int_{\mathbb{R}^n}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $p_n:x\in\mathbb{R}\mapsto(-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n(e^{-x^2/2})}{dx^n}$.

1. Montrer que p_n est polynomiale, préciser son degré et son coefficient dominant, et dé-

montrer que p_n est paire ou impaire.

1. Calculer $\int_{\mathbb{R}}p_m(x)p_n(x)e^{-x^2/2}dx$ pour $(m,n)\in\mathbb{N}^2$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale multiple

$$I=\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\left(\prod_{1\le i\le n}(x_j-x_i)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_k^2\right)dx_1\cdots dx_n$$

.

Ind. On pourra s'intéresser au déterminant de la matrice $(p_{i-1}(x_j))_{1\le i,j\le n}$.

Exercice 331 [X MP 2025 # 332] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}}f_i f_j=$

$\delta_{i,j}$ pour tous $i,j\in\mathbb{N}$. Pour $N\in\mathbb{N}^*$ et $x,y\in\mathbb{R}$, on pose $K_N(x,y)=\sum_{i=1}^N f_k(x)f_k(y)$. Pour $p\in\mathbb{N}$ et $x_1,\ldots,x_p\in\mathbb{R}$, on pose $\varphi_p(x_1,\ldots,x_p)=\det((K_N(x_i,x_j))_{1\le i,j\le p})$.
Calculer $\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_p(x_1,\ldots,x_p)dx_1\ldots dx_p$.

Exercice 332 [X MP 2025 # 333] 1. Soit $a\in\mathbb{R}^{+*}$. Calculer les intégrales $\int_0^1\frac{\ln(1+t^a)}{t}dt$ et $\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}dt$.

1. Soit $(a_n)_n\in(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $I\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\mapsto\sum_{n\in I}a_n$ soit injective, $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ désignant l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\le 2$.
   c. Soit $(a_n)_n\in(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle qu'il n'existe pas d'entier n ni de partie finie I de $\mathbb{N}\setminus\{n\}$ telle que $a_n=\sum_{k\in I}a_k$. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\le 50$.

Exercice 333 [X MP 2025 # 334] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On pose $f_n:x\in\mathbb{R}\mapsto a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 334 [X MP 2025 # 335] Pour

$$n\in\mathbb{N}$$

, soit $f_n:x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\mapsto\pi\cot(\pi x)-\sum_{k=-\infty}^n\frac{1}{x+k}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\ge0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ vers une fonction f, et que l'on peut prolonger f par continuité à $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction prolongée par continuité est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4f'(x) = f'\left(\frac{x}{2}\right) + f'\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

.

1. En déduire que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $g\colon x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$. Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que le développement en série entière de $x \mapsto g(x) - 1 + \frac{x}{2}$ ne contient que des termes

pairs. On note

$$g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}$$

.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $\zeta(2n)$ en fonction de a_n. Ind. On pourra considérer g(ix) pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 335 [X MP 2025 # 336] Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$.
Si

$$t \geq 0$$

, on pose $g_t : x \in [0,1] \mapsto \inf\{f(y) + t|y-x|, y \in [0,1]\}$.

1. Si $t \geq 0$, montrer que g_t est une fonction continue.

1. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la suite $(g_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante et qu'elle converge vers

f(x).

1. Montrer que $(g_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur [0,1].

Exercice 336 [X MP 2025 # 337] 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$.

1. Pour $x, y \in [-2, 2[$ avec $x \neq y$, on pose $S(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} T_n(x) T_n(y)$.

- Montrer que $S_n(x,y)$ est bien défini.

- Montrer que, pour $x, y \in [-2, 2[$ avec $x \neq y$, on a $S(x,y) = -2\ln|xy|$.

Exercice 337 [X MP 2025 # 338] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. À quelle condition sur α la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n+x}$ est-elle définie sur $\mathbb{R}^+$?

1. Lorsque f est définie sur $\mathbb{R}^+$, déterminer sa limite, puis un équivalent, en $+\infty$.

1. On fixe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré d > 0, sans racine dans $[1, +\infty[$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, d) pour que $g\colon x \mapsto \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{P(n+x)}$ soit définie

sur $\mathbb{R}^+$. Dans ce cas, donner un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 338 [X MP 2025 # 339] 1. On fixe un entier $d \geq 0$. Soit $(c_k)_{k\leq d}$ une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}_{\leq d} = \{k \in \mathbb{Z}, k \leq d\}$. On suppose qu'il existe un réel R > 0 telle que $(c_k z^k)_k$ soit sommable pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que |z| > R; pour un tel z, on pose $g(z) = \sum_k c_k z^k$. On suppose enfin que $c_1, \ldots, c_d$ sont tous rationnels et que $g(a) \in \mathbb{Z}$ pour une infinité d'entiers a. Montrer que $c_0 \in \mathbb{Q}$ et $c_k = 0$ pour tout k < 0.

1. Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que, pour tout entier n assez grand, P(n) est la puissance s-ième d'un entier. Soient $\tau_1, \ldots, \tau_s$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe une fonction gvérifiant les hypothèses de la question précédente (pour un certain d) et telle que, pour tout complexe z de module assez grand, $\prod P(z+\tau_k) = g(z)^s$. En déduire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q^s$ et $\forall k \in \mathbb{Z},\ Q(k) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 339 [X MP 2025 # 340] Soient $\theta > 1$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$ dont θ est racine de multiplicité 1 et dont les autres racines complexes sont de module < 1 et dont $1/\theta$ n'est pas racine. Soit $Q = X^n P(1/X)$.

1. Montrer que $f\colon z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon

$1/\theta$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ ce développement.

1. Montrer que $g\colon z \mapsto f(z)(1-\theta z)$ est développable en série entière de rayon > 1. On note $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. Montrer que les c_n sont dans $\mathbb{Z}$ et que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g(e^{it})\right|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2$.

1. Démontrer que $1 + \theta^2 = b_0^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n \theta b_{n-1})^2$.

1. On suppose que P(0) > 0. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 340 [X MP 2025 # 341] 1. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_n.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-2}^{2} x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,dx$. Prouver l'existence d'une constante

c> 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c\, I_n$ et la déterminer.

Exercice 341 [X MP 2025 # 342] Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_0 = 4^m$, $u_1 = 4^m - 1$ et, pour $k \in [1, m]$, $u_k = -1 + \frac{2m-k}{2m} u_{k+1} + \frac{k}{2m} u_{k-1}$ et $v_k = m \int_0^1 \frac{(1+x)^{2m-k}}{x} \left((1+x)^k - (1-x)^k\right) dx$.

1. Montrer que, pour tout $k \in [1, m]$, $v_k = u_k$.

1. Donner un équivalent de $W_m = m \int_0^1 \frac{(1+x)^m}{x} ((1+x)^m (1-x)^m) dx$.

Exercice 342 [X MP 2025 # 343] Déterminer un équivalent de $\int_0^{+\infty} (te^{-t})^x dt$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 343 [X MP 2025 # 344] Soit E l'ensemble des fonctions y de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $y''(t) + e^t y(t) = 0$. Soit $y \in E \setminus \{0\}$.

1. Montrer que les zéros de y sont isolés.

1. Montrer que les zéros de y peuvent être rangés en une suite strictement croissante $(t_n)_{n \geq 0}$ tendant vers $+\infty$.

1. Donner un équivalent de t_n.

Exercice 344 [X MP 2025 # 345] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$.

1. Soient p un projecteur de E et $a \in \mathcal{L}(E)$ tels que ap + pa = a. Montrer que $\operatorname{tr} a = 0$.

1. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E. Pour $p \in \mathcal{P}(E)$, décrire l'espace tangent à $\mathcal{P}(E)$ en p. Quelle est sa dimension ?

3) Géométrie

Exercice 345 [X MP 2025 # 346] Soit (u, v) une base de $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (u, v) pour qu'il existe un polygone régulier à n côtés dont les sommets sont tous dans $\mathbb{Q}u + \mathbb{Q}v$.

4) Probabilités

Exercice 346 [X MP 2025 # 347] Un tiroir contient 2n chaussettes, constituant n paires. On tire successivement et aléatoirement les chaussettes du tiroir les unes après les autres jusqu'à avoir tiré une paire. Quelle est l'espérance du nombre total de chaussettes tirées ?

Indication : Pour simplifier le résultat, on pourra utiliser un raisonnement probabiliste pour établir que $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} 2^{-k} = 1.$

Exercice 347 [X MP 2025 # 348] On organise un tournoi avec une infinité $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de joueurs. Les modalités sont les suivantes : J_0 et J_1 s'affrontent, le gagnant affronte J_2 et ainsi de suite : le gagnant de chaque partie affronte le joueur suivant lors de la partie suivante. On considère tous les matchs comme indépendants et on note $p_n = \mathbf{P}(J_n$ remporte son premier match). Le tournoi s'arrête lorsqu'un joueur remporte deux matchs successifs. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de matchs joués jusqu'à l'arrêt du tournoi. Pour les deux premières questions, on fixe

$$\alpha \in]0, 1[$$

et on suppose que : $\forall n \geq 2,\ p_n = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Montrer que T est presque sûrement finie.

1. Montrer que T est d'espérance finie.

1. Dans cette question, on fixe $N \geq 2$ et la condition de victoire devient : un joueur remporte le tournoi quand il a gagné N matchs consécutifs. Ainsi le cas précédent correspond au cas N=2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = p \in]0, 1[$.

On note $a_n = \mathbf{P}(T \geq n)$ avec, pour $k \leq N$, $a_k = 1$. Déterminer une relation de récurrence entre les a_n.

Exercice 348 [X MP 2025 # 349] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $|\sigma|$ le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints (y compris les cycles de longueur 1).a) Pour $k \in [1, n]$, on pose $C_k = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n, |\sigma| = k\}|$.

1. Pour $k \in [1, n]$, on pose $C_k = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n, |\sigma| = k\}|$

Calculer f_n où $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n C_k x^k$.

1. Soit σ_n une variable de loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Donner un équivalent de l'espérance de $|\sigma_n|$.

1. Montrer que $\frac{|\sigma_n|}{\ln(n)}$ tend vers 1 en probabilités quand $n \to +\infty$.

Exercice 349 [X MP 2025 # 350] 1. Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbf{E}(X(X-1)\cdots(X-p+1))$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et calculer $\mathbf{E}(1/(X+1))$ et $\mathbf{E}(1/(X+2))$.

1. Soient A un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Une p-partition de A est une partition de X formée de p sous-ensembles (non vides) de X. Soit B un ensemble fini de cardinal m. Dénombrer, pour une p-partition de $\mathcal{F}$ de A, les applications de A dans B dont $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fibres non vides (à savoir des ensembles non vides de la forme $f^{-1}\{b\}$ où $b \in B$).

1. En utilisant les deux questions précédentes, exprimer le nombre de partitions de A comme

Exercice 350 [X MP 2025 # 351] Soient $p \in]0,1[$ et t> 0. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = -1) = 1 - p$ et $N \sim \mathcal{P}(t)$ indépendante des X_n. On pose :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$$

.

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\mathbf{P}(S_N = n)$.

1. Montrer que :

la somme d'une série numérique.

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} y^n \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ n\geq 0}} \frac{x^{n+2i}}{n!(n+i)!} = e^{xy+1/y}$$

.

Exercice 351 [X MP 2025 # 352] Soient $p \in [0,1[, m \geq 2$ et $\xi = e^{2i\pi/m}]$.

1. Montrer que :

$$\forall a,b \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k\in[\![0,n]\!]} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (b + \xi^j a)^n$$

.

1. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose : $A_n = (m \mid X_1 + \cdots + X_n)$ et $u_n = \mathbf{P}(A_n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|u_n \frac{1}{m}\right| \leq e^{-8pqn/m^2}$ où q = 1 p.

Exercice 352 [X MP 2025 # 353] Soit X une variable aléatoire discrète positive ayant un moment d'ordre 2 et telle que $\mathbf{E}(X^2) > 0$. Montrer que, pour t > 0, $\mathbf{P}(X\mathbf{E}(X) \leq -t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{\mathbf{E}(X^2)}\right)$.

Exercice 353 [X MP 2025 # 354] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose de plus que $\mathbf{E}(X_1^2) < +\infty$, et on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S_i}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que, pour tout ω, $(T_n(\omega))_{n\geq 1}$ a une limite dans $[0, +\infty]$.

1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ et une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ d'entiers ≥ 1 vérifiant $n_{k+1} \geq 2n_k$ et $\mathbf{P}(S_{n_k} \geq 2n_k\mathbf{E}(X_1)) \leq \frac{C}{2^k}$ pour tout $k \geq 1$.

1. En déduire que $(T_n)_{n\geq 1}$ tend presque sûrement vers $+\infty$.

1. Montrer que $\mathbf{V}(T_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(\frac{1}{S_i^2}\right)$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 354 [X MP 2025 # 355] On pose $(X)_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(X)_n = X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

1. Montrer que $((X)_n)_{n\geq 0}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on décompose $X^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}(X)_n$. Déterminer $a_{k,0}$ et $a_{k,n}$ pour $n \geq k$.

1. En considérant une variable aléatoire Z suivant la loi de Poisson de paramètre 1, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{+\infty} a_{k,n} = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^k}{i!}$.

1. Pour $0 \leq n \leq k$, on note $b_{k,n}$ le nombre de façons de ranger k objets indifférenciés dans n tiroirs non numérotés, aucun des tiroirs n'étant vide. Montrer que $b_{k,n} = a_{k,n}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de façons de partitionner un ensemble à k éléments.

Exercice 355 [X MP 2025 # 356] On cherche à prouver l'existence d'un réel $C > 0$ tel que, pour toutes variables aléatoires réelles X et Y indépendantes et de même loi, on ait l'inégalité $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 2) \leq C\,\mathbf{P}(|X - Y| \leq 1)$.

1. On suppose X et Y à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer l'existence de $C' > 0$ indépendant de X tel que $\mathbf{P}(|XY| \leq 2) \leq C'\mathbf{P}(X = Y)$.

1. Montrer le résultat souhaité.

1. Montrer que $C' \geq 3$.

Exercice 356 [X MP 2025 # 357]

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2 de même loi telles que $Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{B}(n,p)$?

1. On dit qu'une variable aléatoire Z est infiniment divisible si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_k$ telles que $Y_1 + \cdots + Y_k \sim Z$, avec a priori $(Y_1, \ldots, Y_k)$ défini sur un espace probabilisé différent de celui de Z.

Donner un exemple d'une telle variable aléatoire.

1. Que dire d'une variable aléatoire Z infiniment divisible de support inclus dans [0,1] ?

1. Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ indépendante des X_i (avec $\lambda > 0$). Montrer que $Z = X_1 + \cdots + X_N$ est une variable aléatoire infiniment divisible.

Exercice 357 [X MP 2025 # 358] Soient $a \in]0,1[$ et $\varphi_a : x \mapsto 1(1-x)^a$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X_a à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $x \in [0,1], \varphi_a(x) = \mathbf{E}(x^{X_a})$.b) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) = \frac{a}{n}$. On pose $Y = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{1}_{A_n} = 1\}$. Montrer que $Y \sim X_a$.

On considère l'équation fonctionnelle : $\forall x \in [0,1], \varphi_a(x) = x\varphi(\varphi_a(x))$ d'inconnue φ :
$[0,1] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour $a \in [1/2, 1]$ cette équation admet une unique solution continue, qui est

de plus la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans N.

1. Montrer que ce n'est pas le cas pour a = 1/3.

Exercice 358 [X MP 2025 # 359] Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ et $\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la limite de $\left(\mathbf{E}\left(e^{-\lambda \frac{S_n}{n}}\right)\right)_{n\geq 1}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ dérivable sur $]1, +\infty[$ et telle que : $\forall x > 1, f(x-1) + xf'(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1], f(x) = 1$.

Montrer qu'il existe une unique fonction f qui respecte ces conditions, qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers 0 en $+\infty$.

1. On définit $\varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt$, avec f la fonction de la question précédente. Mon- trer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+, \lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda \frac{S_n}{n}}\right) = e^{-k}\varphi(\lambda)$.

Exercice 359 [X MP 2025 # 360] Soient X une variable aléatoire à support fini à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ et telle que $-X \sim X, (X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(\|S_n\|^2) = n\,\mathbf{E}(\|X\|^2)$ et $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{P}(S_n = x)^2$.

1. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(S_{2n} = 0) \geq \frac{c}{n}$.

1. Démontrer que $P(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1$.

V) X PSI **AUTRE**

1) Algèbre

Exercice 360 [X PSI 2025 # 361] Soit $P(X) = X^{11}14X^25X + 1$. Montrer que P admet au moins une racine complexe de module strictement inférieur à 1.

Exercice 361 [X PSI 2025 # 362] Soit $f\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}\left(\frac{X+1}{2}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{X}{2}\right)\right)$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $(f^n(P)(a))$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 362 [X PSI 2025 # 363]

1. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que h est diagonalisable et $h \circ u - u \circ h = 2u$. Montrer que u est nilpotent.

1. Soit $E = \mathbb{C}[X]$ et soient u, v, h les trois endomorphismes de E définis par$\forall P \in E, u(P) = X^2P' + XP, v(P) = P'$ et $h(P) = P + 2XP'$.

1. Montrer que h est diagonalisable et que $h \circ uu \circ h = 2u$. L'endomorphisme u est-il nilpotent ?

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E à la fois u-stable et v-stable. Montrer que $F = \{0\}$ ou F = E.

Exercice 363 [X PSI 2025 # 364] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \dim(\mathrm{Ker}(B\lambda I_{2n})) = \dim(\mathrm{Ker}(A\lambda^2 I_n))$.

1. À quelle condition sur A la matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 364 [X PSI 2025 # 365] Soit $X \in \mathbb{C}^n$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $XX^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit diagonalisable.

Exercice 365 [X PSI 2025 # 366] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}((AI_3)^2) \oplus \mathrm{Ker}(A2I_3)$. Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Trouver un équivalent de $||A^n x||$.

Exercice 366 [X PSI 2025 # 367] On définit deux matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon > 0$.

1. Étudier la diagonalisabilité de M et N_ε, détailler leurs sous-espaces propres et donner une base de chacun d'eux.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = M^n E, Y = N_\varepsilon^n E$, où $E = \binom{1}{\varepsilon}$. Expliciter X_n et Y_n et étudier asymptotiquement les vecteurs $\frac{X_n}{\|X_n\|}$ et $\frac{Y_n}{\|Y_n\|}$.

Exercice 367 [X PSI 2025 # 368] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $A^T = -A$. Soient $\mu \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. On écrit X = U + iV avec $U, V \in \mathbb{R}^n$. Montrer que U et V sont orthogonaux.

2) Analyse

Exercice 368 [X PSI 2025 # 369] Soient E et F deux espace vectoriels normés (de dimension quelconque) et $\psi\colon E \to F$ une fonction telle que $\forall x, y \in E,\ \psi(x) + \psi(y) = \psi(x+y)$ et ψ est bornée sur la boule ouverte unité de E. Montrer que ψ est linéaire et continue.

Exercice 369 [X PSI 2025 # 370] Soit (E, ‖ ‖) un espace vectoriel normé avec $E \neq \{0\}$.

1. Soit φ un endomorphisme continu de E. Montrer que : $\sup_{x\neq 0} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} < +\infty$

1. Soient u,v deux endomorphismes continus de E tels que uv-vu= id. Montrer que $E = \{0\}$.

Exercice 370 [X PSI 2025 # 371] Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $K \subset E$ un convexe non vide. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$.- a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n(K) \subset K$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (S_1 \circ \cdots \circ S_n)(K) \subset \bigcap^n S_k(K)$.

1. On suppose que K est compact et que, pour tout $x \in E$, $||u(x)|| \leq ||x||$. Montrer que : $\forall x \in \bigcap S_n(K),\ u(x) = x$.

Exercice 371 [X PSI 2025 # 372] Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- $A_{n-1} = o(a_n)$,
- $a_{n-1} = o(a_n)$,
- $A_{n-1} = o(A_n)$

Exercice 372 [X PSI 2025 # 373] Soit u une suite réelle strictement positive, croissante et tendant vers $+\infty$. Montrer que la série $\sum \frac{u_n - u_{n-1}}{u}$ diverge.

Exercice 373 [X PSI 2025 # 374] Soit (d_n) une suite de réels positifs telle que la série de terme général d_n diverge. Nature de $\sum \frac{d_n}{1+d_n}$, $\sum \frac{d_n}{1+nd_n}$, $\sum \frac{d_n}{1+d_n^2}$ et $\sum \frac{d_n}{1+n^2 d_n}$?

Exercice 374 [X PSI 2025 # 375] Trouver $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que, successivement,

- f est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$;
- f est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et $[1, +\infty[$ et ne s'annule pas sur]0, 1[;
- f est nulle sur $\mathbb{R}^-$, égale à 1 sur $[1, +\infty[$ et ne s'annule pas sur]0, 1[.

Exercice 375 [X PSI 2025 # 376] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = f(x_k)$. On suppose que $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)$ est bornée. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 376 [X PSI 2025 # 377] Soit a > 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I(a,n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a + \cos(x))^n dx$.

1. Trouver la limite de $(I(a,n))_{n\geq 0}$.

b) Soit $b \in]0, \pi/2[$. Montrer que $\frac{\sqrt{n}}{(1+a)^n} \int_b^{\frac{\pi}{2}} (a + \cos(x))^n dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Calculer la limite de $\left(\frac{\sqrt{n}}{(1+a)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+1}} \int_0^b (a + \cos(x))^n dx\right)$.

1. En déduire un équivalent de I(a,n) quand $n \to +\infty$

Exercice 377 [X PSI 2025 # 378] Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Soit () l'équation différentielle y' + y = f(t).

1. Montrer que toute solution y de () tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

1. On suppose de plus que $f(t) \sim \frac{1}{t\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Soit y une solution non nulle de (). Déterminer un équivalent de y(t) quand $t \to +\infty$.

Exercice 378 [X PSI 2025 # 379] Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$, on considère le problème de Cauchy $f' = -f^2$ et f(0) = 1.

1. Résoudre l'équation différentielle.
   Soit $h \in]0, 1/2[$. On définit la suite (y_n) par $y_0 = 1$ et $y_{n+1} y_n = -h y_n^2$.

1. Montrer que $y_n \to 0$.

1. Montrer que $\frac{1}{y_n} = 1 + nh + o(n)$.

3) Probabilités

Exercice 379 [X PSI 2025 # 380] Soient $n \geq 2$ et X une variable aléatoire à valeurs dans [0, n].

1. Soit Y une autre variable aléatoire à valeurs dans [0,n]. Montrer que si $\forall k \in [0, n]$,

$\mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k)$ alors $X \sim Y$.

1. Montrer qu'il existe des variables aléatoires X, Y à valeurs dans [0, n] ne suivant pas la même loi et telles que $\forall k \in [2, n], \mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k)$.

Exercice 380 [X PSI 2025 # 381] Soient ε, X et Y trois variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\varepsilon \sim \mathcal{B}(1/2)$ et que X et Y suivent ( ]0, 1[. On note $M = \begin{pmatrix} (2\varepsilon - 1)X & Y \\ Y & (2\varepsilon - 1)X \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathbf{P}(M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$.

1. Déterminer $P(M \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}))$.

Exercice 381 [X PSI 2025 # 382] Soit $n \geq 2$. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans [1, n]. Déterminer les $X \in \mathcal{X}$, indépendantes de toutes les $Y \in \mathcal{X}$.

Exercice 382 [X PSI 2025 # 383] On effectue $n \leq N$ tirages sans remise dans un sac de N jetons numérotés de 1 à N. On note X_i la variable aléatoire donnant le numéro du jeton du i-ème tirage et on pose $Z_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Calculer $\mathbf{E}(Z_n)$.

Exercice 383 [X PSI 2025 # 384] On pose (X_k) une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de para- mètre $p \in [0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k+n}$

1. Calculer l'espérance de Y_n

1. Déterminer la limite de $(\mathbf{E}(Y_n))$

1. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(|Y_n \alpha| > \varepsilon) = 0$.

VI) X PC AUTRE

1) Algèbre

Exercice 384 [X PC 2025 # 385] Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que P P' = Q. Montrer que, si $Q \geq 0$, alors $P \geq 0$.

Exercice 385 [X PC 2025 # 386] Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes de E. Montrer que $A \cap]2, +\infty[= \emptyset$.

Exercice 386 [X PC 2025 # 387] Soient

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$$

et $r \in [0, 1]$.
Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|P(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k} \leq \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |P(e^{i\theta})|^2$$

.

Exercice 387 [X PC 2025 # 388] Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré d et $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ ses racines. On suppose que, pour tout

$$k \in [1, d]$$

, $|\lambda_k| \leq 1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k^n$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f(n) est entier.

1. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f(n+p) = f(n).

Exercice 388 [X PC 2025 # 389] Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, A + kB est inversible et que son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que A + 5B est inversible et que son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 389 [X PC 2025 # 390] On considère la matrice $A = (\mathbf{1}_{i=j+1 \bmod n})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p \in \mathbb{N}^*$ pour que $B = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$ soit inversible.

Exercice 390 [X PC 2025 # 391] On considère une ferme avec 2n+1 vaches. Le fermier s'aperçoit que quelle que soit la vache que l'on retire du troupeau, il peut séparer les vaches restantes en deux groupes de n vaches, de telle sorte que les sommes des poids des vaches de chacun des groupes sont égales. Montrer que toutes les vaches ont le même poids.

Exercice 391 [X PC 2025 # 392] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $a_{i,j} = \frac{1}{\min(i,j)}$. Calculer $\det A$.

Exercice 392 [X PC 2025 # 393] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A + H) = \det(A) + \det(H)$. Que dire de A ?

Exercice 393 [X PC 2025 # 394] Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des réels distincts. Soient $c_1, \ldots, c_p$ des réels non tous nuls. On pose

$$\varphi : x \mapsto \sum^{p} c_i e^{\alpha_i x}$$

. Montrer que φ s'annule au plus $p-1$ fois.

1. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p$ des réels tels que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ et $\beta_1 < \cdots < \beta_p$. Montrer que le déterminant de la matrice $\left(e^{\alpha_i \beta_j}\right)_{1 \leq i,j \leq p}$ est strictement positif.

Exercice 394 [X PC 2025 # 395] Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB^2B^2A = B$. Montrer que B est nilpotente d'ordre impair.

Exercice 395 [X PC 2025 # 396] 1. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable.b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q : x = (x_1 \ldots x_n)^T \in \mathbb{C}^n \mapsto \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} x_i x_j \in \mathbb{C}$. Montrer
qu'il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall x \in \mathbb{C}^n, Q(x) = x^T S x$.
c. Montrer qu'il existe un ensemble fini I, une famille $(\ell_i)_{i \in I} \in (\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}))^I$ de formes linéaires indépendantes et une famille $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ telles que
linéaires indépendantes et une famille

$$(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$$

telles que $\forall x \in \mathbb{C}^n, \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i \in I} \alpha_i \ell_i(x)^2$.
Ind. Commencer par traiter l'exemple $Q(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_3^2$.

Exercice 396 [X PC 2025 # 397] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$.

Exercice 397 [X PC 2025 # 398] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M pour que l'application $f \colon A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit bijective.

Exercice 398 [X PC 2025 # 399] Soit

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

. On pose $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

1. Justifier que cette définition est pertinente.

1. On suppose que M s'écrit $M = I_n + A$ où A est nilpotente. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

Exercice 399 [X PC 2025 # 400] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Pour

$$v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

, on pose $H_v = I_n - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}$.

1. Donner une interprétation géométrique de H_v.

1. Montrer que, pour tout vecteur unitaire $e \in v^\perp$, on a $H_{v - \|v\| e}(v) = \|v\| e$.

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Donner un algorithme permettant de trouver $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 telles que A = QR.

Exercice 400 [X PC 2025 # 401] Soient $E = [\![1, n]\!]$ et $A_1, \ldots, A_m$ des parties distinctes de E telles qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j, \Rightarrow \mathrm{Card}(A_i \cap A_j) = c$. Montrer que $m \leq n$. Ind. Considérer d'abord le cas où il existe i tel que $\mathrm{card}(A_i) = c$.
Ensuite pour $i \in [\![1, m]\!]$, poser $v_i = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{A_i}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{A_i}(n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et considérer $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq m}$.

Exercice 401 [X PC 2025 # 402] Soient $n, p \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient E un sousespace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\inf\{||x - b||, x \in E\}$ est atteint en un unique point de E.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf\{\|Axb\|, x \in \mathbb{R}^p\}$ est atteint. Si x_1 et x_2 sont deux points en lesquels le minimum est atteint, montrer que $x_2 x_1 \in \mathrm{Ker}\, A$.

1. Résoudre l'équation $A^T A x = A^T b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^p$.

Exercice 402 [X PC 2025 # 403] Soit

$$H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

.a) Montrer qu'il existe des réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et des matrices de projecteurs orthogo-
naux $P_1, \ldots, P_k$ de $\mathbb{R}^n$ tels que : $\sum_{i=1}^k P_i = I_n, P_i P_j = 0$ si $i \neq j$ et $H = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$.

1. Soit $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{tr}(R) = 1$. On pose $p_i = \mathrm{tr}(RP_i)$ pour $1 \leq i \leq k$.

Montrer que $(p_1, \ldots, p_k)$ est une loi de probabilité sur $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Exercice 403 [X PC 2025 # 404] Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det^{1/n}(A + B) \geq \det^{1/n}(A) + \det^{1/n}(B)$.

Exercice 404 [X PC 2025 # 405] Soient $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $\sum_{i=1}^n M_i^T M_i = I_p$.
Pour $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose $L(X) = \sum_{i=1}^n M_i^T X M_i$.
On écrit $M \geq N$ pour signifier $M - N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $L(X^T X) \geq L(X^T)L(X)$.

Exercice 405 [X PC 2025 # 406] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. On définit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $A_0 = A$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + A_n^{-2}$. Donner un équivalent de $\operatorname{tr} A_n$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 406 [X PC 2025 # 407] 1. Soit $(u_1, \dots, u_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$. Montrer que l'on peut renuméroter les u_i pour qu'il existe $\alpha \in [1, k]$ tel que la famille $(u_1, \dots, u_\alpha)$ soit libre et $u_j \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_\alpha) = E$
pour tout $j \in [\alpha + 1, k]$.

1. Soit $U = (u_1 | \cdots | u_\alpha) \in \mathcal{M}_{n,\alpha}(\mathbb{R})$. Montrer que $U^T U$ est inversible.
   c. Soient
$$\beta \geq \alpha + 1$$
et $B = \begin{pmatrix} \langle u_\beta, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_\beta, u_\alpha \rangle \end{pmatrix}$. Montrer que la solution de $U^T U X = B$ donne
les coordonnées de u_β dans la base $(u_1, \dots, u_\alpha)$ de E.
d. Soit $(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2, \langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$. Montrer qu'il existe $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in [1, k], W v_i = u_i$.

Exercice 407 [X PC 2025 # 408] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et
$B \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ tels que $A = B^T B$.
Soient $n \geq 2$ et $\mathcal{L}$ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour $A \in \mathcal{M}_{kn}(\mathbb{R})$ que l'on écrit $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,k} \end{pmatrix}$ où chaque bloc est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\hat{\mathcal{L}}_k$ par $\hat{\mathcal{L}}_k(A) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(A_{1,1}) & \dots & \mathcal{L}(A_{1,k}) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{L}(A_{k,1}) & \dots & \mathcal{L}(A_{k,k}) \end{pmatrix}$.
On dit que $\mathcal{L}$ est C.P. (complètement positif) lorsque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathcal{S}_{nk}^+(\mathbb{R})$, $\hat{\mathcal{L}}_k(A) \in \mathcal{S}_{nk}^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{L} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas C.P.
   c. Soit $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ complètement positif. En regardant le cas k=2, montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(M^T) = \mathcal{L}(M)^T$.

Exercice 408 [X PC 2025 # 409] Soient $S, T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T(S+T)X > 0$.
Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la famille (Se_i, Te_i) soit liée. Ind. Considérer $B : (X, Y) \mapsto X^T(S+T)Y$ et $M = (S+T)^{-1}S$.

2) Analyse

Exercice 409 [X PC 2025 # 410] Soit $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \forall (i,j) \in [1,n]^2, m_{i,j} \in [0,1]^2\}$.
On pose $\alpha = \sup_{M\in A}(\det M)$.

1. Montrer que α est un maximum.

b. Montrer que ce maximum est atteint en des matrices M à coefficients dans $\{-1, 1\}$ telles que $\det M > 0$.

Exercice 410 [X PC 2025 # 411] Pour
$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
, on pose $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1. Montrer que $\exp(A)$ est bien définie. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

1. Montrer que, si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
   c. Montrer que
$$\lim_{k\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{2k}\right) \exp\left(\frac{B}{k}\right) \exp\left(\frac{A}{2k}\right) \right)^k = \exp(A+B)$$
.

Exercice 411 [X PC 2025 # 412] On munit
$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$$
de la norme $\|\|_\infty$. Si $f \in E$, on pose $A(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f(t)dt + \int_0^1 t f(t)dt$.

1. Trouver $C > 0$ tel que $\forall f \in E, ||A(f)||_\infty \leq C||f||_\infty$.

b. Déterminer la constante C optimale.

Exercice 412 [X PC 2025 # 413] Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. On pose

$$Conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ ; \ n \in \mathbb{N}^*, \ (x_1, \ldots, x_n) \in A^n, \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

.

On suppose de plus que, pour tout $(x, y) \in A^2$, il existe $\gamma : [0,1] \to A$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Montrer que $\mathrm{Conv}(A) = \bigcup_{(a,b) \in A^2} [a, b]$.

Exercice 413 [X PC 2025 # 414] Soit E un espace vectoriel normé. On dit que $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ vérifie la propriété C si : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall p \geq N, \ \forall q \geq N, \ \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. On dit que E vérifie la propriété B si toute suite de E vérifiant C est convergente. On admet que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété B. On

pose

$$\ell^1 = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < +\infty \right\}$$

. On munit ℓ^1 de la norme définie par $||u||_1 = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

. Montrer que $(\ell^1, |||_1)$ vérifie la propriété B.

Exercice 414 [X PC 2025 # 415] On munit $\ell^1 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty\}$ de la norme définie par $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ et

$$\ell^\infty = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M\}$$

de la norme définie par $||u||_\infty = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M\}$
$\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. Enfin, pour $(u, v) \in \ell^1 \times \ell^\infty,$ on pose $\varphi_v(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que pour tout $v \in \ell^\infty$, φ_v est bien définie sur ℓ^1.

On note D_{ℓ^1} l'ensemble des formes linéaires sur ℓ^1 qui sont continues.

1. Montrer que pour tout $v \in \ell^\infty$, $\varphi_v \in D_{\ell^1}$. On pose, pour $v \in \ell^\infty$, $\|\varphi_v\| = \inf\{C > 0 : \forall u \in \ell^1, |\varphi_v(u)| \leq C\|u\|_1\}$.
   c. Montrer que $\|\|$ est une norme.

1. Calculer $\|\varphi_v\|$ pour $v \in \ell^\infty$.
   d. Calculer $\|\varphi_v\|$ pour $v \in \ell^\infty$. Les question précédentes montrent que l'application T de ℓ^∞ dans D_{ℓ^1}, qui à v associe φ_v est une application linéaire et une isométrie

est une application linéaire et une isométrie.

1. Montrer que T est bijective.

Exercice 415 [X PC 2025 # 416] 1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique $(N, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que :

- $M = D + N$,
- D est diagonalisable,
- N est nilpotente, iv) ND = DN.

1. Quels sont les points de continuité de $M \mapsto (D, N)$?

Exercice 416 [X PC 2025 # 417] Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = \sum_{n=1}^{n^2} \frac{1}{n^2+k^2}$. Déterminer la limite de (nv_n).

Exercice 417 [X PC 2025 # 418] On définit (u_n) par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 418 [X PC 2025 # 419] Soient $(a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}}$.

1. Montrer que, si $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k \geq n} \left\{ \frac{\ln(\ln a_k)}{k} \right\} > \ln 2$, alors (t_n) diverge.

1. Montrer que, si $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k > n} \left\{ \frac{\ln(\ln a_k)}{k} \right\} < \ln 2$, alors (t_n) converge.

Exercice 419 [X PC 2025 # 420] Soit $f \colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ strictement croissante, continue et telle que $f(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Montrer que les séries de termes généraux $\frac{1}{f(n)}$ et $\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Exercice 420 [X PC 2025 # 421] Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \frac{u_n}{S_n}$ converge.

Exercice 421 [X PC 2025 # 422] Soient $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $f\colon x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$. Montrer que, si $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$, alors $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est irrationnel.

Exercice 422 [X PC 2025 # 423] Soit

$$n \in \mathbb{N}^*$$

. Montrer : $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$.

Exercice 423 [X PC 2025 # 424] Soit $f\colon x \in \mathbb{R}^* \mapsto e^{-1/x^2}$. Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 424 [X PC 2025 # 425] Soit $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que G(0)=G(1)=0, G est continue en 1 et dérivable en 0, $G'(0) \geq 0$ et, pour tout $x \in [0,1]$, on a $G(x) = \max_{y\in[0,x]}(G(y) + G(x-y))$.
Montrer que G est nulle.

1. Montrer $I_n \to +\infty$.

Exercice 425 [X PC 2025 # 426] $$ Montrer que : $\sum_{p\leq x} \frac{\ln p}{p} \geq \ln x + O(1)$. **Ind.** Considérer $\ln(n!)$.

Exercice 426 [X PC 2025 # 427] Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue à valeurs positives telle $\int_0^1 g = 1$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\varphi'' \geq 0$.
Montrer :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(x))g(x)dx$$

.

Exercice 427 [X PC 2025 # 428] Soient deux réels a < b et $f, g \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}^{+*}\right)$ avec $f \neq g$.
On suppose

$$\int_a^b f = \int_a^b g$$

. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^b \frac{f^{n+1}}{g^n}$.

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}^{J_a}$ est strictement croissante.

Exercice 428 [X PC 2025 # 429] Soif $f \in C^2([0,1], \mathbb{R}^+)$ telle que f(0) = 0 et $f'' \geq 0$.
Montrer que $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \int_0^1 x^2 f'(x)^2 dx$.

Exercice 429 [X PC 2025 # 430] Soient $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^{+*}$ et $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$ continues telles que : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \int_0^1 K(x,z)g(z)dz$ et $g(x) = \int_0^1 K(x,z)f(z)dz$. Montrer que f=g.

Exercice 430 [X PC 2025 # 431] Soient L^1 (resp. L^2) l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ intégrables (resp. de carré intégrable). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $x \mapsto x\, f(x)$ et $x \mapsto x\, f'(x)$ sont dans L^2.

1. Montrer que $f \in L^2 \cap L^1$.

1. Montrer $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Montrer que $x \mapsto x f^2(x)$ est dans L^2

Exercice 431 [X PC 2025 # 432] Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $x \mapsto (1+x^2)|f(x)|$, $x \mapsto (1+x^2)|f'(x)|$ et $x \mapsto (1+x^2)|f''(x)|$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $A_t(f)\colon x \mapsto f'(x) + txf(x)$ et $A_t^*(f) : x \mapsto -f'(x) + txf(x)$.

1. Si $f \in E$, montrer que $\int_{\mathbb{T}^n} A_t^*(A_t(f))f \geq 0$.

Ind. Montrer, pour $(f,g) \in E^2$, que $\int_{\mathbb{R}} A_t(f)g = \int_{\mathbb{R}} f A_t^*(g)$.

1. Soit $f \in E$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f^2 = 1$. Montrer que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f^2(x)dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)dx\right) \geq \frac{1}{4}$

Exercice 432 [X PC 2025 # 433] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^3 définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n^{(3)}(x)\right|\right) = c \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x)| = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n''(x)| = 0$.

Exercice 433 [X PC 2025 # 434] On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Soit $g\colon x \mapsto \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 dx$.

1. Calculer $\int_0^{\pi} (x^2 g(x))^2 dx$.

1. Expliciter q et tracer son graphe.

Exercice 434 [X PC 2025 # 435] Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_0 = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t)dt$.

1. Montrer que l'application T qui à f associe $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Exprimer T(f) à l'aide de f.

1. L'application T est-elle injective ? surjective ?

Exercice 435 [X PC 2025 # 436] Soit $f\colon t \mapsto (1-t)^{1-1/t}$. Cette fonction est-elle développable en série entière ? Si oui déterminer le rayon de convergence et le signe des coefficients de ce développement en série entière.

Exercice 436 [X PC 2025 # 437] Donner le développement en série entière de $f(x) = \frac{1}{1-2x-x^2}$ et son rayon de convergence. Montrer que les coefficients sont entiers. Pouvait-on le prévoir ?

Exercice 437 [X PC 2025 # 438] On pose $f\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n(n-1)/2}}$. Montrer que f n'est pas le quotient de deux polynômes.

Exercice 438 [X PC 2025 # 439] 1. Donner le développement en série entière de $\arctan$ et montrer : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 4\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer : $\left|\pi S_n \frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{1}{2n^3}$.

1. Montrer que, pour $n = 5 \times 10^5$, π et S_n ont leurs 16 premières décimales communes, sauf pour la 6e.

Exercice 439 [X PC 2025 # 440] 1. Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Soit $r > 0$. On suppose que f n' a pas de racine de module r. On note $N_r(f)$ le nombre de racines de f (comptées avec multiplicité) situées dans le disque de centre 0 et de rayon r. Montrer que $N_r(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} re^{i\theta} d\theta.$

1. Soit $r > 0$. Soient f et g dans $\mathbb{C}[X]$ tels que, pour tout z de module r, [g(z)] < |f(z)|. Montrer que f et f+g ont le même nombre de racines comptées avec multiplicité dans le disque de centre 0 et de rayon r.

1. Application : montrer que $X^8 5X^3 + X + 2$ possède 3 racines comptées avec multiplicité dans le disque unité.

Exercice 440 [X PC 2025 # 441] Soit $A : \mathbb{C} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. On suppose que les coordonnées de A sont sommes de séries entières de rayon $+\infty$ et que $A(\mathbb{R}) \subset SO_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ somme d'une série entière de rayon $+\infty$ telle que $\forall z \in \mathbb{C},\ A(z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(z)) & -\sin(\varphi(z)) \\ \sin(\varphi(z)) & \cos(\varphi(z)) \end{pmatrix}$.

Exercice 441 [X PC 2025 # 442] Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ la restriction γ_k de γ au segment $[a_k, a_{k+1}]$ est de classe C^1. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue. On définit $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{j+1}} f(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)dt$. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ et f est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(z)dz = 0$.

Exercice 442 [X PC 2025 # 443] 1. Montrer que, pour $x > 0$, $e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+s^2)}ds.$

1. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$

1. Calculer $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt.$

Exercice 443 [X PC 2025 # 444] 1. Montrer que $\forall t \in [0,1[, \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}d\theta = 0.$b) En déduire que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|e^{i\theta} - z|d\theta = \max(0, \ln|z|)$$

.

Ind. Considérer la fonction

$$f\colon t \mapsto \int_0^{2\pi} \ln\left(|z - te^{i\theta}|\right) d\theta$$

.

Exercice 444 [X PC 2025 # 445] Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = \max(x, 0)$. Soit $\widehat{f} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{i\xi x}dx.$

1. Montrer que $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

1. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=-k}^{k} e^{ijx} = \sum_{j=-N}^{N}\left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right)e^{ijx} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

.

c. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, montrer que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin((N+1)x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 e^{-ikx}dx = \left(1 - \frac{|k|}{2N+2}\right)^+$$

.

d. Montrer que, uniformément en $k \in \mathbb{Z}$, la suite de terme général $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin((N+1)x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 e^{-ikx}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin((N+1)x)}{\frac{x}{2}}\right)^2 e^{-ikx}$ tend vers

$$0$$

lorsque $N \to +\infty$. En déduire : $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(\xi) = \pi\left(1 - \frac{|\xi|}{2}\right)^+$.

Exercice 445 [X PC 2025 # 446] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier l'existence de $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ Ind. Montrer l'existence d'une norme $\| \ \|$

sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle il existe $c > 0$ tel que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq c\|A\|\|B\|$.

1. Soit $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), t \mapsto \exp(tA)$. Montrer que M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer

M'(t) pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ continue et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Trouver toutes les fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivables telles que $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) + Bu(t)$.

1. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $\exp(A) = P(A)$?

Exercice 446 [X PC 2025 # 447] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle\langle b, x\rangle$.

1. Montrer que J est strictement convexe : $\forall x \neq y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in]0,1[\, , J(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y)$.

1. Montrer que $\lim_{\|x\| \to +\infty} J(x) = +\infty$.

1. Montrer que J atteint son minimum en l'unique point x_0 vérifiant $Ax_0 = b$.

Exercice 447 [X PC 2025 # 448] Soit $n \geq 2$. On pose $\Sigma = \left\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ \sum_{i=1}^n a_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1\right\}$.Maximiser $S_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ lorsque $(a_1, \ldots, a_n)$ décrit Σ.

3) Probabilités

Exercice 448 [X PC 2025 # 449] Soit $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbf{P}(X = k)$.

Exercice 449 [X PC 2025 # 450] Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'entiers naturels non nuls. On tire des dés équilibrés, le n-ième dé admettant a_n faces numérotées de 1 à a_n. On effectue les tirages tant que la suite des résultats est croissante. On note p la probabilité de faire une infinité de tirages. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que p soit non nul.

Exercice 450 [X PC 2025 # 451] On définit pour

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

, $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1. Montrer que e^A est bien défini.

Ind. On pourra montrer qu'il existe une norme $\| \cdot \|$ et une constante $C > 0$ telles que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), ||AB|| \leq C||A||||B||$. On note

$$R = \frac{1}{2} I_2$$

, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer, pour $s, t \in \mathbb{R}$, $f(s,t) = \mathrm{Tr}(Re^{i(sR + yH)})$.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^2$. On note $g(s,t) = \mathbf{E}(e^{i(sX + tY)})$.
c. Montrer que

$$\forall s_1, \ldots, s_m, \ t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m g(s_k - s_\ell, t_k - t_\ell) \geq 0$$

()

1. On prend $s_2 = s_3 = t_1 = t_3 = \frac{2\pi}{3}$ et $t_2 = s_1 = 0$. Montrer que f ne vérifie pas ().

1. Soient $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), R \in \mathcal{S}_n^+(\check{\mathbb{R}})$ tel que $\mathrm{Tr}\, R = 1$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que $\forall s \in \mathbb{R}, \mathrm{Tr}(Re^{isH}) = \mathbf{E}(e^{isX})$

Exercice 451 [X PC 2025 # 452] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit S_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \geq 0$. Calculer $\mathbf{E}(e^{sS_n})$.

1. Montrer que, pour tout réel a,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \exp\left(-n \sup_{s > 0} \left(as - \ln\left(pe^s + (1-p)\right)\right)\right)$$

.

c. Montrer qu'il existe une fonction $H \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{+*})$ ne dépendant pas de n telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \exp(-nH(\varepsilon))$$

.

Exercice 452 [X PC 2025 # 453] Une suite (Y_n) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dite **transiente** si, pour toute partie bornée A de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(Y_n \in A) < +\infty$.Soient $\alpha > 0$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on ait $X_i \sim \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{i}\right)$. On pose $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que (Y_n) est transiente.

Exercice 453 [X PC 2025 # 454] Une suite (S_n) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dite **transiente** si, pour toute partie bornée A de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(S_n \in A) < +\infty$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables
aléatoires telle que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$, avec $p \in]0,1[$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que (S_n) est transiente si et seulement si $p \neq 1/2$.

Exercice 454 [X PC 2025 # 455] Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_k = 1) = p$ et

$$P(X_k = -1) = 1 - p$$

. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1\}$ et $f_n = P(T = n)$.

1. Montrer que $f_1 = p$ et que $\forall n \geq 2$, $f_n = (1-p)\sum_{k=0}^n f_{k-1}f_{n-k}$.

1. On pose $F : x \mapsto \mathbf{E}\left(x^T 1_{T<+\infty}\right)$. Montrer que $F(x) = px + (1-p)F(x)^2 x$.

Exercice 455 [X PC 2025 # 456] On considère un marcheur qui peut se situer sur n sites numérotés de 1 à n. À chaque étape, il a une probabilité $p_{i,j}$ de sauter du site numéro i au site numéro j.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire donnant le site occupé par le marcheur à l'étape k et $\mu_{k,i} = \mathbf{P}$ (le marcheur est en i à l'étape k). L'application $\mu_k : i \in [\![1,n]\!] \mapsto \mu_{k,i}$ est la loi de X_k.

1. Donner les lois de X_1 et X_2 et fonction de μ_0 et des $p_{i,j}$.

1. Pour $f\colon [1,n] \to \mathbb{R}$, donner $\mathbf{E}(f(X_1))$.

On pose, pour $f \in \mathbb{R}^{[1,n]}$, l'application $T(f) : [1,n] \to \mathbb{R}$ définie par : $T(f)(i) = \mathbf{E}(f(X_1))$ lorsque la suite (X_n) vérifie $\mu_0 = \mathbf{1}_{\{i\}}$. On dit que la marche aléatoire est déterministe si : $\forall i \in [1,n],\ \exists j_i \in [1,n],\ p_{i,j_i} = 1$.

1. Interpréter cette dernière définition.

1. Montrer que la marche est déterministe si et seulement si : $\forall (f,g) \in (\mathbb{R}^{[1,n]})^2$, T(fg) = T(f)T(g).

Exercice 456 [X PC 2025 # 457] Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que X est à valeurs dans $\{V_1, \ldots, V_m\}$ avec, pour $k \in [1,m]$, $\mathbf{P}(X = V_k) = p_k > 0$.

1. On dit que X est centrée lorsque $\mathbf{E}(X) = 0$. Montrer que, si X est centrée, alors $\mathrm{rg}(V_1, \ldots, V_m) < m$.

1. On dit que X est centrée-réduite lorsque $\mathbf{E}(X) = 0$ et que la matrice de covariance $(\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est égale à I_n. Montrer que si X est centrée-réduite alors $m \geq n$.

1. On suppose que m = n + 1. Montrer que X est centrée-réduite si et seulement si, pour tous $i \neq i$ $\langle V_i, V_j\rangle = -1$ et pour tout i n = 1

tous $i \neq j$, $\langle V_i, V_j\rangle = -1$ et, pour tout i, $p_i = \frac{1}{\|V_i\|^2+1}$.

VII) De Christophe **XENS**

Exercice 457 [ENS 25, ULSR] Une randonneuse doit choisir un emplacement pour poser sa tente. Elle dispose de N emplacements distincts numérotés, qu'elle parcourt à partir du premier. Elle ne peut pas revenir en arrière, et lorsqu'elle est au niveau d'un emplacement, elle peut le comparer aux emplacements qu'elle a déjà vu. On suppose que tous les emplacements ont autant de chance d'être le meilleur. L'objectif est de s'arrêter au niveau du meilleur emplacement. But de l'exercice : trouver une stratégie maximisant les chances de réussite.

1. Traiter le cas $N = 3$.

1. (Question donnée après avoir fini Q1) On considère la stratégie suivante : la randonneuse parcourt les k premiers emplacements sans s'arrêter, et à partir du $k+1$-ième, elle s'arrête dès qu'elle en trouve un meilleur que les précédents. Quel est le meilleur k (asymptotiquement) ?

Exercice 458 [ENS 25, SR] Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$. On écrit

$$e^M = \begin{pmatrix} * & \Phi_{A,B}(C) \\ & * \end{pmatrix}$$

1. Rappeler la valeur de chacune des étoiles.

1. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est linéaire.

1. On suppose A, B diagonalisables. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

Exercice 459 [ENS SR 25] Montrer le caractère C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction définie par

$$\forall x \neq y, f(x,y) = \frac{e^x - e^y}{x-y} \text{ et } \forall x, f(x,x) = e^x$$

Exercice 460 [X 2025] Soit $\alpha > 0$. On définit

$$z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{\alpha n + 1}{\alpha(n+1)} z_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} z_i \sim \alpha n z_n$.

1. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note $\displaystyle\mu_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i$. On suppose que $\alpha x_n + (1-\alpha)\mu_n \to x$. Montrer que $x_n \to x$.

Exercice 461 [ENS 2025, MPI] Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie. Soit K une partie de E non vide, bornée et dont la frontière est compacte. Montrer que K est d'intérieur vide. Question supplémentaire : et si on remplace l'hypothèse "préhilbertien" par "normé" ?

Exercice 462 [ENS 2025, MPI] Dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on définit la relation d'ordre strict $>$: $A > B \iff A - B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 463 [X 2025] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note $\displaystyle f\colon z \mapsto \sum_{k \leq d, k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$, et on suppose que f est définie sur le complémentaire d'un disque centré en 0. On suppose également que $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{Q}$ et qu'il existe une infinité de $z \in \mathbb{Z}$ tels que $f(z) \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $c_0 \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\forall k < 0, c_k = 0$.

1. Autres questions non abordées.

Exercice 464 [X 2025] Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$?

Exercice 465 [ENS SR 2025] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \{A \in S_n^+(\mathbb{R}), \operatorname{rg}(A) = 1\}$.

1. Montrer que $A \in E \iff \exists U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, A = UU^T$.

1. Soit $a \in C^0(\mathbb{R}^+, E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\exists u \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall x > 0, a(x) = u(x)u(x)^T$
- $\exists z \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall x > 0, z(x)^T a(x) z(x) > 0$

1. On suppose vraies les propriéts de la question 2. Soient $b < c$ dans $\mathbb{R}^+$ et $i, j \in [1, n]$. On suppose que $a_{i,i}(x) > 0$ et $a_{j,j}(x) > 0$ pour tout $x \in [b,c]$. Montrer que

$$\exists z \in C^0([b,c], \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \begin{cases} \forall x \in [b,c], z(x)^T a(x) z(x) > 0 \\ z(b) = e_i \\ z(c) = \pm e_j \end{cases}$$

Exercice 466 On note $A = \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, n a_{n+1} = (n+1) a_n\right\}$.

1. Etudier A.

1. Trouver les solutions sur $]-1{,}1[$ de $\quad (H) : x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$

Exercice 467 [ENS 2025] Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$, ppremier impair. On dit qu'une partie $D \subset \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ est f génératrice pour $f\colon \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ si

$$\forall y \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}, \exists n \geq 2, \exists d_1, \ldots, d_n \in D, y : f\left(f\left(\ldots f\left(d_1, d_2\right), d_3\right) \ldots, d_n\right)$$

1. Avec $f : (x,y) \mapsto x - y$, dénombrer les parties $D \subset \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ qui sont f-génératrices et de cardinal minimal.

1. Avec $f : (x,y) \mapsto xy$, montrer qu'il n'existe aucune partie f-génératrice de cardinal 1.

1. Avec $f : (x,y) \mapsto xy$, montrer qu'il existe au moins une partie f-génératrice de cardinal 2. On admettra que le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ est cyclique.

Exercice 468 [ENS25, SR] Pour $f, g \in E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$, on note $(f \mid g) = \int_{-1}^{1} fg$.

Pour tout entier naturel n, on pose $\quad L_n = \left(X^2 - 1\right)^n$ et $P_n = \dfrac{1}{n! 2^n} L_n^{(n)}$.

1. Rappeler pourquoi (.|.) est un produit scalaire.

1. Montrer que pour tout n, P_n est un polynôme de degré n. Montrer que les P_i sont deux à deux orthogonaux.

1. Montrer que P_n est scindé simple à racines dans $]-1,1[$.

1. Ecrire P_n sous la forme $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X-1)^{n-k}(X+1)$. Montrer que $(X-1)^n P\left(\frac{X+1}{X-1}\right)$ est un polynôme.

1. Etudier la rationnalité des racines de P_n

Exercice 469 [X 2025] Soit $\sum (a_n z^n)$ une série entière de rayon $R>0$ et de somme f. Soeint $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M), |\lambda| < R$.

1. Montrer que $\sum (a_n M^n)$ converge.

1. Peut-on trouver une suite (a_n) telle que le résultat soit vrai pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M), |\lambda| \leq R$.

Exercice 470 [X 2025] On note $B_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(M)=1$ et $-1 \notin \mathrm{Sp}(M)$. On note

$$T : M \mapsto (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$$

1. Montrer que T est bien définie sur $A_n(\mathbb{R})$ et que $T(A_n(\mathbb{R})) \subset B_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $T(B_n(\mathbb{R})) \subset A_n(\mathbb{R})$.

1. On prend $n=2$. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -\tan(\theta) \\ \tan(\theta) & 0 \end{pmatrix}$ avec $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Que dire de $T(M)$ et $T^2(M)$?

Exercice 471 [ENS 2025] On dit qu'une matrice est de Bordaud si ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

1. Montrer que A est semblable à une matrice de Bordaud si et seulement si A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

1. Existe-t-il une matrice symétrique dans $\mathbb{C}$, non diagonalisable, qui est de Bordaud ?

1. Caractériser les matrices A qui sont normales, *i.e.* $A^T A = AA^T$, et de Bordaud.

Exercice 472 [ENS 2025] 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient A, B diagonalisables qui commutent. Montrer que A et B sont codiagonalisables.

1. Soit $\Phi : S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(H,Q) = HQ$. Montrer que Φ est une bijection.

1. Montrer que Φ^{-1} est continue.

Exercice 473 [X 2025] Trouver deux dés non biaisés tels que la probabilité de la somme soit la même que pour deux dés usuels. Les valeurs des faces sont des entiers naturels, pas forcément distincts et les dés peuvent être différents.

Exercice 474 Ci-dessous, version alternative du même exercice Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que :

- Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta > 1$;
- Il existe $A, B > 0$ tels que : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq A|x-y|^\alpha, \quad |g(x)-g(y)| \leq B|x-y|^\beta$.

Soit $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $a = x_0$, $b = x_n$. On définit :

$$J_S(f,g) := \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left(g(x_{i+1}) - g(x_i)\right)$$

1. Montrer que : $\quad |J_S(f,g) - f(a)(g(b)-g(a))| \leq AB|2(b-a)|^{\alpha+\beta}\zeta(\alpha+\beta)$, où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.

1. Montrer qu'il existe une unique valeur $I \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ si } \max_{0 \leq i < n} |x_{i+1} - x_i| < \delta \Rightarrow |J_S(f,g) - I| < \varepsilon$$

Exercice 475 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in [a,b],\ |f(x)-f(y)| \leq A|x-y|^\alpha$$
$$|g(x)-g(y)| \leq B|x-y|^\beta$$

Soient $a < b$ et $S = (x_k)$ une subdivision de $[a,b]$ de cardinal n. On note :

$$J_S(f,g) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\left(g(x_{k+1}) - g(x_k)\right)$$

1. Montrer qu'il existe un indice i entre 1 et $n-1$ tel que $x_{i+1} - x_{i-1} < \frac{2(b-a)}{n-1}$.

1. Soit un tel i, et $S' = S \setminus \{x_i\}$. Exprimer simplement puis majorer $|J_S(f,g) - J_{S'}(f,g)|$.

1. Montrer que $\quad |J_S(f,g) - f(a)(g(b)-g(a))| \leq AB(2(b-a))^{\alpha+\beta}\zeta(\alpha+\beta)$.

1. Montrer qu'il existe un réel I tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision S de $[a, b]$ de pas inférieur à δ,

$$|J_S(f, g) - I| < \varepsilon$$

Exercice 476 [X 2025] Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ une application linéaire.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(g_n)_{n\geq 0}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on ait : $\quad \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \cdot P^{(n)}$.

1. Déterminer les polynômes g_n dans le cas particulier où $\quad \varphi(P)(X) = \int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 477 [X 2025] On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n, u_n = u_{n-1}(1 - u_{n-1})$.

1. Etudier la limite de (u_n).

1. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $\frac{1}{u_n} - n \sim \ln(n)$.

VIII) Mines - MP

1) Algèbre

Exercice 478 [Mines MP 2025 # 458] Pour $n \geq 2$, on pose $f(n) = \prod_{\substack{d\in[1,n-1] \\ d|n}} d$. Résoudre l'équation $f(n) = n$.

Exercice 479 [Mines MP 2025 # 459] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ dont on note $\{d_1, \ldots, d_k\}$ l'ensemble des diviseurs positifs. Montrer que :

$$\sqrt{n} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Exercice 480 [Mines MP 2025 # 460] Soient p, q deux entiers naturels premiers entre eux tels que $p < q$. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ et une liste strictement croissante $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ telle que

$$\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{a_k} \text{ et } a_1 \leqslant \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor.$$

Exercice 481 [Mines MP 2025 # 461] 1. Soit p premier impair. Pour $k \in [1, p-1]$ montrer qu'il existe un unique $k^{-1} \in [\![1, p-1]\!]$. tel que $k \cdot k^{-1} \equiv 1\ [p]$. Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} \equiv 0\ [p]$.

1. Soit m un entier naturel impair. Montrer que $\sum_{i=1}^{p-1} k^m \equiv 0$ [p].

1. Ici, $p \geq 5$. Montrer que pour $k \in [1, p-1]$, il existe un unique $k^* \in [1, p^2 1]$ tel que

$$k \cdot k^* \equiv 1\ [p^2].$$

Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} k^* \equiv 0\ [p^2]$.

Exercice 482 [Mines MP 2025 # 462] On note $\tau(n)$ (resp. $\sigma(n)$) le nombre de diviseurs positifs de n (resp. la somme des diviseurs positifs de n).

1. Montrer que si $n \wedge m = 1$ alors $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$.

1. Montrer que si $\sigma(n)$ est premier alors $\tau(n)$ l'est aussi.

Exercice 483 [Mines MP 2025 # 463] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = 2^n 1$, $u = 2 + \sqrt{3}$, $v = 2\sqrt{3}$ et $s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$.

1. Montrer que, si M_n est premier, alors n l'est aussi.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = s_n^2 2$. Qu'en déduire sur la suite (s_n) ? c) Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $B = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ et, pour $(x, y), (x', y') \in B$, on pose (x,y) + 2(x', y') = (x + x', y + y') et $(x, y) \times (x', y') = (xx' + 3yy', xy' + yx')$.

- i) Montrer que $(B, +, \times)$ est un anneau commutatif.

- ii) On pose $A = \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$ et $\pi : a + \sqrt{3}b \in A \mapsto (\overline{a}, \overline{b}) \in B$.

Montrer que π est bien défini et est un morphisme surjectif d'anneaux.

1. Soit n un nombre premier. Montrer que, si M_n divise s_{n-2}, alors M_n est premier. Ind. On pourra raisonner par l'absurde en considérant le plus petit diviseur premier q de M_n et l'ordre de $(\overline{2}, \overline{1})$ dans $B^\times$.-

Exercice 484 [Mines MP 2025 # 464] Soient A un anneau commutatif intègre et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans A. Montrer que, si $a_n \neq 0$, l'équation $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ admet au plus n solutions dans A.

Exercice 485 [Mines MP 2025 # 465] Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 486 [Mines MP 2025 # 466] Soient p un nombre premier, et G un groupe fini d'ordre 2p. Montrer que G possède un élément d'ordre p.

Exercice 487 [Mines MP 2025 # 467] On note S_n le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et M_n le maximum des ordres des éléments de S_n.

1. Montrer que $n \leq M_n \leq n!$.
1. Si $n \geq 4$, montrer que $M_n \leqslant \max_{2 \leqslant k \leqslant n-1}(kM_{n-k})$.
1. Montrer que $M_n = O(3^{n/3})$.

Exercice 488 [Mines MP 2025 # 468] Soit G un groupe fini dont tous les éléments sauf le neutre sont d'ordre 2.

1. Montrer que G est abélien.
1. Soient H un sous-groupe de G et $y \in G \setminus H$. Montrer que $H \cup yH$ est un sous-groupe de G, et que l'union est disjointe.
1. En déduire que |G| est une puissance de 2.
1. Calculer le produit de tous les éléments de G.

Exercice 489 [Mines MP 2025 # 469] Soit G un groupe abélien fini dont l'ensemble des automorphismes est de cardinal 3.

1. Montrer que $\varphi : x \in G \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G, puis que $\forall x \in G, x^2 = e$.

b) Montrer que G admet un sous-groupe V d'ordre 4 et déterminer les automorphismes de V.

1. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que G soit isomorphe à $V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$, et en déduire une absurdité.

Exercice 490 [Mines MP 2025 # 470] Soient G un groupe abélien fini et $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe fini.
1. Soit $\varphi \in \widehat{G}$ non trivial. Montrer que $\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0$.
1. Montrer que $\widehat{G}$ est une partie libre de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$.
1. En déduire que $|\widehat{G}| \leq |G|$.

Exercice 491 [Mines MP 2025 # 471] Soient $\mathbb{K}$ un corps, A, B deux parties finies de $\mathbb{K}$. On note $m = \mathrm{card}(A)$ et $n = \mathrm{card}(B)$. On pose $C = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$.

1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que $\mathrm{Card}(C) \geq m + n - 1$.
1. Montrer le même résultat pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On pourra utiliser l'ordre lexicographique sur $\mathbb{C}$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est premier, on veut montrer que $\mathrm{card}(C) \geq \min(p, m + n - 1)$. On suppose par l'absurde que $\mathrm{card}(C) = m + n - q$ avec $q \geq 2$ et m+n-q< p.
1. Montrer qu'il existe $f : A \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $g : B \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ telles que :

(i) $\forall k \in \{0, \ldots, m-2\}, \sum_{a \in A} f(a)a^k = 0$, (ii) $\sum_{a \in A} f(a)a^{m-1} = 1$,(iii)

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\} \setminus \{n+1-q\}, \sum_{b \in B} g(b)b^k = 0$$

, (iv) $\sum_{b \in B} g(b)b^{n+1-q} = 1$.

1. Conclure en calculant de deux manières différentes la quantité :

$$Q = \sum_{(a,b) \in A \times B} f(a)g(b) \prod_{c \in C} (a + b - c).$$

Exercice 492 [Mines MP 2025 # 472] Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A. On dit que I est un idéal premier si I est distinct de A et si, pour tout $(x, y) \in I^2$, la condition $xy \in I$ implique $x \in I$ ou $y \in I$.

1. Déterminer les idéaux premiers de Z.
1. Soit $P \in K[X]$ irréductible. Montrer que PK[X] est un idéal premier de K[X].
1. Soient J et K deux idéaux et I un idéal premier. Montrer que : $J \cap K = I$ implique J = I ou K = I.
1. Soit A un anneau commutatif non trivial dont tous les idéaux distincts de A sont premiers. Montrer que A est intègre puis que A est un corps.

Exercice 493 [Mines MP 2025 # 473] Soit i un idéal d'un anneau commutatif a. On appelle radical de I l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in A : \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$.

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.
1. Déterminer les radicaux des idéaux de $\mathbb{Z}$.

Exercice 494 [Mines MP 2025 # 474] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$.

1. Montrer que P est de la forme

$$P = \lambda \times \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{2a_i} \times \prod_{j=1}^{q} \left[(X - \lambda_j)^{n_j} (X - \overline{\lambda_j})^{n_j} \right],$$

avec $\lambda \geq 0$, les α_i dans $\mathbb{R}$ et les λ_i dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 495 [Mines MP 2025 # 475] Soit $\mathbb{D}$ désigne le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P possède une racine $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z_0| < 1$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall z \in \mathbb{U}$, $|P(z)| = |Q(z)|$ et $\forall z \in \mathbb{D}$, $|P(z)| < |Q(z)|$.

Exercice 496 [Mines MP 2025 # 476] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses racines complexes, distinctes ou non. Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $\prod_{k=1}^{n} (X \lambda_k^q)$ est encore à coefficients entiers.

Exercice 497 [Mines MP 2025 # 477] Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, unitaire de degré $n \geq 2$, dont toutes les racines sont réelles et négatives. Montrer que P'(0) $P(1) \geq \frac{n^{n+1}}{(n-1)^{n-1}} P(0)$.

Exercice 498 [Mines MP 2025 # 478] Montrer qu'il existe un polynôme à coefficients entiers dont $\sin \frac{\pi}{180}$ est racine.

Exercice 499 [Mines MP 2025 # 479] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}$.

1. Montrer que $\sin((2n+1)\theta) = (\sin\theta)^{2n+1} P_n(\cos^2(\theta)/\sin^2(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

1. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2(k\pi/(2n+1))}{\sin^2(k\pi/(2n+1))} = \frac{n(2n-1)}{3}$.

1. Conclure que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 500 [Mines MP 2025 # 480] On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
note

1. Montrer que l'équation (E_n) : $\tan(y) = 2n \tan(y/2n)$ possède au moins n-1 solutions dans $]0, n\pi[$.

1. Expliciter deux polynômes A,B à coefficients réels tels que $\tan(2nt) = \frac{A(\tan t)}{B(\tan t)}$ pour

tout réel t tel que $\tan t$ et $\tan(2nt)$ soient définis. c) Mettre en évidence un polynôme P tel que les solutions de (E_n) soient les solutions de $P(1/\tan^2(y/2n)) = 0$. d) Dénombrer les solutions de (E_n) dans $]0, n\pi[$.

Exercice 501 [Mines MP 2025 # 481] 1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $P_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}$.

1. Déterminer les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.

Exercice 502 [Mines MP 2025 # 482] Pour une partie finie $I = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (de cardinal n) d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E, on

$$\mathrm{Conv}(I) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k \; ; \; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \; \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1 \right\}.$$

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\mathcal{Z}(P)$ l'ensemble de ses racines complexes. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

1. Écrire la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{D}$.

1. Montrer que $Conv(\mathcal{Z}(P')) \subset Conv(\mathcal{Z}(P))$. c) Soit H un demi-plan fermé de $\mathbb{C}$ contenant au moins une racine de P'. Montrer que H - contient au moins une racine de P. Démontrer ensuite que $P(H) = \mathbb{C}$.

Exercice 503 [Mines MP 2025 # 483] Quelle est la dimension du $\mathbb{Q}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par $\mathbb{U}_5$?

Exercice 504 [Mines MP 2025 # 484] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$, on pose $\Lambda(x) = \mathrm{pgcd}(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants : i) $\Lambda(Ax) = \Lambda(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$; ii) $\det A = \pm 1$.

Exercice 505 [Mines MP 2025 # 485] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.- a) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

1. Trouver $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 506 [Mines MP 2025 # 486] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$. On suppose que AB = P(A). Montrer que A est inversible puis que A et B commutent.

Exercice 507 [Mines MP 2025 # 487] 1. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

1. Déterminer les formes linéaires φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(MN) = \varphi(NM)$.

Exercice 508 [Mines MP 2025 # 488] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}\, M = 1$.

1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}^n$ tels que $M = ab^T$.

1. Montrer que $M^2 = (\operatorname{tr} M)I_n$. c) Calculer χ_M. À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice $M + I_n$ est-elle inversible ? Dans ce cas, expliciter son inverse.

Exercice 509 [Mines MP 2025 # 489] Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, AB = 0 implique BA = 0.

Exercice 510 [Mines MP 2025 # 490] Trouver les solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 511 [Mines MP 2025 # 491] Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $M = (z^{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M soit inversible.

1. Calculer rg M en fonction de z.

Exercice 512 [Mines MP 2025 # 492] Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $a_{n+1} = a_1$. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $m_{i,j} = a_j^i + a_{j+1}^i$.

1. Calculer $\det M$.

b) Étudier l'inversibilité de M.

Exercice 513 [Mines MP 2025 # 493] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n, u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n-1.

1. Calculer dim (Ker u^j) pour $1 \leq j \leq n-1$.

1. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 514 [Mines MP 2025 # 494] Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$, soient $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes et $\mathcal{H}$ celui des matrices de trace nulle.- a) Montrer que $Vect(\mathcal{N}) \neq \mathcal{N}$.

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{H}$. A-t-on $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$?

Exercice 515 [Mines MP 2025 # 495] Soient A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$.
Montrer que l'ensemble des matrices de $\{tA + (1-t)B,\ t \in [0,1]\}$ n'appartenant pas à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est fini de cardinal au plus n.

Exercice 516 [Mines MP 2025 # 496] 1. Que peut-on dire du déterminant d'une matrice de $GL_n(\mathbb{Z})$, le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$?

1. Soient $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $k \in [0, 2n]$, $B + kC \in GL_n(\mathbb{Z})$. Calculer $|\det B|$ et $\det C$.

Exercice 517 [Mines MP 2025 # 497] Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $kM^{k+1} = (k+1)M^k$. Montrer que I_nM est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 518 [Mines MP 2025 # 498] 1. Définir la fonction indicatrice d'Euler puis exprimer $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition primaire de $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(d)$.

1. En déduire le déterminant de la matrice $(i \wedge j)_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Exercice 519 [Mines MP 2025 # 499] Montrer que : $\forall t \geq 0, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A^2 + tI_n) \geq 0$.

Exercice 520 [Mines MP 2025 # 500] 1. Soient $P_0, \ldots, P_{n-1}$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec P_k de degré k et $z_0, \ldots, z_{n-1}$ des nombres complexes. Calculer $\det(P_{i-1}(z_{j-1}))_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\prod_{0 \leq i < j \leq n} \frac{x_j x_i}{ji} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 521 [Mines MP 2025 # 501] Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ des réels et $M = (e^{a_i b_j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Montrer que $\det M > 0$ lorsque n = 2.

1. Calculer $\det M$ lorsque $b_k = k1$ pour tout k.

1. Montrer que M est inversible puis que $\det M > 0$.

Exercice 522 [Mines MP 2025 # 502] Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : $\sum_{i \neq j}(A_iA_j + A_jA_i) = 0$. Montrer que :

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n}(A_k + I_n)^2 - (n-2)I_n\right) \geq 0.$$

Exercice 523 [Mines MP 2025 # 503] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont tous les coefficients diagonaux sont impairs et les autres pairs. Montrer que A est inversible.

1. Est-ce encore le cas si on suppose les coefficients diagonaux pairs et les autres impairs ?

1. On dispose de 2p+1 masses telles que, dès qu'on en enlève une, les 2p masses restantes peuvent être regroupées en deux ensembles de cardinal p de même masse. Montrer que les 2p+1 masses sont toutes égales.

Exercice 524 [Mines MP 2025 # 504] Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que () $f \circ g - g \circ f = id$.

1. Vérifier que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $f \circ P(g) - P(g) \circ f = P'(g)$ et montrer que $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

1. Pour $E = \mathbb{R}[X]$, donner un exemple qui vérifie ().

Exercice 525 [Mines MP 2025 # 505] Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente telles que AN = NA. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A + N$.

Exercice 526 [Mines MP 2025 # 506] Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $A^{k+1}B^k = A$ et que A et B sont équivalentes.

1. Montrer que $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A^2$.

1. Montrer que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$.

1. Montrer que $B^{k+1}A^k = B$.

Exercice 527 [Mines MP 2025 # 507] Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Montrer que Com A et Com B sont semblables.

Exercice 528 [Mines MP 2025 # 508] Soient $n \geq 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Calculer $\operatorname{Com}(J_r)$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $0 \leqslant r \leqslant n$.

1. Montrer que Com(AB) = Com(A) Com(B) pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

1. Exprimer $\operatorname{rg}(\operatorname{Com}(A))$ en fonction de $\operatorname{rg} A$. d) Étudier l'injectivité de $\gamma : A \mapsto$ Com(A). Quelle est son image ?

Exercice 529 [Mines MP 2025 # 509] Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soient $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$. On suppose que : $\forall (i,j) \in [1,n]^2, p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$.

1. Montrer que : $\forall i \in [1,n], \operatorname{rg} p_i = 1$. b) Montrer que la somme $\operatorname{Im} p_1 + \cdots + \operatorname{Im} p_n$ est directe.

Exercice 530 [Mines MP 2025 # 510] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. a) Montrer que : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2 \iff \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A$.

1. Montrer que rg $A = \operatorname{rg} A^2$ si et seulement si $t(A + tI_n)^{-1}$ possède une limite finie quand ttend vers 0+.

Exercice 531 [Mines MP 2025 # 511] Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note V^o l'ensemble des M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall A \in V, \operatorname{tr}(AM) = 0$; l'ensemble V^o est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Exprimer la dimension de V^o en fonction de celle de V.

1. Déterminer V^o si V est le sous-espace des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 532 [Mines MP 2025 # 512] Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ tel que $V \setminus \{0\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$.

1. Montrer que $\dim V \leq n$.

1. On note S la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ définie par $s_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j+1 \\ 2 \text{ si } i = 1 \text{ et } j = n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{Z}$ tels que λ_0 soit impair.

   Montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k S^k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$.

1. En déduire que dans la question a) l'égalité est possible.

Exercice 533 [Mines MP 2025 # 513] Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ telle que les seuls sous-espaces stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ soient $\{0\}$ et E.

1. Soit $x \in E$. Donner $\Gamma_x = \{f(x), f \in A\}$.

1. i) Soient $u \in \mathcal{A}$ tel que $\operatorname{rg}(u) = r \geq 1$ et $f \in \mathcal{A}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{rg}(u \circ f \circ u \alpha u) < r$.

- ii) En déduire qu'il existe $u \in A$ tel que rg(u) = 1.

1. Montrer que $A = \mathcal{L}(E)$.

Exercice 534 [Mines MP 2025 # 514] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Ker} u^3$. Montrer que : $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u^4$.

Exercice 535 [Mines MP 2025 # 515] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note S(A) sa classe de similitude. On suppose S(A) bornée. a) Montrer que A est diagonale à l'aide des matrices de dilatation $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $i \in \{1, ..., n\}$. Montrer que toute matrice de S(A) est diagonale.

1. À l'aide des matrices de transvection $I_n + E_{i,j}$ où $i \neq j$, montrer que $A \in \mathbb{C}I_n$.

Exercice 536 [Mines MP 2025 # 516] Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A, B et A + B sont nilpotentes. Montrer : $\mathrm{tr}(AB) = 0$.

1. Soit $(A_1, \dots, A_r)$ une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit Φ : $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto ((\mathrm{tr}(A_1B), \dots, \mathrm{tr}(A_rB)) \in \mathbb{K}^r$. Montrer que Φ est surjective.

1. Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué de matrices nilpotentes.

- i) Exprimer la dimension de $G^\circ = \{B\,; \forall A \in G, \mathrm{tr}(AB) = 0\}$ en fonction de celle de G.
- ii) Montrer que dim $G \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 537 [Mines MP 2025 # 517] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $m_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in [1, n]$ tels que $i\ j$ est impair.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\mathrm{Com}(M) \in \mathcal{D}$.
1. L'équivalence précédente reste-t-elle vraie si on ne suppose plus M inversible ?

Exercice 538 [Mines MP 2025 # 518] Déterminer les applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et toute $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on ait $f(PX) = Pf(X)P^{-1}$.

Exercice 539 [Mines MP 2025 # 519] Soient $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On suppose que, pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, la matrice f(A) appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

- i) Montrer que A est équivalente à une matrice nilpotente.
- ii) En déduire que $f(A) \notin GL_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 540 [Mines MP 2025 # 520] Soit $\mathcal{D}_n$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices diagonales inversibles. Déterminer les $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall M \in D_n, PMP^{-1} \in D_n$.

Exercice 541 [Mines MP 2025 # 521] Soit φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = \frac{1}{2}\left(P(X) + P(-X)\right) + \frac{X}{2}\left(P(X) - P(-X)\right)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{(1X)P,\ P \in \mathbb{R}[X] \text{ impair}\}$ et $\mathrm{Im}\,\varphi = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ pair}\}$. b) Montrer que $\mathrm{Im}\,\varphi$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi$ sont supplémentaires. Q

Exercice 542 [Mines MP 2025 # 522] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer la comatrice de la comatrice de M.

Exercice 543 [Mines MP 2025 # 523] Rappeler la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables.

524 Soient n, d > 2 des entiers fixés. On note Lla matrice de M ($\mathbb{C}$) dont tous les coeffi-

Exercice 544 [Mines MP 2025 # 524] Soient $n, d \geq 2$ des entiers fixés. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $m_{i,i} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$; ii) sur chaque ligne, M a exactement d coefficients égaux à 1 et n - d coefficients nuls ;

iii) pour tous $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$: si $m_{i,j} = 0$ alors il existe un unique $k \in [1, n]$ tel que $m_{i,k} = m_{k,j} = 1, -\sin m_{i,j} = 1$ alors il n'existe aucun $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $m_{i,k} = m_{k,j} = 1$.

1. Déterminer le spectre de J.
1. Exprimer MJ, JM et M² en fonction de M, J et I_n .
1. Montrer que $\mathrm{Ker}(M - dI_n) = \mathrm{Im}\,J$. Que peut-on en déduire concernant le couple (n,d) ?
1. Montrer que les autres valeurs propres de M sont racines d'un polynôme du second degré à préciser.

Exercice 545 [Mines MP 2025 # 525] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall i \in [1, n], \sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1$ et $\forall (i, j) \in [1, n]^2, a_{i,j} \in [0, 1]$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A puis que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| \leq 1$.
1. On suppose que $\forall (i, j) \in [1, n]^2,\ a_{i,j} > 0$.

Montrer que 1 est la seule valeur propre complexe de A de module 1. c) On revient au cas général et l'on suppose que λ est une valeur propre complexe de A de module 1. Montrer que : $\lambda^{n!} = 1$.

Exercice 546 [Mines MP 2025 # 526] Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que C = AB BA et C commute avec A et B.

Exercice 547 [Mines MP 2025 # 526] Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que C = AB BA et C commute avec A et B. Montrer que C = 0.

Exercice 548 [Mines MP 2025 # 527] Soient $n \geq 2$ et f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de rang 2.

1. Exprimer χ_f en fonction de $\operatorname{Tr} f$ et $\operatorname{Tr} f^2$.

1. Déterminer en fonction de tr f et tr f² si f est diagonalisable.

Exercice 549 [Mines MP 2025 # 528] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T M A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ deux familles de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $(X_i Y_j^T)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est inversible si et seulement si f_A est bijective.- c) On suppose que A est diagonalisable. Montrer que f_A est diagonalisable.

1. Soient λ une valeur propre non nulle de A^T et Y un vecteur propre associé. Montrer que :

1. Soient

λ une valeur propre non nulle de A^T et Y un vecteur propre associé. Montrer que : $F = \{XY^T, X \in \mathbb{R}^n\}$ est un sous-espace stable par f_A.

Exercice 550 [Mines MP 2025 # 529] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

1. Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \operatorname{sp}(M)$.

1. Montrer que M est diagonalisable.

1. Déterminer les M dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $M^2 + M^T = I_n$.

Exercice 551 [Mines MP 2025 # 530] Soient $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = J$. Montrer que $tr(A)^3 = tr(J)$.

Exercice 552 [Mines MP 2025 # 531] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'ensemble $I = \{P \in \mathbb{C}[X], P(M)$ nilpotente$\}$.

Exercice 553 [Mines MP 2025 # 532] Soient $n \geq 2$, $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec B scindé à racines simples de degré n+1, et f l'application qui à P associe le reste de la division euclidienne de AP par B. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelles sont ses valeurs propres ? f est-il diagonalisable ?

Exercice 554 [Mines MP 2025 # 533] Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

1. A et B ont une valeur propre commune ;

ii) il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que AC = CB.

Exercice 555 [Mines MP 2025 # 534] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\operatorname{Tr}(A^n) \neq 0$ et, pour tout $k \in [1, n-1]$, $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$. Montrer

Exercice 556 [Mines MP 2025 # 535] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, soit $T(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t) dt$. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 557 [Mines MP 2025 # 536] On identifie éléments de $\mathbb{R}[X]$ et fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $u : P \mapsto \left[x \mapsto \int_0^{+\infty} P(x+t) e^{-t}\, dt\right]$ constitue un endomorphisme de E.

1. Montrer que $u(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Déterminer les éléments propres de u.

que A est diagonalisable.

1. Caractériser les endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ qui commutent avec u.

Exercice 558 [Mines MP 2025 # 537] On pose $SL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \det(M) = 1\}$.

1. Vérifier que c'est un groupe. b) Quels sont les ordres finis possibles d'une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$?

1. Existe-t-il une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ d'ordre infini ?

Exercice 559 [Mines MP 2025 # 538] On identifie ici les polynômes à coefficients dans C avec leur fonction polynomiale associée. Soit u qui à $P \in \mathbb{C}[X]$ associe $u(P) : z \mapsto e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n$.- a) Montrer que u est bien définie et que $u(P) \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 560 [Mines MP 2025 # 539] Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun à u et v dans les cas suivants : $u \circ v = 0$, $u \circ v = \alpha u$ et $u \circ v = \alpha u + \beta v$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que u et v sont alors cotrigonalisables.

Exercice 561 [Mines MP 2025 # 540] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB + BA = A. Montrer que si n est impair alors Aet B ont un vecteur propre commun. Que dire si n est pair ?

Exercice 562 [Mines MP 2025 # 541] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que AB est diagonalisable.

1. La matrice BA est-elle diagonalisable ?

1. La matrice $(BA)^2$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 563 [Mines MP 2025 # 542] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On pose :

- $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA\}$

- $\mathcal{C}'(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \forall C \in \mathcal{C}(A), CB = BC\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déterminer la dimension. À quelle condition a-t-on $C(A) = \mathbb{R}[A]$?

1. Montrer que $\mathcal{C}'(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déterminer la dimension. Montrer que $C'(A) = \mathbb{R}[A]$.

Exercice 564 [Mines MP 2025 # 543] Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On écrit
$$\chi_u = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}.$$
On écrit $\chi_u = \prod_{k=1}^{r} (X\lambda_k)^{\alpha_k}$. a) Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}(u\lambda_k \operatorname{id}_E)^{\alpha_k}$.

1. On suppose u nilpotent d'indice n.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \end{bmatrix}$.

ii) Montrer que les sous-espaces vectoriels de E stables par u sont en nombre fini.

1. On suppose que u est nilpotent et qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E stables par u. Montrer que u est nilpotent d'indice n.

Exercice 565 [Mines MP 2025 # 544] Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{1,i} = m_{n,i} = m_{i,n-i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les autres coefficients étant nuls. Calculer χ_{M^2}. Est-ce que M^2 est diagonalisable ?

Exercice 566 [Mines MP 2025 # 545] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\chi_A(X^2) = \chi_A(X)\chi_A(X-1)$. Montrer que n est pair.

Exercice 567 [Mines MP 2025 # 546] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Exercice 568 [Mines MP 2025 # 547] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

1. Étudier la diagonalisabilité de B.

1. Étudier le rang de BI_{2n}.

Exercice 569 [Mines MP 2025 # 548] Soit $n \geq 2$. On pose : $E_1 = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); (I_n, B, \ldots, B^{n-1}) \text{ libre}\}$ et $E_2 = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \exists X \in \mathbb{R}^n, (X, BX, \ldots, B^{n-1}X) \text{ libre}\}$.

1. Montrer que $E_2 \subset E_1$.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$. On pose $I_X = \{Q \in \mathbb{R}[X]; Q(A)X = 0\}$. Montrer qu'il existe $P_{A,X} \in \mathbb{R}[X]$ unitaire tel que $I_X = P_{A,X}\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que : $\mathbb{R}^n = \bigcup_{X \in \mathbb{R}^n} \operatorname{Ker} P_{A,X}(A)$.

1. Montrer qu'il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ finie telle que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{X \in U} \operatorname{Ker} P_{A,X}(A)$.

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que : $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i$.

Montrer qu'il existe $i \in [1, p]$ tel que $\varphi_i = 0$.

1. Montrer que $E_1 \subset E_2$.

Exercice 570 [Mines MP 2025 # 549] Soit H un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments ont un spectre inclus dans $\{-1, 1\}$.

1. Montrer que H est commutatif.

1. Déterminer les valeurs possibles du cardinal de H.

Exercice 571 [Mines MP 2025 # 550] Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $x \in E$, on note : $I_x = \{P \in \mathbb{C}[X],\ P(u)(x) = 0\}$ et $E_x = \{P(u)(x),\ P \in \mathbb{C}[X]\}$. a) Montrer que I_x est un idéal non nul de $\mathbb{C}[X]$. On note μ_x le polynôme unitaire qui l'en- gendre. b) Soient $x, y \in E$ tels que $\mu_x \wedge \mu_y = 1$. Montrer que $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$, puis que $E_{x+y} = 0\ E_x \oplus E_y$. c) Soit π_u le polynôme minimal de u. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \pi_u$.

Exercice 572 [Mines MP 2025 # 551] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\pi_u = X^2 + aX + b$. On suppose π_u non scindé sur $\mathbb{R}$.

1. Soient $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $P_x = \operatorname{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et $x \in E \setminus F$. Montrer que $P_x \cap F = \{0\}$.

1. Démontrer l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant tous identiques, de taille 2×2, et de polynôme minimal π_u.

Exercice 573 [Mines MP 2025 # 552] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On pose $G_A = \{c \in \mathbb{C}^*, cA \text{ est semblable à } A\}$.

1. Montrer que G_A est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.- b) Montrer que G_A est infini si et seulement si A est nilpotente, et qu'alors $G_A = \mathbb{C}^*$.

Exercice 574 [Mines MP 2025 # 553] 1. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = \lambda BA$.

1. Déterminer, parmi les λ trouvés en a), ceux pour lesquels toutes les matrices A,B vérifiant cette condition sont diagonalisables.

Exercice 575 [Mines MP 2025 # 554] Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On s'intéresse aux endomorphismes u de E dont les seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$ et E.

1. Déterminer ces endomorphismes dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ puis dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Dans le cas général caractériser ces endomorphismes à l'aide de leur polynôme caractéristique.

Exercice 576 [Mines MP 2025 # 555] Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

1. On suppose que f a un plan vectoriel stable F. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $F \subset \operatorname{Ker} P(f)$.

1. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\dim \operatorname{Ker} P(f) \geq 2$. Montrer que $\operatorname{Ker} P(f)$ contient un plan vectoriel stable par f.

Exercice 577 [Mines MP 2025 # 556] Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que u est nilpotent d'indice p.

- i) Montrer que p = n si et seulement si dim Ker u = 1.

- ii) Montrer que p=n si et seulement si u possède un nombre fini de sous-espaces stables.

1. On revient au cas général. Montrer que u possède un nombre fini de sous-espaces stables si et seulement si $\deg \pi_u = n$.

Exercice 578 [Mines MP 2025 # 557] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que la fonction polynomiale associée est injective sur $\mathbb{R}$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables vérifiant P(A) = P(B). Montrer que $A = B$.

Exercice 579 [Mines MP 2025 # 558] 1. Montrer que deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.

1. Même question, avec un nombre quelconque de matrices.

1. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in G, A^2 = I_n$. Montrer que G est fini et donner une majoration de son cardinal.

1. Soit $n \neq m$. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_m(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.

1. On considère G comme dans la question c). Montrer que $\operatorname{card} G$ est une puissance de 2.

1. Trouver tous les groupes multiplicatifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui ne sont pas des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On précise qu'un groupe multiplicatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un sous-ensemble stable par produit matriciel et formant un groupe pour la loi induite par le produit matriciel.

Exercice 580 [Mines MP 2025 # 559] Soient $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), \Phi_{A,B}(M) = AMMB$.

1. Montrer que, si A et B n'ont pas de valeur propre commune, $\Phi_{A,B}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

1. Supposons que λ soit une valeur propre commune à A et B. Montrer que le noyau de $\Phi_{A,B}$ contient une matrice de rang 1.

Exercice 581 [Mines MP 2025 # 560] Soit $E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^3 = A\}$. Montrer que E est réunion d'un nombre fini de classes de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

Exercice 582 [Mines MP 2025 # 561] Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe une base e telle que la matrice M de udans la base e vérifie $\forall (i,j) \in [1,n]^2, i \neq j \implies |m_{i,j}| \leq \alpha$.

Exercice 583 [Mines MP 2025 # 562] Soient $n \geq 2$ et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = I_n$ pour tout $A \in G$.

1. Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables.

1. Soit $(M_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de Vect(G) constituée d'éléments de G. Soit $f : A \in G \mapsto (\operatorname{tr}(AM_1), \ldots, \operatorname{tr}(AM_m))$.

Soient $A, B \in G$ telles que f(A) = f(B). On pose $C = AB^{-1}$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{tr}(C^k) = n$.

ii) En déduire que CI_n est nilpotente.

1. Montrer que G est fini.

Exercice 584 [Mines MP 2025 # 563] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\chi_A = \chi_B$ si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k)$.

Exercice 585 [Mines MP 2025 # 564] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_3$. Montrer que la suite $(A^k)_{k\geq 0}$ converge vers une matrice que l'on précisera.

Exercice 586 [Mines MP 2025 # 565] Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Exprimer le polynôme minimal de A^{-1} en fonction du polynôme minimal de A.

Exercice 587 [Mines MP 2025 # 566] \$ \$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que, pour $r \in \mathbb{R}^{+*}$ assez grand, $(re^{it}I_nA)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{r^{k+1}e^{i(k+1)t}}$.

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout r > 0 assez grand, $P(A) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} re^{it}P(re^{it})(re^{it}I_n - A)^{-1}dt$.

1. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 588 [Mines MP 2025 # 567] Soient U l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U^{++} l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à spectre inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, U^{++})$ telle que $t \mapsto A(t)^2$ est constante.

1. Montrer que A est constante.

1. Le résultat subsiste-t-il si $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, U)$?

1. Le résultat subsiste-t-il si A n'est pas de classe C^1 ?

1. Le résultat subsiste-t-il si A est valeurs dans l'ensemble des matrices trigonalisables à spectre inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$?

Exercice 589 [Mines MP 2025 # 568] Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, X une partie de E. Montrer que X est finie si et seulement si $\{\langle x, y\rangle,\ (x, y) \in X^2\}$ est fini.

Exercice 590 [Mines MP 2025 # 569] Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien non réduit à $\{0\}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{tr}(u) = 0$.- a) Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale nulle.

Exercice 591 [Mines MP 2025 # 570] Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3. Soient $f, g \in SO(E)$.

1. On suppose qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que f(x) = g(x) = x. Montrer que f et g commutent.

b) On suppose que f et g commutent. Montrer que l'une des deux propositions suivantes est vraie : il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que f(x) = g(x) = x, -f et g sont des symétries orthogonales par rapport à deux droites orthogonales entre elles.

Exercice 592 [Mines MP 2025 # 571] Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer l'équivalence entre : i) p est un projecteur orthogonal, ii) $\forall x \in E, ||p(x)|| \leq ||x||$, iii) p est symétrique.

Exercice 593 [Mines MP 2025 # 572] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n \geq p$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = p$.

1. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^p \mapsto \|Axb\|_2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^p$ atteint en un unique $x_0 \in \mathbb{R}^p$.

1. Montrer que x_0 est l'unique solution de $A^TAx = A^Tb$.

Exercice 594 [Mines MP 2025 # 573] Montrer l'existence et calculer $\min_{P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]} \sum_{i=1}^n (i^nP(i))^2$.

Exercice 595 [Mines MP 2025 # 574] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne usuelle.

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que $||AB|| \leq ||A||\,||B||$ quels que soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi qu'une suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ à termes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et telle que $\|I_nAM_0\| < 1$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ M_{p+1} = 2M_pM_pAM_p$. Montrer que A est inversible et que

$(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A^{-1}.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \|I_n - AM\|$ admet un minimum, et le

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto ||I_nAM||$ admet un minimum, et le calculer en fonction de A.

Exercice 596 [Mines MP 2025 # 575] 1. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

1. i) Montrer qu'il existe une unique suite (T_n) de polynômes réels telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

ii) Déterminer degré et coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.

1. On note $U_n[X]$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré $n \in \mathbb{N}$ de $\mathbb{R}[X]$.

Calculer $\min_{P\in U_n[X]} \int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

1. Que dire de la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 597 [Mines MP 2025 # 576] Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$.

Exercice 598 [Mines MP 2025 # 577] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

On dispose de deux produits scalaires φ et ψ sur E, et on suppose qu'ils sont tels que $\mathcal{O}((E, \psi)) \subset \mathcal{O}((E, \varphi))$, où $\mathcal{O}$ désigne l'ensemble des isométries vectorielles de l'espace euclidien considéré. Montrer que $\mathcal{O}((E, \psi)) = \mathcal{O}((E, \varphi))$.

Exercice 599 [Mines MP 2025 # 578] Soit E un espace euclidien. Montrer que deux produits scalaires sur E qui ont le même groupe orthogonal sont proportionnels.

Exercice 600 [Mines MP 2025 # 579] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $V_n = \mathrm{Vect}\,\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

1. Expliciter V_2.

1. On suppose désormais $n \geq 3$. Montrer que : $\exp \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $V_n^{\perp} \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^{\perp}$. c) Montrer que $V_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 601 [Mines MP 2025 # 580] 1. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par A. Montrer que $F^{\perp}$ est stable par A^T.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AA^T = A^T A$. Montrer que A est diagonalisable ou semblable à une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\eta \\ 0 & n & \alpha \end{pmatrix}$.

Exercice 602 [Mines MP 2025 # 581] Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + A) \geq 1$.

Exercice 603 [Mines MP 2025 # 582] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^T = A^2$. Trouver un polynôme annulateur de A.

1. Caractériser les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^T = A^2$.

Exercice 604 [Mines MP 2025 # 583] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(A + A^T) = \mathrm{Im}\,A + \mathrm{Im}\,A^T$.

Exercice 605 [Mines MP 2025 # 584] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $u : S \mapsto MSM^T$ définit un endomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $u : S \mapsto MSM^-$ definit un endomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que u est un automorphisme si et seulement si M est inversible.

Exercice 606 [Mines MP 2025 # 585] Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulles, la matrice N étant nilpotente d'indice n.

1. Montrer que $\mathrm{rg}\,N = n1$.

1. On suppose que $MN^T = N^T M = NM^T$. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,M \oplus \mathrm{Im}\,N$. c) Étudier la réciproque de b).

Exercice 607 [Mines MP 2025 # 586] 1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

1. $x^T Ax \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ii) $\mathrm{Sp}\,A \subset \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, u) Sp $A \subset \mathbb{R}^+$. b) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$, puis déterminer $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^T A = S\}$.

Exercice 608 [Mines MP 2025 # 587] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ sont nuls pour toute matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 609 [Mines MP 2025 # 588] On pose $\sigma(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$ pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\sigma(\Omega)$ pour $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\sigma(\Omega^T A \Omega) = \sigma(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\sigma(A)$ lorsque A représente une projection orthogonale dans une base orthonormée.

1. Déterminer les matrices $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \sigma(P^{-1}AP) = \sigma(A)$.

Exercice 610 [Mines MP 2025 # 589] Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$. On pose $A = \left(\mathrm{Tr}(S^{i+j-2})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \min(n, \deg(\pi_S))$, où l'on a noté π_S le polynôme minimal de $\hat{S}$.

Exercice 611 [Mines MP 2025 # 590] Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien.

1. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

1. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = h^2$.

1. Soient $f, g \in S^+(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f + g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. Que dire de $\mathrm{Im}(f + g)$?

Exercice 612 [Mines MP 2025 # 591] Soit $C : A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n A)^{-1}(I_n + A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que C est bien définie.

1. Étudier l'inversibilité de $I_n + C(A)$. Montrer que C est injective. L'application C est-elle surjective ? Dans le cas contraire, donner son image.

Exercice 613 [Mines MP 2025 # 592] Soit G un sous-groupe borné de $GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $G \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{I_n\}$.

Exercice 614 [Mines MP 2025 # 593] On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Une fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est strictement convexe si $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, A \neq B \Rightarrow (\forall t \in \mathbb{R})$ [0,1[,f((1-t)A+tB)<(1-t)f(A)+tf(B)). Montrer que la fonction $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Étudier sa stricte convexité.

Exercice 615 [Mines MP 2025 # 594] Déterminer les applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et toute $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on ait $f(PX) = Pf(X)P^{-1}$.

Exercice 616 [Mines MP 2025 # 595] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le nombre de matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = B^2$.

Exercice 617 [Mines MP 2025 # 596] Montrer que si $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Com}(M) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 618 [Mines MP 2025 # 597] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$. a) Montrer que $a_{i,i} > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, puis que $a_{i,j}^2 \leqslant a_{i,i}a_{j,j}$ pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$.

1. Montrer que $\max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{k,k}$. c) Que dire de la matrice $A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{i,i} & a_{i,j} \end{pmatrix}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$?

Exercice 619 [Mines MP 2025 # 598] Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si un intervalle I de $\mathbb{R}$ contient toutes les valeurs propres de A et B, alors I contient également les valeurs propres de (1-t)A+tB pour tout $t ∈ [0, 1].$

Exercice 620 [Mines MP 2025 # 599] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note A_i la matrice extraite des i premières lignes et colonnes de A. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \det(A_i) > 0$.

Exercice 621 [Mines MP 2025 # 600] Montrer que le spectre de

$$A = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{1 \leq i \leq n}$$

est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 622 [Mines MP 2025 # 601] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $S = \left(\alpha^{|i-j|}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Calculer $\det(S_n)$.

1. À quelle condition a-t-on $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?

Exercice 623 [Mines MP 2025 # 602] $ $ a) Soient $U, V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $U = R^2$ et en déduire $\mathrm{tr}(UV) \geq 0$.

1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que : $\alpha : t \mapsto \mathrm{tr}\, P(f(t))$ est dérivable et calculer α'.

$\alpha : t \mapsto \mathrm{tr}\, P(f(t))$ est dérivable et calculer α. c) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que : $\mathrm{tr}(e^A) \leq \mathrm{tr}(e^B)$.

Exercice 624 [Mines MP 2025 # 603] Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que M = OS.

1. Calculer sup{tr(AM), $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ }.

Exercice 625 [Mines MP 2025 # 604] Soient E un espace euclidien de dimension n > 0 et $u \in \mathcal{S}(E)$. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u et, pour $k \in [0, n]$, on note $\mathcal{G}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k. On note enfin E la sphère unité de E.

1. Pour un sous-espace vectoriel non nul V de E, montrer que $x \in V \cap S \mapsto \langle x, u(x) \rangle$ possède un maximum et un minimum.

1. Montrer, pour tout $k \in [1, n]$, les identités $\lambda_k = \min_{V \in \mathcal{G}_k} \max_{x \in V \cap S} \langle x, u(x) \rangle = \max_{V \in \mathcal{G}_{n+1-k}} \min_{x \in V \cap S} \langle x, u(x) \rangle$.

2) Analyse

Exercice 626 [Mines MP 2025 # 605] Donner un exemple de forme linéaire discontinue sur un espace normé.

Exercice 627 [Mines MP 2025 # 606] Soit

$$E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}.$$

Pour $f \in E$, on pose $N(f) = ||f + 2f' + f''||_\infty$.

1. Montrer que N est une norme sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E.

1. Soit $f \in E$. On pose g = f + 2f' + f". Exprimer f en fonction de g. c) Montrer qu'il existe a > 0 telle que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq aN(f)$.

1. Les normes N et $\|\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 628 [Mines MP 2025 # 607] Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \max\{|P'(x)|, x \in [-1,1]\}$.

1. Justifier que N_a est une norme.

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

Exercice 629 [Mines MP 2025 # 608] Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $||P||_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$, $||P||_1 = \int_0^1 |P(t)|\, \mathrm{d}t$ et

$$N(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^1 t^n P(t)\, \mathrm{d}t \right|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Comparer les normes N et $\|\|_\infty$.

1. Comparer les normes N et $\| \cdot \|_1$.

Exercice 630 [Mines MP 2025 # 609] Soit $Q \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\|P\|_Q = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)Q(t)|$.

1. Montrer que $\|\|_Q$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

1. On pose $Q_1 = 1$. Donner une condition suffisante sur Q pour que $\| \|_Q$ et $\| \|_{Q_1}$ soient équivalentes.

1. On suppose que Q admet un zéro α dans [-1,1].

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $P(\alpha) = 1$, $P'(\alpha) = 0$ et $\forall t \in [-1, 1] \setminus \{\alpha\},\ 0 \leq P(t) < 1$.

ii) Montrer que $(t \mapsto P(t)^n Q(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur [-1,1] vers la fonction nulle.

- iii) Conclure que $\|\|_Q$ et $\|\|_{Q_1}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 631 [Mines MP 2025 # 610] 1. Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \|P^{-1}AP\| = \|A\|$? b) Même question en remplaçant $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 632 [Mines MP 2025 # 611] L'ensemble des polynômes scindés à racines simples et de degré n est-il un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$? Un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$? L'ensemble des polynômes scindés, à racines simples est-il un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$? Un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 633 [Mines MP 2025 # 612] Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et S un segment de $\mathbb{R}$. On note $E = \mathcal{C}^0(S, \mathbb{R})$, que l'on munit de la norme infinie. On note $\mathcal{Z}_p$ l'ensemble des éléments de E qui s'annulent en au moins p points.

1. Montrer que $\mathcal{Z}_1$ est fermé dans E.

1. Déterminer l'adhérence de $\mathcal{Z}_p$ pour n'importe quel p dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 634 [Mines MP 2025 # 613] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que la restriction de f à un cercle de rayon strictement positif n'est pas injective.

Exercice 635 [Mines MP 2025 # 614] Soient (E, || ||) un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, ||u(x)|| \leq ||x||$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k$.

1. Simplifier $v_n \circ (uid)$.

1. Montrer que Ker(u id) et Im(u id) sont en somme directe.

1. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker}(u\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(u\,\mathrm{id}) = E$;

ii) (v_n) converge simplement sur E et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$ est fermé dans E.

Exercice 636 [Mines MP 2025 # 615] Soit K un convexe compact non vide d'un espace normé E.a) Soit u un endomorphisme continu de E tel que $u(K) \subset K$. Montrer que $C = (\mathrm{id} - u)(K)$
est convexe et compact. En utilisant la suite $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{id} - u)(u^k(x))$ montrer que u admet
un point fixe.

1. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite d'endomorphismes continus de E qui stabilisent tous K et qui commutent. On note F_n l'ensemble des points de K fixes par $u_1, \ldots, u_n$. Montrer que F_n est non vide pour tout n. En déduire qu'il existe un point fixe commun à tous les endomorphismes u_n.

Exercice 637 [Mines MP 2025 # 616] Soient N_1, N_2 et N_3 des normes sur respectivement $\mathbb{R}_m[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+m}[X]$.

1. Justifier que $N_4 : (P, Q) \mapsto N_1(P) + N_2(Q)$ est une norme sur $\mathbb{R}_m[X] \times \mathbb{R}_n[X]$. b) Montrer que $\inf_{\substack{P \in \mathbb{R}_m[X] \setminus \{0\} \\ Q \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}}} \frac{N_3(PQ)}{N_1(P) N_2(Q)} > 0$.

Exercice 638 [Mines MP 2025 # 617] Soit $\mathcal{B}$ l'espace des suites réelles bornées muni de la norme infinie.

1. Pour $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ on pose $u_X = (\mathbf{1}_X(n))_{n \geq 0}$. Montrer que $\varphi : X \mapsto u_X$ est une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose l'existence d'une partie dénombrable $A = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{B}$ dense dans $\mathcal{B}$. Soient $b > 0$ et $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Justifier l'existence de $k_X = \min\{k \in \mathbb{N}, ||u_X a_k||_\infty \leq b\}$. Aboutir à une contradiction.

Exercice 639 [Mines MP 2025 # 618] Soient n et p deux entiers naturels. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est surjective si et seulement si l'imageqdirecte par f de tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Exercice 640 [Mines MP 2025 # 619] 1. On munit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\|_\infty$.
Les parties $A = \left\{f \in E,\ \int_0^1 f = 1\right\}$ et $B = \{f \in E,\ \ f([0, 1]) \subset [0, 1]\}$ sont-elles compactes ?

Si $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E, on dit que $f\colon K \to K$ est une isométrie si $\forall (x, y) \in K^2$, ||f(x) - f(y)|| = ||x - y||.

1. Dans $\mathbb{R}$, quelles sont les isométries de [0,1] ?

1. Soit f une isométrie du compact K. Montrer que f est surjective.

1. Soient K un compact et $f : K \to K$ telle que : $\forall (x, y) \in K^2, \|f(x) f(y)\| \geq \|xy\|$. Montrer que f est une isométrie.

Exercice 641 [Mines MP 2025 # 620] Soient (E, || ||) un espace vectoriel normé et $f : E \to E$ vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2, ||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||^2$. Montrer que f est constante.

Exercice 642 [Mines MP 2025 # 621] Soient K un compact non vide et $f : K \to K$ une fonction continue telle que : $\forall (x, y) \in K^2, ||f(x) - f(y)|| \geq ||x - y||$.

1. Montrer que f est bijective.

1. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice 643 [Mines MP 2025 # 622] Soient $(E, \|\|)$ un espace normé de dimension finie et $f : E \to E$ telle que, pour tous $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{4}(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 644 [Mines MP 2025 # 623] On pose $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \cap L^2$ que l'on munit de la norme $\| \|_2$. Si $f \in E$, on pose

$$\varphi(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f \sin x > 0 \\ f(0) \sin n. \end{cases}$$

. Montrer que φ est un endomorphisme continu de E.

Exercice 645 [Mines MP 2025 # 624] Soit C un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que : $\forall (x, y) \in C^2, x \neq y \Rightarrow]x, y[\cap C \neq \emptyset$. Montrer que C est convexe.

Exercice 646 [Mines MP 2025 # 625] 1. Soient (E, $\| \|$) un espace vectoriel normé et f une forme linéaire continue non nulle sur E. On fixe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que $\|f\|_{\text{op}} = \frac{|f(x_0)|}{d(x_0, \text{Ker} f)}$.

calculer $\|\Phi\|_{op}$.
ii) Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents : il existe $a \in E$ tel que ||a|| = 1 et $||f||_{op} = |f(a)|$, il existe $y \in$ Ker(f) tel que $d(x_0, \text{Ker } f) = ||x_0 y||$.

1. On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\|_\infty$, et on définit l'application $\Phi : u \in E \mapsto \int_0^1 u(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 u(t)\mathrm{d}t$. Montrer que Φ est une forme linéaire continue, et

Exercice 647 [Mines MP 2025 # 626] Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S(A) = \{P^{-1}AP, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Q_k = \text{Diag}(k^n, k^{n-1}, \ldots, k)$. a) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Calculer $\lim_{k \to +\infty} Q_k^{-1} T Q_k$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est trigonalisable si et seulement si $\overline{S(A)}$ contient une matrice diagonale.

1. Montrer l'équivalence des énoncés suivants : i) A est nilpotente, ii) S(A) contient une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle, iii) $0 \in \overline{S(A)}$.

Exercice 648 [Mines MP 2025 # 627] On considère l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Cet ensemble est-il ouvert ? fermé ?

Exercice 649 [Mines MP 2025 # 628] Soir $r \in [0, n]$. Déterminer l'intérieur, l'adhérence et les composantes connexes par arcs de l'ensemble des matrices de rang r de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 650 [Mines MP 2025 # 629] On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\| \cdot \|_2$. Pour $r \in \mathbb{R}^+$ et G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, on dit que G vérifie $\mathcal{P}(r)$ si $||AX - X||_2 \leqslant r||X||_2$ pour tout $A \in G$ et tout $X \in \mathbb{C}^n$.

1. Pour quels r le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ vérifie-t-il $\mathcal{P}(r)$?

1. Soient G sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ qui vérifie $\mathcal{P}(r)$, $A \in G$ et $\lambda \in \text{sp}(A)$. Montrer que $|\lambda| = 1$ puis que $\text{Ker}(A - \lambda I_n)^2 = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$. En déduire que les éléments de G sont diagonalisables.- c) Montrer que si $r < \sqrt{2}$ alors le seul groupe qui vérifie $\mathcal{P}(r)$ est $\{I_n\}$.

Exercice 651 [Mines MP 2025 # 630] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que P_n n'a pas de racine réelle si n est pair, et a une unique racine réelle sinon.

1. On note x_n la racine réelle de P_{2n+1}. Montrer que $(x_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et tend vers $-\infty$.

Exercice 652 [Mines MP 2025 # 631] Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b > a \geq 1$. Déterminer la limite de la suite de terme général $\sum_{n=0}^b \ln\left(1 - \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 653 [Mines MP 2025 # 632] Déterminer la limite de la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{n+k}{2+\sin(n+k)+(n+k)^2}$

Exercice 654 [Mines MP 2025 # 633] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 655 [Mines MP 2025 # 634] On considère une suite réelle u vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+2}$.

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 1$.

b) Montrer que u est décroissante à partir d'un certain rang, puis qu'elle est convergente, et déterminer sa limite.

Exercice 656 [Mines MP 2025 # 635] Soit $\alpha \in]1, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\prod_{k=1}^n (kx + n^2) = \alpha n^{2n}$ possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n < 2\alpha$.

1. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 657 [Mines MP 2025 # 636] On note, pour $j \in \mathbb{N}^*, k_j = \min\left\{n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq j\right\}$.

1. Montrer que k_i est bien défini.

1. Étudier la monotonie et la limite éventuelle de $(k_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que $\frac{k_{j+1}}{k_i} \xrightarrow{j\to+\infty} e$.

Exercice 658 [Mines MP 2025 # 637] Soit (a_n) une suite strictement monotone telle que $a_n \to +\infty$ et $(a_{n+1}-a_n)$ est bornée. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telle que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que, si $f(a_n) \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.-

Exercice 659 [Mines MP 2025 # 638] Pour $a \in \{0,1\}$, on pose $v_{1,a} = x \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1,a} = \left(2+\frac{1}{n}\right) v_{n,a}a$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Expliciter $t_n \neq 0$ tel que $v_{n,0} = xt_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. b) Exprimer $\frac{v_{n+1,a}}{t_{n+1}} \frac{v_{n,a}}{t_n}$ en fonction de t_{n+1}.

1. En déduire la limite des suites $(v_{n,a})_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de x.

Exercice 660 [Mines MP 2025 # 639] Soit (a_n) définie par $a_0 = 0, a_1 = 1$, et, pour $n \geq 1, a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$. a) Montrer que, pour tout $n, a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1$.

1. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{4a_k^2}\right)$. Exprimer S_n en fonction de a_n et a_{n+1}.

1. Montrer que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\pi} \frac{\pi}{12}$

Exercice 661 [Mines MP 2025 # 640] Soit (x_n) définie par $x_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n^2}$. En étudiant les suites de termes généraux $u_n = \frac{e^{x_n^2}}{r}$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$, trouver un équivalent puis un développement asymptotique de x_n

Exercice 662 [Mines MP 2025 # 641] Soit $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln(10)}$.

1. Montrer que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $\{x\} = x|x|$. Montrer que $A = \{\{n\alpha\}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.

1. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que l'écriture décimale de 2^k commence par 2025.

Exercice 663 [Mines MP 2025 # 642] 1. Soit $a \in [1/2, 1]$.
Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = 2^{-n} \sum_{\frac{n-n^a}{2} \leqslant k \leqslant \frac{n+n^a}{2}} \binom{n}{k}$.

1. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles telle que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset [0,n]$. Y a-t-il équivalence entre : i) $|I_n| = o(n)$, ii) la suite de terme général $2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ tend vers 0 ?

Exercice 664 [Mines MP 2025 # 643] 1. Donner un équivalent de $H_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k}$.

1. Donner un équivalent de u_n, cardinal de $\{(x,y,z) \in [\![1,n]\!]^3, xy = z\}$. c) Donner un équivalent de v_n, cardinal de $\{(x,y,z) \in [\![1,n]\!]^3, xy = z^2\}$.

Exercice 665 [Mines MP 2025 # 644] Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1\frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 666 [Mines MP 2025 # 645] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\arctan(n^\alpha))}{n}$?

Exercice 667 [Mines MP 2025 # 646] Soit α un réel > 1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Vérifier la bonne définition de u_n, et en donner un équivalent quand $n \to +\infty$. b) On pose $v_n = \frac{u_{n^2}}{u_n}$ pour tout $n \geq 1$. Étudier la convergence des séries $\sum v_n$ et
$\sum (-1)^n v_n$.

Exercice 668 [Mines MP 2025 # 647] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$. Étudier la convergence et calculer $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Exercice 669 [Mines MP 2025 # 648] On admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Démontrer la convergence et calculer la somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sum_{k=-1}^{+\infty}$

Exercice 670 [Mines MP 2025 # 649] 1. Montrer que : $\sum_{k=0}^n (-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor} = O(\sqrt{n})$.

1. Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que $\sum \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}}{k} z^k$ est une série convergente.

Exercice 671 [Mines MP 2025 # 650] Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 672 [Mines MP 2025 # 651] 1. Montrer que la série $\sum \frac{2^{k+1}(k!)^2}{(2k+1)!}$ converge. On pose $\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k+1}(k!)^2}{(2k+1)!}$.

1. Soient a>0 et $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. En déduire que, si la série de terme général u_n converge, alors la série de terme général

$$\frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k u_k$$

converge. Lorsqu'il y a convergence, montrer que
$\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a^i u_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i$.

1. Montrer que $\arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ pour tout $x\in[-1,1]$.- e) En déduire la valeur de σ.

Exercice 673 [Mines MP 2025 # 652] On pose $a_n=\frac{n!e^n}{n^n\cdot\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\sum(\ln(a_{n+1})\ln(a_n))$ converge.

1. Donner un équivalent de $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

1. Démontrer que $n!\sim\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n}\left(1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 674 [Mines MP 2025 # 653]

1. Soit a > 0. Discuter de la nature de $\sum\frac{1}{(n!)^{a/n}}$ en fonction de a.

1. Soit $(v_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum(n!)^{2/n}v_n^2$ converge. Montrer que $\sum v_n$ converge.

Exercice 675 [Mines MP 2025 # 654] Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\ln n)}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin(\ln t)}{t}dt$ sont de même nature. Quelle est cette nature ?

Exercice 676 [Mines MP 2025 # 655] Soit $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle. Nature de $\sum u_n$ avec les conditions suivantes :

1. $n(u_{n+1}-u_n)\to 1$, ii) $n^2(u_{n+1}-u_n)\to 1$, iii) $n^p(u_{n+1}-u_n)\to 1$ avec p > 2.

Exercice 677 [Mines MP 2025 # 656] Soit (u_n) strictement positive telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $\frac{1}{n}\sum ku_k\to 0$.

1. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ku_k$ converge.

1. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n+1}\left(n!\prod_{k=1}^{n}u_k\right)^{1/n}$ converge, puis montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left(n!\prod_{k=0}^{n}u_k\right)^{1/n}\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}u_k.$$

Exercice 678 [Mines MP 2025 # 657] Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes positifs ou nuls.

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}\leqslant\frac{1}{n(n!)^{1/n}}\sum_{k=1}^{n}ka_k$.

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}\leqslant\frac{e}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k$.- c) Montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)^{1/n}\leqslant e^k\sum_{k=0}^{+\infty}a_k$.

Exercice 679 [Mines MP 2025 # 658] Soit f strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice 680 [Mines MP 2025 # 659] Soient a et b deux réels. Caractériser l'existence d'une fonction continue décroissante $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(f(x))=ax+b$.

Exercice 681 [Mines MP 2025 # 660] Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe $\varepsilon>0$ pour lequel $f_{|[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}$ est convexe.

1. Montrer que f est dérivable à droite en tout point.

1. Montrer que f est convexe et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 682 [Mines MP 2025 # 661] Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que f est convexe si et seulement si :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x<y\Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{y-x}\int_{-\infty}^{y}f(t)\,dt.$$

Exercice 683 [Mines MP 2025 # 662] Soient $\alpha>1$ et $f_\alpha:x\in]-1-\alpha,+\infty[\mapsto\alpha\ln\left(1+\frac{x}{1+\alpha}\right)$.

1. Montrer que f_α admet un unique point fixe x_α et que $x_\alpha\in]-2,-1[$.

1. On suppose que α est tel que $\frac{x_\alpha}{1+\alpha}>-\frac{1}{2}$. Montrer que

$$\left|\ln\left(1+\frac{x_\alpha}{1+\alpha}\right)-\frac{x_\alpha}{1+\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{x_\alpha}{1+\alpha}\right)^2\right|\leqslant\frac{8}{3}\frac{|x_\alpha|^3}{(1+\alpha)^3}.$$

Exercice 684 [Mines MP 2025 # 663] On note E l'ensemble des applications réelles continues sur $\mathbb{R}$ de carré intégrable. Pour tout $f\in E$, on pose $||f||=\left(\int_{\_}f^2\right)^{1/2}$.

1. Montrer que (E, || ||) et un espace vectoriel normé.

1. Soit $f\in E$ de classe C^2 telle que $f''\in E$. Montrer que $f'\in E$ et $||f'||^2\leq||f||\cdot||f''||$.

Exercice 685 [Mines MP 2025 # 664] Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On note S l'ensemble des fonctions continues sur Itelles que, pour tout $x\in I$, $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\right)=0$.

1. On suppose f dérivable sur I. Montrer que $f\in S$.

1. On suppose que $f\in S$ et que f admet un maximum en $x_0\in I$. Montrer que f est dérivable en x_0.

Exercice 686 [Mines MP 2025 # 665] On pose $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, et f(0) = 0. a) Montrer que f est de classe C^∞ et qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$.

1. Montrer que f n'est solution sur $\mathbb{R}$ d'aucune équation différentielle de la forme y'=a(x)y avec $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.- c) Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 687 [Mines MP 2025 # 666] Étude et graphe de $f : x \mapsto \frac{\ln(|x|)}{\ln(|x-2|)}$.

Exercice 688 [Mines MP 2025 # 667] Soit $f \in \mathcal{D}^3(\mathbb{R})$, telle que $ff^{(3)} = 0$.

1. Montrer que si f' est strictement monotone sur un intervalle I, f prend au plus deux fois chaque valeur sur I.

1. Soit $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0\}$. Montrer que si $\Gamma \neq \emptyset$, alors Γ n'est ni majoré, ni minoré. c) Montrer que Γ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Caractériser f.

Exercice 689 [Mines MP 2025 # 668] 1. Soient $\lambda > 0$ et $f_\lambda : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x^{-\lambda}e^{1/x}$. Montrer l'existence d'un unique $g(\lambda) > 0$ tel que $f_\lambda(g(\lambda)) = 1$. b) Trouver un développement asymptotique de $g(\lambda)$ lorsque $\lambda \to +\infty$ et lorsque $\lambda \to 0^+$.

Exercice 690 [Mines MP 2025 # 669] Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On suppose que F est stable par produit. Montrer que F ne contient que des fonctions constantes.

Exercice 691 [Mines MP 2025 # 670] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $r \in \mathbb{R}^+$ et $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $||v|| \leq r$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \|f(x)\| = r, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f = v \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 2\pi) = f(x).$$

Exercice 692 [Mines MP 2025 # 671] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre

1. AB = BA, ii) $\forall t \in \mathbb{R}, e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$.

Exercice 693 [Mines MP 2025 # 672] Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{x\cos(x)\sin(x)}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}dx$.

Exercice 694 [Mines MP 2025 # 673] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec a < b. On se place sur $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On introduit, pour $f \in E$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $||f||_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$.

1. Montrer que $\|\|_p$ est une norme sur E. b) Que vaut $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p$?

1. Si $f \geq 0$ et g > 0 sur [a, b], que vaut $\lim_{p\to+\infty} \left(\int_{-b}^b gf^p\right)^{1/p}$?

Exercice 695 [Mines MP 2025 # 674] Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f''(x)^2dx \geq 320\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$.

Exercice 696 [Mines MP 2025 # 675] On pose $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe un unique élément $u(f) \in E$ vérifiant :$\forall x > 0, u(f)(x) = \frac{1}{x^{p+1}}\int_0^x t^pf(t)dt$.

1. Montrer que u est linéaire et injective.

1. Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice 697 [Mines MP 2025 # 676] Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $E_a = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}); f(0) = f(1) = 0 \text{ et } f'(0) = a\}$. Montrer que $\int_{-1}^1 f''(t)^2dt \geq 3a^2$ pour tout $f \in E_a$.

Exercice 698 [Mines MP 2025 # 677] Déterminer les f de $C^0([0, \pi], \mathbb{R})$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt = 0$.

Exercice 699 [Mines MP 2025 # 678] Déterminer la borne inférieure de $\int_0^1 |f' - f|$ lorsque $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ parcourt l'ensemble des fonctions de classe C^1 telles que f(0) = 0 et f(1) = 1.

Exercice 700 [Mines MP 2025 # 679] Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$ et $\delta > 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $||f - P||_\infty \leq \delta$ et $\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^\infty P$. On pourra commencer par le cas réel.

Exercice 701 [Mines MP 2025 # 680] Expliciter la fonction $F : x \mapsto \int_a^{\sin^2 x} \arcsin\left(\sqrt{t}\right) dt + \int_a^{\cos^2 x} \arccos\left(\sqrt{t}\right) dt$.

Exercice 702 [Mines MP 2025 # 681] Déterminer $A = \left\{\frac{\int_0^1 f(t)e^tdt}{\int_0^1 f(t)dt}; f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+) \setminus \{0\}\right\}$.

Exercice 703 [Mines MP 2025 # 682] Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $g : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x \cos(x - y)f(y)\,\mathrm{d}y$.

1. Calculer la limite de q en 0.

1. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Exercice 704 [Mines MP 2025 # 683] On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du = \frac{\pi}{2}$. Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{22\cos(u)u\sin(u)}{u^4}du$.

Exercice 705 [Mines MP 2025 # 684] Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)\cos(nx)}{\cos t\cos x}dt$.

1. Donner un sens à l'intégrale I_n. b) Expliciter I_n.

Exercice 706 [Mines MP 2025 # 685] 1. Montrer que, pour tout réel a > -1, $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+a\sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{a+1}}$.

Ind. Poser $x = \tan t$.b) Soit α un reer > 0. Etudier la convergence de $\sum u_n$, ou $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2 t}$

1. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$.

Exercice 707 [Mines MP 2025 # 686] Calculer
$$\int_0^1 (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor} dx.$$
Exercice 708 [Mines MP 2025 # 687] Soient f une fonction continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.
L'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$$
est-elle convergente ? absolument convergente ?

Exercice 709 [Mines MP 2025 # 688] 1. Soit
$a > 0.$ Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(at)}{t} dt$.

1. Soient

$$a_1, \ldots, a_n > 0$$

et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
Discuter la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\cos(a_i t)}{t}\, \mathrm{d}t$ et en cas de convergence, la calculer.

Exercice 710 [Mines MP 2025 # 689] 1. Soit

$$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{+*})$$

décroissante et intégrable. Soit $S : r \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f(kr)$.

Exercice 711 [Mines MP 2025 # 589] 1. Soit

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^{++}, \mathbb{R}^{++})$$

decroissante et integrable. Soit $S : r \in \mathbb{R}$
Montrer que $S(r)$ existe et donner un équivalent de $S(r)$ lorsque $r \to 0^+$.
Montrer que $S(r)$ existe et donner un équivalent de $S(r)$ lorsque $r \to 0^+$.

1. Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > a > 0$. On suppose que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge. Prouver la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\, \mathrm{d}t$.
1. Calculer
$$I = \int_{-t}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt.$$

Exercice 712 [Mines MP 2025 # 690] Soit
$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$$
une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{2}{x}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 713 [Mines MP 2025 # 690] Soit
$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$$
une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{f(x)}{f(x)} \sim \frac{2}{x}$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $\frac{1}{x}\int_{-x}^x f(t)dt \sim \frac{f(x)}{3}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 714 [Mines MP 2025 # 691] Soient
$$f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$$
et $\ell \in \mathbb{R}^*$. On suppose que : $f(x)\int_0^x f \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 715 [Mines MP 2025 # 692] Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Exercice 716 [Mines MP 2025 # 692] Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est bien définie.

1. Étudier l'intégrabilité de

f sur $]0, +\infty[$.

1. Le cas échéant, calculer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.. a) Montrer qu'il existe un réel

γ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ quand $n \to +\infty$

1. Montrer que $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$ pour tous réels a > 0 et b > 0.

1. Montrer l'existence de $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\ln(1+t)}\right) dt$ puis l'égalité

1. Montrer l'existence de

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\ln(1+t)}\right) dt$$

puis l'égalité $I = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1-e^{-u}}\right) du.$

1. Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-nu} - e^{-(n+1)u}}{u} - e^{-nu}\right) du.$

1. En déduire que

$I = -\gamma.$

Exercice 717 [MINES MP 2025 # 694] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que f(0) = f(1) = 0.

1. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)f'(t) \cot n(\pi t) dt$$

converge.

1. En déduire que $\pi^2 \int_0^1 f(t)^2 dt \leq \int_0^1 f'(t)^2 dt.$

605 Soit

$$f \in C^1(\mathbb{D}^+, \mathbb{D})$$

On suppose the fact integrable out $\mathbb{D}^+$ and $f(x)$

Exercice 718 [MINES MP 2025 # 695] Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et que f' est croissante. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \leq \frac{2}{3} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f.$

Exercice 719 [MINES MP 2025 # 696] On note E l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in E$. On pose $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f$ pour tout $x > 0$.

$f \in E.$ On pose $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f$ pour tout $x > 0$

1. Montrer que g est continue et $\int_0^x g^2 = -xg(x)^2 + 2\int_0^x fg(x)$

1. Montrer que

g est continue et $\int_0^x g^2 = -xg(x)^2 + 2\int_0^x fg.$

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x g^2 \leq 4\int_0^x f^2.$

En déduire que $g \in E$ et $\int_0^{+\infty} g^2 \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2.$

$\left|f(x) - \sum_k a_k e^{-kx}\right| \leqslant \varepsilon;$

Exercice 720 [MINES MP 2025 # 697] On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n \ln(x)$ si $x \in]0,1]$, et $f_n(0) = 0$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers 0.

Exercice 721 [MINES MP 2025 # 698] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec a < b. Quelles sont les fonctions de [a, b] dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur [a,b] d'une suite $(p_n)_{n \geq 0}$ de polynômes tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b], p''_n(x) > 0$?

Exercice 722 [MINES MP 2025 # 699] Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer l'équivalence entre :

1. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

ii) f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 723 [MINES MP 2025 # 700] Soit (f_n) une suite de fonctions convexe sur [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement sur [a, b] vers une fonction f.

1. Montrer que f est convexe.

1. Soient α, η tels que : $a < \alpha < \eta < b$. Montrer qu'il existe K > 0 tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in [\alpha, \eta]^2, |f_n(x) f_n(y)| \leqslant K|xy|.$

1. i) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de [a,b[mais pas nécessairement sur [a, b].

- ii) Montrer que si f est continue, alors (f_n) converge uniformément vers f sur [a,b].

Exercice 724 [MINES MP 2025 # 701] On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Déterminer les domaines de définition, de continuité, puis de dérivabilité de f.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis en donner un équivalent simple.

Exercice 725 [MINES MP 2025 # 702] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1+x}{n+x}\right)$. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 726 [Mines MP 2025 # 703] 1. Soit $x \in [0,1[$. Justifier l'existence de $f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right)^{x^n}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $\ln(f(x)) = \ln 2 + \frac{x-1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ln(1+x^n)$.

1. En déduire que, pour tout $x \in]0,1[$, $\ln(f(x)) = \ln 2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{x^m}{1+x+\cdots+x^m}$.

1. Montrer que f possède une limite finie en 1 et la déterminer

On admettra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 727 [Mines MP 2025 # 704] 1. Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x)}$

- b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- c) Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Exercice 728 [Mines MP 2025 # 705] 1. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, donner une expression simplifiée de $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(kx)$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur tout segment inclus dans $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 729 [Mines MP 2025 # 706] On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

1. Domaine de définition de f ?

1. Étudier la continuité de f sur son domaine de définition. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

1. Déterminer des équivalents de f en $0, 1^-, 1^+$ et $+\infty$.

Exercice 730 [Mines MP 2025 # 707] Soient a > 0 et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

1. Montrer que f est de classe C^∞.

1. Calculer $f^{(n)}$ et expliciter $f^{(n)}(0)$ en fonction de f(0).

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum \frac{1}{n!} a^{n(n-1)/2} x^n$.

On suppose $a \in]0,1[$ et l'on note : $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^{n(n-1)/2} x^n$.

1. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(ax)$.

1. On suppose f(0) = 0. Montrer que f = 0. f) Résoudre l'équation fonctionnelle : y'(x) = y(ax).

Exercice 731 [Mines MP 2025 # 708] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et dérivable, vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x+1)$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(n)}{n!} x^n$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = -\sum_{n=k+2}^{n=0} \frac{f(n)}{(n-k)!}$

1. Montrer que f = 0.

Exercice 732 [Mines MP 2025 # 709] Soit $f : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \mapsto \frac{-\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$.

1. Montrer que f est bien définie, 1-périodique et continue.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

1. Montrer que f=0 et en déduire : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 733 [Mines MP 2025 # 710] Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ une fonction croissante telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x}$ avec a > 0.

1. Rappeler les théorèmes d'intégration des équivalents et donner un équivalent de $\ln(f(x))$ quand $x \to +\infty$.

1. On pose $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-nx}$. Déterminer le domaine de définition de u et donner les limites de u aux bornes de ce domaine.

Exercice 734 [Mines MP 2025 # 711] Soit $p \in]0,1[$. Soit f définie par : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^x p^n$.

1. Tracer une allure du graphe de f.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

1. Étudier l'intégrabilité de f en $-\infty$.

Exercice 735 [Mines MP 2025 # 712] Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $F_\lambda : s \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{s(s+1)\cdots(s+n)}$.

1. Déterminer l'ensemble Δ_λ des $s \in \mathbb{R}^{+*}$ pour lesquels $F_\lambda(s)$ est bien défini.

1. Trouver la limite de F_λ quand $s \to \sup(\Delta_\lambda)$. c) Donner un équivalent de $F_\lambda(s)$ quand s tend vers $\inf(\Delta_\lambda)$.

1. Calculer $\int_0^1 y^n(1-y)^{s-1}dy$. En déduire une expression intégrale de $F_\lambda(s)$.

Exercice 736 [Mines MP 2025 # 713] On admet que π est irrationnel. Soit $\alpha > 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \left(\frac{\cos(n)}{n} + \frac{\alpha}{n}\right)^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

1. Étudier la convergence de la série en R.

Exercice 737 [Mines MP 2025 # 714] Soient $q \in]-1,1[$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinageqde 0.

Exercice 738 [Mines MP 2025 # 715] Soit $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \operatorname{sh}\left(x\sqrt{t}\right) dt$.

1. Donner le domaine de définition de f.

1. Développer f en série entière puis exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 739 [Mines MP 2025 # 716] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, faire l'étude aux bords et calculer la somme.

Exercice 740 [Mines MP 2025 # 717] Notons D_n le nombre de permutations de $\{1,\dots,n\}$ qui n'admettent aucun point fixe. On pose par convention $D_0 = 1$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{k} D_k = n!$.

1. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$. Montrer que S a un rayon de convergence ≥ 1.

1. Calculer $e^x S(x)$ et en déduire une expression de D_n.

Exercice 741 [Mines MP 2025 # 718] On définit $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ pour z complexe lorsque cela a un sens, et f(0) = 1. On
définit une suite réelle

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

par $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

1. Montrer que $|b_n| \leq n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que f est développable en série entière autour de 0 et que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ pour z voisin de 0. Montrer que le rayon de convergence de la série entière en question appartient à $[1, 2\pi]$.

1. En considérant $z \mapsto f(z) + \frac{z}{2}$, calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ impair.

1. Montrer que tan est développable en série entière autour de 0 et expliciter le développement en série entière associé en fonction des b_n. Ind. Considérer f(z) + f(-z).

Exercice 742 [Mines MP 2025 # 719] Soit $p \in \mathbb{R}$. L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^p$ est-elle développable en série entière au voisinageqde 0 ?

Exercice 743 [Mines MP 2025 # 720] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{x}{2^k}\right)$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction u que l'on ne cherchera pas à expliciter.

1. Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que u est développable en série entière au voisinageqde 0.

Exercice 744 [Mines MP 2025 # 721] On considère :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{in^2 x}.$$

1. Montrer que f est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f n'est pas développable en série entière au voisinageqde 0.

Exercice 745 [Mines MP 2025 # 722] Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) et étudier le comportement de la suite (a_n).

1. Montrer la divergence de $\sum u_n^2$ et la convergence de $\sum u_n^3$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. Préciser le comportement de sa somme en 1 et en -1.

Exercice 746 [Mines MP 2025 # 723] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que $\sum n|a_n|$ converge. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de f est ≥ 1.- b) On suppose que $a_1 \neq 0$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n| \leq |a_1|$. Montrer que f est injective sur le disque

unité ouvert.

Exercice 747 [Mines MP 2025 # 724] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p(n) le cardinal de l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x + 2y + 3z = n\}$. Soit $G : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)t^n$. a) Montrer que le rayon de G est ≥ 1 et que $\forall t \in]-1, 1[\, , G(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$

1. Expliciter p(n) et en déterminer un équivalent.

Exercice 748 [Mines MP 2025 # 725] Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$. Montrer que, pour tout $x \in I$, il existe $r > 0$ et $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $]xr, x + r[\subset I$ et $\forall t \in] - r, r[, f(x + t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Exercice 749 [Mines MP 2025 # 726]
1. Déterminer les endomorphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$. Si $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et si $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet une limite finie en 1^-.

1. Montrer que, si $\sum a_n$ converge absolument, $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie $\mathcal{P}$. Étudier la réciproque.

1. Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\mathcal{P}$, la suite $(f(a_n))_{n\geq 0}$ vérifie $\mathcal{P}$.

Exercice 750 [Mines MP 2025 # 727]
1. Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, p/q], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $P_n =$

$\frac{X^n(p-qX)^n}{n!}$ Montrer que : $\int_0^{p/q} P_n(t)f(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. b) Montrer que π est irrationnel

Exercice 751 [Mines MP 2025 # 728] Déterminer un équivalent de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}|\cos t|}{\sqrt{t}} dt$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 752 [Mines MP 2025 # 729] Déterminer un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} (1 + nx^4)^{-n} dx$.

Exercice 753 [Mines MP 2025 # 730] Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ strictement croissante vérifiant f(0)=0 et f(1)=1. Montrer que : $\int_0^1 f(t)^n dt \xrightarrow[n\to+\infty]{}$
0.

Exercice 754 [Mines MP 2025 # 731] On pose : $\forall x \in]0, 1[\, , f(x) = \frac{-x}{\ln(1-x)}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 x^n f(x)\, \mathrm{d}x$.

1. Étudier la bonne définition, la convergence et la limite de la suite (I_n).

1. Déterminer un équivalent simple de I_n.

Exercice 755 [Mines MP 2025 # 732] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ bornée.

Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{1}{n} \left(\int_0^{+\infty} \left(\ln\left(1 + e^{nf(x)}\right)\right)^n e^{-x} dx \right)^{1/n}$.

Exercice 756 [Mines MP 2025 # 733] Soit

$$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}.$$

On pose $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{1-2a\cos t+a^2} dt$.

1. Montrer que $a(I_n + I_{n+2}) = (a^2 + 1)I_{n+1}$ pour tout n.

1. Calculer I_n.

Exercice 757 [Mines MP 2025 # 734] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n dx$.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (I_n) et en déduire un équivalent de I_n.

1. Donner le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.

1. Montrer que $I_{2n} = (-1)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Exprimer de même I_{2n+1}.

Exercice 758 [Mines MP 2025 # 735] Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\cos(2xt)dt$.

1. Donner une relation entre I_n et I_{n+2}. b) Montrer que la suite $((n + 1)I_n I_{n+1})$ est constante et en déduire $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

1. i) Montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [0, \pi/2], \cos(t) \leqslant 1\alpha t^2$ et déduire que $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{nt}\cos^n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

J_0 ii) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi/2], \mathbb{R})$. Montrer que $\frac{1}{I} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos^n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$.

- iii) Montrer que, si $x \neq \pm\frac{n}{2}$, alors $J_n = \left(1\frac{4x^2}{n^2}\right)^{-1} \frac{n-1}{n} J_{n-2}$.

- **iv**) Conclure que, si $x \in] - \pi, \pi[$, alors $\pi x \prod_{n=0}^{\infty} \left(1\frac{x^2}{k^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(\pi x)$.

Exercice 759 [Mines MP 2025 # 736] Exprimer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2+1} dx$ sous forme de somme d'une série.

Exercice 760 [Mines MP 2025 # 737] On appelle suite de fonctions de Bertrand une suite (f_n) de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives, uniformément majorées et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} f_n = 1$. Soit $\mathcal{B}$ une suite de fonctions de Bertrand et $\sum a_n$ une série numérique réelle. On dit que $\sum a_n$ est $\mathcal{B}$ -convergente si $-\sum a_n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, vers une fonction continue ;- $-\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n$ est une intégrale convergente.

1. Montrer que toute série absolument convergente est $\mathcal{B}$ -convergente.

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^+, f_n(t) = \frac{t^n e^{-\bar{t}}}{n!}$. Montrer que (f_n) est une suite de fonctions

de Bertrand. Expliciter une série divergente qui est b-convergente.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \leqslant n \\ tn \text{ si } n < t \leqslant n+1 \\ n+2t \text{ si } n+1 < t \leqslant n+2 \end{cases}$.

Montrer que (f_n) est une suite de Bertrand et montrer qu'une série $\sum a_n$ converge si et seulement si elle est $\mathcal{B}$ -convergente. En cas de convergence, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n$.

Exercice 761 [Mines MP 2025 # 738] Montrer l'existence et calculer : $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \cos(\lambda \sin t) dt$.

Exercice 762 [Mines MP 2025 # 739] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose F(0)=0 et, pour $x \in [0,1]$, $F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$. Étudier la continuité de F.

Exercice 763 [Mines MP 2025 # 740] Soit $F : a \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)}$. Montrer que F est constante, en déduire sa valeur.

Exercice 764 [Mines MP 2025 # 741] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, existence et calcul de $\int_{-t}^{+\infty} \frac{e^{ixt}-1}{t} e^{-t} dt$.

Exercice 765 [Mines MP 2025 # 742] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Domaine de définition D de F - b) Montrer que $F(x) = \int_{-t}^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$ pour tout $x \in D$. c) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 766 [Mines MP 2025 # 743]
1. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ soit absolument convergente. On note G(z) cette intégrale.

1. i) On pose $I_n : z \mapsto \int_0^n t^{z-1} \left(1 \frac{t}{n}\right)^n dt$. Justifier que I_n est bien définie.

ii) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n(z) = G(z)$.- c) Montrer que G ne s'annule pas sur son domaine de définition.

Exercice 767 [Mines MP 2025 # 744] On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$. a) Déterminer le domaine de définition D de F.

1. Montrer que F est de classe C^1, puis calculer F.

1. En déduire la valeur de $\int_{-t^2}^{+\infty} \frac{(\arctan t)^2}{t^2} dt$.

Exercice 768 [Mines MP 2025 # 745]
1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ est une intégrale convergente.

1. Montrer que : $G : t \mapsto \left(\int_0^t e^{ix^2} dx\right)^2 + i \int_0^1 \frac{e^{it^2(x^2+1)}}{x^2+1} dx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

calculer G'. c) On admet que : $\int_0^1 \frac{e^{it^2(x^2+1)}}{x^2+1} dx \to 0$ quand $t \to +\infty$. Calculer $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

Exercice 769 [Mines MP 2025 # 746] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$. a) Domaine de définition D de F. Montrer que F est positive et décroissante.

- b) Montrer que $F(x) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} dt$ pour tout $x \in D$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.
- c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et que $F(x)F'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in D$. En
- déduire que F est de classe C^∞ sur D. d) Montrer que $F(x) = e^x \int_{-t}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ pour tout $x \in D$ et en déduire la limite de F en 0^+.
- e) Montrer que $F(x) \sim -\ln x$.
-

Exercice 770 [Mines MP 2025 # 747] Pour x>0, on pose $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.

- a) Trouver une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ pour x>0.
- b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(\Gamma(n))$ Montrer que $u_n = n\ln(n) - n - \frac{\ln(n)}{2} + \frac{\ln 2\pi}{2} + o(1)$.

Exercice 771 [Mines MP 2025 # 748] Soient $E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{C}),\ f(0) = f(1) = 0\right\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$. a) Montrer que $\Delta : f \mapsto f''$ est un isomorphisme de E dans F.

1. Pour $g \in F$, on pose $G : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 |x-t| g(t) dt$. Montrer que G est de classe C^2 et calculer G".

1. En déduire une fonction de deux variables $k : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$\forall g \in F, \forall x \in [0,1], \Delta^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x,t) g(t) dt.$

Exercice 772 [Mines MP 2025 # 749] Soit $F : a \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(1+at^2)}}$. Donner un équivalent de F en $+\infty$.

Exercice 773 [Mines MP 2025 # 750] On pose

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \left(e^{-xt} \int_0^t \frac{\sin(u)}{u} du \right) dt.$$

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 774 [Mines MP 2025 # 751] 1. Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1} dt$ et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine.

1. Donner un équivalent de f en chacune des bornes du domaine.

Exercice 775 [Mines MP 2025 # 752] Soient f, g continues sur $\mathbb{R}$. a) On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$ et g bornée.
Montrer que $(f * g) : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose f et g de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f g est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 776 [Mines MP 2025 # 753] Soit

$$f \in C^0([0,1], \mathbb{R}^{+*}).$$

Soient $N_f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \left(\int_0^1 f(t)^x dt \right)^{1/x}$.

1. Montrer que N_f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer la limite de N_f en $+\infty$.

1. Déterminer la limite de N_f en 0^+.

Exercice 777 [Mines MP 2025 # 754] On pose $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et on se donne $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que $T : f \in E \mapsto \left[x \mapsto \int_0^x f(t)K(x,t)dt \right]$ est un endomorphisme de E.

1. Soit $\varphi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\partial_2 \varphi$ soit définie et continue sur $[0,1]^2$.

1. Montrer que $(u,s) \in [0,1]^2 \mapsto \int_0^u \varphi(x,s)\,\mathrm{d}x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (dans un sens à préciser).

ii) En déduire que $g : s \in [0,1] \mapsto \int_0^s \varphi(x,s)\,\mathrm{d}x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et expliciter sa dérivée.

1. On pose $T^{\cdot} f \in E \mapsto \left[x \mapsto \int_x^1 f(t)\,K(x,t)\,\mathrm{d}t \right]$. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire sur E défini par $\langle a,b \rangle = \int_0^1 a(t)\,b(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\forall (f,g) \in E^2,\ \langle T(f), g \rangle = \langle f, T^{(}g) \rangle$ et que T est l'unique endomorphisme de E ayant cette propriété.

Exercice 778 [Mines MP 2025 # 755] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation différentielle y'-y+f=0 possède une unique solution bornée.

Exercice 779 [Mines MP 2025 # 756] On considère l'équation différentielle $(E) : 6(1+t^2)y'' - 2y = t$.

1. Déterminer une solution polynomiale non nulle φ de $(1+t^2)y'' - 2y = 0$.

1. Résoudre (E) grâce au changement de fonction inconnue $y = \varphi z$.

Exercice 780 [Mines MP 2025 # 757] Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π -périodique.
L'équation différentielle $y'' + k^2 y = f$ admet-elle une solution 2π -périodique ?

Exercice 781 [Mines MP 2025 # 758] Soient $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $K \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que toute solution non nulle de l'équation différentielle $y'' + \varphi(x)y' - Ky = 0$ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 782 [Mines MP 2025 # 759] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f''(x) \geq 0$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x+\pi) \geq 0$.

Exercice 783 [Mines MP 2025 # 760] Soit () l'équation différentielle 2xy" + y' - y = 0.

1. Trouver une solution f de () développable en série entière au voisinageqde 0 et telle que f(0)=1.

1. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

1. Déterminer toutes les solutions de ().

Exercice 784 [Mines MP 2025 # 761] On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de E défini par :
$\forall f \in E, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(f)(t) = f'(t) + tf(t)$. a) Déterminer les éléments propres de φ.

1. Déterminer les éléments propres de φ^2.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2ty + (t^2+3)y = 0$.

Exercice 785 [Mines MP 2025 # 762] Soit (E) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$: ty" + ty' y = 0.

1. Déterminer les réels a tels que $h_a : t \mapsto t^a$ soit solution de (E).

1. Soient $g : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{e^{-t}}{t^2}$ et $G : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_1^t g(s)\,\mathrm{d}s$. Dresser le tableau de variation de G. Étudier la limite de G en 0^+ et montrer que G admet une limite finie en $+\infty$.

1. Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et $h : t \mapsto tf(t)$. Montrer que h est solution de (E) si et seulement

si f' est solution de : (E') : $z' + \left(1 + \frac{2}{4}\right) z = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) et étudier le comportement des solutions en 0^+.

Exercice 786 [Mines MP 2025 # 763] On note (S) le problème de Cauchy $(-2y'' + xy' + y = 0,\ y(0) = \sqrt{\pi},\ y'(0) = 0)$.

1. Montrer que (S) possède une unique solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et l'expliciter.

1. On pose : $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et expliciter f(x).

Exercice 787 [Mines MP 2025 # 764] Montrer que la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ n'est pas solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

Exercice 788 [Mines MP 2025 # 765] Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(1/x) = -f(x/2)$.

Exercice 789 [Mines MP 2025 # 766] Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ continue. On suppose que (E) : y" + q(x)y = 0 admet une solution strictement positive y et on pose $f = \frac{y'}{y}$.- a) Trouver une équation différentielle d'ordre 1 dont f est solution.

1. Montrer que f est décroissante et strictement positive.

1. Montrer que q est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} q(t)dt = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 790 [Mines MP 2025 # 767] L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants : i) $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,

- ii) toute solution $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle x' = Ax est de norme constante.

Exercice 791 [Mines MP 2025 # 768] 1. Soient $f, g \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$.

On suppose qu'il existe A > 0 telle que $\forall x \geq 0,\, f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)dt$. Montrer que $\forall x \geq 0,\, f(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$.

1. Soient $a, b \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que b est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $u \mapsto u\,a(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Soit x une solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle x" + ax = b. Montrer que,

pour tout $t \geq 0$, $x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)\,a(u)\,x(u)\,du + \int_1^t (t-u)\,b(u)\,du$.

Exercice 792 [Mines MP 2025 # 769] Résoudre les systèmes différentiels

$$\begin{cases} x' = 7x + 3y + te^t \\ y' = 3x - y + e^t \end{cases} , \begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + y + z \\ z' = x + 2y + 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = 9x + 10y \\ y'' = -5x - 6y \end{cases} , \begin{cases} x'(t) = (t+3)x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -4x(t) + (t-3)y(t) \end{cases} .$$

Exercice 793 [Mines MP 2025 # 770] Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$. Déterminer les solutions de : X' = AX.

Exercice 794 [Mines MP 2025 # 771] Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la matrice e^{tA} soit stochastique, c'est-à-dire que tous ses coefficients sont positifs, et que la somme des coefficients sur n'importe quelle ligne vaut 1.

Exercice 795 [Mines MP 2025 # 772] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \forall i, j \in [1, n], (-1)^{i+j} m_{i,j} \geq 0\}$.

1. Montrer que A est stable par + et $\times$. b) Soient $A \in \mathcal{A}$ et $M \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}^+, M'(t) = AM(t)$ et

$M(0) \in \mathcal{A}$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, M(t) \in \mathcal{A}$.

Exercice 796 [Mines MP 2025 # 773] Soit $A : [0, 1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in [0, 1], A^2(t) - 5A(t) + 6I_n = 0$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $P : [0, 1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$A(t) = P(t)A(0)P(t)^{-1}$. b) Soient $t \in [0, 1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A(t)X = \lambda X$. Montrer que $A(t)A'(t)X = (5\lambda)A'(t)X$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $P : [0, 1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in [0, 1]$, $A(t) = P(t)A(0)P(t)^{-1}$.

Exercice 797 [Mines MP 2025 # 774] On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2)^x \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 \text{ si } x = y = 0. \end{cases}$.

1. Étudier la continuité de f.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Admet-elle des dérivées partielles en (0,0) ?

1. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x, 0)$.

1. Étudier les extrema de f.

Exercice 798 [Mines MP 2025 # 775] Soit

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} - \frac{xy}{\sqrt{2}}.$$

Déterminer les extrema de f et préciser leur nature.

Exercice 799 [Mines MP 2025 # 776] Soit $D = \{(x,y) \in [0,\pi]^2 : x+y \leq \pi\}$.
Déterminer les extrema de $\varphi : (x,y) \in D \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$.

Exercice 800 [Mines MP 2025 # 777] Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 xy^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.

1. Soit D une droite passant par (0,0). Montrer que la restriction de f à D admet un minimum local en (0,0).

1. La fonction f possède-t-elle un extremum local en (0,0) ?

Exercice 801 [Mines MP 2025 # 778] Soit E un espace vectoriel normé non nul. Soit N une norme quelconque sur E. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

Exercice 802 [Mines MP 2025 # 779] 1. Soient

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

et $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer : $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$.

1. Soit D le sous-espace des formes linéaires φ sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (f,g) \in E^2,\ \varphi(fg) = f(0)\,\varphi(g) + g(0)\,\varphi(f)$.

Montrer que D est de dimension finie puis que dim $D = n$.

Exercice 803 [Mines MP 2025 # 780] 1. Soient $(E, \|\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
On pose $g : x \in E \mapsto f(x)e^{-\|x\|^2}$. Montrer que g admet un minimum et un maximum.

1. On prend $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $g : x \in E \mapsto \langle a, x\rangle\, e^{-\|x\|^2}$. Déterminer le minimum et le maximum de g et indiquer les points en lesquels ils sont atteints.

Exercice 804 [Mines MP 2025 # 781] Déterminer les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xe^y + ye^x$.

Exercice 805 [Mines MP 2025 # 782] On considère la fonction $f : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \int_{-1}^1 |t^2 + at + b| \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le minimum de la fonction $b \mapsto f(0,b)$.

1. On fixe $b \in \mathbb{R}$. Déterminer le minimum de la fonction $a \mapsto f(a,b)$.

1. Déterminer le minimum de f.

Exercice 806 [Mines MP 2025 # 783] Soient $(E, \|\|_E)$, $(F, \|\|_F)$, $(G, \|\|_G)$ trois espaces vectoriels normés. On pose, pour $(x,y) \in E \times F$, $\|(x,y)\|_{E\times F} = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$. Soit $B : E \times F \to G$ bilinéaire et
continue. a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in E \times F$ vérifiant la condition
$||(x,y)||_{E\times F} \leq \alpha$, on ait $||B(x,y)||_G \leq 1$.
En déduire que $||B(x,y)||_G \leqslant \frac{||x||_E||y||_F}{\alpha^2}$ pour tout $(x,y) \in E \times F$.

1. Montrer que B est différentiable et que $dB(x,y) \cdot (h,k) = B(x,k) + B(h,y)$.

1. Montrer que $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2 \mapsto u \circ v$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice 807 [Mines MP 2025 # 784] 1. Calculer la différentielle de la fonction det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en I_n. b) Montrer de deux façons différentes que det n'atteint pas d'extremum local en I_n.

1. Que peut-on dire d'un éventuel extremum local de la fonction det ? d) On fixe $r \in [1, n-1]$. Expliciter une matrice «simple» de rang r de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La fonction det y atteint-elle un extremum local ?

Exercice 808 [Mines MP 2025 # 785] Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{U}$ et trois applications $f, g_1, g_2 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ telles que $g_1 \leq f \leq g_2$ et $g_1(x_0) = g_2(x_0)$. On suppose de plus que g_1 et g_2 sont différentiables sur $\mathcal{U}$. Montrer que f est différentiable en x_0.

Exercice 809 [Mines MP 2025 # 786] Soit (E, || ||) un espace vectoriel normé de dimension finie (non nulle). Soit $f : B_F(0,1) \to \mathbb{R}$ continue, constante sur la sphère unité et différentiable sur la boule ouverte $B_o(0,1)$. Montrer que f admet un point critique sur $B_o(0,1)$.

Exercice 810 [Mines MP 2025 # 787] On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative. a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall X \in E, |\operatorname{tr} X| \leq C||X||$.

1. Montrer que $g : X \mapsto X^2$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle. c) Montrer que $f : X \mapsto \operatorname{tr} X^2$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

1. Montrer que : $\forall (A,B) \in E^2, |\operatorname{tr} A^2 - \operatorname{tr} B^2| \leq 2C \max(||A||, ||B||)||A - B||$.

Exercice 811 [Mines MP 2025 # 788] Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et k un entier ≥ 1. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

1. $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n, f(tx) = t^k f(x)$, ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, df(x)(x) = kf(x)$.

Exercice 812 [Mines MP 2025 # 789] Soit φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall t > 0, \varphi(t) = -t\ln t$ et $\varphi(0) = 0$. Soit $N \geq 2$.
On pose : $\Sigma_N = \left\{p \in (\mathbb{R}^+)^N \ ; \ \sum_{i=1}^N p_i = 1\right\}$.
Soit h définie sur Σ_N par : $\forall p \in \Sigma_N, h(p) = \sum_{i=1}^N \varphi(p_i)$.

1. Montrer que Σ_N est un compact convexe. b) Montrer que φ est continue et strictement concave sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire que $\forall \lambda \in [0,1[, \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x \neq y \Rightarrow \varphi((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y)$. c) Soient $a,b \in \mathbb{R}^+$ tels que a < b. Soit $t \in [0,(b-a)/2]$.

Montrer que $\varphi(a+t)+\varphi(b-t) > \varphi(a)+\varphi(b)$.

1. Montrer que h admet un maximum, atteint en un unique point p.- e) En raisonnant sur $q=(p_1+\varepsilon, p_2-\varepsilon, p_3, \dots, p_N)$, montrer que $p_1 = \cdots = p_N$.

Exercice 813 [Mines MP 2025 # 790] Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Rappeler pourquoi f possède une base orthonormée de vecteurs propres.

1. Rappeler pourquoi $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \langle x, f(x)\rangle > 0$. c) Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle x, f(x)\rangle - \langle v, x\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Déterminer le gradient de q en tout point

1. Montrer que g admet un unique point critique, en un point noté c, et préciser sa valeur.

1. Montrer que q a un extremum global en c. La fonction q possède-t-elle d'autres extrema ?

-

Exercice 814 [Mines MP 2025 # 791] Soit $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \exp\left(n-1-\sum_{k=1}^n x_k\right) + \sum_{k=1}^n e^{x_k}$.

1. Déterminer les points critiques de f.

1. Préciser la hessienne aux points critiques. Qu'en déduire sur f? c) Déterminer les extrema de f.

Exercice 815 [Mines MP 2025 # 792] Soit $n \in \mathbb{N}$. On munit $\mathbb{R}^{n+1}$ de sa structure euclidienne canonique. Pour $x=(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $y=(y_0,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on pose

$$f(x,y) = \left(\sum_{i+j=k} x_i y_j\right)_{0 \leqslant k \leqslant 2n} \in \mathbb{R}^{2n+1}.$$

1. Montrer que, si x et y sont non nuls, alors f(x, y) est non nul.

1. On pose $u : x \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto f(x,x)$ et $v : x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \frac{f(x,x)}{\|f(x,x)\|}$.

Étudier la différentiabilité de u et v et calculer leurs différentielles quand c'est possible.

1. Déterminer le rang de dv(x) pour $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul.

Exercice 816 [Mines MP 2025 # 793] Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient c > 0 et f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, ||f(x)f(y)|| \geq ||xy||$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\|\mathrm{d}f(a)(h)\| \geq c\|h\|$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. En déduire que $\mathrm{d}f(a)$

est bijective.

1. Soient $b \in \mathbb{R}^n$ et $g_b : x \mapsto ||f(x)b||^2$. Montrer que g_b admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

1. En déduire que f est bijective.

Exercice 817 [Mines MP 2025 # 794] On considere l'application $f : P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P^T P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, la différentielle de f en M est surjective. b) On pose $g = f_{|\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$. Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la différentielle de g en M est-elle surjective ?

Exercice 818 [Mines MP 2025 # 795] Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $D_1, \dots, D_p$ des droites affines de $\mathbb{R}^2$ non parallèles deux à deux, $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires non nulles telles que chaque f_i soit constante (égale à a_i) sur D_i. On pose $T = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^r D_i$, et on considère une composante connexe par arcs C de T.

1. Soit $i \in [1,p]$. Montrer que $g_i = f_i a_i$ ne changeqpas de signe sur C. b) Soit $\Phi : (x,y) \in C \mapsto \sum_{i=1}^p b_i \ln|g_i(x,y)|$ où les b_i sont des constantes >0.

1. Montrer que Φ est de classe C^2.

ii) Soient z_1 et z_2 dans C, et $\Psi : t \in [0,1] \mapsto \Phi(tz_1+(1-t)z_2)$. Montrer que Ψ est concave et que Ψ'' ne s'annule pas. iii) Si C est bornée, montrer que Φ n'admet qu'un seul point critique sur C. La fonction Φ admet-elle un extremum en ce point ?

Exercice 819 [Mines MP 2025 # 796] Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite lorsque r tend vers 0 de $\frac{1}{2\pi r^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))dt$.

Exercice 820 [Mines MP 2025 # 797] Soient r > 0 et $a \in \mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(B_f(a,r),\mathbb{R})$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B_o(a,r)$.

On pose :

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}.$$

1. On suppose : $\forall x \in B_o(a,r),\ \Delta(f)(x) > 0$. Montrer que f admet un maximum sur $B_f(a,r)$ et que ce dernier ne peut pas être atteint sur $B_o(a,r)$.

1. On suppose : $\forall x \in B_o(a,r)$, $\Delta(f)(x) \geq 0$. Montrer que f atteint un maximum sur $B_f(a,r)$ et que ce dernier est atteint en un point de la sphère de centre a et de rayon r. Ind. Pour $\varepsilon > 0$, poser $f_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon ||xa||^2$.

Exercice 821 [Mines MP 2025 # 798] Soit $n \geq 2$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les valeurs propres de la hessienne de f en x soient supérieures ou égales à 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{\|x\|^2}{2}$ et en déduire que f admet un minimum.

Exercice 822 [Mines MP 2025 # 799] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle \nabla f(x) \nabla f(y), xy \rangle \geq \alpha ||x-y||^2$. Montrer que $f \to +\infty$.

Exercice 823 [Mines MP 2025 # 800] $ $ Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

1. On suppose f de classe C^2. Montrer que sa jacobienne $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que f(x) = Ax + b pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que sa jacobienne $J_f(x)$ est symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f = \nabla g$.

Exercice 824 [Mines MP 2025 # 801] Soit $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $G(y)G(x) \geq \langle \nabla G(x), yx \rangle + \frac{\alpha}{2}\|yx\|^2$

1. Montrer que, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue et si $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors f admet un minimum.

1. Montrer que G atteint son minimum en un unique point.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla G(x) \neq 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto G(x + t\nabla G(x))$ atteint son minimum en un unique point. Que se passe-t-il si $\nabla G(x) = 0$?d) Soit la suite (u_k) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = u_k + t_k \nabla G(u_k)$, où $t_k \in \mathbb{R}$ est tel que la fonction $t \mapsto G(u_k + t\nabla G(u_k))$ atteint son minimum en $t = t_k$. Quelle est la relation entre $\nabla G(u_{k+1})$ et $\nabla G(u_k)$?

1. Montrer que (u_k) converge.

Exercice 825 [Mines MP 2025 # 802] 1. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f est convexe si et seulement si $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour tout $x \in U$ (où $H_f(x)$ désigne la matrice hessienne de f en x).

1. On fixe $p \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p}.$$

À quelle condition la fonction f est-elle convexe ?

Exercice 826 [Mines MP 2025 # 803] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On note $H_f(x)$ la matrice hessienne de f au point x.

1. Montrer que si $H_f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \langle a, x \rangle + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si la fonction $x \mapsto H_f(x)$ est constante sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{1}{2}\langle u(x), x \rangle + \langle a, x \rangle + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 827 [Mines MP 2025 # 804] Soit E un espace euclidien non nul dont on note S la sphère unité. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On pose : $f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ et $g : x \mapsto ||x||^2 - 1$.

1. Montrer que f et g sont différentiables sur E et calculer les différentielles.

1. Montrer que la restriction de f à S admet un maximum, en un vecteur e.

1. Montrer que e est un vecteur propre de u.

Exercice 828 [Mines MP 2025 # 805] Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents à $SL_n(\mathbb{R})$ au point I_n est l'hyperplan des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 829 [Mines MP 2025 # 806] Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que l'imageqde tout fermé de $\mathbb{R}^n$ par f est fermée. On suppose de plus que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(a)$ est bijective. On pose $X = f(\mathbb{R}^n)$.

1. Soit $x \in X$. Montrer que l'espace tangent $T_x X$ est égal à $\mathbb{R}^n$. b) Montrer que $X = \mathbb{R}^n$. Ind. On pourra raisonner par l'absurde.

3) Probabilités

Exercice 830 [Mines MP 2025 # 807] Soient $n \geq 2$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1,n]\!])$.

1. Déterminer $\mathbf{E}(\mathrm{card}(X))$.

1. Déterminer $\mathbf{E}(\mathrm{card}(X \cap Y))$.

Exercice 831 [Mines MP 2025 # 808] Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p < n$. On considère une urne contenant p boules blanches et n-p boules noires. On effectue des tirages sans remise des boules de l'urne. Donner la loi et l'espérance de la variable donnant le rang de la dernière boule blanche tirée.

Exercice 832 [Mines MP 2025 # 809] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est sans mémoire si : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X > n) > 0$ et $\mathbf{P}(X > m+n \mid X > n) = \mathbf{P}(X > m)$.

1. Soit $p \in [0,1[$. On suppose que $X \sim \mathcal{G}(p)$. Montrer que X est sans mémoire. b) On suppose que X est sans mémoire.

- i) Montrer que $\mathbf{P}(X > 0) = 1$, puis que : $\exists p \in]0,1[\,, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X > n) = (1-p)^n$.

- ii) Montrer que $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exercice 833 [Mines MP 2025 # 810] On considère une urne contenant deux fois plus de boules noires que de blanches. On y effectue des tirages avec remise, et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux boules noires consécutives. Pour
tout $n \geq 0$, on pose $u_n = \mathbf{P}(X > n)$. a) Montrer que $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. En déduire la loi de X c) Montrer que X admet des moments de tout ordre, et calculer son espérance.

1. Calculer la fonction génératrice de X_n et en déduire sa loi et son espérance.

Exercice 834 [Mines MP 2025 # 811] Soit $p \in [0,1[$. On dispose d'une urne contenant des boules blanches et noires, avec une proportion p de boules blanches. On effectue des tirages successifs avec remise. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de tirages à effectuer pour obtenir n boules blanches.

1. Déterminer la loi de X_1 et sa fonction génératrice.

Exercice 835 [Mines MP 2025 # 812] Alice et Bob possèdent chacun un sac avec n jetons numérotés de 1 à n. Alice tire un jeton au hasard. Bob tire ensuite des jetons, sans remise, jusqu'à ce que le numéro tiré soit supérieur ou égal au numéro tiré par Alice. On note Y le nombre de jetons tirés par Bob.

Exercice 836 [Mines MP 2025 # 813] On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$.

1. Montrer que cette relation définit une loi de probabilité.

1. Calculer la fonction génératrice de X.

1. Calculer l'espérance de X.

Déterminer la loi de Y.

Exercice 837 [Mines MP 2025 # 814] Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in [0,1] \setminus \{1/2\}$. On considère des variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X = k, Y = n) = a\,\frac{(1-p)^{n-k}}{2n}\mathbf{1}_{k \leqslant n}$.

1. Calculer a, puis les lois de X et Y. b) Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de X et Y.

1. Calculer la covariance de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 838 [Mines MP 2025 # 815] Soient $a \in]0,1[$, $b > 0$ et (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-b} b^i a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!}\mathbf{1}_{i \geq j}$.

1. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

1. Déterminer la loi de Z = X Y.

1. Déterminer les lois de X et Y.d) Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 839 [Mines MP 2025 # 816] Soient X, Y des variables aléatoires telles que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y = \frac{1}{X+1}$. Calculer $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 840 [Mines MP 2025 # 817] Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Calculer la probabilité que X soit paire.

1. On pose $Y = (-1)^X$. Espérance et loi de Y.

Exercice 841 [Mines MP 2025 # 818] Soit X une variable aléatoire à valeurs entières ayant un moment d'ordre 2.

$$\text{Montrer que } \mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) \leqslant 1 - \frac{2}{3}\,\mathbf{E}(X) + \frac{1}{6}\,\mathbf{E}(X^2) \text{ et caractériser l'égalité.}$$

Exercice 842 [Mines MP 2025 # 819] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall t \in [0,1[\,, \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k)\, t^k = \frac{1-G_X(t)}{1-t}$.

1. On suppose que X^2 est d'espérance finie.

Montrer que :

$$\forall t \in [0,1], \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k)t^k \geq \frac{3-t}{2}\mathbf{E}(X) + \frac{t-1}{2}\mathbf{E}(X^2).$$

Exercice 843 [Mines MP 2025 # 820] On considère deux compartiments séparés par une valve. À l'instant t=0, le compartiment A contient 2N particules et le second est vide. On ouvre la valve. À chaque instant, de manière équiprobable, une des 2N particules passe d'un compartiment à l'autre. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de particules dans le compartiment A à l'instant n.

1. Soit $k \in [0, 2N]$. Trouver une relation entre $\mathbf{P}(X_n > k)$, $\mathbf{P}(X_{n-1} > k+1)$, $\mathbf{P}(X_{n-1} = k+1)$ et $\mathbf{P}(X_{n-1} = k)$.

1. En déduire que, pour $n \geq 1$, $\mathbf{E}(X_n) = 1 + \left(1\frac{1}{N}\right)\mathbf{E}(X_{n-1})$.

1. Déterminer $\mathbf{E}(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n)$.

Exercice 844 [Mines MP 2025 # 821] Une urne contient r boules rouges et b boules blanches. À chaque tirage, on pioche une boule dans l'urne et on remet la boule tirée dans l'urne si et seulement si elle est rouge. On note $E_{n,b}$ l'espérance du nombre de boules blanches tirées à l'issue de n tirages (on considère r comme fixé définitivement).

1. Montrer que $F : (u,v) \in]-1,1[^2 \mapsto \sum_{(n,b)\in(\mathbb{N}^*)^2} E_{n,b}u^n v^b$ est convenablement définie.

1. Montrer la relation $(b+r)E_{n,b} = b + bE_{n-1,b-1} + rE_{n-1,b}$ (si b>0 et n>0). c) Montrer que $\partial_2 F$ est bien définie sur]-1, 1[et que

$\forall (u,v) \in]-1,1[^2,\ v\,\partial_2 F(u,v) + r\,F(u,v) = \frac{uv}{(1-u)^2(1-v)^2}$.

Exercice 845 [Mines MP 2025 # 822]
1. Montrer que le polynôme $P = X^3X^2X1$ admet une unique racine réelle et deux racines complexes non réelles de module strictement inférieur à 1.b) On lance une pièce équilibrée. Pour $n \geq 3$, A_n est l'événement « obtenir trois pile consécutifs pour la première fois à l'instant n ».

Déterminer une relation de récurrence d'ordre 3 vérifiée par la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n\geq 3}$ et en déduire sa limite.

Exercice 846 [Mines MP 2025 # 823] On lance simultanément $n \in \mathbb{N}^*$ fois deux pièces équilibrées. Soit E_n l'événement « les deux pièces donnent le même nombre de pile ».

1. i) Pour $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $a + b \leqslant n$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

ii) Calculer $P(E_n)$. b) On note N le nombre de fois où les pièces ont donné le même nombre de pile au cours des n lancers. Calculer E(N).

Exercice 847 [Mines MP 2025 # 824] On donne la formule du crible de Poincaré : si $A_1, \ldots, A_p$ sont des ensembles finis alors

$$\operatorname{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_k \leq p} \operatorname{card} A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}.$$

1. On munit S_n de la probabilité uniforme. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points fixes d'une permutation de S_n.

1. Calculer P(X=0).

1. Déterminer la loi de X.

1. Démontrer la formule de Poincaré.

Exercice 848 [Mines MP 2025 # 825] Une pièce tombe sur pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On la lance jusqu'à obtenir pile, et on note N le nombre de lancers effectués. On relance alors N fois la pièce, et on note X le nombre de pile obtenus. Déterminer la loi de N, celle de X et calculer $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 849 [Mines MP 2025 # 826] On dispose de n chapeaux et n tiroirs. On rangeqaléatoirement chaque chapeau dans un des tiroirs (chaque tiroir pouvant contenir jusqu'à n chapeaux). On note X_k la variable aléatoire donnant le numéro du tiroir dans lequel est rangé le chapeau numéro k. On note Z_n la variable aléatoire donnant le nombre de tiroirs vides à l'issue du rangement.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z_n.

1. Déterminer un équivalent de $\mathbf{E}(Z_n)$ et de $\mathbf{V}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 850 [Mines MP 2025 # 827]
1. Donner la loi d'une somme de n variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. On lance un dé qui a une probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur 6. On note X le nombre de lancers nécessaires pour avoir n fois 6. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 851 [Mines MP 2025 # 828] Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Calculer l'espérance et la variance de $\frac{(X+1)^2}{X}$, notamment en fonction de $\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du$.

1. Calculer l'espérance de $\frac{(X+1)^2}{V}$ et de $(X+1)^2Y$.- c) Les variables aléatoires $\frac{(X+1)^2}{V}$ et $(X+1)^2Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 852 [Mines MP 2025 # 829] Soit X une variable aléatoire telle que $X+1 \sim \mathcal{G}(p)$.

1. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$. Montrer que $\frac{1-x^{nm}}{1-x^m} \leqslant \frac{1-x^n}{1-x}$.

1. Les événements « m divise X » et « n divise X » sont-ils indépendants ? On pourra commencer par le cas $n \wedge m = 1$.

Exercice 853 [Mines MP 2025 # 830] Soient a, b > 0 et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X=n+1) = a\mathbf{P}(X=n) + b^{n+1}$.

1. Montrer que a, b sont strictement inférieurs à 1 et expliciter la loi de X.

1. Calculer $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 854 [Mines MP 2025 # 831] Soit (E_k) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. Montrer l'existence d'un réel ℓ tel que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n} + E_k\right) - \ell\right| > \alpha\right) = 0.$$

Exercice 855 [Mines MP 2025 # 832]

1. Donner une condition sur le couple $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{P}(X=n) = r\binom{2n}{n}s^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose dans le suite sette condition vérifééе et en se denne une telle variable. Y - dans la suite cette condition vérifiée et on se donne une telle variable X. b) Montrer que G_X est solution sur [0,1] de l'équation différentielle (1-4st)y'(t)=2sy(t).

1. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 856 [Mines MP 2025 # 833]

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\forall t \in [0,1]$ $G_x(t) = \frac{1}{1-1}$.

variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\forall t \in [0,1],\ G_X(t) = \frac{1}{(2-t)^\alpha}$

1. Calculer l'espérance et la variance de X et montrer que $\mathbf{P}(X=n) = O\left(\frac{n^{\lfloor \alpha \rfloor}}{2^n}\right)$.

Exercice 857 [Mines MP 2025 # 834] Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p. On introduit $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Calculer $\mathbf{P}(Y \geq k)$ et $\mathbf{P}(Y = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer que Y est d'espérance finie.

Exercice 858 [Mines MP 2025 # 835] Pour $n \geq 2$, soit X_n une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ telle que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{\ln(k)}{\ln(n!)}$. Déterminer un équivalent de $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 859 [Mines MP 2025 # 836] Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec a < b. Quelle est la variance maximale d'une variable aléatoire à valeurs dans [a,b] ?

Exercice 860 [Mines MP 2025 # 837] Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bornée et X une variable aléatoire réelle.Montrer que : $(\mathbf{E}(f(X)^n))^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup\{f(x)\ ;\ x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}(X=x) > 0\}$.

Exercice 861 [Mines MP 2025 # 838] Soient X,Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques de paramètres respectifs p et q.

1. Calculer la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

1. Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) soit vecteur propre de A.

Exercice 862 [Mines MP 2025 # 839] Une matrice est dite à spectre simple lorsque toutes ses valeurs propres sont de multiplicité 1.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$, où $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M n'est pas à spectre simple. Montrer que M possède un vecteur propre dont le dernier coefficient est pul

simple. Montrer que M possède un vecteur propre dont le dernier coefficient est nul. b) En déduire que A possède un vecteur propre orthogonal à b.

1. Soient $X_1, \ldots, X_5$ des variables i.i.d. de Bernoulli de paramètre p. Montrer que la pro-

babilité que la matrice aléatoire

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_5 & X_2 \\ 0 & X_5 & -1 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

soit à spectre simple est
supérieure ou égale à $3p^3 - 2p^4$.

Exercice 863 [Mines MP 2025 # 840] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice $J = (J_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $J_{i+1,i} = 1$, $J_{1,n} = 1$ et $J_{i,j} = 0$ sinon.

1. Calculer le polynôme caractéristique de J ainsi que son polynôme minimal. Soient $X_0, \ldots, X_{n-1}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

$$\text{On pose } M = \begin{pmatrix} X_0 & X_{n-1} & \cdots & \cdots & X_1 \\ X_1 & X_0 & \ddots & & X_2 \\ X_2 & X_1 & X_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X_{n-1} \\ X_{n-1} & \cdots & X_2 & X_1 & X_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. Exprimer M en fonction de J.

1. On suppose dans cette question que n=2. Calculer $\mathbf{P}(M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$.

1. Déterminer le spectre de M.

1. On suppose que n est premier et on admet qu'alors le polynôme $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Déterminer $\mathbf{P}(M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$.

Exercice 864 [Mines MP 2025 # 841] Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p), U = (X_1 \cdots X_n)$ et $M = U^T U$.

1. Déterminer la loi de rg(M) et de tr(M).

b) Calculer la probabilité de l'événement « M est un projecteur ».

1. Ici $n = 2, V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $S = VMV^T$. Déterminer l'espérance et la variance de S.

Exercice 865 [Mines MP 2025 # 842] Soient $n \geq 2$ entier, et V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On note p_V la projection orthogonale sur V, M sa matrice dans la base canonique. On écrit M=D+Aoù D est diagonale et A a tous ses coefficients diagonaux nuls. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire dont les composantes X_i suivent la loi de Rademacher et sont indépendantes. Soit enfin R = d(X, V).

1. Montrer que $0 \leq R \leq \sqrt{n}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ d(x, V)^2 = \|x\|^2 \langle x, p_V(x) \rangle$. c) Montrer que $R^2 = nkX^T AX$ et calculer l'espérance de R^2.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(D^2) \geq \frac{k^2}{n}$.

1. Calculer l'espérance de $(X^T AX)^2$.

Exercice 866 [Mines MP 2025 # 843] Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1[$. Pour $n \geq 1$, on pose $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

1. Donner une expression de $\mathbf{E}(M_n)$.

1. Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto 1(1q^t)^n$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente, et en donner un équivalent quand $n \to +\infty$.

1. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(M_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 867 [Mines MP 2025 # 844] Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Soit h>0. On définit la suite de fonctions $(u_n^h)_{n \in \mathbb{N}}$ par f et, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0, u_{n+1}^h(x) = \frac{u_n^h(x+h) - u_n^h(x)}{h}$.

1. Exprimer u_n^h à l'aide de f.

1. On pose $a_n^h = u_n^h(0)$ et $S(x, h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^h x^k}{k!}$, où $x \geq 0$. Montrer que S(x,h) est bien

définie. c) Exprimer S(x,h) à l'aide de la variable aléatoire X_h, où $X_h \sim \mathcal{P}\left(\frac{x}{h}\right)$. En déduire $\lim_{h \to 0^+} S(x, h)$.

Exercice 868 [Mines MP 2025 # 845] Soient $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de]0,1[et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $n, X_n \sim \mathcal{G}(p_n)$. Montrer que $A = \{\omega, X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty\}$ est un événement, et calculer sa probabilité en fonction de (p_n).

Exercice 869 [Mines MP 2025 # 846] Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables de Rademacher idépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Calculer $\mathbf{E}(e^{tS_n})$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathbf{P}(|S_n| \geq na) \leqslant 2 \exp\left(-\frac{na^2}{2}\right)$.

1. Montrer que le résultat de la question précédente subsiste si on suppose que $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires centrées et bornées par 1.

Exercice 870 [Mines MP 2025 # 847] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Soit

$$f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}).$$

Montrer que $\mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\mathbf{E}(X))$.

Exercice 871 [Mines MP 2025 # 848] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs réelles et admettant un moment d'ordre 4.
On note $m = \mathbf{E}(X_1)$, $V_2 = \mathbf{E}((X_1 - m)^2)$ et $V_4 = \mathbf{E}((X_1 - m)^4)$.
Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement $A_n^\varepsilon = \left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - m\right| \geq \varepsilon\right\}$.

1. Majorer $P(A_n^\varepsilon)$ en fonction de ε, V_2 et V_4.
1. Montrer que la série $\sum \mathbf{P}(A_n^\varepsilon)$ converge.
1. Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k^\varepsilon\right) = 0$.

Exercice 872 [Mines MP 2025 # 849] Soient $p, \alpha \in]0,1[$. On pose q = 1 - p et $\beta = 1-\alpha$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. On pose :

$$A = \left\{\omega \in \Omega \; ; \; \sum \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\right\} \text{ et } A_\beta = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{n=1}^{+\infty}(X_n \leqslant n^\beta).$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty}\left(X_n > n^\beta\right)\right) \leqslant \sum_{n=k}^{k=1} n^{n=k} q^{n^\beta - 1}$.
1. Montrer que $P(\overline{A_\beta}) = 0$.
1. Calculer P(A).

Exercice 873 [Mines MP 2025 # 850] Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que $\sum \lambda_n$ converge. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que $\sum \mathbf{P}(X_n \neq 0)$ converge.
1. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{k\geq n}(X_k \neq 0)$ est un événement négligeable.
1. Montrer que $\sum X_n$ converge presque sûrement. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ et on admettra dans la suite qu'il s'agit d'une variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).
1. Soient Y et Z deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que $\forall t \in [0,1], |G_Y(t)G_Z(t)| \leq 2\mathbf{P}(Y \neq Z)$. e) Montrer que $S \sim \mathcal{P}(\theta)$ pour $\theta = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_n$.

IX) Mines - PSI

1) Algèbre

Exercice 874 [Mines PSI 2025 # 851] 1. Montrer que : $\forall \theta \in]0, \pi/2[, \sin\theta < \theta < \tan\theta]$.

1. En déduire que : $\forall \theta \in]0, \pi/2[, \cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2\theta$.
1. Montrer que, $\forall \theta \in]0, \pi/2[$, $\frac{\sin((2n+1)\theta)}{(\sin\theta)^{2n+1}} = \mathrm{Im}\left((1 + i\cot\theta)^{2n+1}\right)$;
1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que, $\forall \theta \in]0, \pi/2[$, $\frac{\sin((2n+1)\theta)}{(\sin\theta)^{n+1}} = P_n((\cot\theta)^2)$.
1. Calculer la somme des racines de P_n.
1. Montrer que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\cot\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ est racine de P_n.
1. En déduire que $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 875 [Mines PSI 2025 # 852] On considère des entiers $N \geq 1$ et $n \geq 2$, et une famille de réels $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ tous distincts. On pose $\varphi : P \in \mathbb{R}_N[X] \mapsto (P(a_1), P'(a_1), P(a_2), P'(a_2), \ldots, P(a_n), P'(a_n))$.

1. Quel est le rang de φ ? b) À quelle condition, φ est-il un isomorphisme ? Cette condition étant remplie, déterminer l'imageqréciproque de $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ par φ.

Exercice 876 [Mines PSI 2025 # 853] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On pose $V = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(M) \leq 1\}$. a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M appartient à V si et seulement s'il existe $X, Y \in \mathbb{K}^n$ tels que $M = XY^T$.

1. Soient $M_1 = X_1Y_1^T$ et $M_2 = X_2Y_2^T$ avec $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathbb{K}^n$. Montrer que, si M_1+ M_2 est de rang inférieur ou égal à 1, alors (X_1, X_2) est liée ou (Y_1, Y_2) est liée.

Exercice 877 [Mines PSI 2025 # 854] Soient $I_0, \ldots, I_n$ des segments de $\mathbb{R}$ non réduits à des points. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \int_L P(t)dt = 0$? Même question avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 878 [Mines PSI 2025 # 855] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la rang de M. b) A quelle condition la matrice M est-elle inversible ?

1. Cette condition étant vérifiée, déterminer l'inverse de M.

Exercice 879 [Mines PSI 2025 # 856] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

1. Montrer que $\exists x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E. b) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension k stable par u. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(u^k)$.

Exercice 880 [Mines PSI 2025 # 857] Soit $n \geq 2$. Soit Δ la matrice diagonale $Diag(n, n-1, \ldots, 1)$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{I}$ des matrices semblables à Δ et qui commutent avec Δ.

Exercice 881 [Mines PSI 2025 # 858] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer le nombre de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$ stables par A.

1. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), AM = MA\}$. Déterminer la dimension de E.

1. Combien l'équation $M^2 = A$ a-t-elle de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 882 [Mines PSI 2025 # 859] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de l'espace vectoriel engendré par les puissances de A. c) Déterminer l'ensemble des matrices commutant avec A.

Exercice 883 [Mines PSI 2025 # 860] Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soient U et V deux sous-espaces vecto- riels de $\mathcal{L}(E)$ tels que $U + V = \mathcal{L}(E)$ et tels que $\forall u \in U, \forall v \in V, u \circ v + v \circ u = 0$. a) Montrer qu'il existe $p \in U$ et $q \in V$ deux projecteurs tels que $p + q = \mathrm{id}$.

1. Si $v \in V$, on pose $\varphi(v) = v|_{\mathrm{Ker}(p)} \in \mathcal{L}(\mathrm{Ker}\, p, E)$. Montrer que φ est injective. En déduire que $\dim(V) \leq (n-r)^2$, avec $r = \mathrm{rg}(p)$.

1. Montrer que U ou V est égal à $\{0\}$.

Exercice 884 [Mines PSI 2025 # 861] Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\Delta : M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \mapsto AMMA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (M, N) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2, \Delta^n(MN) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k}(M)\Delta^k(N)$.

1. Soient $B, H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que A et B commutent et $\Delta(H) = B$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^{n+1}(H^n) = 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^n(H^n) = n!B$.

1. Soit $\|\|$ une norme. Montrer que $(\|\Delta(H^n)\|^{\frac{1}{n}})_{n\geq 1}$ tend vers une limite finie.

Exercice 885 [Mines PSI 2025 # 862] Soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ tel que : i) si $A, B \in G$ alors $AB \in G$; ii) si $A \in G$ alors $A^{-1} \in G$; iii) si $A \in G$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$. Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les éléments de G et $(M_1, \ldots, M_r)$ une base de $\mathcal{F}$ formée d'éléments de G. On considère $\varphi : A \in G \mapsto (\mathrm{tr}(AM_i))_{1\leq i\leq r} \in \mathbb{C}^r$.

1. Montrer que φ est injective.

1. Montrer que $\varphi(G)$ est fini.

1. Que peut-on en déduire sur la dimension de $\mathcal{F}$?

Exercice 886 [Mines PSI 2025 # 863] Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ distincts. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\Phi : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \in \mathbb{C}^{n+1}$

1. Montrer que Φ est un isomorphisme. b) Montrer que, pour tout $i \in [0, n]$, il existe un unique $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_i) = 0$ si $j \neq i$.

1. Exprimer χ_A comme une combinaison linéaire des L_i. d) En déduire que $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_A \in \mathbb{C}_n[X]$ est continue.

1. Montrer finalement que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 887 [Mines PSI 2025 # 864] Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB BA = B.a) Montrer que $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^kA = kB^k$.

1. En déduire que B est nilpotente (on pourra utiliser $\theta : X \mapsto AX - XB$).

Exercice 888 [Mines PSI 2025 # 865] Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est diagonalisable puis diagonali-
ser A.

Exercice 889 [Mines PSI 2025 # 866] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec A diagonalisable. On pose $P : t \in \mathbb{C} \mapsto \det(tA + B) \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que P est un polynôme en t et que $\deg P \leqslant \operatorname{rg} A$. b) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\deg P = \operatorname{rg} A$.

Exercice 890 [Mines PSI 2025 # 867] Soient

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$$

avec $a_2 \neq 0$, $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Quel est le rang de A_n ? b) Montrer que $\chi_{A_n} = X^{n-2}(X^2 - a_1 X - b_n)$ avec $b_n = a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2$. c) La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

Exercice 891 [Mines PSI 2025 # 868] Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,i} = i$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$. On note P_n son polynôme caractéristique.

1. Montrer que $P_{n+1} = (X - n)P_n - X(X-1)\cdots(X-n+1)$. b) En déduire que A_n possède n valeurs propres distinctes.

Exercice 892 [Mines PSI 2025 # 869] Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $z \in \mathbb{C}$.

1. Si z=1, justifier que A est diagonalisable.

1. Pour quels $z \in \mathbb{C}$, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 893 [Mines PSI 2025 # 870] Soit

$$E = \mathbb{R}_n[X].$$

Si $P \in E$, on pose $L(P) : x \in E \mapsto e^x \int_0^x e^t P(t)dt$.

1. Montrer que L(P) est bien défini.

1. Montrer

$$\forall k \in [0, n]$$

, $L(X^k)(x) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{x^j}{j!}$.

1. Montrer que L est un automorphisme de E.

1. Trouver les éléments propres de L. Est-il inversible ?

Exercice 894 [Mines PSI 2025 # 871] On définit une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ par $f_0 = 1, f_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = (f_{i+j-2})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Représenter explicitement A_2, A_3 et A_4.- b) Donner l'ordre de la valeur propre 0 dans A_n.

1. Montrer que la matrice A_n admet deux valeurs propres distinctes $a_n < 0 < b_n$.

1. Étudier les suites (a_n) et (b_n).

Exercice 895 [Mines PSI 2025 # 872] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que les valeurs propres non nulles de $f \circ g$ sont valeurs propres de $g \circ f$.

1. On suppose E de dimension finie. Montrer que les valeurs propres de $f \circ g$ sont valeurs propres de $g \circ f$.

1. Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $f : P \mapsto XP$ et $g : P \mapsto P'$. Est-ce que 0 est valeur propre de $f \circ g$? de $g \circ f$? Conclure.

Exercice 896 [Mines PSI 2025 # 873] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. La matrice $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ l'est-elle également ?

Exercice 897 [Mines PSI 2025 # 874] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Exprimer les sous-espaces propres de B en fonction de ceux de A.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Exercice 898 [Mines PSI 2025 # 875] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $Sp(A) = \{0\}$.

On pose $E_A = \{X \in \mathbb{C}^n ; \exists \lambda \in \mathbb{C}, AX = \lambda X\}$.

1. On suppose det(A) = 0. Montrer que E_A est un espace vectoriel si et seulement si A est nilpotente.

1. On suppose $det(A) \neq 0$. À quelle condition nécessaire et suffisante, E_A est-il un espace vectoriel ?

Exercice 899 [Mines PSI 2025 # 876] Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n I_3 + b_n A$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Le résultat de la question précédente reste-t-il valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

1. Existe-t-il $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \alpha I_3 + \beta A$ et $M^2 = A$?

Exercice 900 [Mines PSI 2025 # 877] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang appartenant à [1, n-1] et H un supplémentaire de Ker f.

1. i) Montrer que f induit un isomorphisme g de H sur Im f.

- ii) Montrer qu'il existe deux bases b_1 et b_2 de E telles que : $\mathrm{Mat}_{b_1,b_2}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(C) = r$. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$C = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q.$$

c) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AC = CB avec $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{rg}(C) = r$. Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres communes (comptées avec multiplicité).

1. Redémontrer le résultat précédent dans le cas où C est inversible.

Exercice 901 [Mines PSI 2025 # 878] On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On pose $\Phi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{tr}(M) I_2 - M$.

1. Calculer $\Phi(M)$.

1. Montrer que Φ est un automorphisme et déterminer sa matrice dans la base canonique.

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de Φ.

1. Montrer que M et $\Phi(M)$ ont le même polynôme caractéristique.

1. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\Phi(M) = PM^T P^{-1}$.

Exercice 902 [Mines PSI 2025 # 879] Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \in E$. On pose $f_A : M \in E \mapsto AM$.

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $B \in E$ tel que $P(f_A) = f_B$.

1. Montrer que f_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

1. Exprimer les valeurs propres et les espaces propres de f_A en fonction de ceux de A.

Exercice 903 [Mines PSI 2025 # 880] 1. On considère le polynôme $P = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 8X^2 - 8X$. Montrer que P(2)=P'(2)=0 et en déduire une factorisation de P en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. b) Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^5 - 4M^4 + 2M^3 + 8M^2 - 8M = 0$ et
$\mathrm{tr}(M) = 0$.

Exercice 904 [Mines PSI 2025 # 881] Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des endomorphismes de E tels que $f_1 + \cdots + f_n = \mathrm{id}$ et, si $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$, alors
des endomorphismes de E tels que $f_1 + \cdots + f_n = \mathrm{id}$ et, si $1 \leqslant i, j \leqslant n$ $f_i \circ f_j = 0$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. On pose $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$. Diagonaliser g.

Exercice 905 [Mines PSI 2025 # 882] 1. Montrer que $\ln^2$ est intégrable sur [0,1] et calculer $\int_0^1 \ln^2(t) dt$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Établir l'inégalité : $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

1. En déduire que l'ensemble $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \ ; \ \int_0^1 f^2(t)\, \mathrm{d}t \text{ converge} \right\}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1. Montrer que l'application $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \int_0^1 (\ln t \alpha t \beta)^2 dt$ atteint un minimum.

1. Déterminer la valeur de ce minimum et les points en lesquels il est atteint.

Exercice 906 [Mines PSI 2025 # 883] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $d(A, \mathcal{F})$.

Exercice 907 [Mines PSI 2025 # 884] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulles.

1. Montrer que l'application $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{tr}(X^T Y)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.- b) Soit $\varphi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(AX)B$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un projecteur orthogonal.

Exercice 908 [Mines PSI 2025 # 885] 1. Soient E un espace vectoriel et p un projecteur de E.
Montrer que $Ker(p - id) \cap Im(p - id) = \{0\}$.

1. Soient E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| \leq ||x||$.

- i) Soit $x \in E$ tel que u(x) = x et il existe $y \in E$ tel que x = u(y) y.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||nx + y|| \leq ||y||$. ii) Montrer que $Ker(uid) \cap Im(uid) = \{0\}$. c) Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E tel que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 909 [Mines PSI 2025 # 886] Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est semblable à B.

1. Déterminer $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P = B$.

Exercice 910 [Mines PSI 2025 # 887] Soit V un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

1. Donner un exemple de tel hyperplan.

1. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2}$. Montrer que $F \cap V \neq \{0\}$ et en déduire que $I_2 \in V$.

1. On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Quelle est la dimension de $V^\perp$? Montrer qu'il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $QVQ^{-1} = S_2(\mathbb{R})$.

Exercice 911 [Mines PSI 2025 # 888] Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $t_{i,j} = 1$ si |i-j| = 1 et 0 sinon. On pose $M = T - 2I_n$.

1. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

1. Comparer les éléments propres de M et ceux de T.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$.

- i) Montrer qu'il existe $i \in [1, n]$ tel que $|t_{i,i} \lambda| \leqslant \sum_{i \neq i} |t_{i,j}|$.

- ii) En déduire qu'il existe $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\alpha)$.

iii) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ soit vecteur propre de T associé à λ.

- iv) En déduire que $\alpha \in]0, \pi[$.

Exercice 912 [Mines PSI 2025 # 889] Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)\, Q(x)\, e^{-x} \mathrm{d}x$. On admet que c'est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On pose : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) = XP'' + (1 - X)P'$.

1. Justifier que $\langle P, Q \rangle$ pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ est bien défini.

1. Justifier que φ est un endomorphisme.

1. Soient P_1, P_2 des vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres différentes. Montrer que P_1 et P_2 sont orthogonaux.d) Soit $N \geq 2$. Démontrer que φ induit un endomorphisme φ_N sur $\mathbb{R}_N[X]$ et que φ_N est diagonalisable.

1. Écrire φ_N dans la base $(1, X, \ldots, X^N)$. Donner les valeurs propres de φ_N.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $L_n : x \mapsto \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. Montrer que L_n est polynomiale et donner ses coefficients.

1. Montrer que $(L_0, \ldots, L_N)$ forme une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

Exercice 913 [Mines PSI 2025 # 890] 1. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Comparer $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(AB)$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$ converge. On note sa limite $\exp(M)$.

1. On admet que, si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutent, alors $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$. Montrer que, si $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(xB) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 914 [Mines PSI 2025 # 891] Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que la somme de deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ appartient encore à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $I_n + AB$ et AB + BA sont inversibles.

Exercice 915 [Mines PSI 2025 # 892] Soient U et V sans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(U+V) \geq \det(U) + \det(V)$.

Exercice 916 [Mines PSI 2025 # 893] Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{S}(E)$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u.

1. Montrer que, $\forall x \in E, \lambda_1 ||x||^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n ||x||^2$. b) Trouver $x_1, x_n \in E \setminus \{0\}$ tels que $\langle u(x_1), x_1\rangle = \lambda_1 ||x_1||^2$ et $\langle u(x_n), x_n\rangle = \lambda_n ||x_n||^2$.

1. Montrer qu'il existe $y_1, y_n \in E$ tels que $\|y_1\| = 1, \|y_n\| = 1, \langle u(y_1), y_1\rangle = \lambda_1$ et $\langle u(y_n), y_n\rangle = \lambda_n$.

1. On note S la sphère unité de E. Que valent $\inf_{x\in S}\langle u(x), x\rangle$ et $\sup_{x\in S}\langle u(x), x\rangle$?

Exercice 917 [Mines PSI 2025 # 894] Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note F le sous-espace de E constitué des suites de carré sommable. Si $u = (u_n)_{n\geq 0} \in E$, on pose $D(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que D est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? surjectif ?

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de D. Quelle est la dimension de ses espaces propres ? Si $u, v \in F$, on pose $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$, ce qui définit bien un produit scalaire sur l'ensemble F des suites de carré sommable.

1. Montrer que $\left\{ \frac{\langle U, D(U)\rangle}{\langle U, U\rangle} \ ;\ U \in F, U \neq 0 \right\} =]-2, 0[$.

Ind. Considérer l'application $D(id)$.

Exercice 918 [Mines PSI 2025 # 895] Soit $E = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(A^T A) > 0$.

1. Montrer que $\forall S \in E, \exists A \in GL_n(\mathbb{R}), S = A^T A$.

1. Montrer que $\forall (S, S') \in E^2, \mathrm{tr}(SS') > 0$.

Exercice 919 [Mines PSI 2025 # 896] 1. Rappeler la définition de $S_n^{+}(R)$ et de $S_n^{++}(R)$.

1. i) Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $A \leq B$ si et seulement si $AB \in \mathcal{S}_n^{+}(R)$. Montrer que

c'est une relation d'ordre sur $S_n(\mathbb{R})$. ii) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$. iii) Soient $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M'MM' appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. i) Montrer que, si $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors M inversible et $M^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

ii) Soit $f : M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que f est décroissante, i.e. si $A \leq B$ alors $f(B) \leq f(A)$. Ind. Montrer que si $I_n \leq B$ alors $f(B) \leq f(I_n)$.

2) Analyse

Exercice 920 [Mines PSI 2025 # 897] Soient $n \geq 2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\gamma : [0, 1] \to U$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in [0, 1], B(\gamma(t), \delta) \subset U$.

Exercice 921 [Mines PSI 2025 # 898] Soient a>0 et $\omega \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,]0, +\infty[)$. Pour $f \in E = \mathcal{C}^0([0, a], \mathbb{R})$, on pose $T(f) : x \in]0, a] \mapsto \frac{1}{\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t} \int_0^x f(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que T(f) est continue sur [0, a] et prolongeable par continuité sur [0, a].

1. Montrer que T est un endomorphisme injectif de E et qu'il est continu lorsque E est muni de la norme infinie.

1. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 922 [Mines PSI 2025 # 899] Soient $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $Z = \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles convergeant vers M.

1. Si X est inversible, montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_Z(\lambda) = \chi_{XY}(\lambda^2)$. Est-ce toujours vrai si X n'est pas inversible ?

Exercice 923 [Mines PSI 2025 # 900] 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |\ P(z)\ | \geq |\ \mathrm{Im}\ z\ |^{\deg P}$.

1. Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'adhérence des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égale à l'ensemble des matrices trigonalisables.

Exercice 924 [Mines PSI 2025 # 901] Pour $n \geq 2$, on considère le polynôme $P_n = X^n + X^{n-1} + \cdots + X1$.

1. Montrer que P_n admet une unique racine dans $\mathbb{R}^+$, notée x_n.

1. Montrer que $x_n \in [1/2, 1]$.

1. Montrer que (x_n) converge vers un réel ℓ. d) Donner un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 925 [Mines PSI 2025 # 902] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.

1. On suppose que (u_n) converge. Montrer la convergence de (v_n) et trouver sa limite.

1. Étudier la réciproque.

Exercice 926 [Mines PSI 2025 # 903] Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k} = a$ admet une unique solution dans $n, +\infty$, que l'on notera x_n.

1. Étudier la monotonie de la suite (x_n).

1. Trouver un équivalent simple de x_n.

Exercice 927 [Mines PSI 2025 # 904] Soient $(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| > 1$. Montrer que la suite (x_n) converge si et seulement si la suite $(x_n + \lambda x_{n+1})$ converge.

Exercice 928 [Mines PSI 2025 # 905] On pose $F : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Trouver un équivalent de F en $+\infty$.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \int_{a_n}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Trouver un équivalent de a_n.

Exercice 929 [Mines PSI 2025 # 906] Soient $n \geq 2$, $M_0, \ldots, M_{n-1}$ des points distincts de $\mathbb{R}^2$. On note $M_k = (x_k, y_k)$. On suppose que $M_0 = (0, 0)$ et, pour tout $k \in [0, n-2]$, $(x_{k+1} = x_k$ et $y_{k+1} = y_k \pm 1)$ ou $(x_{k+1} = x_k \pm 1$ et $y_{k+1} = y_k)$. On constitue ainsi des chemins. On note c_n le nombre de chemins auto-évitants (i.e. tels que pour tous $i \neq j$, $M_i \neq M_j$). On pose $u_n = \ln(c_n)$.

1. Que valent c_1 et c_2 ? b) Montrer que pour tout n, m entiers naturels $c_{n+m} \leq c_n c_m$.

1. On fixe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la division euclidienne de n par m, démontrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$, $\frac{c_n}{n} \geq \frac{c_m}{m}\varepsilon$.

1. Démontrer que $\frac{c_n}{n} \longrightarrow \ell$ où $\ell = \sup\left\{\frac{c_k}{k},\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 930 [Mines PSI 2025 # 907] Nature de la série de terme général $\ln\left(\tan\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right)$?

Exercice 931 [Mines PSI 2025 # 908] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et on note (E_n) l'équation $f_n(x) = 2$.

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$; on notera x_n cette solution.

1. Montrer que la suite (x_n) converge.

1. Déterminer la limite ℓ de la suite (x_n).

1. La série $\sum(x_n\ell)$ est-elle convergente ?

Exercice 932 [Mines PSI 2025 # 909] Nature de la série de terme général $e^{u_n}2$ avec $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 933 [Mines PSI 2025 # 910] Résoudre dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'équation fonctionnelle : f(2x) = 4f(x) + 3x + 1.

Exercice 934 [Mines PSI 2025 # 911] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et f(0) = 1.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} au voisinageqde 1.

Exercice 935 [Mines PSI 2025 # 912] Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note () la propriété : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2$.

1. Montrer que si f vérifie () alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel $f'' = \lambda f$. b) Déterminer toutes les solutions de ().

Exercice 936 [Mines PSI 2025 # 913] Soit $f : x \mapsto \int_{1/2}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t} dt$. Quel est le comportement de f(x) lorsque $x \to 1$?

Exercice 937 [Mines PSI 2025 # 914] 1. Montrer que, pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.

1. Montrer que $\forall x \in]0, \pi]$, $\int_{-\pi}^{x} \sum_{t=0}^{+\infty} \cos(kt) dt = \frac{\pi - x}{2}$.

Exercice 938 [Mines PSI 2025 # 915] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\omega x} dx$, où $\omega = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. Calculer I_n. En déduire un exemple de fonction g continue sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs réelles et non identiquement nulle, telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^k g(t) dt = 0$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^b t^k f(t) dt = 0$. En admettant le théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que $\tilde{f}$ est identiquement nulle.

Exercice 939 [Mines PSI 2025 # 916] Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k}$. Soit $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\ln(1-t)}\right) dt$.

1. Montrer que $H_N = \ln(N) + \gamma + O(1/N)$

1. Montrer que I est bien défini. c) Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u}\right) e^{-u} du$.

1. En déduire que $I = \gamma$, en utilisant $u_x : t \mapsto e^{-xt}\left(1 - \frac{1-e^{-t}}{\iota}\right)$.

Exercice 940 [Mines PSI 2025 # 917] On pose $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner f'. b) Montrer que l'intégrale J converge. On admet que $J = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.- d) Trouver un équivalent de f en 0^+

1. La fonction f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

1. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ en fonction de J.

Exercice 941 [Mines PSI 2025 # 918] Soit $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}^{+*}]$ telle que f soit intégrable. On pose $g : x \mapsto f(x)^{1-1/x}$. Que dire de l'intégrabilité de g ?

Exercice 942 [Mines PSI 2025 # 919] Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right)$. Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme, de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 943 [Mines PSI 2025 # 920] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}^*$. On pose $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n e^{-x}}{n!} x^n$.

1. Étudier la convergence normale de f sur $\mathbb{R}^+$, puis sur des intervalles appropriés.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 944 [Mines PSI 2025 # 921] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln(n)}$.

1. Donner le domaine de définition de f. Montrer la continuité de f sur cet intervalle.

1. Donner les limites et des équivalents aux bornes.

Exercice 945 [Mines PSI 2025 # 922] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{x^2+n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.

1. La série converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

1. Montrer que S est de classe C^1.

1. Trouver un équivalent de S quand en 0^+. On rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Trouver la limite de S en $+\infty$.

1. La série de fonctions converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 946 [Mines PSI 2025 # 923] Pour tout réel x > 0, on pose $f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1e^{-nx})$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Soit a > 0. La série de fonctions définissant f est-elle uniformément convergente sur $[a, +\infty[$?Sur $\mathbb{R}^{+*}$?]

1. Déterminer des équivalents de f en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 947 [Mines PSI 2025 # 924] 1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} x^n$. b) Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2}{2^n}$

Exercice 948 [Mines PSI 2025 # 925] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments n'ayant pas de point fixe. On pose $a_0 = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$.

1. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ a un rayon strictement positif.

1. Calculer $e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. Exprimer a_n sous forme d'une somme.

Exercice 949 [Mines PSI 2025 # 926] Soit $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

1. On pose $g : x \mapsto e^{x^2} f(x)$. Montrer que g est solution du problème de Cauchy : y(0) = 0 et y' 2xy = 1.

1. Déterminer les fonctions développables en série entière solutions du problème de Cauchy.

1. En déduire que g est développable en série entière et déterminer son développement.

Exercice 950 [Mines PSI 2025 # 927] 1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $\int_1^{+\infty} f$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_r$

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\cos(\ln t)}{t} dt$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\ln n)}{n}$ sont de même nature.

1. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{\cos(\ln n)}{n} x^n$.

Exercice 951 [Mines PSI 2025 # 928] 1. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

1. Soient a>0 et $f_a : x \in]a, +\infty[\mapsto \left(1 - \frac{a}{x}\right)^x$. Montrer que f_a est bien définie et croissante. Donner la limite de f_a en $+\infty$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $I_n = \int_0^n f_t(n) \ln(t) dt$.

1. Justifier que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

1. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = -\gamma$.

Exercice 952 [Mines PSI 2025 # 929] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{\ln(1-t)} dt$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est bien définie.

1. Trouver un équivalent de U_n.

Exercice 953 [Mines PSI 2025 # 930] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{x!}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction g. b) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

1. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ et $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Pouvait-on s'attendre à un tel résultat au regard du cours ?

Exercice 954 [Mines PSI 2025 # 931] 1. Soient a et b strictement positifs. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$.

Exercice 955 [Mines PSI 2025 # 932] Soit $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1e^{-xt}}{t} \sin(t) dt$. a.i) Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

- ii) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^{+*}$? Sur $\mathbb{R}^+$?

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Exprimer f' d'une manière simple.

1. Trouver une expression de f. En déduire la valeur de I.

Exercice 956 [Mines PSI 2025 # 933] Soient $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$. a) Montrer que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.

1. Montrer que f et q sont continues en 0.

1. Trouver les limites de f et g en $+\infty$. d) En déduire que $\int_{-t}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 957 [Mines PSI 2025 # 934] On pose $\cos : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

1. Exprimer $\cos z$ en fonction de $\mathrm{Re}\,\mathfrak{e}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

1. En déduire $\max_{|z|\leq 1} |\cos z|^2$. c) On pose $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \cos(x + iy)$.

Montrer que la fonction $r \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta$ est constante.

Exercice 958 [Mines PSI 2025 # 935] Soit s > 0. Soit $w : (a, x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \mapsto \frac{ay^{2s}}{((x-t)^2+y^2)^{s+\frac{1}{2}}}$.

1. Pour tout $(a, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, établir la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} w(a, x, y, t)dt$.

1. Montrer qu'il existe une unique constante $c \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, $f^{+\infty}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} w(c, x, y, t)dt = 1$. c) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On pose $U_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}, |tx| > \varepsilon\}$.
Montrer que $\int_{U_s} w(c, x, y, t)dt \underset{y\to0^+}{\longrightarrow} 0$.

1. Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, prouver $\int_{-\infty}^{+\infty} w(c, x, y, t)f(t)dt \underset{y\to0^+}{\longrightarrow} f(x)$.

Exercice 959 [Mines PSI 2025 # 936] À partir des solutions développables en séries entière, trouver toutes les solutions de $(x^2 + x)y'' + (3x + 1)y' + y = 0$.

Exercice 960 [Mines PSI 2025 # 937] Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $k : (x, t) \in [0, +\infty[^2 \mapsto \begin{cases} t^2/x \text{ si } x > t \\ x/t^2 \text{ si } x < t \end{cases}$ $x = t$ Pour $f \in E$ on pose $T(f) : x \mapsto \int_0^1 k(x, t)f(t)dt$.

1. Montrer que, pour $x \in]0, 1]$, $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t^2 f(t)dt + x^2 \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$.

1. Montrer que $T(f) \in E$ et calculer T(f)(0).

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.

1. i) Montrer que T(f) est C^1 sur [0,1] et calculer T(f)'(0).

ii) Montrer que T(f) est de classe C^2 sur]0,1].
iii) Résoudre $y'' \frac{2}{x^2} y = -3f$. On pourra chercher les solutions de l'équation homogène sous la forme $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 961 [Mines PSI 2025 # 938] Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $p \in E$. Soit $\varphi : y \in E \mapsto y' + py$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E. b) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi^2) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$. Soient $g \in \mathrm{Im}(\varphi^2)$ et f un antécédent de g par φ^2.

Trouver un antécédent de g par φ en fonction de f et de p.

1. Cas particulier : p = th (pour toute la suite) Calculer $\varphi^2(q)$ pour $q \in E$.

1. Soit $(E) : y'' + 2\,\mathrm{th}(x)y' + y = \mathrm{ch}^2(x)$. Trouver une solution particulière de la forme $y_p = a + b\,\mathrm{ch}^2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner les solutions de $y' + th(x)y = ch^2(x)$.

Exercice 962 [Mines PSI 2025 # 939] Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que l'équation différentielle y"(x) + y'(x) + f(x)y(x) = 0 admette une base de l'ensemble des solutions de la forme (g^2, g), où g est une fonction de classe C^2.

Exercice 963 [Mines PSI 2025 # 940] On note (E) l'équation différentielle $y'' = (x^2 1)y$.

1. Soit y une solution de (E). On suppose que y(0) = 0 (resp. y'(0) = 0). Montrer que y est impaire (resp. paire). Ind. Utiliser le théorème de Cauchy linéaire.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{ax^2}$ est-elle solution de (E) ?

1. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $x \mapsto u(x)e^{-x^2/2}$ est solution de (E) si et seulement si uest solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.

1. Exprimer l'ensemble des solutions de (E) à l'aide de $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{x} e^{t^2}\,dt$.

Exercice 964 [Mines PSI 2025 # 941] Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $f(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f ; le représenter graphiquement.

1. Étudier l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Exercice 965 [Mines PSI 2025 # 942] On pose $u_n : (x, a) \in]-\rho, \rho[\times]0, +\infty[\mapsto \frac{x^n}{n+a}]$.

1. Vérifier $\forall a, a' \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in]-\rho, \rho[,\ |u_n(x, a') - u_n(x, a)| \leqslant \frac{|a-a'|}{n^2}$.

1. On pose $F : (x, a) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, a)$. Montrer que F est continue sur $]-\rho, \rho[\times]0, +\infty[$.

1. Montrer que F est dérivable par rapport à x et que $\frac{\partial F}{\partial x}$ est $\mathcal{C}^0$.

Exercice 966 [Mines PSI 2025 # 943] Pour $x, y \geq 0$, on définit $f(x, y) = \frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ et on pose f(0, 0) = 0.

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty]^2$. b) Déterminer ses extrema.

Exercice 967 [Mines PSI 2025 # 944] Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{x^2y^2}{(1+x^2)(1+u^2)(x^2+u^2)}$.

1. Montrer que f est continue en (0,0).

1. La fonction f ainsi prolongée est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?

1. Montrer que f admet un minimum global, le calculer.

1. Montrer que f admet un maximum global.

3) Probabilités

Exercice 968 [Mines PSI 2025 # 945] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'univers $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note A_p l'ensemble des éléments de Ω multiples de p.- a) Soit $d \in \mathbb{N}^*$ avec d divisant n. Calculer $\mathcal{P}(A_d)$.

1. Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs premiers de n.

Montrer que $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont indépendants.

1. Soit $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de Ω premiers avec n.

Montrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Exercice 969 [Mines PSI 2025 # 946] On dispose d'une station d'appels. Le nombre d'appels entre 10 h et 11 h est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité pour qu'un appel concerne le standard A est $p \in [0, 1]$. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant choisi le standard A entre 10 h et 11 h. Donner la loi de Y.

Exercice 970 [Mines PSI 2025 # 947] On considère un immeuble de trois étages avec un rez-de-chaussée). Cinq personnes prennent l'ascenseur. On considère que chacune va aller à un étageqde manière équiprobable et indépendamment des quatre autres. L'ascenseur ne fait pas demi-tour, il ne fait qu'une montée pour déposer les personnes. On note X_i le nombre de personnes qui descendent à l'étageq$i$.

1. Donner la loi de X_1, $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{V}(X_1)$.

1. Que dire de X_2 et X_3 ?

On considère Y_i qui vaut 1 si l'ascenseur s'arrête au i-ème étage, 0 sinon.

1. Déterminer $P(Y_i = 0)$ et $P(Y_i = 1)$.

1. En déduire $\mathbf{E}(Z)$ avec Z la variable aléatoire représentant le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

Exercice 971 [Mines PSI 2025 # 948] Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p_n = n^{-\alpha}$ où α est un réel strictement positif.
On pose $\tau = \min\{n \geq 2, X_n(\omega) = 1\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\mathbf{P}(\tau = +\infty) = 0$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\mathbf{E}(\tau) < +\infty$.

Exercice 972 [Mines PSI 2025 # 949] Soit $p \in [0, 1]$. On a un détecteur de particules qui détecte une particule avec la probabilité p, de manière indépendante. On note N le nombre de particules qui traversent le détecteur. On suppose $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On note S le nombre de particules détectées. a) Soit $0 \leq s \leq n$. Calculer $\mathbf{P}(S = s \mid N = n)$. Puis $\mathbf{P}(S = s, N = n)$ et enfin $\mathbf{P}(S = s)$.

1. En déduire $\mathbf{E}(S)$ et $\mathbf{V}(S)$.

1. Sans calculs, donner la loi de N S.

1. Les variables N S et S sont-elles indépendantes ?

1. Les variables N-S et S sont-elles indépendantes e) Les variables N et S sont-elles indépendantes ?

1. Calculer P(N = n|S = s) avec $0 \leq s \leq n$.

Exercice 973 [Mines PSI 2025 # 950] Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^+$ et $p \in]0, 1[$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k$.

1. Que vaut a ?

1. Déterminer $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 974 [Mines PSI 2025 # 951] Soient $p_1, p_2 \in]0, 1[$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois respectives $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$. On note M la matrice aléatoire $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & V \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.

1. Soit $q \in]0, 1[$. On considère une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{B}(q)$ indépendante de (X,Y).

On note M' la matrice aléatoire $\begin{pmatrix} X & Z \\ 1 & Y \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que M' soit diagonalisable ?

Exercice 975 [Mines PSI 2025 # 952] On dispose d'une pièce pour laquelle la probabilité de faire pile est $p \in [0, 1[$. On note q = 1 - p. On réalise une suite de lancers indépendants jusqu'à faire deux **pile**, pas nécessairement consécutifs et on note X le nombre de face obtenus.

1. Montrer que l'espérance de X est finie et la calculer.

1. Lorsque X=n, on tire une boule dans une urne contenant n+1 boules numérotées de 0à n. On note Y le numéro de la boule tirée.

Montrer que l'espérance de Y est finie et la calculer.

Exercice 976 [Mines PSI 2025 # 953] On considère une pièce que donne pile avec une probabilité 2/3 et face avec une probabilité 1/3. Soit X_k une variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient face au k-ième lancer et à 0 sinon. Soit T la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécessaires pour avoir deux face consécutifs.

1. Quelles sont les valeurs possibles de T ?

1. On note $p_n = \mathbf{P}(T = n)$.

- i) Calculer p_1 et p_2.

ii) Soit $n \geq 3$. Montrer que $(X_1 = 1, X_2 = 0), (X_1 = 1, X_2 = 1), (X_1 = 0)$ forme un système complet d'évènements.

- iii) En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{2}{3}p_{n-1}$.

- iv) En déduire une expression de p_n en fonction de n.

1. Est-ce que T possède une espérance ?

Exercice 977 [Mines PSI 2025 # 954] On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs. À chaque tirage, on retire les boules de numéro supérieur ou égal à celui obtenu. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Calculer $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{E}(X_2)$.
1. Montrer que $\mathbf{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{E}(X_k)$.
1. Déterminer $\mathbf{E}(X_n)$.

Exercice 978 [Mines PSI 2025 # 955] Soient $n, N \geq 2$. On considère n variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{U}(\{1,\dots,N\})$. On note T le nombre de valeurs distinctes prises par ces n variables.

1. Calculer $\mathbf{E}(T)$. b) Donner un équivalent de $\mathbf{E}(T)$ lorsque
1. $n \to +\infty$, à N fixé ; ii) $N \to +\infty$, à n fixé ; iii) $n = N \to +\infty$. c) Calculer V(T).

Exercice 979 [Mines PSI 2025 # 956] Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$ avec $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$ convergente. On note A l'événement « la suite (X_n) est nulle à partir d'un certain rang ».

1. Déterminer la probabilité de A.
1. Montrer que $X = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{\infty} e^{X_k}$ est presque sûrement définie.

Exercice 980 [Mines PSI 2025 # 957] Soient E un espace euclidien et $(u_1, ..., u_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $X = \|X_1u_1 + \cdots + X_nu_n\|^2$.

1. Calculer $\mathbf{E}(X)$.
1. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1u_1 + \cdots + \varepsilon_nu_n\| \leqslant \sqrt{n}$.

Exercice 981 [Mines PSI 2025 # 958] Soient $a > 0, p \in]0, 1[$ et X,Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall(i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbf{P}(X = i, Y = j) = ap^{i+j}$.

1. Calculer a.
1. Déterminer la loi de X et de Y, $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
1. Calculer la covariance de X et Y.
1. Soit $U = max(X, Y)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de U sachant $(X + Y = 2n + 1)$.

Exercice 982 [Mines PSI 2025 # 959] Une variable aléatoire X est décomposable s'il existe deux variables Z et Y indépendantes dantes et non constantes telles que $X \sim Y + Z$. a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ décomposable telle que $\mathbf{P}(X = 0) > 0$. Soit (Y, Z) un couple de variables aléatoires indépendantes et non constantes telles que $X \sim Y + Z$. Montrer que Y et Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner une relation entre G_X, G_Y et G_Z. Y+Z. Montrer que Y et Z sont a valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner une relation entre G_X, G_Y et G_Z b) Soient $n \geq 2$, $p \in]0, 1[$, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que X est décomposable.

1. Soit $n \geq 2$ non premier, $X \sim \mathcal{U}([\![0, n-1]\!])$.

- ***i)*** Montrer $\exists r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que $G_X(t) = \left(\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} t^i\right) \times \left(\frac{1}{s}\sum_{j=0}^{s-1} t^{rj}\right)$.
- ii) En déduire que X est décomposable.

X) Mines - PC

1) Algèbre

Exercice 983 [Mines PC 2025 # 960] Calculer $\min_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{\sigma(i)}{i}\right\rfloor$

Exercice 984 [Mines PC 2025 # 961] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A, B, C trois points du plans complexe d'affixes a, b et c. On suppose que le triangle ABC n'est pas aplati et que a, b, $c \in \mathbb{U}_n$.

1. Combien y a-t-il de tels triangles ?
1. Combien d'entre eux sont rectangles ?-

Exercice 985 [Mines PC 2025 # 962] Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ et $\varphi(z) = |f(z)|^2$.

1. La fonction φ est-elle bornée sur b) Montrer que φ est bornée sur $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ et déterminer son maximum sur D.

Exercice 986 [Mines PC 2025 # 963] On pose $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mapsto \frac{1}{z-i}$.

1. Montrer que l'imageqde toute droite du plan complexe ne passant pas par i est un cercle privé de l'origine.
1. Peut-on généraliser à $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{b\} \mapsto \frac{z-a}{z-b}$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $a \neq b$?

Exercice 987 [Mines PC 2025 # 964] On dit que $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 0$ est un polynôme réciproque si $P = X^nP\left(\frac{1}{Y}\right)$. Soit P un polynôme réciproque.

1. Soit z une racine complexe de P. Montrer que $z \neq 0$. Montrer que 1/z est une racine de P de même multiplicité que z.

1. On note α, β les multiplicités (éventuellement nulle) de 1 et -1 comme racines de P. Montrer qu'il existe q un $\mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré q tels que :

$$P = (X-1)^{\alpha}(X+1)^{\beta} X^q Q\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

1. Factoriser $X^7 \frac{5}{2} X^6 + \frac{3}{2} X^5 + \frac{3}{2} X^2 \frac{5}{2} X + 1$.

Exercice 988 [Mines PC 2025 # 965] Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ distincts. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^p)^q = P(X^q)^p$.

Exercice 989 [Mines PC 2025 # 966] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n dont les racines sont distinctes, réelles, strictement supérieures à 1. On pose $Q = (X^2+1)PP' + X(P^2 + P'^2)$. Montrer que Q admet au moins 2n-1 racines réelles distinctes.

Exercice 990 [Mines PC 2025 # 967] Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto PP'$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ induit une bijection sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Pour $Q \in \mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un unique $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que Q = R R'.

1. Avec les notations précédentes, on suppose $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$.

En considérant $f : x \mapsto e^{-x} R(x)$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, R(x) \geq 0$. d) On suppose R scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que Q est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

Exercice 991 [Mines PC 2025 # 968] Soient $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrangeqassociés au n-uplet $(-1, -2, \ldots, -n)$.
Pour $k \in [1, n]$, soit $\alpha_{n,k} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (i-k)$.

Soient enfin

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{(x+1)\cdots(x+n)}$$

et $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{n,k}(x+k)}$.

1. Donner l'écriture factorisée des polynômes L_i et les valeurs de $L_i(-j)$ pour $i, j \in [1, n]$.

1. Montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donner la décomposition de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base.- c) Calculer $\sum L_k$ et en déduire une expression simple reliant f_n et g_n.

1. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour $n \geq 2$.

1. Trouver une relation simple entre $\frac{1}{\alpha_{n,k}}$ et $\binom{n-1}{k-1}$.

1. Donner une expression de $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

Exercice 992 [Mines PC 2025 # 969] Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose $c_k(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt$.

1. Exprimer les $c_k(P)$ en fonction des coefficients de P.

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 993 [Mines PC 2025 # 970] Soit $n \geq 2$. On considère l'égalité $(*)$: $(1+iX)^{2n+1} - (1-iX)^{2n+1} = 2iX\, Q_n(X)$.

1. Montrer qu'il existe un unique $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que () soit vérifiée. Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.

1. Déterminer les racines de Q_n.

1. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \left(4 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

Exercice 994 [Mines PC 2025 # 971] Soit $u \in \mathbb{R}$. On pose $P_0 = 1$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k = X(Xku)^{k-1}$.

1. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. b) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(X) = P(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(ku)}{k!} P_k(X)$.

Exercice 995 [Mines PC 2025 # 972] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P est minoré sur $\mathbb{R}$. On pose $Q = P + P' + \cdots + P^{(n)}$. Montrer que Q est minoré sur $\mathbb{R}$.

Exercice 996 [Mines PC 2025 # 973] Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 997 [Mines PC 2025 # 974] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = Q^2 + R^2$.

Exercice 998 [Mines PC 2025 # 975] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in [-1, 1], P(x) \geq 0$.

1. On suppose que $\deg(P) \leqslant 2$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ et $a \in [-1, 1]$ tels que $P = \alpha(Xa)^2 + \beta(1X^2)$.

1. On revient au cas général.

Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2(1X^2)$.

Exercice 999 [Mines PC 2025 # 976] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim(F) = n1$ si et seulement s'il existe $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle telle que $F = \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Exercice 1000 [Mines PC 2025 # 977] Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que p-q est un projecteur si et seulement si $q \circ p = p \circ q = q$.

Exercice 1001 [Mines PC 2025 # 978] Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v$ inversible.

Exercice 1002 [Mines PC 2025 # 979] Soit

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Résoudre $X^T + X = \mathrm{tr}(X)A$.

Exercice 1003 [Mines PC 2025 # 980] Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$. Montrer que A est semblable à $E_{1,n}$.

Exercice 1004 [Mines PC 2025 # 981] 1. Existe-t-il

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$$

tel que $AB - BA = I_n$?

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et de trace nulle. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que (u, Au)est libre.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice à diagonale nulle.

Exercice 1005 [Mines PC 2025 # 982] Soient

$$A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. « Décrire » AB.

1. Montrer que BA est inversible.

1. Étudier le noyau et l'imageqde A et B.

1. Déterminer BA.

Exercice 1006 [Mines PC 2025 # 983] $$ Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$. Montrer que $\mathrm{rg}(ABC) + \mathrm{rg}(B) \geq \mathrm{rg}(AB) + \mathrm{rg}(BC)$.

Exercice 1007 [Mines PC 2025 # 984] Soient

$$x_1, x_2 \in \mathbb{C}.$$

Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2 & 2x_2 & 2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3 & 3x_2^2 & 6x_2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & x_1^4 & 4x_2^3 & 12x_2^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ si et seulement si } x_1 = x_2.$$

Exercice 1008 [Mines PC 2025 # 985] Soit

$$(a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{2n}.$$

Exercice 1009 [Mines PC 2025 # 985] Soit

$$(a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{2n}.$$

Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & & \vdots & \\ b_3 & b_3 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{n-1} & \\ b_n & b_n & \cdots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$.

Exercice 1010 [Mines PC 2025 # 986] Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1011 [Mines PC 2025 # 987] 1. Pour

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

, calculer $V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

1. Montrer :

$$\forall (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} k! \mid \prod_{1 \leq j < i \leq n} (m_j - m_i)$$

1. Montrer :

$$\forall (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \quad \prod_{k=1}^{n-1} k! \mid \prod_{1 \leq j < i \leq n} (m_j - m_i).$$

Ind. Considerer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_1(m_1-1) & \cdots & m_1 \cdots (m_1 - n + 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_n & m_n(m_n-1) & \cdots & m_n \cdots (m_n - n + 1) \end{vmatrix}$.

Exercice 1012 [Mines PC 2025 # 988] 1. Soit $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $U + iV \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + x_0 V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que M et N sont semblables sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une unique matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ou $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, ou encore $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $b \neq 0$.

Exercice 1013 [Mines PC 2025 # 989] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que BAB = A et ABA = B. Montrer que $A^2 = B^2$. Montrer que A et B ont le même noyau et la même image.

Exercice 1014 [Mines PC 2025 # 990] Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = \det(A-B)$ 0. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \det(xA + yB) = 0$.

Exercice 1015 [Mines PC 2025 # 991] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que $\forall k \in [0, 2n], \det(A + kB) = \pm 1$. Déterminer $\det(A)$ et $\det(B)$.

Exercice 1016 [Mines PC 2025 # 992] Soient A, B, C, D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$. On suppose que $M^T J M = J$. Montrer que A et D sont inversibles.

Exercice 1017 [Mines PC 2025 # 993] Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ triangulaires supérieures telles que $M^p = I_2$.

Exercice 1018 [Mines PC 2025 # 994] Soit D l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{K}[X]$. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par D.

Exercice 1019 [Mines PC 2025 # 995] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n, ainsi que $u_1, \ldots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E commutant deux à deux. Simplifier $u_1 \circ \cdots \circ u_n$.

Exercice 1020 [Mines PC 2025 # 996] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A et A^T sont semblables. Et si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 1021 [Mines PC 2025 # 997] Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.

1. Montrer que n est pair.

1. Soit $x \in E$. Montrer que Vect (x, f(x)) est stable par f.

1. On suppose n=2p. Montrer qu'il existe une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ de E^p telle que $(e_1, u(e_1), \ldots, e_p, u(e_p))$ soit une base de E. Préciser la matrice de f dans cette base.

Exercice 1022 [Mines PC 2025 # 998] Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, A = 2n$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1023 [Mines PC 2025 # 999] Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ tels que (1) $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ et (2) $\forall (u, v) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2,\ u \circ v + v \circ u = 0$.

we correst the $\mathcal{L}(\mathcal{L})$ ters que (1) $\mathcal{L}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ et (2) $\forall (u, v) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2,\ u \circ v + v \circ u = 0$. a) Montrer qu'il existe un projecteur $p_1 \in \mathcal{L}_1$ et un projecteur $p_2 \in \mathcal{L}_2$ tels que $p_1 + p_2 = \mathrm{id}$.

1. Montrer que $rg(p_1) + rg(p_2) = \dim E$.

1. Montrer, pour $i \in \{1, 2\}$, que si $w \in \mathcal{L}_i$, alors Im p_1 et Ker p_1 sont stables par w.

1. Montrer que $\mathcal{L}_1 = \{0\}$ ou $\mathcal{L}_2 = \{0\}$.

Exercice 1024 [MINES PC 2025 # 1000] Soit

$$(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n.$$

À quelle condition la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 1025 [MINES PC 2025 # 1001] Soient

$$(a,b)\in\mathbb{C}^2$$

et $M=\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$. Éléments propres de M ?

Exercice 1026 [MINES PC 2025 # 1002] Soient $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ et $M=(m_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{n-i+1,i}=a_i$ pour $1\le i\le n$, les autres coefficients étant nuls. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 1027 [MINES PC 2025 # 1003] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr}(A)\neq 0$. Soit $\varphi : M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto \operatorname{tr}(A)M-\operatorname{tr}(M)A$.

1. Préciser Im φ et Ker φ.

1. En déduire les éléments propres de φ.

Exercice 1028 [MINES PC 2025 # 1004] Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $j\in[0,2n]$, on pose $f_j : t\mapsto \operatorname{sh}^j(t)\operatorname{ch}^{2n-j}(t)$ définie sur $\mathbb{R}$.a) On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les f_i.
Montrer que $\mathcal{F}=(f_0,\dots,f_{2n})$ est une base de F.

1. On note D l'opérateur de dérivation sur F. Montrer que D induit un endomorphisme.

Donner ses éléments propres.

Exercice 1029 [MINES PC 2025 # 1005] Soient $A\in\mathbb{C}[X]$ et $B=\prod_{k=1}^n(X-\lambda_k)$, où $n\ge 1$ et les λ_k sont des complexes distincts et non racines de A. Pour $j\in[\![1,n]\!]$, on pose $P_j=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(X-\lambda_k)$. Soient $N\ge n-1$ et φ
l'application qui à $P\in\mathbb{C}_N[X]$ associe le reste de la division de AP par B.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_N[X]$.

1. Donner le noyau et l'imageqde Φ.

1. Donner une expression de $P_i(z)$ sans produit, pour $z\neq\lambda_i$.

1. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ? Préciser ses éléments propres.

Exercice 1030 [MINES PC 2025 # 1006] 1. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{rg}(A)=1$. Donner le polynôme caractéristique de A.

1. En déduire une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité pour une matrice de rang 1.

1. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

1. Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices diagonalisables de rang 1 ?

Exercice 1031 [MINES PC 2025 # 1007] 1. Déterminer le commutant
$C(M)$ de $M=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $C(M)=\mathrm{Vect}(I_n,M,M^2)$

Exercice 1032 [MINES PC 2025 # 1008] Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB = 0. Montrer qu'il existe $P\in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

Exercice 1033 [MINES PC 2025 # 1009] Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent sont simultanément trigonalisables.

Exercice 1034 [MINES PC 2025 # 1010] Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, $f\in\mathcal{L}(E)$ et $P\in\mathbb{C}[X]$. Que dire du spectre de P(f) ?

Exercice 1035 [MINES PC 2025 # 1011] Soient $A,B,M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{C}^*$ avec $\lambda\neq\mu$. On suppose que $I_n=A+B$, $M=\lambda A+\mu B$ et $M^2=\lambda^2A+\mu^2B$.

1. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

1. Montrer que M est diagonalisable et déterminer son spectre.

Exercice 1036 [Mines PC 2025 # 1012] Résoudre dans

$$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 1037 [Mines PC 2025 # 1013] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 1038 [Mines PC 2025 # 1014] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que $B = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 1039 [Mines PC 2025 # 1015] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [1, n]$, $a_{i,i} = 0$ et $\forall j \neq i,\ a_{i,j} = j$. a) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A et $(x_1 \dots x_n)^T$ un vecteur propre associé, montrer que $(\lambda+1)x_1 = (\lambda+2)x_2 = \cdots = (\lambda+n)x_n$.

1. Montrer que $-1, -2, \dots, -n$ ne sont pas valeurs propres de A.

1. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\lambda+k} = 1$.

1. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 1040 [Mines PC 2025 # 1016] Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n, f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g =$ f+q.

1. Montrer que Im f = Im g et Ker f = Ker g.

1. On suppose f diagonalisable, montrer que $f \circ g$ est diagonalisable et que ses valeurs propres ne peuvent pas être dans]0, 4[.

Exercice 1041 [Mines PC 2025 # 1017] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de spectre vide.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $\mathrm{Ker}(P(u)) \neq \{0\}$.

1. Montrer que l'on peut trouver un sous-espace stable par u de dimension 2.

1. En déduire que tout endomorphisme d'un R-espace vectoriel de dimension finie admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Exercice 1042 [Mines PC 2025 # 1018] Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_{n+p-1} + u_{n+p-2} + \cdots + u_n$.
On note $P = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} X^i$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (u_n\ u_{n+1}\ \cdots\ u_{n+p-1})^T$.

1. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, ne dépendant pas de $(u_0, \dots, u_{p-1})$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. En déduire une expression de U_n en fonction A, U_0 et n.

1. Montrer que le polynôme caractéristique χ_A de A est P. c) Montrer que P admet une unique racine α sur $\mathbb{R}^{+*}$ en considérant T=(X-1)P, puis

que $\alpha \in]1, 2[$.

Exercice 1043 [Mines PC 2025 # 1019] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA^2$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ |\lambda| \neq 1$. Montrer que A et B ont un vecteur propre en commun.

Exercice 1044 [Mines PC 2025 # 1020] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que n est pair.

1. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il n'existe pas d'hyperplan stable par f.

Exercice 1045 [Mines PC 2025 # 1021] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- A est diagonalisable,
- $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)^n = 0 \Longrightarrow P(A) = 0$,
- le seul élément nilpotent de $\mathbb{C}[A]$ est 0.

Exercice 1046 [Mines PC 2025 # 1022] Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB BA = C, AC CA = 0 et BC CB = 0.

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. i) Que dire de la famille $(M^k)_{0 \leq k \leq n^2}$?

- ii) Montrer qu'il existe une famille $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n^2}$ telle que $I_n + \sum_{k=1}^{n^2} \lambda_k M^k = 0$.

iii) Montrer qu'on peut trouver un indice k tel que $Tr(M^k) \neq 0$.

1. Montrer que C n'est pas inversible.

1. Montrer que A, B et C admettent un vecteur propre commun.

1. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ et $P^{-1}CP$ soient triangulaires.

1. Montrer que C est nilpotente.

Exercice 1047 [Mines PC 2025 # 1023] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^3$ et $\dim(E_1(A)) = 1$.

1. Montrer que Ker A^2 et $E_1(A)$ sont supplémentaires. b) Montrer que Ker A^2 et $E_1(A)$ sont stables par A.

1. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Exercice 1048 [Mines PC 2025 # 1024] On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices carrées diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

1. Soit $V \subset \mathcal{D}_n$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\dim V \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Exhiber un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{D}_n$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 1049 [Mines PC 2025 # 1025] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose $\operatorname{tr}(A^k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. Montrer : $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(A), |\lambda| < 1$.

Exercice 1050 [Mines PC 2025 # 1026] Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr}(A^k) = 0$.

Exercice 1051 [Mines PC 2025 # 1027] On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est d'ordre fini s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$. Dans ce cas, on appelle ordre de M le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$.

1. Montrer que les matrices d'ordre fini sont diagonalisables.

1. Soit M une matrice d'ordre p et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $M^k = I_n \iff k \in p\mathbb{Z}$.

1. Soient V_n l'ensemble des matrices d'ordre fini de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des ordres des éléments de V_n. Montrer que V_n est non vide et que $\mathcal{O}_n$ est fini.

Exercice 1052 [Mines PC 2025 # 1028] Soit E préhilbertien. Pour $(a, b) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha\langle x, a\rangle b$.

1. A-t-on $f_\alpha \in \mathcal{L}(E)$?

1. Déterminer $\mathcal{O}_2$.- b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_α soit un isomorphisme, dans le cas où E est euclidien.

1. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, calculer $f_\alpha \circ f_\beta$.

1. En supposant $f_\alpha \in GL(E)$, préciser f_α^{-1}.

1. Qu'en est-il lorsque l'on suppose E simplement préhilbertien.

Exercice 1053 [Mines PC 2025 # 1029] Soient E et F deux espaces euclidiens et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Pour tout $y \in F$, montrer qu'il existe un unique $(x, y') \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \times (\operatorname{Im} f)^\perp$ tel que y = f(x) + y'.

1. Avec les notations précédentes, on note $g : y \mapsto x$. Montrer que g est linéaire.

1. Préciser Ker q et Im q.

Exercice 1054 [Mines PC 2025 # 1030] Soit E un espace euclidien.

1. Montrer : $\forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists! a \in \mathbf{E},\ \forall x \in E,\ f(x) = \langle a, x\rangle$.

1. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 PQ$. Soit $f : P \mapsto P(0)$.

Montrer qu'il existe $A \in E$ tel que : $\forall P \in E, f(P) = \int_0^1 AP$.

1. Montrer que A(0) > 0 et $\deg(A) = n$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = \int_0^1 AP$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], |P(0)| \leq C||P||$.

Exercice 1055 [Mines PC 2025 # 1031] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de $\mathbb{R}^n$. On note la propriété suivante $(1) : \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, i \neq j \implies \langle u_i, u_j\rangle < 0$. a) Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille vérifiant (1). Montrer qu'il existe une sous-famille libre de u - a) Soit $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille vérifiant (1). Montrer qu'il existe une sous-famille libre de u ayant p-1 vecteurs.

1. Montrer qu'il n'existe pas de famille ayant au moins n+2 vecteurs vérifiant (1).

1. Donner une famille $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ vérifiant (1).

Exercice 1056 [Mines PC 2025 # 1032] Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E, p_F le projecteur orthogonal de E sur F et $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. On pose $G = (\langle f_i, f_j\rangle)_{1 \leq i,j \leq p}$. orthogonal de E sur F et $(f_1, ..., a)$ Montrer que $G \in GL_p(\mathbb{R})$.

1. Soient $y \in E, Y = \begin{pmatrix} \langle y, f_1\rangle \\ \vdots \\ \langle y, f_1\rangle \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_- \end{pmatrix}$ la solution de GX = Y.

Montrer que $p_F(y) = \sum_{i=1}^{p} x_i f_i$.

Exercice 1057 [Mines PC 2025 # 1033] Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose $\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f,g\rangle = \int_0^1 (f(t)\,g(t) + f'(t)\,g'(t))dt$

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

1. Soit $V = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}), f = f''\}$. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de dimension finie et déterminer une base de V.- c) Montrer que $V \oplus W = E$ et que $V^{\perp} = W$.

Exercice 1058 [Mines PC 2025 # 1034] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^T M P$ soit de diagonale nulle.

Exercice 1059 [Mines PC 2025 # 1035] 1. L'ensemble $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

1. Déterminer Vect $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$.

Exercice 1060 [Mines PC 2025 # 1036] Soit $M \in \mathcal{O}_n\,(\mathbb{R})$. Étudier la limite de la suite de matrices $A_k = \left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} M^i\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1061 [Mines PC 2025 # 1037] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ semblable à son inverse.

1. Montrer que $tr(A^2) \geq n$.

1. Montrer que $tr(A^2) \geq n$ si et seulement si A est une matrice de symétrie orthogonale.

Exercice 1062 [Mines PC 2025 # 1038] Soient $a \in\,]0,1[$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ a & 1-a & 0 \\ 1-a & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. La matrice M est-elle diagonalisable ? Préciser ses valeurs propres.

1. Montrer que $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L. Caractériser géométriquement L.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer alors sa limite.

1. Soit $A \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$ telle que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Déterminer sa limite.

Exercice 1063 [Mines PC 2025 # 1039] Pour

$$(a,b) \in \mathbb{R}$$

, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M(a, b) est diagonalisable.

1. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de M(a,b).

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M(a,b)^n \to 0$.

Exercice 1064 [Mines PC 2025 # 1040] Soient $n \geq 3$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable.

1. Déterminer les valeurs propres de M et leur multiplicité.

1. Trouver un polynôme annulateur de M.

Exercice 1065 [Mines PC 2025 # 1041] Soient $n \geq 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X_\ell = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2\ell\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2\ell\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{n\ell\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}$ pour $\ell \in [\![1,n]\!]$. On pose, pour $p,q \in [\![1,n]\!]$, $S_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{kq\pi}{n+1}\right)$.

1. Justifier que A est diagonalisable. Que peut-on dire de ses sous-espaces propres ?

1. Montrer que $(X_1,\dots,X_n)$ est une base de vecteurs propres de A.

1. Calculer $S_{p,q}$ pour $p,q \in [\![1,n]\!]$ avec $p \neq q$.

Exercice 1066 [Mines PC 2025 # 1042] Soit

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

avec $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$. On pose $A = I_n - 2UU^T$.
Montrer que A est orthogonale. Caractériser A.

Exercice 1067 [Mines PC 2025 # 1043] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices AA^T et A^TA sont semblables.

Exercice 1068 [Mines PC 2025 # 1044] Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ A^TA = AA^T \text{ et } (A^k)_{k\in\mathbb{Z}} \text{ est bornée}\}$.

Exercice 1069 [Mines PC 2025 # 1045] Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = MM^T$.

Exercice 1070 [Mines PC 2025 # 1046] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^{*2}$ et $\Phi_{a,b} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R} \mapsto aM + bM^T)$.

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de $\Phi_{a,b}$.
1. Donner la trace et le polynôme caractéristique de $\Phi_{a,b}$.
1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi_{a,b}$ soit inversible. Préciser alors $\Phi_{a,b}^{-1}$.
1. L'endomorphisme $\Phi_{a,b}$ est-il autoadjoint pour le produit scalaire $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}(M^TN)$?

Exercice 1071 [Mines PC 2025 # 1047] On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} PQ$. Soit $\Phi : E \to E$ l'endomorphisme défini par : $\Phi(P) = (1 - X^2)P'' + 2XP'$.

1. Montrer que Φ est autoadjoint.

b) Montrer que Φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

1. Montrer qu'il existe une unique base orthonormée $(P_0, \ldots, P_n)$ de E telle que, pour tout $k \in [0, n]$, $\deg P_k = k$ et $\langle P_k, X^k\rangle > 0$.
1. Pour $k \in [0, n]$, on pose $Q_k = (-1)^k P_k(-X)$. Montrer que $(Q_0, \ldots, Q_n)$ est une base orthonormée de E, telle que pour tout $k \in [1, n]$, on a $\deg(Q_k) = k$ et $\langle Q_k, X^k\rangle > 0$.
1. Conclusion ?
1. Montrer que, pour tout $C \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, C et P_n sont orthogonaux.
1. Montrer que P_n est scindé sur]0,1[à racines simples.

Exercice 1072 [Mines PC 2025 # 1048] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $X \in F \setminus \{0\}$, $X^TAX > 0$. On note k la dimension de F. Montrer que A possède au moins k valeurs propres strictement positives.

2) Analyse

Exercice 1073 [Mines PC 2025 # 1049] Pour $q \in]0, 1[$, on pose $N_q : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} |P(k)|q^k$.

1. Montrer que N_q est une norme.
1. Existe-t-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ dont N_q soit la norme associée ?
1. Soit $(p, q) \in [0, 1]^2$ avec $p \neq q$. Les normes N_p et N_q sont-elles équivalentes ?

Exercice 1074 [Mines PC 2025 # 1050] Soient $E = \mathbb{C}[X]$ et $b \in \mathbb{C}$. Si $P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$, on pose $\|P\| = \sup\{|a_k|,\ k \in \mathbb{N}\}$; c'est une norme sur E. Soit $f : P \in E \mapsto P(b)$

1. Montrer que f est linéaire.
1. Étudier la continuité de f.

Exercice 1075 [Mines PC 2025 # 1051] Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ dans E, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \text{ et } \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire et que φ est une forme linéaire sur E. On munit E de la norme euclidienne associé à ce produit scalaire.
1. Soit ψ une forme linéaire continue de $(E, \|\cdot\|)$. Montrer que Ker ψ est un fermé de E.
1. Montrer que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$.
1. Soit A une partie de E, montrer que $A^\perp$ est une partie fermée de E.

Exercice 1076 [Mines PC 2025 # 1052] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $V = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.
Si

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$$

, on pose $N_1(P) = \sup_{|z|=1} |P(z)|$ et $N_2(P) = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$.

1. Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \omega^k$.
1. Calculer $V\overline{V}$. En déduire que V est inversible et calculer V^{-1}.
1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$. Déduire de b) une expression des a_k en fonction des

$$P(\omega^\ell), 0 \leqslant \ell \leqslant n-1.$$

1. Justifier l'existence de $N_1(P)$ et montrer que $N_2 \leqslant N_1$.
1. Trouver α et β dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$.

Exercice 1077 [Mines PC 2025 # 1053] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On munit E de la norme donnée par $\forall f \in E, \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}$.
Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ tel que K(s,t) = (1-s)t si $1 \geq t < s$ et $K(s,t) = (1-t)s$ sinon.
Si $f \in E$, on pose $T(f) : s \in [0,1] \mapsto \int_0^1 K(s,t) = (1-t)s$ sin

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
1. Montrer que, pour tout $f \in E$, $||T(f)||_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{10}} ||f||_2$.

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}), f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Montrer que l'image de T est incluse dans F.
1. A-t-on égalité ?

Exercice 1078 [Mines PC 2025 # 1054] On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme $\|\|$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = 0 \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

1. L'application ρ est-elle une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$. Montrer que $\rho(A) < 1$.
1. i) Soit $\lambda \in C$ vérifiant $|\lambda| < 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer $\binom{p}{k} \lambda^{p-k} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$.

ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On admet qu'il existe $(B, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $A = B + N$, avec N nilpotente, BN = NB et B diagonalisable. On suppose que $\rho(A) < 1$. Montrer que $A^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$.

Exercice 1079 [Mines PC 2025 # 1055] Déterminer la limite de la suite de terme général $\sum_{n=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Exercice 1080 [Mines PC 2025 # 1056] Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0,1[$ admet une unique solution qu'on notera x_n.
1. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie est décroissante et convergente.
1. Calculer sa limite.

Exercice 1081 [Mines PC 2025 # 1057] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \left(\prod_{k=1}^{n} (3k-1)\right)^{1/n}$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 1082 [Mines PC 2025 # 1058] Montrer que

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}.$$

Exercice 1083 [Mines PC 2025 # 1059] Étudier la suite (z_n), où $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

Exercice 1084 [Mines PC 2025 # 1060] On définit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \pi + \arctan(\pi - x)$. On considère une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $u_0 \in [\pi/2, 3\pi/2]$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f. Montrer que (π, π) est un centre de symétrie du graphe de f. Préciser les asymptotes.
1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x > \arctan x$. En déduire, pour $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, le signe de $f \circ f(x) - x$.
1. Déterminer les solutions de $f \circ f(x) = x$. d) Étudier la convergence de (u_{2n}).
1. Étudier la convergence de (u_n).

Exercice 1085 [Mines PC 2025 # 1061] Soit $(\varepsilon_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \sqrt{\varepsilon_0 + \sqrt{\varepsilon_1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{\varepsilon_n}}}}$.

1. Étudier (u_n) dans le cas où (ε_n) est constante.

1. Montrer que (u_n) est croissante. c) Montrer que (u_n) converge si et seulement s'il existe a>1 tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \epsilon_n \leqslant a^{2^n}$.

Exercice 1086 [Mines PC 2025 # 1062] Soit $(x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ telle que : $x_n \to 0$ et $\frac{\ln(x_n)}{x_1+\cdots+x_n} \to a < 0$. Déterminer la limite de $\left(\frac{\ln(x_n)}{\ln x}\right)$.

Exercice 1087 [Mines PC 2025 # 1063] Soit $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{nu}$.

1. La suite (u_n) est-elle convergente ? b) Donner un équivalent simple de u_n.

Exercice 1088 [Mines PC 2025 # 1064] Soit, pour $n \geq 2$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\ln k}{k}$ a) Déterminer un équivalent de u_n.

1. Déterminer un équivalent de $u_n - \frac{\ln^2 n}{2}$.

Exercice 1089 [Mines PC 2025 # 1065] Soit a > 0. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Donner un équivalent de u_n.

1. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 1090 [Mines PC 2025 # 1066] Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \ln(u_n)$.

1. Déterminer la limite de (u_n).

1. Soit a > 1. Nature de $\sum \frac{1}{u^a}$?

1. Nature de $\sum \frac{\ln u_n}{u_n}$? d) Nature de $\sum \frac{1}{u}$?

Exercice 1091 [Mines PC 2025 # 1067] Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ et calculer sa somme en cas de convergence.

Exercice 1092 [Mines PC 2025 # 1068] Soient

$$a, b, c \in \mathbb{R}^+$$

tels que $a + b + c = \frac{\pi}{2}$. Montrer que $\sin(a)\sin(b)\sin(c) \leqslant \frac{1}{8}$.

Exercice 1093 [Mines PC 2025 # 1069] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(x) = o(x^{n-1})$ si et seulement si X^n divise P.

Exercice 1094 [Mines PC 2025 # 1070] Soit $(A, B, \alpha) \in \mathbb{R}^3$. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} A(-x)^\alpha & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ Bx^\alpha & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Discuter, en fonction de (A, B, α), du caractère dérivable de f, de son caractère $\mathcal{C}^1$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Discuter du caractère $\mathcal{C}^k$ de f.

Exercice 1095 [Mines PC 2025 # 1071] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}\times] - \pi, \pi]$ et $v_{a,b} : t \in] - 2\pi, -\pi[\mapsto t + e^{a-(b-t)\cot n(t)} \sin t$.

1. Montrer qu'il existe $y \in] - 2\pi, -\pi]$ tel que $v_{a,b}(y) = b$.

1. En déduire que le système $\begin{cases} x + e^x \cos y &= a \\ y - e^x \sin y &= b \end{cases}$ admet une solution.

1. Montrer que l'application $f : z \in \mathbb{C} \mapsto ze^z \in \mathbb{C}$ est surjective.

Exercice 1096 [Mines PC 2025 # 1072] Déterminer les

$$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = \int_{\mathbb{R}^{n+y}}^{x+y} f(t)dt$.

Exercice 1097 [Mines PC 2025 # 1073] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ f(x + y)f(x - y) = (f(x)f(y))^2$ ().

1. Quelles sont les valeurs possibles de f(0) ?

1. Montrer que, si $f(x_0) = 0$, alors $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, si f s'annule, alors est nulle.

1. Déterminer les fonctions qui vérifient ().

Exercice 1098 [Mines PC 2025 # 1074] Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective.

1. Montrer que f a une infinité de zéros.

1. Montrer que tout réel a une infinité d'antécédents par f.

Exercice 1099 [Mines PC 2025 # 1075] 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f est strictement monotone.

1. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue telle que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(f(x)) = x$. Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = x$.

Exercice 1100 [Mines PC 2025 # 1076] On admet le résultat suivant : si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et injective, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors f est strictement monotone. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle $f \circ f = \mathrm{id}$. On fixe un $f \in \mathcal{E} \setminus \{\mathrm{id}\}$.

1. Montrer que f est décroissante.

1. Montrer que f admet un unique point fixe, que l'on note d.c) On note $g|_{[d,+\infty[}$. Montrer que g est strictement décroissante, que g(d)=d et que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

1. Réciproquement, montrer que, si on se donne $d \in \mathbb{R}$ et une fonction continue $g : [d, +\infty[\to \mathbb{R}$ strictement décroissante, telle que $g(d) = d$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors il existe $f \in \mathcal{E} \setminus \{id\}$ tel que $f|_{[d,+\infty[} = g$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour f soit de classe C^1.

Exercice 1101 [Mines PC 2025 # 1077] Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer les sous-espaces vectoriels de E vérifiant :

1. pour tout $f \in F$, on a $|f| \in F$, ii) pour tout $f \in F$, si $f \geq 0$, alors $\sqrt{f} \in F$. Ind. Soit $f \in F$. Poser g = |f|. Que dire de $(g, g^{1/2}, \dots, g^{1/2^n})$?

Exercice 1102 [Mines PC 2025 # 1078] Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $f \circ g$ est décroissante. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont un unique point fixe.

Exercice 1103 [Mines PC 2025 # 1079] Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)\cos(xt)\,dt$.

Exercice 1104 [Mines PC 2025 # 1080] Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos((n+2)x)\cos^n(x)dx$.

Exercice 1105 [Mines PC 2025 # 1081] On suppose $\pi = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \frac{X^n(a-bX)^n}{n!}$.

1. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, montrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\pi)$ sont des entiers. b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi} P_n(t)\sin(t)dt$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$.

1. Montrer qu'il existe un réel ξ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \leqslant \pi\frac{\xi^n}{n!}$. Conclure.

Exercice 1106 [Mines PC 2025 # 1082] Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(0, 1], \mathbb{R}^{+*}$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 g(t)f(t)^n dt$. Étudier la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u}\right)$. **Ind.** Commencer par étudier la limite de $\left(u_n^{1/n}\right)$.

Exercice 1107 [Mines PC 2025 # 1083] Soit E l'ensemble des fonctions des $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π -périodiques.

1. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que, pour toute $f \in E$,

$\sup_m |f| \leqslant A\int_0^{2\pi} |f'| + B\int_0^{2\pi} |f|$.

1. Est-ce toujours vrai pour des fonctions à valeurs complexes ?

Exercice 1108 [Mines PC 2025 # 1084] Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $t \mapsto e^{-(t-p\pi)^2}\sin(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale est nulle.

Exercice 1109 [Mines PC 2025 # 1085] Soient a > 1 et b > 1 deux réels. Calculer $\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b\cos t}{a\cos t}\right)dt$.Ind. Remarquer que $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ est une primitive sur $]1, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 1110 [Mines PC 2025 # 1086] Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et bornée, ainsi que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec a < b. Convergence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(b+t) - f(a+t))\ \mathrm{d}t$.

Exercice 1111 [Mines PC 2025 # 1087] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x\to-\infty} = \ell$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec a < b. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}(f(b+x) - f(x+a))dx$ convergente et la calculer.

Exercice 1112 [Mines PC 2025 # 1088] Calculer

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-at^2 - \frac{b}{t^2}\right)dt$$

, pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

Exercice 1113 [Mines PC 2025 # 1089] Soit $f : t \mapsto \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$.

1. La fonction f est-elle intégrable sur $]0, 1[$?

1. Calculer $\int_0^1 f(t)dt$.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(|1-x|)\cos(\ln x)}{x^\alpha(1+x)}dx \text{ et } J = \int_0^1 \frac{\ln(|1-x|)\cos(\ln x)}{x^\alpha(1+x)}dx.$$

Exercice 1114 [Mines PC 2025 # 1091] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{t}dt$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{t}dt$.

1. Montrer que I_0 converge. On admet que $I_0 = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \sin^{2n+1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\binom{2n+1}{n-k}\frac{\sin((2k+1)t)}{2^{2n}}$.

1. Montrer l'existence de J_n et de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $q_n \in \mathbb{Q}$ tel que $I_n = q_n \pi$.

Exercice 1115 [Mines PC 2025 # 1092] Soit (C) : (y' + 2xy = 1, y(0) = 0.)

1. On note φ la solution de (C). Justifier l'existence et l'unicité de φ.

1. Exprimer $\varphi(x)$ à l'aide d'une intégrale que l'on de cherchera à calculer.

1. Pour x>0, sachant que $t^2 \leqslant tx$ pour $t \in [0, x]$, donner le comportement de φ au voisinageqde $+\infty$.

1. Montrer $e^{-x^2} \int_{-t^2}^{x} \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Donner un équivalent simple de $\varphi(x)$.

Exercice 1116 [Mines PC 2025 # 1093] Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi/2]$, on pose $f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$ et $g_n(x) = nf_n(x)$.Étudier la convergence simple et uniforme des suites (g_n) et (f_n).

Exercice 1117 [Mines PC 2025 # 1094] Soit (f_n) la suite définie par $f_0 : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto 0$
$f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (f_n(x))^2\right)$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur [0,1].

1. Est-ce que (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$?

Exercice 1118 [Mines PC 2025 # 1095] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{\ln(n+x)}{n^2+x^2}$.
Étudier la Convergence simple/uniforme/normale de $\sum f_n$.

Exercice 1119 [Mines PC 2025 # 1096] Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$.

1. Étudier la continuité, la dérivabilité et les limites en 0 et en $+\infty$ de S.

1. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $S(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})} dt$.

Exercice 1120 [Mines PC 2025 # 1097] Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

1. Déterminer la limite de S en $+\infty$ et donner un équivalent de S(x) quand $x \to +\infty$.

Exercice 1121 [Mines PC 2025 # 1098] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x \ln n}}{1+n^2 x}$.

1. Donner le domaine de définition de f.

1. Étudier la continuité de f.

1. Déterminer la limite puis un équivalent de f en $+\infty$.

1. Déterminer la limite puis un équivalent de f en 0^+.

Exercice 1122 [Mines PC 2025 # 1099] On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, où $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$, paire.

1. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement.

1. Montrer que $\overline{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner son intégrale sous la forme de la somme d'une série numérique.

d) Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Donner la limite, puis un équivalent en $+\infty$.

1. Donner la limite, puis un équivalent en 0.

Exercice 1123 [Mines PC 2025 # 1100] Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. On pose $f_0 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f_n(t)dt$.
On pose $g = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Justifier la définition de g et l'exprimer en fonction de f.

Exercice 1124 [Mines PC 2025 # 1101] Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^N$ décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n : x \in [0,1] \mapsto a_n x^n (1-x)$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement.

1. Montrer que la convergence est normale si et seulement si $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

1. Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si $a_n \overset{\sim}{\to} 0$.

Exercice 1125 [Mines PC 2025 # 1102] Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $M \in \mathbb{R}^+$. On suppose que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x+y)f(x)f(y)| \leq M$.

1. Si M=0, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha x$.

1. Si M=0, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha x$. b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n(x) = \frac{f(2^n x)}{2^n}$. En considérant la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$,

montrer que (v_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue g.

1. Montrer que g est la seule application linéaire telle que la fonction f-g soit bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1126 [Mines PC 2025 # 1103] 1. Montrer : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}|x| \leqslant |\sin x|$.

1. Donner le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$

Exercice 1127 [Mines PC 2025 # 1104] Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{k\geq 0} \frac{x^{kp}}{(kp)!}$?

Exercice 1128 [Mines PC 2025 # 1105] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^{+*} > 0$ telle que $\sum a_n R^n$ soit absolument convergente.

1. Donner un exemple de telle série.
1. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que f est continue sur [-R, R].
1. Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on pose $g(t) = \frac{1}{t} \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|$.
1. Montrer que $\int_0^1 g$ converge.

- ii) Exprimer g comme une somme de série entière sur]-1,1[. En déduire $\int_0^1 g$.

iii) Calculer $\int_1^{+\infty} g$.-

Exercice 1129 [Mines PC 2025 # 1106] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\times 3 \cdots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de f.
1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) : $(x^2 - 2)y' + xy + 2 = 0$.
1. En déduire une expression de f(x).
1. La série entière converge-t-elle pour x = R ?

Exercice 1130 [Mines PC 2025 # 1107] On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2} \\ i\perp i=n}} \frac{1}{i^2 j^2}$.

1. Donner un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.
1. Donner le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$.

Exercice 1131 [Mines PC 2025 # 1108] Soit $\alpha \in]0, 1[$. Donner un équivalent de $S : x \mapsto \sum^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ en 1^-.

Exercice 1132 [Mines PC 2025 # 1109] Soit (T_n) la suite de polynômes définie par $T_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1}(X) = X(T_n(X) + T_n'(X))$. $I_{n+1}(A) = A(I_n(A) + I_n(A))$. a) Expliciter T_1, T_2, T_3 et T_4.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1}(X) = X \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k(X)$.
1. Soit $\varphi : t \mapsto \exp(e^t)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(n)}(t) = T_n(e^t)\varphi(t)$.
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Développer $x \mapsto T_n(x)e^x$ en série entière.

Exercice 1133 [Mines PC 2025 # 1110] Soit $D = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| \leqslant 1\}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série $\sum na_n$ est absolument convergente.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.
1. Pour $z \in D$, on note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose que $a_1 \neq 0$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n| \leqslant |a_1|$.

Montrer que f est injective.

Exercice 1134 [Mines PC 2025 # 1111] On pose $f : (x, s) \mapsto \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^s}$.

1. Calculer f(x,0) et f(x,1) lorsque c'est possible.
1. Donner le rayon de convergence (à s fixé).
1. Donner le domaine de définition.
1. Donner une relation entre f(x, s) et f(x, s 1).
1. Donner une expression simple de f(x,-1) et f(x,-2). f) Donner un équivalent simple de f(x,-p) au voisinageqde 1^-, avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1135 [Mines PC 2025 # 1112] Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ telle que $\lim_{n\to+\infty}(na_n) = 0$.a) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est au moins 1.

1. Montrer que le rayon de convergence de

$\sum a_n x^n$ est au moins $1 + \infty$

1. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = o(\ln(1-x))$.

Exercice 1136 [Mines PC 2025 # 1113] On note $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$.

1. Montrer que I est bien définie. b) Montrer que (u_n) est bien définie.

1. Trouver un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$. Comment trouver le terme suivant du développement asymptotique ?

1. Donner le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Exercice 1137 [Mines PC 2025 # 1114] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose lorsque cela a un sens $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+\cdots+t^n} dt$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ est bien définie et calculer sa limite

1. Soit $n \geq 3$. Montrer que $I_{n-1} = \int_0^1 u^{n-3} \frac{1-u}{1-u^n} du$.

Montrer que $I_{n-1} = \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{n(1-s^{1/n})}{1-s} s^{-2/n} ds$.

1. En déduire un équivalent de I_n

Exercice 1138 [Mines PC 2025 # 1115] On donne $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\gamma_n = n^{1/4}$ et $\varphi_n : x \mapsto \frac{\gamma_n}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\gamma_n x\right)}{\sqrt{\frac{3}{n}}\gamma_n x} \right)^n$. Soient également A>0 et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, nulle à l'extérieur de [-A,A]. Montrer que $\int_-^\infty f\varphi_n \to f(0)$.

Exercice 1139 [Mines PC 2025 # 1116] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(t)\, \ln(1-t^n)\, \mathrm{d}d$.

1. Trouver la limite de (I_n).

1. Trouver un équivalent de I_n. c) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de la série $\sum I_n^\alpha$.

Exercice 1140 [Mines PC 2025 # 1117] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1. Montrer que (I_n) admet une limite ℓ que l'on explicitera. b) Déterminer un équivalent de $I_n - \ell$.

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.

1. Déterminer un développement asymptotique de I_n à trois termes.

Exercice 1141 [Mines PC 2025 # 1118] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t^2} dt$.

1. Montrer que I_n est bien définie. b) Écrire I_n sous forme d'une somme.

1. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 1142 [Mines PC 2025 # 1119] Soient a, b > 0.

1. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} dt$.

1. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 1143 [Mines PC 2025 # 1120] Soit $x \in [0,1[$. Après avoir justifié l'existence des deux membres, montrer l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

Exercice 1144 [Mines PC 2025 # 1121] On pose $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-nt})$.

1. Convergence et calcul de $\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

1. La fonction S est-elle intégrable sur $[1,+\infty[?]0,1]$?

Exercice 1145 [Mines PC 2025 # 1122] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.

1. Déterminer la limite de (I_n).

1. Justifier l'existence de $L = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

1. Montrer que $I_n \sim \frac{L}{r}$.

1. Montrer que $L = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Exercice 1146 [Mines PC 2025 # 1123] Soit $F : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

1. Montrer que F est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer la limite de F en 0^+ et en $+\infty$. d) Déterminer un équivalent de F en 0^+ et en $+\infty$. Ind. Calculer F(x) + F(x+1).

Exercice 1147 [Mines PC 2025 # 1124] On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$. a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et de classe $\mathcal{C}^1$.b) On pose $F : x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2) dt$ et l'on donne $\lim_{t\to\infty} F = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Exprimer simplement f'(x).

Exercice 1148 [Mines PC 2025 # 1125] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(t+1)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

1. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

1. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative

1. Montrer que f est minorée par une valeur que l'on explicitera.

1. Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 1149 [Mines PC 2025 # 1126] Pour $x > 0$, on pose $s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt}-1} dt$.

1. Montrer que s est continue sur $]0, +\infty[$.

1. Écrire s comme la somme d'une série de fonctions rationnelles.

1. Montrer que $s(x) \sim \frac{\pi}{2\pi}$

Exercice 1150 [Mines PC 2025 # 1127] On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

1. Donner le domaine de définition et montrer que F est monotone. b) Montrer que F est de classe C^1.

1. Limite et équivalent de F en $+\infty$.

1. Limite et équivalent de F en 0.

Exercice 1151 [Mines PC 2025 # 1128] On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3+x^3}$.

1. Domaine de définition

1. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

1. Calculer f(0).

Exercice 1152 [Mines PC 2025 # 1129] On pose $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+ixt)}$.

1. Montrer que f est définie, continue sur 𝕀 b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer f(x) sans signe intégral.

Exercice 1153 [Mines PC 2025 # 1130] Soit $I : a \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} dt$.

1. Montrer que I est bien définie

1. Calculer I(1).

1. En déduire une expression de I(a).

Exercice 1154 [Mines PC 2025 # 1131] On pose $I : x \mapsto \int_a^{\frac{\pi}{2}} e^{x \cos t} dt$. Donner un équivalent, puis un développement à deux termes de I(x) lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 1155 [Mines PC 2025 # 1132] Étudier $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Exercice 1156 [Mines PC 2025 # 1133] 1. Pour quelles valeurs de t la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$ converge-t-elle ? On note alors $\zeta(t)$ sa somme.

Pour t>0, on pose $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$. On admet la convergence de cette intégrale.

1. Soit $t > 1$. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{e^x 1} dx$, et l'exprimer en fonction de $\zeta(t)$ et $\Gamma(t)$.

1. Justifier que $T(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{e^x+1} dx$ est définie pour $t > 0$ et, pour $t > 1$, exprimer T(t)à l'aide de $\zeta(t)$ et $\Gamma(t)$.

Exercice 1157 [Mines PC 2025 # 1134] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt^2)}{t(1+t^2)} dt$. Déterminer le domaine de définition D de F et montrer que $\forall x \in D,\ F(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{x} \frac{\ln(t)}{1-t} dt$.

Exercice 1158 [Mines PC 2025 # 1135] On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

1. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$, puis de $K = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(i+t^2)}}{i+t^2} dt$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0,\ f'(x) = -\sqrt{\pi} e^{-ix^2}$. d) Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

Exercice 1159 [Mines PC 2025 # 1136] On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

1. Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que f et g sont de sont de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, et solutions de y" + y = 1/t. c) Calculer $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

Exercice 1160 [Mines PC 2025 # 1137] Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^x)dt$.

1. Montrer que f est bien définie.- b) Écrire f comme somme d'une série de fonctions.

1. Déterminer la limite de f en 0^+.

Exercice 1161 [Mines PC 2025 # 1138] Soit $f : t \mapsto \int_1^{+\infty}\frac{x^t}{\mathrm{ch}(x)}\mathrm{d}x$.

1. Justifier que f est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Calculer f(0).

1. Montrer que, pour $n \geq 2$, l'équation f(t) = n possède une unique solution notée t_n.

Exercice 1162 [Mines PC 2025 # 1139] On pose $J : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^x(t)}$.

1. Domaine de définition de J ?

1. Étudier la continuité de J.

1. Calcul de J(1) et J(2). d) Déterminer une relation entre J(x+2) et J(x).

1. Expliciter J(2p) et J(2p+1) pour $p \in \mathbb{N}^*$.

1. A-t-on $J(x) \sim J(x+1)$?

1. Donner un équivalent de J en $+\infty$.

Exercice 1163 [Mines PC 2025 # 1140] Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle (E) : y" + y = q.

1. Donner les solutions de (E).

1. Soit f une solution de (E) telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) \geq 0$.

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) + f(x) \geq 0$. c) Soit f une solution de (E) pour laquelle il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a+\pi)+f(a) = 0$. Montrer que f est de la forme $\lambda\cos + \mu\sin$, avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 1164 [Mines PC 2025 # 1141] Déterminer les $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Exercice 1165 [Mines PC 2025 # 1142] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ et f(0,0) = 0.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

1. A-t-on $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$? c) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x}(0,0)$ si elles existent.

Exercice 1166 [Mines PC 2025 # 1143] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. a) Pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ montrer : $f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,c) = \int_0^b g(x)dx$ où $g : x \mapsto \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(x,y)\,\mathrm{d}y$.

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$\forall(x,y) \in [-1,1]^2, |f(x,y)f(0,y)f(x,0) + f(0,0)| \leq M|xy|$.

Exercice 1167 [Mines PC 2025 # 1144] Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les assertions :i)

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}^+, f(tx,ty) = t^n f(x,y),$$

ii)

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nf(x,y).$$

Exercice 1168 [Mines PC 2025 # 1145] Étudier les extrema de $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-2xyz$.

Exercice 1169 [Mines PC 2025 # 1146] Soient $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(x)e^{-\|x\|^2}$. Montrer que f admet un minimum et un maximum, que l'on déterminera.

3) Probabilités

Exercice 1170 [Mines PC 2025 # 1147] Soient Ω un ensemble de cardinal n et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties. On appelle mesure sur Ω toute application μ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout couple (A,B) de parties disjointes de Ω, $\mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)$. On dit que μ est une mesure de probabilité si de plus μ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et $\mu(\Omega) = 1$. Soit $x_0 \in \Omega$. On définit $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(\Omega) \to \{0,1\}$ par $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \delta_{x_0}(A) = 1$ si $x_0 \in A$, et $\delta_{x_0}(A) = 0$ sinon. On admettra que δ_{x_0} est une mesure de probabilité.

1. Montrer que l'ensemble $M(\Omega)$ des mesures sur Ω est un espace vectoriel de dimension finie et calculer sa dimension.

1. Donner sans justifier une norme sur $M(\Omega)$.

1. On note $Pr(\Omega)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur Ω. Est-il convexe ? borné ? ouvert ? fermé ?

1. Montrer que, pour toute mesure $\mu \in M(\Omega)$ il existe P_1 et P_2 probabilités et $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\mu = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$.

Ind. On pourra introduire $A = \{\omega \in \Omega,\ \mu(\{\omega\}) > 0\}$ et $B = \{\omega \in \Omega,\ \mu(\{\omega\}) < 0\}$.

1. Montrer que $N(\mu) = \inf\{|\lambda_1| + |\lambda_2|; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \exists P_1, P_2 \in \Pr(\Omega), \mu = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2\}$ est une norme sur $M(\Omega)$.

Exercice 1171 [Mines PC 2025 # 1148] On munit $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})^2$ de la probabilité uniforme. Quelle est la probabilité pour que deux parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ soient disjointes ?

Exercice 1172 [Mines PC 2025 # 1149] On considère une particule se déplaçant sur un axe de N+1 positions, indexées par $[\![0, N]\!]$. Lorsqu'elle est en position $k \in \{1, \dots, n-1\}$, la particule peut se déplacer en position k+1 avec probabilité $p \in]0, 1/2[$ ou bien en position k-1 avec une probabilité 1-p=q. On arrête le processus lorsque la particule atteint l'abscisse 0 ou N.
On note u_a la probabilité que la particule termine son parcours en 0 en ayant commencé à l'abscisse $a \in [0, N]$.

1. Que valent u_0 et u_N ?

1. Pour 0 < a < N, trouver une relation entre u_a, u_{a-1} et u_{a+1}.

1. Quelle est la probabilité que le processus ne se termine pas ?

Exercice 1173 [Mines PC 2025 # 1150] On dispose d'urnes numérotées $(U_n)_{n\geq 1}$. Dans l'urne U_n il y a une boule blanche et n boules noires. On commence par tirer une boule de l'urne U_1. Si elle est blanche, on s'arrête et si elle est noire on recommence l'expérience dans l'urne suivante. Ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne une boule blanche. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne où l'on tire pour le première fois une boule blanche.- a) Déterminer la loi de X.

1. Soit $f : x \mapsto |\sqrt{x}|$. Montrer que f(X) est d'espérance finie et calculer cette espérance.

Exercice 1174 [Mines PC 2025 # 1151] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux jeux de hasard. Les deux jeux consistent à tirer à Pile ou Face un certain nombre de fois. Pour chaque lancer, on obtient Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. Premier jeu : on tire 2n-1 fois la pièce. On gagne lorsqu'on obtient au moins n fois Pile. Deuxième jeu : on tire 2n fois la pièce. On gagne lorsqu'on obtient au moins n+1 fois Pile. Si on obtient n fois Pile, on a alors une chance sur deux de gagner.
On note X_1 le nombre de Piles au jeu 1 et X_2 le nombre de Piles au jeu 2.

1. Donner les lois de X_1 et de X_2.

1. Exprimer $P(X_2 > n)$.

1. Soient p_1 la probabilité de gagner au jeu 1 et p_2 la probabilité de gagner au jeu 2. Exprimer $p_2 p_1$ en fonction de $\mathbf{P}(X_1 = n)$ et $\mathbf{P}(X_2 = n)$.

1. À quel jeu vaut-il mieux jouer si l'on aime gagner ?

Exercice 1175 [Mines PC 2025 # 1152]

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Caractériser les $A \in \mathcal{A}$ tels que, pour tout $B \in \mathcal{A}$, A et B sont indépendants.

1. Soit Ω un ensemble fini. Existe-t-il une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ soient mutuellement indépendants ? Si oui, caractériser les probabilités qui vérifient cela.

1. Soient Ω un ensemble de cardinal $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω. Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille d'événements mutuellement indépendants, non négligeables et non presque-sûrs. Montrer que $2^m \leqslant N$.

Exercice 1176 [Mines PC 2025 # 1153] Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans un ensemble fini telles que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k)$. Montrer que $X \sim Y$.

Exercice 1177 [Mines PC 2025 # 1154] Soit X une variable aléatoire positive, qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbf{E}(X^k) = \int_0^{+\infty} k t^{k-1} \mathbf{P}(X > t)\, \mathrm{d}t$.

Exercice 1178 [Mines PC 2025 # 1155] Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de X sachant (Y = n) est la loi $\mathcal{U}([1, n])$.

1. Montrer que X et Y + 1 X suivent la même loi.

1. On suppose $X \sim \mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de Y et en déduire les valeurs possibles pour p.

Exercice 1179 [Mines PC 2025 # 1156] Soient $(p, p') \in]0, 1[^2$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{2n} \sim \mathcal{B}(p)$ et $X_{2n-1} \sim \mathcal{B}(p')$.
On pose $Y = \min\{n \in \mathbb{N}, X_n = 1\}$.

1. Montrer que Y est presque sûrement finie.

1. Loi, espérance et variance de Y.

Exercice 1180 [Mines PC 2025 # 1157] Soient X,Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q et $U = \frac{X}{V}$.- a) Calculer la loi de U.

1. Calculer l'espérance de U.

Exercice 1181 [Mines PC 2025 # 1158] Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 3p\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 1182 [Mines PC 2025 # 1159] Soient X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Soient b > 0 et I une partie de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ g(x) \geq b$.

1. Montrer que $\mathbf{P}(X \in I) \leqslant \frac{\mathbf{E}(g(X))}{h}$.

1. On suppose que $\mathbf{E}(X) = 0$ et que X admet une variance. Soit $t > 0$.

Montrer que $\mathbf{P}(X > t) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X)+t^2}$.

Exercice 1183 [Mines PC 2025 # 1160] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$.

1. Loi et fonction génératrice de S_n.

1. Donner $\mathbf{E}(T_n)$ et $\mathbf{V}(T_n)$.

1. Soit $x > 0$. Exprimer $\mathbf{E}\left(x^{T_n}\right)$ et déterminer la limite de $\left(\mathbf{E}\left(x^{T_n}\right)\right)_{n\geq 1}$.

Exercice 1184 [Mines PC 2025 # 1161] Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, N\}$. On note μ l'espérance de U_1 et σ^2 la variance de U_1.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables $S_n = U_1 + \cdots + U_n$ et $V_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbf{E}(e^{tV_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{t^2/2}$.

Exercice 1185 [Mines PC 2025 # 1162] Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$ et $P_n = \prod_{k=0}^n X_k$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n^{k=1}$ et de P_n.

1. Déterminer la loi de P_n.

1. Les variables S_n et P_n sont-elles indépendantes ?

Exercice 1186 [Mines PC 2025 # 1163] Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$ et $\mathbf{E}(X_0) < +\infty$. On note R le rayon de convergence de $\sum X_n\, t^n$

1. Rappelez la définition du rayon de convergence d'une série entière.

1. Montrer que : $(R > 1) = (X_n = 0$ à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$). En déduire que (R > 1) est un événement et $\mathbf{P}(R > 1) = 0$.

1. Soit $0 \leq c < 1$. Montrer que $\mathbf{P}(R \leq c) = 0$.

1. Montrer que P(R=1)=1.

Exercice 1187 [Mines PC 2025 # 1164] Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
Montrer que la verieble eléctoire $1 \leq V_n$ est d'espérance finie.

1. Montrer que la variable aléatoire $\mathbf{1}_{\{X_1\geq N+1\}}X_1$ est d'espérance finie. Montrer que $\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{X_1\geq N+1\}}X_1\right) = 0$.

1. Pour $N \in \mathbb{N}$, montrer que $M_n \leqslant N + \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k\geq N+1\}}X_k$.

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\frac{M_n}{n}\right)$. Ind. Revenir à la définition d'une limite.

1. Étendre ce résultat à une suite de variables aléatoires positives, de même loi et d'espérance finie.

Exercice 1188 [Mines PC 2025 # 1165]

1. Comparer $\mathbf{E}(X^2)$ et $\mathbf{E}(X)^2$ lorsque X est une variable aléatoire réelle discrète telle que $\mathbf{E}(X^2)$ soit finie.

1. Soient $N > 0$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables à valeurs dans [0, N], ainsi que

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_k$.
Montrer que $\mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \to f\left(\mathbf{E}(X_1)\right)$.

Exercice 1189 [Mines PC 2025 # 1166] Soient X, Y deux variables aléatoires et $(X_n), (Y_n)$ deux suites de variables aléatoires, toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$, les variables étant définies sur un même espace probabilisé. On suppose : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|X_n X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\mathbf{P}(|Y_n Y| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, montrer : $|x + y| \geq \varepsilon \Rightarrow |x| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ ou $|y| \geq \frac{\varepsilon}{2}$

1. Montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|X_n + Y_n(X + Y)| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Soit (U_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_{n+1} + U_n$. Montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n V_i - 2p \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Montrer $\mathbf{P}(|X| \geq M) \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0$.

1. Montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|X_n Y_n XY| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 1190 [Mines PC 2025 # 1167] Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telle que X_1 soit d'espérance finie, mais pas X_1^2.
Pour $(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, on pose : $Y_{n,k}=X_k\mathbf{1}_{(|X_k|\leqslant n)},\ S_n=\sum^n X_k$ et $T_n=\sum^n Y_{n,k}$.

1. Montrer que : $\frac{1}{n}\mathbf{E}(S_nT_n)\to 0$.

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(S_n\neq T_n)\leqslant n\,\mathbf{P}(|X_1|>n)$.

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\varepsilon>0$, montrer :

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}|S_n-\mathbf{E}(T_n)|\geq\varepsilon\right)\leqslant\frac{\mathbf{V}(T_n)}{(n\varepsilon)^2}+n\,\mathbf{P}(|X_1|>n).$$

Exercice 1191 [Mines PC 2025 # 1168] Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $X_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\varepsilon_i$.
Déterminer le comportement asymptotique de $(\mathbf{E}\left(\mathrm{ch}(X_n)\right))_{n\geq 1}$ et $(\mathbf{E}\left(\mathrm{sh}(X_n)\right))_{n\geq 1}$

Exercice 1192 [Mines PC 2025 # 1169] Soit $p\in[0,1[$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendent dantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, indépendante de $(X_1,\ldots,X_n)$. On pose $Y=X_1+\cdots+X_N$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. En utilisant les fonctions génératrices, trouver la loi de Y. c) Retrouver ce résultat sans utiliser les fonctions génératrices.

Exercice 1193 [Mines PC 2025 # 1170] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Quelle est la probabilité pour que $\begin{pmatrix}X&1\\0&Y\end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 1194 [Mines PC 2025 # 1171] Soient $p\in[0,1]$ et X,Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $M=\begin{pmatrix}X&Y\\V&X\end{pmatrix}$. On note S et B respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de M.

1. Exprimer S et B en fonction de X et Y. Justifier qu'elles sont des variables aléatoires.

1. Calculer $\mathbf{E}(S)$, $\mathbf{V}(S)$, $\mathbf{E}(B)$ et $\mathbf{V}(B)$.

Exercice 1195 [Mines PC 2025 # 1172] Soit $(X_{i,j})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $A_n=(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $D_n=\det(A_n)$.

1. Calculer $\mathbf{E}(D_n)$.

1. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{V}(D_n)=n!$.

XI) Centrale - MP

1) Algèbre

Exercice 1196 [Centrale MP 2025 # 1173] 1. Donner la définition de la signature et calculer celle de la permutation $\sigma=\left(\begin{matrix}1&2&3&4\\2&5&8&3\end{matrix}\right.$

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&5&8&2&6&1&7&4\end{pmatrix}$$

1. Pour tout $\sigma\in\mathcal{S}_n$, on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ, et $\nu(\sigma)$ le nombre de ses points fixes.

1. On pose

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&\cdots&-1\\-1&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&-1\\-1&\cdots&-1&0\end{pmatrix}.$$

Calculer χ_A sous forme factorisée.
ii) En déduire la valeur de la somme $\sum_{\sigma\in S}\frac{\varepsilon(\sigma)}{1+\nu(\sigma)}$.

Exercice 1197 [Centrale MP 2025 # 1174] Soit G un groupe fini d'ordre n. On appelle caractère de G tout morphisme de groupes χ de G vers $\mathbb{C}^*$. On note $\widehat{G}$ le groupe des caractères de G.

1. Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe multiplicatif, et que les éléments de $\widehat{G}$ sont à valeurs dans $\mathbb{U}_n$.

1. Dans cette question, on suppose G cyclique.

Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et que $\widehat{G}$ est isomorphe à G.

1. Dans cette question, on suppose G abélien. Montrer que, si H est un sous-groupe de G et $\xi \in \widehat{H}$, il existe $\chi \in \widehat{G}$ tel que $\chi_{|H} = \xi$.

Exercice 1198 [Centrale MP 2025 # 1175] On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \prod_{\substack{\xi \in \mathbb{U}_n \\ \omega(\xi)=n}} (X - \xi)$, où $\omega(\xi)$ est l'ordre de la racine n -ième ξ comme élément du groupe $\mathbb{C}^*$.

1. Montrer que $\omega(\xi)$ divise n pour tout $\xi \in \mathbb{U}_n$.

1. Exprimer $(X-1)F_n$ et F_n dans le cas où n est premier.

1. Soient $A, B \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $AB \in \mathbb{Z}[X]$ et $A \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire. Montrer que $B \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $F_n(1)$.

Exercice 1199 [Centrale MP 2025 # 1176] 1. Écrire et démontrer l'inégalité de Jensen puis en déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note H l'intersection des convexes de $\mathbb{C}$ contenant les racines de P.

1. Montrer que H est convexe et compact.

1. Soit $z \in \mathbb{C} \backslash H$.

- i) Montrer qu'il existe un unique $q \in H$ tel que d(z, H) = d(z, q).

ii) Montrer qu'il existe $\psi \in [0, \pi/2[$ tel que $\forall h \in H, \left|\text{Arg}\left(\frac{zh}{zq}\right)\right| \leqslant \psi$ (argument dans $[-\pi, \pi]$).

Exercice 1200 [Centrale MP 2025 # 1177] Soit A et B deux polynômes à coefficients complexes.

1. Montrer que $\deg(A+B) \leqslant \max(\deg(A), \deg(B))$, et donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Dans la suite, on suppose que A et B n'ont pas de racine commune, et on pose C = A + B. On suppose enfin qu'aucun des polynômes A, B, C n'est constant. On pose W = A'B - AB'.

1. Soit z une racine de multiplicité m de ABC. Montrer que z est de multiplicité m-1 comme racine de W.

1. On note μ le nombre de racines distinctes de ABC.

Montrer que $\mu \geq \deg(A) + \deg(B) + \deg(C) - \deg(W)$.

1. En déduire que $\mu > \max(\deg A, \deg B, \deg C)$.

Exercice 1201 [Centrale MP 2025 # 1178] 1. Rappeler la définition d'un polynôme irréductible sur un corps $\mathbb{K}$ et l'énoncé du théorème de d'Alembert-Gauss.- b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$. Montrer que toute racine réelle de P est de multiplicité paire et que le coefficient dominant de P est positif. En déduire qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

1. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $\forall x \in [-1,1],\ Q(x) \geq 0$.

1. Montrer que si $\deg(Q) \leqslant 2$ alors il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et $\lambda \in [-1,1]$ tels que $Q = (X\lambda)^2 + b(1X^2)$

$a(X-\lambda)^2 + b(1-X^2)$. ii) Montrer plus généralement qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $Q = A^2 + (1-X^2)B^2$.

Exercice 1202 [Centrale MP 2025 # 1179] Dans ce qui suit, K désigne un corps.

1. Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que a soit racine simple de P.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $P_n = X^n X + (-1)^n$. Déterminer le nombre des racines de P dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

1. On note $a_1, \ldots, a_n$ les racines complexes de P_n.

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 1203 [Centrale MP 2025 # 1180] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A\,\text{Com}(A)^T = \det(A)I_n$.

1. On définit $GL_n(\mathbb{Z})$ comme l'ensemble des matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers, dont l'inverse est également à coefficients entiers.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

1. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$. Montrer que les racines complexes de P sont simples.

Exercice 1204 [Centrale MP 2025 # 1181] On note S_n le groupe des permutations de $\{1,\ldots,n\}$ pour $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n. On se donne une base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de E - $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n. On se donne une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E. a) i) Soit G un groupe fini. Que vaut $x^{|G|}$ pour $x\in G$? Le démontrer dans le cas abélien. ii) Pour $\sigma\in S_n$, on définit l'endomorphisme f_σ par $f_\sigma(e_i)=e_{\sigma(i)}$. Montrer que $\sigma\mapsto f_\sigma$ est un morphisme de groupes de S_n dans $\mathrm{GL}(E)$.

1. Soit $\sigma\in S_n$. Montrer que f_σ est diagonalisable. Déterminer ses éléments propres.

1. On dit qu'un sous-espace de E est stable par permutation si tous les f_σ le stabilisent. Déterminer les sous-espaces stables par permutation.

Exercice 1205 [Centrale MP 2025 # 1182] 1. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent entre elles. Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à toutes les matrices de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que, si $p\neq n$, les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 1206 [Centrale MP 2025 # 1183] Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $u\in\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathbb{K}[u]$ est de dimension finie et que $\dim\mathbb{K}[u]=\deg\pi_u$.- b) Montrer que si u est inversible alors $u^{-1}\in\mathbb{K}[u]$.

1. Montrer que $\exp(u)\in\mathbb{K}[u]$.

1. On prend $E=\mathbb{K}[X]$ et D l'opérateur de dérivation. Montrer que $u=\mathrm{id}D$ est inversible. A-t-on $u^{-1}\in\mathbb{K}[u]$?

Exercice 1207 [Centrale MP 2025 # 1184] Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M.

1. Montrer que, pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$, M et P(M) commutent.

1. On pose $P=\prod_{k=1}^r(X\lambda_k)$. Montrer que $P'(M)\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB = BA.

1. Montrer que A et B possèdent un vecteur propre commun.

ii) Montrer qu'il existe $Q\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que les matrices $Q^{-1}AQ$ et $Q^{-1}BQ$ soient triangulaires supérieures.

1. On considère la suite $(M_k)_{k\geq 0}$ définie par $M_0=M$ et $M_{k+1}=M_k-P(M_k)P'(M_k)^{-1}$ pour tout $k\geq 0$. Montrer que la suite $(M_k)_{k\geq 0}$ est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 1208 [Centrale MP 2025 # 1185] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A a un polynôme annulateur scindé à racines simples.

1. Soient A, B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et qui commutent. Montrer que

$A+\lambda B$ est diagonalisable pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$.

1. Soit $n\geq 3$. Mettre en évidence deux matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne commutent pas et telles que $A+\lambda B$ soit diagonalisable pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. Soient A, B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A+\lambda B$ soit diagonalisable pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 1209 [Centrale MP 2025 # 1186] Soit Y une colonne de $\mathbb{C}^{n-1}$ non nulle, $z\in\mathbb{C}$ et $\alpha=Y^TY\in\mathbb{C}$.

On pose $A=\begin{pmatrix}0 & Y\\ Y^T & z\end{pmatrix}$.

1. Montrer que χ_A s'écrit $X^{n-2}(X-\lambda)(X-\mu)$. Calculer $\lambda+\mu$ et $\lambda^2+\mu^2$ et en déduire χ_A en fonction de α, z et n.

1. Discuter du rang de A^2. Déterminer le polynôme minimal de A selon que α est nul ou

non.

Exercice 1210 [Centrale MP 2025 # 1187] Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $F=\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$. On désigne par Φ l'application qui à $P\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ associe la reste de la division euclidienne de PF par X^n1.

1. Rappeler la définition de la division euclidienne de deux polynômes.

Montrer que $\Phi\in\mathcal{L}(\mathbb{C}_{n-1}[X])$.

1. i) Donner la matrice de Φ dans la base canonique. ii) Déterminer les éléments propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 1211 [Centrale MP 2025 # 1188] Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n. a) Montrer que les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u.b) Exprimer les coefficients des termes en X^{n-1} et X^{n-2} de χ_u en fonction de tr(u) et $tr(u^2)$.

1. On suppose u de rang 2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur tr(u) et $tr(u^2)$ pour que u soit diagonalisable.

Exercice 1212 [Centrale MP 2025 # 1189] Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\rho(A)=\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}|\lambda|$.

1. Justifier que $\rho(A)$ est bien défini. Montrer que les valeurs propres de A sont les racines de χ_A.

1. On pose $P_A(X)=X^n\chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$. Calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{P_A'}{P_A}$.

1. On suppose que $\rho(A) \leqslant 1$ et que $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{tr}(A^k)}{k}$ est bien défini et

que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{tr}(A^k)}{k} = -\int_0^1 \frac{P_A'(t)}{P_A(t)} dt$.

Exercice 1213 [Centrale MP 2025 # 1190] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0<i,i<n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ continues et intégrables. On pose $K_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} x^k$.

1. Énoncer et démontrer le critère d'injectivité d'une application linéaire.

1. Pour $f \in E$, on pose $T_n(f) : x \in [0,1[\mapsto \int_0^1 K_n(xt) f(t) dt$.

1. Montrer que T_n est un endomorphisme de E. ii) Montrer que 0 est valeur propre de T_n.

iii) Comparer les valeurs propres de T_n et de H_n.

Exercice 1214 [Centrale MP 2025 # 1191] Soient E un espace euclidien et une partie finie $\mathcal{R}$ de $E \setminus \{0\}$ telle que :

- $\mathcal{R}$ engendre E,
- pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ est stable par la réflexion s_α par rapport à l'hyperplan de vecteur normal α,
- pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, les seuls vecteurs colinéaires à α dans $\mathcal{R}$ sont α et $-\alpha$,
- pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $n_{\alpha,\beta} = 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$.

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- i) Donner la définition de la réflexion s_α ainsi que son expression analytique.
- ii) Calculer $n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha}$ en fonction de $\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|}$.

iii) On suppose α, β non colinéaires et tels que $n_{\alpha,\beta} > 0$. Montrer que $n_{\alpha,\beta} = 1$ ou $n_{\beta,\alpha} = 1$.

1. On munit E d'un ordre total $\leq$ qui respecte :

- $\forall (x, y, z) \in E^3, x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$,
- $\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}^+, x \leqslant y \Longrightarrow \lambda x \leqslant \lambda y$.

On note $\mathcal{R}^+$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}$ plus grands que 0_E au sens de $\leq$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}^+$ ne s'écrivant pas comme somme de deux éléments de $\mathcal{R}^+$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que x s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$ à coefficients entiers positifs.

- ii) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Exercice 1215 [Centrale MP 2025 # 1192] Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. i) Donner la définition d'un endomorphisme autoadjoint.

Soient B une base orthonormale de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans la base B est symétrique.

1. Soient B une base orthonormale de E et $f \in S^+(E)$.

On note $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la matrice de f dans la base B. Soit $i \in [1, n]$.
Montrer que, si $m_{i,i} = 0$, alors les ligne i et colonne i de la matrice M sont nulles. Ind. Considérer l'application $t \mapsto \langle f(e_i + te_i), e_i + te_i \rangle$.

1. Soient $f \in \mathcal{S}^+(E)$ et $g \in \mathcal{S}(E)$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ \det(ftg) = 0$.

- i) Montrer que $Ker(g) \neq \{0\}$.
- ii) Montrer que $Ker(f) \cap Ker(g) \neq \{0\}$.

Exercice 1216 [Centrale MP 2025 # 1193] On pose, pour

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} \left(\frac{|a_{i,j}| + |a_{j,i}|}{2} \right).$$

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. L'application N est-elle une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $|\lambda| \leq nN(A)$.

Exercice 1217 [Centrale MP 2025 # 1194] L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et telle que $\int_a^b f = 0$. Montrer que f est nulle.

1. Montrer que la matrice $M_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique définie positive. Indi-

cation : $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2}dt$.

1. On note $\lambda_{\min}$ (resp. $\lambda_{\max}$) la plus petite (resp. grande) valeur propre de M_n. Montrer que $\lambda_{\min}||x||^2 \leqslant x^T M_n x \leqslant \lambda_{\max}||x||^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. On note F le sous-espace propre de M_n associé à $\lambda_{\max}$. Montrer que, si $x \in F$, toutes les coordonnées de x sont de même signe.

1. Déterminer $\dim F$.

Exercice 1218 [Centrale MP 2025 # 1195] 1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Justifier que A possède au moins une valeur propre réelle.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $(x_1, \ldots, x_k)$ une famille libre formée de vecteurs propres de A tels que les valeurs propres associées $\mu_1, \ldots, \mu_k$ soient en ordre croissant.

On note $S = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$. Montrer que

$$\mu_1 = \min_{x\in S,\ \|x\|=1} x^T Ax = \min_{x\in S\setminus\{0\}} \frac{x^T Ax}{x^T x} \text{ et } \mu_k = \max_{x\in S,\ \|x\|=1} x^T Ax = \max_{x\in S\setminus\{0\}} \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

1. Soient A, B dans $S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$ les valeurs propres de A (en tenant compte des multiplicités), et de même pour B et $A+B$.

Montrer que $\forall i \in [1,n],\ \forall j \in [0, n-i],\ \lambda_i(A+B) \leqslant \lambda_{i+j}(A) + \lambda_{n-j}(B)$.

2) Analyse

Exercice 1219 [Centrale MP 2025 # 1196] 1. Montrer que $E = \ell^1(\mathbb{N})$, espace des suites réelles sommables, est un espace vectoriel normé pour $u \mapsto \sum |u_n|$.

1. On munit E de la relation d'ordre partielle $u \leq v \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$. Soit (u_k) une suite d'éléments de E croissante et majorée par $v \in E$. Montrer que (u_k) converge dans E.

1. Soient u, v deux éléments de E tels que $u \leq v$. Montrer que l'ensemble des éléments wde E tels que $u \preceq w \preceq v$ est compact.

1. Donner un exemple de partie compacte K de E telle qu'il n'existe pas de suite $u \in E$ vérifiant $\forall x \in K, |x| \leq u$.

Exercice 1220 [Centrale MP 2025 # 1197] Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, C un convexe compact d'intérieur non vide de E, symétrique par rapport à 0.
Pour $x \in E$, on pose $j_C(x) = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{x}{\lambda} \in C\right\}$, en convenant que $\inf \emptyset = +\infty$.

1. i) Rappeler la définition d'une norme.

- ii) Montrer que j_C est à valeurs réelles, positive et homogène.

- iii) Montrer que $j_C(x) = 0$ si et seulement si x = 0.

1. i) Montrer que $x \in C$ si et seulement si $j_C(x) \in [0,1]$.

- ii) Montrer que, pour tous $x, y \in E$, $j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$.

Ind. Pour $\varepsilon > 0$, poser $x' = \frac{x}{j_C(x)+\varepsilon}$, $y' = \frac{y}{j_C(y)+\varepsilon}$ et $t = \frac{j_C(x)+\varepsilon}{j_C(x)+j_C(y)+2\varepsilon}$.

1. On munit E d'une norme. Montrer l'existence de $f : E \to E$, continue, bijective, et telle

que $f(C) = \overline{B(0,1)}$ et $f(C \setminus \mathring{C}) = S(0,1)$.

Exercice 1221 [Centrale MP 2025 # 1198] 1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel normé E. Montrer que la continuité de u est équivalente à son caractère lipschitzien, et aussi à sa continuité en 0.

1. On munit $\ell^2(\mathbb{Z})$, espace vectoriel des familles de réels de carré sommable indexées par $\mathbb{Z}$ (on admet qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$), de $(u,v) \mapsto \sum_n u_n v_n$, dont on

admet qu'il s'agit d'un produit scalaire, et on munit $\ell^2(\mathbb{Z})$ de la norme associée. On pose $T : u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mapsto (2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Montrer que T est un endomorphisme continu de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que T est injectif mais non surjectif.

1. Montrer que T + id est surjectif.

Exercice 1222 [Centrale MP 2025 # 1199] 1. i) Montrer que l'imageqd'une partie connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs.

ii) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que f est strictement monotone.Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice $f(A) = (f(a_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$ est inversible.

1. Montrer que f est strictement monotone et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

1. On suppose f croissante et surjective. Caractériser f.

Exercice 1223 [Centrale MP 2025 # 1200] 1. Rappeler la définition de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et montrer que c'est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que A = OS.

1. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}$ la boule unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- i) Montrer que $\mathcal{B}$ est convexe.

ii) Trouver les points extrémaux de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{B}$ telles que $\mathcal{B} \setminus \{A\}$ est convexe.

Exercice 1224 [Centrale MP 2025 # 1201] Soit $E_n = \mathcal{C}^n([-1,1],\mathbb{C})$. Si $f \in E_n$, on pose $\pi_n(f) = \max_{k\in[0,n]} \|f^{(k)}\|_\infty$.

1. Montrer que π_n est une norme sur E_n, puis calculer $\pi_n(x \mapsto x^n)$.

1. Si $f \in E_n$, on pose $A_n(f) : x \in [-1,1] \mapsto xf(x)$. Montrer que A_n est un endomorphisme de E_n, continu pour π_n, et de norme subordonnée n+1.

1. On suppose $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in E_n$, on pose $B_n(f) : x \in [-1,1] \mapsto \int_0^1 f'(xt)dt$. Montrer que B_n est une application linéaire de E_n dans E_{n-1}. Montrer que B_n est continue pour les normes π_n et π_{n-1}, et de norme subordonnée 1.

Exercice 1225 [Centrale MP 2025 # 1202] 1. Énoncer les théorèmes de sommation des relations de comparaison pour les séries numériques.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n \ln(k) = n\ln(n)n + O(\ln(n))$.

1. Soient $(a_k)_{k\geq 2}$ une suite réelle et $b : [2,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $A(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor t\rfloor} a_k$

pour $t \geq 2$. Montrer que $\sum_{k=2}^n a_k b(k) = A(n)b(n) - \int_2^n b'(t)A(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout entier $n \geq 2$.

1. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On pose $R : t > 1 \mapsto \sum_{p\in\mathcal{P},\ p\leqslant t} \frac{\ln p}{p}\ln(t)$.

Montrer que $\sum_{p\in\mathcal{P},p\leqslant n} \frac{1}{p} = 1 + \ln(\ln n)\ln(\ln 2) + \frac{R(n)}{\ln n} + \int_2^n \frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout entier $t = 1 + \ln(\ln n)\ln(\ln 2) + \frac{R(n)}{\ln n} + \frac{R(n)}{t(\ln t)^2} + \frac{R(n)}{t(\ln t)^2} + \frac{R(n)}{t(\ln t)^2} + \frac{R(n)}{??}$

1. Montrer qu'il existe une constante C telle que $\sum_{p\in\mathcal{P},n\leq p} \frac{1}{p} = \ln(\ln n) + C + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1226 [Centrale MP 2025 # 1203] 1. Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.b) Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ en posant $\|P\| = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme $T_d \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré d tel que $\cos(d\theta) = 2^{d-1}T_d(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on note E_d l'ensemble des polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $||P|| \geq \frac{1}{2^{d-1}}$ pour tout $P \in E_d$.

ii) Étudier le cas d'égalité.

Exercice 1227 [Centrale MP 2025 # 1204] 1. Rappeler la définition de la continuité uniforme pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique. Montrer que f est uniformément continue.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, périodique et non constante. Montrer que f admet une plus petite période strictement positive, que l'on notera P(f).

1. Montrer que le résultat de la question précédente peut tomber en défaut si l'on omet l'hypothèse de continuité.

1. Soient f et g continues, périodiques et non constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f+g est périodique si et seulement si $\frac{P(f)}{P(g)} \in \mathbb{Q}$.

Exercice 1228 [Centrale MP 2025 # 1205] Soient $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^2)$ et $\|\|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (t,s) \in [0,1]^2, |t-s| \leqslant \eta \Rightarrow ||f(s) - f(t) - (s-t)f'(t)|| \leqslant \varepsilon|s-t|.$$

1. En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} \left\|f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right\|$ tend vers $\int_0^1 \|f'(t)\|dt$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1229 [Centrale MP 2025 # 1206] Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}dt$.

1. Montrer que toute fonction continue par morceaux sur [0, 1] est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

1. Justifier l'existence des intégrales puis calculer $I_{n+1}I_n$, I_n, $J_{n+1}J_n$ et J_n.

1. Soit $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

Montrer que
$$\int_0^{\pi/2} f(t)\sin^2(nt)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f(t)dt.$$

Exercice 1230 [Centrale MP 2025 # 1207] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire, ainsi que sa démonstration.
1. Montrer que si ff' a une limite (finie ou infinie) non nulle en $+\infty$, alors f^2 tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
1. On suppose désormais que f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f')^2$ l'est aussi.
1. Montrer que $\left(\int_{\mathbb{D}}(f')^2\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{D}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{D}}(f'')^2\right)$.
1. Montrer que f est uniformément continue et tend vers 0 en $\pm\infty$.

Exercice 1231 [Centrale MP 2025 # 1208] Pour une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ et un réel s, on note $Lf(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ lorsque la série converge absolument. On pose $A(f) = \inf\{s \in \mathbb{R}, Lf(s) \text{ défini}\}$ avec la convention $\inf\emptyset = +\infty$.

1. Rappeler la définition de la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.
1. Soit s un réel tel que s > A(f). Montrer que Lf(s) est défini.
1. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$ telles que $A(f) < +\infty$ et $A(g) < +\infty$. On suppose que $\forall s > \max(A(f), A(g)),\ Lf(s) = Lg(s)$. Montrer que f = g.
1. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que $A(f) < +\infty$ et $A(g) < +\infty$. On pose $h(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g(n/d)$. Montrer que $\forall s > \max(A(f), A(g)),\ Lh(s) = Lf(s)Lg(s)$.

Exercice 1232 [Centrale MP 2025 # 1209] On note $L^2(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, de carré intégrable.

1. Montrer que $(f,g) \mapsto \int_{\mathbb{D}^+} fg$ est un produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^+)$.
1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
1. Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f$ est prolongeable en une fonction continue ψ sur $\mathbb{R}^+$.
1. Montrer que $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+)$ et $\int_0^{+\infty}\psi^2 \leqslant 4\int_0^{+\infty}\varphi^2$.

Exercice 1233 [Centrale MP 2025 # 1210] 1. Énoncer les théorèmes de changement de variable et d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que $\int_0^{+\infty}\cos(P(t))dt$ converge.
1. Montrer que $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 1234 [Centrale MP 2025 # 1211] 1. Caractériser la convexité pour les fonctions dérivables sur un intervalle.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\theta \in \mathbb{R}, \sin((2n+1)\theta) = (\sin\theta)P_n(\sin^2\theta)$.
1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi x) = (2n+1)\sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^n\left(1\frac{\sin^2(\pi x/(2n+1))}{\sin^2(k\pi/(2n+1))}\right)$.
1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \prod_{k=1}^n\left(1\frac{x^2}{k^2}\right)$. Étudier la limite simple de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 1235 [Centrale MP 2025 # 1212] Pour tous $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $K_n(x) = \sum_{k=-n}^n\left(1\frac{|k|}{n}\right)e^{ikx}$.

1. Soient $q \in \mathbb{C}$ et $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leqslant n$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n q^k$. b) Pour tous $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, montrer que $K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{j} e^{ikx} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$.
1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π -périodique. On pose, pour $k \in \mathbb{Z}$, $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$. Pour

$n \in \mathbb{N}$, soit $S_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$.

1. Montrer que $f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)K_n(x-t)dt$ pour tous $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

ii) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1236 [Centrale MP 2025 # 1213] Pour $n \geq 1$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)$. On pose $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1. Montrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La convergence de $\sum f_n$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
1. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. c) Trouver un équivalent de f' en $+\infty$.

Exercice 1237 [Centrale MP 2025 # 1214] Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{x}{n}\right)$. On suppose que S a une limite réelle ℓ en $+\infty$. On souhaite montrer que la suite (a_n) est nulle.

1. i) Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrangeqà un ordre quelconque.

ii) Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge absolument et que $\ell = 0$.

- i) Montrer que S est continue.
- ii) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $I : T \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T S(x)\cos\left(\frac{x}{m}\right) dx$.

Montrer que $\lim_{T\to+\infty} I(T) = 0$.
iii) Montrer que $a_m = 0$.

1. Traiter le cas général.

Exercice 1238 [Centrale MP 2025 # 1215] On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}}^x t f_n(t)dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) puis de la série $\sum f_n$:

- i) dans le cas où f est constante, ii) dans le cas général.

1. Soit $T : f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Montrer que T définit un automorphisme de l'espace vectoriel E.

Exercice 1239 [Centrale MP 2025 # 1216] 1. Démontrer le théorème d'interversion série-intégrale sous convergence uniforme sur un segment

1. Soit $I : x \mapsto \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sqrt{x}\sin(t)}dt$. Montrer que I est développable en série entière sur $\mathbb{R}^+$.

1. Donner un équivalent en $+\infty$ de $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

Exercice 1240 [Centrale MP 2025 # 1217] 1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

1. Soit $L : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{tx}e^{-t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que la fonction L est développable en série entière au voisinageqde 0. Préciser la validité et les coefficients de ce développement. On admettra que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 1241 [Centrale MP 2025 # 1218] Soit (a_n) une suite réelle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

1. Donner la définition du produit de Cauchy de deux séries entières et donner une minoration de son rayon de convergence.

1. Montrer que, si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ vaut 1, alors le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ vaut également 1. La réciproque est-elle vraie ?

1. Montrer que les séries entières $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ et $\sum \frac{A_n}{n!}x^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 1242 [Centrale MP 2025 # 1219] 1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière et le comportement pour |z| < R et |z| > R.

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \tan(n)z^n$ est inférieur ou égal à 1.

On admet qu'il existe $\mu > 2$ tel que, pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\left|\frac{1}{\pi}\frac{p}{a}\right| > \frac{1}{a^\mu}$.

1. Montrer que R=1.

Exercice 1243 [Centrale MP 2025 # 1220] Soient $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$. Soit (E_a) l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$, d'inconnue f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $S_{a,k}$ l'ensemble des solutions de (E_a) qui vérifient en plus f(0) = k.

1. Déterminer $S_{1,k}$ et $S_{-1,k}$. Dans la suite, on suppose que |a| < 1.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{x^n}{n!}$. En déduire un élément de $S_{a,k}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que f appartient à $S_{a,k}$ si et seulement si T(f) = f, où $T(f) : x \mapsto k + \int_{-\infty}^x f(at)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $S_{a,k}$ est un singleton.

Exercice 1244 [Centrale MP 2025 # 1221] 1. Rappeler la règle de d'Alembert.
En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p\binom{2n}{n}}$ est définie.

1. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}}{n^2\binom{2n}{n}}x^{2n}$. Déterminer le rayon de convergence R de S.

1. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[, S(x) = \arcsin(x)^2$. Calculer A_0, A_1, A_2.

Exercice 1245 [Centrale MP 2025 # 1222] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la somme des chiffres de l'écriture binaire de n.
On pose $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante.

Montrer que $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

1. i) Donner le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.

ii) Donner une relation vérifiée par $S(x^2)$ et $S(x)$.

1. Exprimer $(1-x)S(x)$ sous forme d'une somme, puis donner un équivalent de S en R^-.

Exercice 1246 [Centrale MP 2025 # 1223] Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite asymptotiquement périodique lorsqu'il existe des entiers $N \geq 0$ et $T \geq 1$ tels que $\forall n \geq N,\ u_{n+T} = u_n$.

1. Énoncer et démontrer le lemme d'Abel (sur les séries entières). b) Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ asymptotiquement périodique. Déterminer le rayon de convergence R de
$\sum a_n z^n$ et montrer qu'il existe une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que

$\forall z \in D_o(0,R), \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = F(z)$.

1. On définit une suite $b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $b_0 = 1$, et $b_{2n+1} = -b_n$ et $b_{2n} = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que b n'est pas asymptotiquement périodique.

$a^t 1$

Exercice 1247 [Centrale MP 2025 # 1224] Soient $f : t \mapsto \frac{e^t 1}{t}$ et $g : t \mapsto \frac{t}{e^t 1}$, prolongées continûment en 0.

1. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. On admet que, si h est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que $h(0) \neq 0$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{h(x)}$ est développable en série entière en 0.

Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que, pour un $\rho > 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]-\rho, \rho[\setminus\{0\}, \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n.$$

1. Montrer le résultat admis.

Exercice 1248 [Centrale MP 2025 # 1225] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.- b) Énoncer le théorème de convergence dominée ; calculer les limites de f aux bornes de D.

1. Montrer que f est de classe C^1 et étudier le signe de sa dérivée.

Exercice 1249 [Centrale MP 2025 # 1226] Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x} dt$.

1. Rappeler le théorème de convergence dominée.

1. i) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

ii) Trouver la limite de f en 0^+ et en $+\infty$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer l'existence de $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Exercice 1250 [Centrale MP 2025 # 1227] On note $C = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et S le sous-espace des fonctions continues nulles en dehors d'un segment.
Pour $f \in C$, $g \in S$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$.

1. i) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

ii) On suppose g de classe C^1. Montrer que $\gamma(f,g)$ est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction de f,g et γ.

1. Soit $\varphi \in S$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$.

Soit $f \in C$. Montrer que la suite $(\gamma(f, \varphi_n))$ converge simplement vers f. c) Soit $f \in C$. Pour tous $x, \tau \in \mathbb{R}$, on pose $f_\tau(x) = f(x-\tau)$. On suppose que l'espace Vect$(f_\tau, \tau \in \mathbb{R})$ est de dimension finie. Montrer que f est de classe C^∞.
On admettra que, si $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice $(f_i(x_i))_{1\leq i,j\leq n}$ soit inversible.

Exercice 1251 [Centrale MP 2025 # 1228] 1. Énoncer le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n.

On note (E) l'équation différentielle xy" + y' + xy = 0.

1. Montrer que $F : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t))dt$ est solution de (E).

1. Montrer que (E) admet une unique solution J développable en série entière au voisinageqde 0 et telle que J(0) = 1.

1. Montrer, pour tout réel p>1, que $\widehat{J}(p) = \int_0^{+\infty} J(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ est bien définie, et en donner une expression plus explicite.

1. Justifier qu'il existe une infinité de solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ non développables en série entière au voisinageqde 0.

Exercice 1252 [Centrale MP 2025 # 1229] Soient $\nu \in \mathbb{R}$ et $(E) : x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2\nu^2)y(x) = 0$.

1. Énoncer et démontrer le théorème d'intégration des relations de comparaison.

1. Montrer l'existence d'une fonction $\ell :]0,1[\to \mathbb{R}^{+*}$ deux fois dérivable telle que y est solution de (E) sur]0,1[si, et seulement si la fonction $z = \ell y$ est solution d'une équation différentielle du type $z''(x) + \alpha(x) z(x) = 0$.- c) Résoudre l'équation (E) sur [0, 1[.

Exercice 1253 [Centrale MP 2025 # 1230] Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ paire et π -périodique. Soit (E) : y" + qy = 0.

1. Montrer que l'ensemble S des solutions de (E) est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

1. Pour $y \in S$, on note $\varphi(y) : x \mapsto y(x+\pi)$. Montrer que φ est un endomorphisme de S.

1. Soit $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$ la base de S formée des solutions vérifiant $y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0$,

$y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$.

1. Étudier la parité de y_1 et y_2.

1. Montrer que $\det A = 1$.

1. Montrer que $A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix}$ puis que $A + A^{-1} = (\operatorname{tr} A) I_2$. En déduire que $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$. Montrer que χ_A est de la forme $X^2 - 2aX + 1$ pour un certain réel a.

Exercice 1254 [Centrale MP 2025 # 1231] Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On munit l'espace $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ de la norme définie par $N(A) = \sup_{j \in [\![1\ d]\!]} \sum_{i=1}^{a} |a_{i,j}|$.

1. Montrer que $N(AB) \leq N(A) N(B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$

1. On fixe $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $R_k : A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \mapsto A^k \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ est différentiable, et calculer sa différentielle.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \chi_{tA} \in \mathbb{R}_d[X]$ est dérivable, et calculer sa dérivée.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto \chi_{tA}(B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ est dérivable, et calculer sa dérivée.

Exercice 1255 [Centrale MP 2025 # 1232] 1. i) Énoncer le théorème spectral.
ii) Définir l'ensemble $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et montrer l'équivalence avec la positivité du spectre. b) On fixe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $\varphi : U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(M^T U)$. Montrer que φ admet un maximum, atteint en une matrice $U_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. i) On fixe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et on pose $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(\exp(tA) U_0)$.

Montrer que ψ est bien définie, continue, et dérivable en 0. Donner deux expressions de $\psi'(0)$.
ii) Conclure sur la nature du maximum de φ en U_0.

Exercice 1256 [Centrale MP 2025 # 1233] Soient U un ouvert non vide d'un espace normé E de dimension finie et [a,b] un segment inclus dans U avec $a \neq b$.

1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que f(b) f(a) = df(c)(b a).

1. Soit $f : U \to F$ où F est un espace euclidien. On suppose f différentiable sur U et df bornée sur U. Montrer que $||f(b) - f(a)|| \leq \sup ||df(x)||_{op} ||b - a||$.

1. Montrer que l'inégalité est encore vérifiée si F est un espace vectoriel normé de dimension finie.

Exercice 1257 [Centrale MP 2025 # 1234] 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec a < b et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)dt.$$

1. On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ candidats se présentent à un poste de secrétaire. Le recruteur les rencontrent successivement et pour chacun, il doit décider s'il l'engageqou pas. Si oui, il termine le processus de recrutement sans voir les candidats suivants. Sinon, le candidat est définitivement éliminé.

La valeur de chaque candidat correspond à un score et on note $s_1 < \cdots < s_n$ la liste croissante des scores obtenus. On note $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation aléatoire telle que le candidat qui passe devant le recruteur en position numéro j a obtenu le score $s_{\sigma(j)}$ pour tout $j \in [1, n]$.

1. Déterminer la loi de S_j, variable aléatoire du score du $j^{\text{ème}}$ candidat.

ii) Déterminer la loi de R_j, variable aléatoire du rang du meilleur candidat parmi les j premiers.

1. On choisit la stratégie de refuser les m_n premiers candidats, et de choisir le premier candidat dont le score est supérieur à l'un des scores précédemment rencontrés.

- i) Soit p_n la probabilité d'embaucher le meilleur candidat.

Montrer que $p_n = \frac{m_n}{n} \sum_{j=m_n+1}^{n} \frac{1}{j-1}$.

ii) On suppose que $\frac{m_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in \mathbb{R}$. Montrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Optimiser alors x pour maximiser la probabilité de recruter le meilleur candidat.

Exercice 1258 [Centrale MP 2025 # 1235] On suppose que $N \geq 2$ candidats passent un concours. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, X_k est le nombre de tentatives du candidat numéro k pour réussir le concours. On suppose que $X_1, \ldots, X_N$ sont indépendantes et suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ le nombre total de tentatives, et $Y_N = \max(X_1, \ldots, X_N)$ le nombre maximal de tentatives.

1. Rappeler la définition d'une loi géométrique, ainsi que ses espérance et variance. Donner l'espérance et la variance de S_N, ainsi que la fonction génératrice de X_1.

1. Donner les lois de S_N et Y_N.

1. i) Montrer que Y_N est d'espérance finie, puis que $\mathbf{E}(Y_N) = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{1-q^k}$.

- ii) En utilisant $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k(1-x)^k$, donner un équivalent de $\mathbf{E}(Y_N)$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 1259 [Centrale MP 2025 # 1236] Soient E un espace préhilbertien réel, $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E, et $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

1. Que dire d'une variable aléatoire réelle, positive et d'espérance nulle ?- b) On pose $U = \sum_{i=1}^{n} X_i v_i$. Calculer $\mathbf{E}(||U||^2)$.

1. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

1. il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\| < \sqrt{n}$, ii) il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\| > \sqrt{n}$.

1. À quelle condition ces énoncés sont-ils réalisés ?

Exercice 1260 [Centrale MP 2025 # 1237] Soient X une variable aléatoire suivant $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\varphi_X : t \mapsto \mathbf{E}(e^{itX})$. a) Montrer que X admet une espérance et la calculer. Calculer $\varphi_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\int_{-\kappa}^{\kappa} \exp(k(e^{it}1it))dt = 2\pi \frac{k^k}{k!} e^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. c) Retrouver la formule de Stirling. On admettra que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 1261 [Centrale MP 2025 # 1238] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_k$. a) Calculer la fonction génératrice associée à une loi de Poisson.

1. Montrer que $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|S_n n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$.

d) Soit $x > 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-\lambda n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 < x < \lambda, \\ 1 \text{ si } x > \lambda. \end{cases}$

1. Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ est une fonction continue et nulle en dehors d'un segment, on pose

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \mathcal{L}(f)^{(k)}(n) = \int_0^x f$.

Exercice 1262 [Centrale MP 2025 # 1239] On pose $\varphi(x) = -x\ln(x)$ pour $x \in [0, 1]$ et $\varphi(0) = 0$. Pour X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on pose, sous réserve d'existence, $H(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} \varphi(p_x)$ où $p_x = \mathbf{P}(X = x)$. a) i) Rappeler la définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète. Donner également le rayon de convergence et la valeur de la somme des séries entières $\sum x^n$ et $\sum nx^{n-1}$. ii) On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1[$. Justifier la finitude de H(X) et calculer sa valeur.

1. On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.- i) Pour $x \in]0, 1]$, on pose $\psi(x) = \sqrt{x}\ln^2(x)$. Étudier la fonction ψ et en déduire que, si X est d'espérance finie, alors H(X) est finie.

- ii) Que dire si $\mathbf{E}(X) = +\infty$?

1. Soit Z = (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ Montrer que si H(X), H(Y) et H(Z) existent, alors $H(Z) \leq H(X) + H(Y)$.

Exercice 1263 [Centrale MP 2025 # 1240] On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Soient X une variable aléatoire discrète et A un événement non négligeable. On pose $\mathbf{E}(X \mid A) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbf{P}(X = x \mid A)$.

1. Montrer que, si $X \in L^1$ et si A est un événement non négligeable, alors $\mathbf{E}(X \mid A)$ est bien définie.

1. Soient $(A_n)_{n\geq 0}$ un système complet d'événements et $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose S= $\sum a_n \mathbf{1}_{A_n}$. Montrer que S est une variable aléatoire et que S admet une espérance si et

seulement si $\sum |a_n| \mathbf{P}(A_n)$ converge.

1. On suppose $X \in L^1$. On suppose que, pour tout $y \in Y(\Omega)$, $\mathbf{P}(Y=y)>0$ et on pose $\mathbf{E}(X|Y)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbf{E}(X|Y=y)\mathbf{1}_{Y=y}$. Montrer que $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|Y))=\mathbf{E}(X)$.

1. On suppose que X et Y sont dans L^2, que $\mathbf{E}(X \mid Y)=Y$ et $\mathbf{E}(Y \mid X)=X$. Montrer que

X = Y presque sûrement.

Exercice 1264 [Centrale MP 2025 # 1241] 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer : $\mathbf{E}(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X\geq n)$.

1. Soit (X_k) une suite i.i.d. de variables de Poisson de paramètre $\lambda>0$. On pose $N=\inf\{k\in\mathbb{N}^*, X_k>X_0\}\in[1,+\infty]$. Montrer que N est une variable aléatoire.

1. L'espérance de N est-elle finie ?

Exercice 1265 [Centrale MP 2025 # 1242] Soient X une variable aléatoire réelle et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que si $X\in L^2$ alors $aX+b\in L^2$, et exprimer $\mathbf{V}(aX+b)$ en fonction de $\mathbf{V}(X)$. b) Montrer que, si $K(X)=\frac{\mathbf{E}((X\mathbf{E}(X))^4)}{\mathbf{V}(X)^2}3$ existe alors, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$,

il en est de même pour K(aX + b), et l'exprimer en fonction de K(X).

1. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

1. il existe un réel $\delta>0$ tel que $\forall t\in]-\delta,\delta[, e^{tX}\in L^1$, ii) $\forall n\in\mathbb{N}, X^n\in L^1$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\mathbf{E}(X^n)}{n!}t^n$ a un rayon de convergence non nul.

Exercice 1266 [Centrale MP 2025 # 1243] Soit $m\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne habituelle. On note S sa sphère unité. Pour une famille $e=(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de S (éventuellement infinie), on note $Coh(e)=\sup_{(i,j)\in I^2}|\langle e_i,e_j\rangle|$.

1. Rappeler sans démonstration l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Soit $e\in S^I$. Que signifie l'égalité Coh(e) = 0 ?c) Soit $e\in S^I$ telle que Coh(e) < 1. Montrer que I est fini.

Pour $t\in\mathbb{R}$, montrer que $\mathbf{E}(e^{t\langle X,Y\rangle})\leq e^{t^2/2m}$.

1. Soit Z une variable aléatoire réelle bornée. Montrer que $e^{tZ}\in L^1$ pour tout réel t.

1. Soient $X=(X_1,\dots,X_n)$ et $Y=(Y_1,\dots,Y_n)$ deux vecteurs aléatoires indépendants à

valeurs dans S, tels que pour tout $i\in[1,m]$ les variables $\sqrt{n}X_i$ et $\sqrt{n}Y_i$ soient de Rademacher (i.e., suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$), et $X_1,\dots,X_n$ soient indépendantes d'une
part, $Y_1,\dots,Y_n$ indépendantes d'autre part.

1. Soit $\varepsilon>0$. Démontrer qu'il existe un ensemble fini I de cardinal $\lfloor e^{m\varepsilon^2/4}\rfloor$ et une famille $e\in S^I$ telle que $Coh(e)<\varepsilon$.

Exercice 1267 [Centrale MP 2025 # 1244] Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,1\}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

1. Montrer, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, que la série $\sum\frac{1}{n\ln^4(n)}$ converge.

1. i) Montrer que, pour tout a > 0, $\mathbf{P}(|S_n|\geq a)\leqslant\frac{3n^2}{a^4}$.

$ii)$ On pose $A=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{m=n}^{+\infty}\left(|S_m|<m^{\frac{3}{4}}\ln(m)\right)$. Montrer que $\mathbf{P}(A)=1$.

1. Montrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n^{3/4}\ln(n)}\right)$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 1268 [Centrale MP 2025 # 1245] 1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, donner la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme T^n-1 dans $\mathbb{R}[T]$ puis $\mathbb{C}[T]$.

1. Soient X,Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Rappeler pourquoi $G_{X+Y}=G_XG_Y$.

1. Soit un entier $p\geq2$. Sous les hypothèses précédentes, montrer que X + Y ne peut pas suivre la loi uniforme sur [2, 2p] sachant que X et Y prennent toutes les valeurs dans [1, p]avec probabilité non nulle.

XII) Centrale - PSI

1) Algèbre

Exercice 1269 [Centrale PSI 2025 # 1246] Soit, pour $n\geq2$, $P_n=X^nX+1$.

1. Montrer que P_n admet au plus une racine réelle ; localiser cette racine dans un intervalle de longueur 1.

1. Déterminer les racines de P_n' en utilisant les racines n-ièmes de l'unité.

1. Pour n=3, $P_3(X)=X^3-X+1$. On note η_1,η_2,η_3 les racines de P_3. Calculer $\begin{vmatrix}1+\eta_1&1&1\\1&1+\eta_2&1\\1&1&1+\eta_3\end{vmatrix}$.

Exercice 1270 [Centrale PSI 2025 # 1247] Soient $n \geq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$ tels que a < b. On cherche à prouver l'existence et l'unicité de $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que (1) :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

1. On suppose l'existence de $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$. Montrer que (1) est équivalent à (2)

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \ \int_0^n Q(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k Q(k).$$

En déduire que les α_k sont indépendants de (a, b).

1. Pour $i \in [0, n]$, soit $B_i = \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} (X - k)$. Montrer que $(B_0, \ldots, B_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer l'existence et l'unicité de $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$.

1. Montrer que $\forall i \in [0, n], \alpha_i = \alpha_{n-i}$.

1. Calculer les α_i pour n=1, 2 et 3.

Exercice 1271 [Centrale PSI 2025 # 1248] Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\ker(M), \mathrm{Im}(M), \ker(M^2), \mathrm{Im}(M^2)$. Ces deux derniers espaces sont-ils supplémentaires ?

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $N(u) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker(u^k)$ et $C(u) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}(u^k)$.

1. Montrer que N(u) et C(u) sont des sous-espaces et supplémentaires, stables par u, que l'endomorphisme induit par u sur C(u) est un automorphisme, et que celui induit sur N(u) est nilpotent.

1. Démontrer qu'il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que $N(u) = \ker(u^p)$ et $C(u) = \mathrm{Im}(u^p)$.

1. Réciproquement, soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E stables par u tels que u induise un automorphisme de F et un endomorphisme nilpotent de G. Montrer que F = C(u) et G = N(u).

Exercice 1272 [Centrale PSI 2025 # 1249] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{id}$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. On note $A_f = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, $B_f = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$, $A_g = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$, $B_g = \mathrm{Ker}(g + \mathrm{id})$.
$B_g = \mathrm{Ker}(g + \mathrm{id})$. a) Démontrer que $g(A_f) = B_f$ et $g(B_f) = A_f$.

1. En déduire que la dimension de E est paire.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1273 [Centrale PSI 2025 # 1250] 1. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{M}_p(\mathbb{C}))$ telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(AB) = f(A)f(B)$. Soit $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{Tr}(f(M))$. Montrer : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(BA)$

1. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Tr}(f(M)) = \alpha\,\mathrm{Tr}(M)$.

Exercice 1274 [Centrale PSI 2025 # 1251] Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note J_k la matrice $\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

Si M est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle indice de nilpotence de M le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice n. Montrer que M est semblable à J_n.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice p. Montrer que $p \leq n$. c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice 2 et de rang $r \in \{1, \ldots, n-1\}$. Montrer que M est semblable à diag $(J_2, \ldots, J_2, 0_{n-r})$.

Exercice 1275 [Centrale PSI 2025 # 1252] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\chi_A = X^n$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose A semblable à 2A. Que peut-on dire de χ_A ? Montrer que A est nilpotente.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à 2A.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Montrer que A est semblable à 2A.

Exercice 1276 [Centrale PSI 2025 # 1253] Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

1. Montrer que $Sp(u) = \{0\}$.

1. Soit $v = \sum_{k=0}^{p-1} u^k$. Montrer que v est un automorphisme et trouver v^{-1}.

1. Montrer que Ker(v id) = Ker(u).

1. Trouver le spectre de v.

Exercice 1277 [Centrale PSI 2025 # 1254] Soient $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Rappeler la formule de Taylor pour $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$; la démontrer dans le cas a = 0.

1. Soit $P \in E$.

Montrer qu'il existe un unique $Q \in E$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)Q(x) = \int_1^x P(t)dt$.

1. On note f l'application qui à P associe Q. Montrer que f est un endomorphisme de Ediagonalisable.

Exercice 1278 [Centrale PSI 2025 # 1255] Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ab(a-b) \neq 0$. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 3$ et $f, u, v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant f = au + bv, $f^2 = a^2u + b^2v$, $f^3 = a^3u + b^3v$.

1. Donner un exemple d'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ diagonalisable et non nul vérifiant ces

conditions.

1. On revient au cas général. Montrer que f est diagonalisable. c) Montrer que u et v sont des projecteurs qui commutent.

Exercice 1279 [Centrale PSI 2025 # 1256] Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note Φ l'endomorphisme de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $\Phi(M) = AM + (AM)^T$.a) Donner la matrice représentative de Φ dans la base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ constituée des matrices

1. Donner la matrice représentative de

Φ dans la base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ constituée des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\chi_\Phi(X) = 4(X - (a+d))\chi_A(X/2)$.

1. Supposons Φ diagonalisable. La matrice A est-elle diagonalisable ? d) Supposons A diagonalisable. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 1280 [Centrale PSI 2025 # 1257] Soit

$$T = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de T^n.

1. Soit $E_n(T) = \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!}$. Est-ce que $E_n(T)$ converge ? On note $E(T)$ sa limite. Calculer

E(T). Les valeurs propres de E(T) et T peuvent-elles être égales ?

Exercice 1281 [Centrale PSI 2025 # 1258] Soient $I = [0, \pi/2]$ et $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)dt$. Si $f \in E$, on pose $A(f) : x \in I \mapsto \int_0^x f(t)dt$ et $B(f) : x \in I \mapsto \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

1. Montrer que, pour tous f et g de E, $\langle A(f), g \rangle = \langle f, B(g) \rangle$. En déduire que les valeurs propres réelles de $B \circ A$ sont positives.

1. Montrer que, si

$f \in E$, alors $\forall x \in I$, $A(f)(x)^2 \leq x \int_0^x f(t)^2 dt$.

1. Montrer que, si $f \in E$, $||A(f)|| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}||f||$.

Exercice 1282 [Centrale PSI 2025 # 1259] Soit $A = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. On pose $M = AA^T$.

1. Calculer le rang de M et montrer que M est symétrique.

1. Si

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}$$

, montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $M = AA^T$.

$$\int Solitiff = O_n$$ (as) de rang 1. Institute of a resister $T \in \mathbb{R}^n$ (b) tell que $M = 1.11$

Exercice 1283 [Centrale PSI 2025 # 1260] On note V_1 l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$. a) Donner un exemple de matrice $M \in V_1$ différente de l'identité.
Soit $M \in V_1$. Montrer que $(M - I_n)^n = 0$.
Soit $M \in V_1$. Montrer que $(M - I_n)^n = 0$. b) Cas n = 4.
Donner un exemple de matrice $A \in V_1$ telle que $(A - I_n)^2 \neq 0$ et $(A - I_n)^3 = 0$.

1. Déterminer $V_1 \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer

$$V_1 \cap \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$$

et, plus généralement, $V_1 \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1284 [Centrale PSI 2025 # 1261] 1. Rappeler l'algorithme de Gram-Schmidt en le justifiant.

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(U, T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = UT$.

1. Montrer que ce couple est unique.

Exercice 1285 [Centrale PSI 2025 # 1262] On identifie $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On pose $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\, \forall X \in \mathbb{R}^2,\ \|AX\| \leqslant \|X\|\}$. On dit que $A \in \mathcal{C}$ est un point extrémal de $\mathcal{C}$ lorsque $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{C}, A = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 \ \Rightarrow\ A = B_1 = B_2$.

1. Montrer $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}$.

1. i) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $AR \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

- ii) En déduire qu'il existe $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\Omega_1 A \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

- iii) On suppose $A \in \mathcal{C}$. Montrer que a et b appartiennent à [-1, 1].

1. Montrer que l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{C}$ est $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 1286 [Centrale PSI 2025 # 1263] 1. Soient $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$. **Ind.** Considérer $\bar{Z}^T M Z$, où Z est un vecteur propre associé à λ.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer tr(A) et $tr(A^2)$.

ii) Donner les valeurs propres et vecteurs propres de A.

2) Analyse

Exercice 1287 [Centrale PSI 2025 # 1264] On s'intéresse aux suites (U_n) où U_0 et U_1 sont positifs et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = \frac{1}{2}\left(U_{n+1}^2 + U_n^2\right)$

1. Déterminer l'éventuelle limite de (U_n). Montrer que, si trois termes consécutifs sont égaux, alors la suite (U_n) est constante.

1. Calculer les premiers termes de la suite (U_n) pour différentes valeurs de U_0 et U_1. Que peut-on en déduire ? Pour les suites telles que $U_n \to +\infty$, s'intéresser à la suite définie par $V_n = \frac{1}{2n} \ln\left(\frac{U_n}{2}\right)$.

1. Comparer les signes de $U_{n+1}U_n$ et $U_n U_{n-2}$.

1. On suppose désormais $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non constante. Montrer que, s'il existe n_0 tel que $U_{n_0+1} \geq U_{n_0}$ et $U_{n_0+1} \geq U_{n_0-1}$, alors la suite $(U_n)_{n\geq n_0+1}$ est strictement croissante.

On admet que, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n+1} \leq U_n$ et $U_{n+1} \leq U_{n-1}$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

1. Supposons que, quel que soit $N \in \mathbb{N}$, la suite $(U_n)_{n\geq N}$ ne soit pas strictement monotone. Montrer que $U_0 \neq U_1$ et que, si $U_0 < U_1$, alors $U_0 < U_2 < U_3 < U_1$ (vérifier si l'inégalité est stricte ou non). En déduire que la suite (U_n) converge vers 1.

1. Établir, pour une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ non constante appartenant à S, l'équivalence des propriétés suivantes :

il existe un entier $N \geq 0$ tel que $U_N \geq 1$ et $U_{N+1} \geq 1$, la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang, la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 1288 [Centrale PSI 2025 # 1265] On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Si $\forall k = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$, soit $\Phi(k)$ la suite de terme général $\Phi(k)_n = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0 k_1} + \ldots + \frac{1}{k_0 k_1 \ldots k_n}$.

1. Étudier la convergence de $\Phi(k)$ dans les cas suivants :

- k est une suite constante,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ k_n = n+2$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ k_n = 2n+2$.

1. Si $k \in \mathcal{C}$, montrer que la suite $\Phi(k)$ converge vers une limite $\ell \in]0,1]$.

Exercice 1289 [Centrale PSI 2025 # 1266] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$.

1. Trouver une relation entre a_{n+1} et a_{n-1}.
1. Montrer de deux manières différentes que la suite (a_n) converge.
1. i) Montrer que $a_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

ii) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{a_n}{n^\alpha} x^n$. Discuter en fonction de x et α la nature de $\sum u_n$.

Exercice 1290 [Centrale PSI 2025 # 1267] Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue telle qu'il existe une suite de réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, quand x tend vers $+\infty$, $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum f(n)$ converge.
1. On suppose que f ne s'annule pas sur $\mathbb{N}^*$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \prod_{k=1}^n f(k)$. À quelle condition $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n = \prod_{k=1}^n \left(1e^{-\frac{\alpha}{k}}\right)$. À quelle condition sur α la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 1291 [Centrale PSI 2025 # 1268] Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto xx^2$.

1. Déterminer le plus grand intervalle I contenant 0 tel que $g|_I$ soit injective.
1. On pose J = g(I) et f la réciproque de $g|_I$. Déterminer l'expression de f.
1. Montrer que f admet un développement en série entière au voisinageqde 0 et l'expliciter.

Exercice 1292 [Centrale PSI 2025 # 1269] Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que f(0) < 0, f(1) > 0, f'(0) > 0. On suppose que $\forall x \in [0,1], f''(x) > 0$.

1. Montrer que f admet un unique zéro sur [0,1]. On notera z ce zéro.
1. Soit $a \in]z,1]$. Montrer que la tangente à la courbe de f en (a,f(a)) coupe l'axe des abscisses en un unique point appartenant à]z,a[.
1. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection entre la tangente en $(x_n, f(x_n))$ et l'axe des abscisses. Montrer que $x_n \to z$.
1. On pose $M_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$. Prouver $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant x_{n+1}z \leqslant \frac{M_2}{2f'(0)}(x_n z)^2$.

Exercice 1293 [Centrale PSI 2025 # 1270] Soient $m \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$.

1. Expliciter $(P(X))^2$ et en déduire que $\sum_{0\leqslant p,q\leqslant m} \frac{a_pa_q}{p+q+1} \geq 0$.
1. Exprimer $\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})|^2 dt$ en fonction de a_k.

- c) Si $Q \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $\int_{-1}^{1} Q(x)dx = -i\int_{-\pi}^{\pi} Q(e^{it})e^{it}dt$.

1. En déduire que $\sum_{0\leq p,q\leq m} \frac{a_pa_q}{p+q+1} \leq \pi \sum_{k=0}^m a_k^2$.

Exercice 1294 [Centrale PSI 2025 # 1271] 1. Soit $f : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{4x}\sin^2(x)}$. Montrer que f ne s'annule pas, n'a pas de limite en $+\infty$ et n'est pas bornée. b) Pour a>0, on pose $J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2(x)}$. Calculer J(a) à l'aide du changement de variable $u = \tan(x)$, puis montrer que $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\sin^2(x)} = 2J(a)$. c) Quelle est la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f$?

Exercice 1295 [Centrale PSI 2025 # 1272] 1. Existence et calcul de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2}$ pour $x \geq 0$. b) Calculer $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$. Ind. Poser $u = \frac{1}{\tan(t)}$.

1. Nature suivant $\alpha > 0$ de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t\alpha\sin^2 t}$?

Exercice 1296 [Centrale PSI 2025 # 1273] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $f_n : x \in [0,+\infty[\mapsto \frac{(-1)^n n}{n^2+x}]$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$. Montrer que sa somme S est continue.
1. Y a t-il convergence uniforme sur $[0,+\infty[$?

Exercice 1297 [Centrale PSI 2025 # 1274] Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec a < b. Si $\varphi \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on pose $\|\varphi\| = \sup_{[a,b]} |\varphi|$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $f_n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ tel que $f_n(1) = f_n(2) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_n''(x) = (-1)^n \times 2^{-nx^2}$.

1. Montrer la convergence uniforme des séries de fonction $\sum f_n''$, $\sum f_n'$ et $\sum f_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer : $||F|| \leq 1/3$.

Exercice 1298 [Centrale PSI 2025 # 1275] 1. Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$.Montrer que $\sum a_n$ converge. **Ind**. Montrer que, pour tout $\beta \in]1, \alpha[$, la suite $(n^\beta a_n)$ est décroissante à partir d'un certain rang.

1. Déterminer le développement en série entière de $\sqrt{1-x}$. Montrer qu'il y a convergence en $x = \pm 1$.

1. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

On pose $S : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Déterminer S et en déduire une expression de u_n.

Exercice 1299 [Centrale PSI 2025 # 1276] Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 e^{-x^2} dx$ converge.

1. i) Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

ii) Soit $\Phi : (f, g) \in E \times E \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x)\, e^{-x^2} \mathrm{d}x$. Montrer que Φ est bien définie et définit un produit scalaire sur E - b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

1. On pose $F : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zx - x^2} dx$. Montrer que F est développable en série entière au voisinageqde 0 et donner son développement.

Exercice 1300 [Centrale PSI 2025 # 1277] Soient (u_n) une suite complexe bornée et, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

1. Déterminer les rayons de convergence de $U : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k}{k!} x^k$ et $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s_k}{k!} x^k$.

1. Trouver une relation entre U', S' et S.

1. On suppose que la suite (s_n) tend vers 0. Montrer que $x \mapsto e^{-x} S(x)$ tend aussi vers 0 quand x tend vers l'infini.

1. On suppose que la suite (s_n) tend vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $x \mapsto e^{-x} S(x)$ tend vers une limite à préciser quand x tend vers l'infini.

Exercice 1301 [Centrale PSI 2025 # 1278] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$. b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto (1x/n)^n \ln(x) \mathbf{1}_{]0,n[}(x)$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx$.

1. Exprimer $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx$ en fonction de γ.

Exercice 1302 [Centrale PSI 2025 # 1279] Soit (E) l'équation différentielle : $y''(t) + e^{it} y(t) = 0$.Soit f solution de (E). Montrer que f est 2π -périodique si et seulement si $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.

Exercice 1303 [Centrale PSI 2025 # 1280] 1. Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On pose $h : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t) g(t) dt$. Montrer que h est de classe C^2 et exprimer h" en fonction de h et g.

Déterminer toutes les solutions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de y" + y = g.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leqslant a + \int_{\mathbb{R}^+}^{x} f(t) dt$.

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq a e^x$.

1. Pour λ réel, on note Φ_λ la solution du problème de Cauchy :
$y''(x) + (1 - \sin(\lambda x)) y(x) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On pose $f : \lambda \mapsto \Phi_\lambda(x_0)$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 1304 [Centrale PSI 2025 # 1281] 1. Montrer l'existence et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + u + 1}$.

1. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $y \in \widetilde{\mathcal{C}}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $y' = y^2 + y + 1$. Montrer que I est un intervalle borné. Expliciter y.

Exercice 1305 [Centrale PSI 2025 # 1282] Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.

1. Soit $S = \{(x, y, z), z = f(x, y)\}$. Déterminer l'équation du plan tangent à S en un point
$(a, b, c) \in S$. b) Montrer que f est minorée puis qu'elle admet un minimum atteint en un point que l'on déterminera.

Exercice 1306 [Centrale PSI 2025 # 1283] Soit $\varphi : (x, y) \in [-1, 1]^2 \mapsto \int_{-1}^{1} |t - x| \times |t - y| \, \mathrm{d}t$. On pose $\mu = \min_{(x,y) \in [-1,1]^2} \varphi(x, y)$.

1. Montrer que φ est continue sur $[-1, 1]^2$. En déduire l'existence de μ. b) On pose $T = \{(x, y) \in [-1, 1]^2, \ -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$. Montrer que, pour tous $x, y \in T$,
$\varphi(x, y) = 3(y - x)^3 + \frac{2}{2} + 2xy$.

Exercice 1307 [Centrale PSI 2025 # 1284] On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme infinie : $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. On note $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)||_\infty < 1\}$ et $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)||_\infty \leq 1\}$.

1. Exprimer B(0,1) et $\overline{B(0, 1)}$ comme un produit de deux ensembles.

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto -(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$. b) Montrer que f est de classe C^1, calculer son gradient et trouver ses points critiques.

Soit $S = \{(x, y, f(x, y))\}_{(x,y) \in B(0,1)}$.

1. Déterminer le plan tangent à S et orthogonal au vecteur (0, -1, 1).

Exercice 1308 [Centrale PSI 2025 # 1285] Soient $a \in (0,1)$ et $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + 2axy + y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$. a) Justifier que f est de classe C^2 et trouver ses points critiques.

1. Montrer que f admet en (0,0) un extrémum local. Est-il global ?

1. Montrer que f admet en (1,1) un maximum global.

Exercice 1309 [Centrale PSI 2025 # 1286] On définit

$$K : \forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

tel que : $K(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y, \\ y(1-x) & \text{si } x > y. \end{cases}$

1. Montrer que K est continue et bornée.

1. Soit $z \in \mathbb{R}$, trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation K(x,y)=z.

3) Probabilités

Exercice 1310 [Centrale PSI 2025 # 1287] On considère une pièce donnant pile avec une probabilité 0 .

1. On lance n fois cette pièce. Soit S_n la variable aléatoire donnant le nombre de pile obtenus. Donner la loi de S_n.

1. On considère deux pièces (M_1, M_2) donnant pile avec une probabilité $p_1 \in]0,1[$ et $p_2 \in]0,1[$. Pour le premier lancer, on lance la pièce M_1. Pour $n \geq 2$, on lance la pièce M_1 au n-ième lancer si on a obtenu pile au (n-1)-ième lancer, et la pièce M_2 sinon. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « on obtient pile au n-ième lancer ».

- i) Établir une relation entre $P(A_n)$ et $P(A_{n-1})$.
- ii) Montrer que la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.

iii) On rappelle le théorème de Cesàro. Soit S'_n la variable aléatoire donnant le nombre de pile obtenus pendant les n lancers. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(S'_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1311 [Centrale PSI 2025 # 1288] Soient $\lambda > 0$, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et X, Y indépendantes.
On pose

$$A = \begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

et $T = \operatorname{tr}(A)$.

1. Donner la loi de T, son espérance et sa variance.

1. Calculer P(A diagonalisable).

1. On pose $M_{x,y} = \begin{pmatrix} x & x\,0 & y \end{pmatrix}$ et $\ell_{x,y} : M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \mapsto M_{x,y}M$.

- i) Que peut-on dire du rang de $\ell_{x,y}$?
- ii) Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour que $rg(\ell_{xy}) = 6$.
- iii) Donner la loi de $\operatorname{rg}(\ell_{X,Y})$.

Exercice 1312 [Centrale PSI 2025 # 1289] Soit $n \geq 2$. On note Ω_n l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même. On munit Ω_n de la probabilité uniforme. Si $f \in \Omega_n$, on note $X_n(f)$ le nombre d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$ n'ayant aucun antécédent par f et, pour i entre 1 et n, on pose $Y_i(f) = 1$ si $f^{-1}(\{i\}) = \emptyset$ et $Y_i(f) = 0$ sinon.

1. Déterminer la probabilité p_n de $S = \{f \in \Omega_n \text{ , } f \text{ surjective}\}$. Donner un équivalent de p_n lorsque $n \to +\infty$.

1. Déterminer la loi de Y_i, puis celle de Y_iY_j lorsque $i \neq j$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 1313 [Centrale PSI 2025 # 1290] Soit $\theta \in \mathbb{R}^{+*}$. Des individus numérotés $1, 2, \ldots$ arrivent successivement dans un restaurant qui abrite une infinité de tables infiniment longues. Les convives s'installent aux différentes tables avec les conditions suivantes : lorsque le $(k+1)^e$ individu se présente, $k \geq 1$, il choisit au hasard l'un des k individus déjà attablés avec la probabilité $\frac{1}{k+\theta}$ et s'assied à lamême table, ou occupe une nouvelle table avec la probabilité $\frac{\theta}{k+\theta}$. On note K_n la variable aléatoire indiquant le nombre de tables occupées lorsque n individus ont pris place.

1. Déterminer $P(K_n = 1)$.

1. Soit G_n la fonction génératrice de K_n.

Montrer que $G_n(x) = \frac{L_n(hetax)}{L_n(heta)}$, où $L_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$.

1. Calculer $\mathbf{E}(K_n)$ et $\mathbf{V}(K_n)$. Donner des équivalents de $\mathbf{E}(K_n)$ et $\mathbf{V}(K_n)$.

1. Étudier le comportement de la suite $\left(\frac{K_n}{\ln n}\right)$ quand $n \to +\infty$.

XIII) Centrale - PC

1) Algèbre

Exercice 1314 [Centrale PC # 1291] 1. Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ et $P = A^2 + B^2$.

- i) Montrer que P est nul ou de degré pair, de coefficient dominant strictement positif.
- ii) Les polynômes $X^4X^2 + 1$ et X^41 peuvent-ils s'écrire $A^2 + B^2$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$?
- iii) Que dire des racines de P et leurs multiplicités ?

1. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$ s'écrit $A^2 + B^2$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 1315 [Centrale PC # 1292] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f admet un pseudo-inverse s'il existe $q \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ q \circ f = f$, $q \circ f \circ q = q$ et $f \circ q = q \circ f$.

1. Que dire si f est inversible ? si f est l'endomorphisme nul ?
1. On suppose que f admet un pseudo-inverse. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.
1. On suppose que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$. Soit f_1 l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$.

Montrer que f_1 admet un pseudo-inverse. En déduire que f admet un pseudo-inverse. d) Montrer que f admet un pseudo-inverse si et seulement si $rg(f) = rg(f^2)$.

Exercice 1316 [Centrale PC # 1293] 1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de Vandermonde soit inversible.

1. Soient $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et $(z_0, \ldots, z_n)$ des nombres

réels. Calculer le déterminant de la matrice $R = (Q_i(z_i))_{0 \leq i,i \leq n}$.

Exercice 1317 [Centrale PC # 1294] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on pose $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soient σ et s dans S_n. Montrer que $P_\sigma P_s = P_{\sigma \circ s}$ et montrer que P_σ est une matrice orthogonale.
1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_\sigma^\ell = I_n$. Montrer que toutes les valeurs propres complexes de P_σ sont de module 1 et que 1 est valeur propre de P_σ.
1. À quelle condition P_σ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1318 [Centrale PC # 1295] Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $E = \{P(M), P \in \mathbb{C}[X]\}$. On note p le nombre de valeurs propres distinctes de M.- a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie et que $p \leq \dim E \leq n$.

1. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si dim E = p.

Exercice 1319 [Centrale PC # 1296] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMMA$.

1. Montrer que, si A nilpotente, alors f l'est également.
1. Montrer que, si $|\operatorname{Sp}(A)| = n$, alors $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
1. Montrer que si A est diagonalisable alors A^T l'est également. Donner une base de vecteurs propres de f dans ce cas.

Exercice 1320 [Centrale PC # 1297] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ le nombre de valeurs propres distinctes de A. Dénombrer les polynômes $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tels que A et P(A) soient semblables.

Exercice 1321 [Centrale PC # 1298] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A^T = P(A)$.

Exercice 1322 [Centrale PC # 1299] 1. Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tels que $u \neq 0, v \neq 0$ et $u \circ v = 0$. Montrer que $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$ et que $\operatorname{Ker} u$ est stable par v. En déduire que u et v possèdent un vecteur propre en commun. b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB=0. Montrer que A et B sont trigonalisables dans

Exercice 1323 [Centrale PC # 1300] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \emptyset$.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
1. Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que AM MB = Y. c) On suppose que $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) \neq \emptyset$. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que AM = MB.

Exercice 1324 [Centrale PC # 1301] On pose $\varphi : (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \mapsto \operatorname{tr}(A^T B)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire. b) On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} ;\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Déterminer $F^\perp$.
1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $J_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de J_α à $F^\perp$.

$a \in \mathbb{R}$, on pose $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular la distance de $a \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 1325 [Centrale PC # 1302] Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E et $G = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre, alors $\det(G) > 0$.

1. Dans le cas général, montrer que $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = \mathrm{rg}(G)$. c) Montrer que $\mathrm{Sp}(G) \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 1326 [Centrale PC # 1303] Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1}(1x^2)f(x)g(x)dx$ définit un produit scalaire sur E.

1. Soit E_p (resp. E_i) l'ensemble des éléments de E qui sont pairs (resp. impairs). Montrer que E_p et E_i sont orthogonaux et que $E_p \oplus E_i = E$.

1. Expliciter $E_p^\perp$ et $E_i^\perp$.

une même base.

Exercice 1327 [Centrale PC # 1304] 1. Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$ admet une droite ou un plan stable.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1328 [Centrale PC # 1305] Déterminer toutes les matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^TA^2 = A$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$.

Exercice 1329 [Centrale PC # 1306] Soient E un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall(x, y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$.

1. Montrer que $u^* \circ u$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.

1. Montrer que $x \mapsto ||u(x)||$ est bornée sur la sphère unité. Exprimer $\max_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ et $\min_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ en termes de valeurs propres de $u^* \circ u$.

Exercice 1330 [Centrale PC # 1307] On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X[A]_{i,i})$.

1. Soit $A \in \mathcal{C}$. Calculer $\mathrm{tr}(A^TA)$.

1. Déterminer $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1331 [Centrale PC # 1308] Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $A^{2025} = B^{2025}$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(A^{2025})$. En déduire que A et B commutent.

1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que Q^TAQ et Q^TBQ sont diagonales.

1. Montrer A = B.

2) Analyse

Exercice 1332 [Centrale PC # 1309] Pour $i \in \{1, 2, \infty\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $||A||_i = \sup\{||AX||_i; X \in \mathbb{R}^n$ et $||X||_i = 1\}$ et, lorsque A est inversible, $\mathrm{Cond}_i(A) = ||A||_i||A^{-1}||_i$.

1. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, montrer $||AB||_i \leq ||A||_i||B||_i$.

1. Déterminer $\min\{Cond_i(A); A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

1. Déterminer $Cond_2(A)$ en fonction des valeurs propres de A^TA.

Exercice 1333 [Centrale PC # 1310] Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit la norme N sur E en posant $N(A) = \max_{1\leq i,j\leq 2} |a_{i,j}|$ lorsque $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$.

a) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2,\ N(AB) \leqslant c\, N(A)\, N(B)$.

1. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)$ est convergente pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\exp(A)$ la limite de la suite.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ et $B_t = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A_t)$ et $\exp(B_t)$.

Exercice 1334 [Centrale PC # 1311] Une norme $\|\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite sous-multiplicative si $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\|\times\|B\|$.

1. Donner un exemple de norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.b) Soient $\|\ \|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On définit la norme $\|\|_Q$ par $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\|_Q = \|Q^{-1}AQ\|$. Montrer que $\|\|_Q$ est sousmultiplicative.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall m, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+m} \leqslant u_n \times u_m$. On définit $\ell = \inf\left\{u_n^{1/n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe m_ε tel que $u_{m_\varepsilon} \leqslant (\ell + \varepsilon)^{m_\varepsilon}$. ii) Montrer qu'il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que $\forall n \geq m_\varepsilon,\ u_n^{1/n} \leqslant (\ell + \varepsilon)^{1-\frac{r_n}{n}}\alpha_\varepsilon^{1/n}$ où r_n est le reste

de la division euclidienne de n par m_ε. *iü*) En déduire que la suite $(u_n^{1/n})$ converge et préciser sa limite.

Exercice 1335 [Centrale PC # 1312] Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n f(x_n)$. a) Étudier la suite (x_n).

1. Soit $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \to \ell$.

1. Nature de $\sum x_n$?

Exercice 1336 [Centrale PC # 1313] Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0([0,1[, \mathbb{R})$ s'annulant en 0. Pour $f \in E,$ on pose $\varphi(f)$ définie par : $\varphi(f)(0) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.

1. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de φ.

Exercice 1337 [Centrale PC # 1314] Soit $f \in \mathcal{C}^3([0,1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Quelle est la limite de $(S_n(f))$?

1. Montrer qu'il existe M > 0 tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$
   $\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{(t-\frac{k}{n})^2}{2!} f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{6}\left(t - \frac{k}{n}\right)^3$.

1. En déduire que $S_n(f) = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)dt + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 1338 [Centrale PC # 1315] Soit $f : x \mapsto \int_{-\pi}^{2\pi} \frac{\cos(t)}{t} dt$. Déterminer les limites de f en 0^+, en $+\infty$ et en $-\infty$, puis les variations de f.

Exercice 1339 [Centrale PC # 1316] Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)dt$ et $Q_n = \frac{J_n}{I_n}$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+2)I_{n+1} = (2n+1)I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = -2n^2 J_n + n(2n-1)J_{n-1}$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, Q_{n-1} - Q_n = \frac{1}{2n^2}$.c) Montrer : $\forall t \in [0, \pi/2],\ t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(t)$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1})$.

1. Prouver finalement : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 1340 [Centrale PC # 1317] On pose $f : x \mapsto \prod_{n=0}^{+\infty}\left(1 + e^{-n(x^2+1)}\right) = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=0}^{N}\left(1 + e^{-n(x^2+1)}\right)$.

1. Montrer que f est définie, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. b) Étudier les variations de f.

Exercice 1341 [Centrale PC # 1318] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

1. Domaine de définition ? Montrer que f est de classe C^1.

1. Donner un équivalent de f en 1. Ind. Considérer $g : t \mapsto f(e^{-t})$ et en chercher un équivalent en 0.

Exercice 1342 [Centrale PC # 1319] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(nx^2+1)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

) Déterminer le domaine de définition de f.

1. Étudier la continuité de f sur $]0, +\infty[$ et calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. c) La fonction f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 1343 [Centrale PC # 1320] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{x^2+n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, justifier l'existence de $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-\alpha t}dt$ et calculer cette

intégrale.

1. La fonction

f est-elle développable en série entière ?

Exercice 1344 [Centrale PC # 1321] Soit $\varphi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Donner un équivalent lorsque $x \to 0^+$ de $\varphi(x)$.

Exercice 1345 [Centrale PC # 1322] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto a_n x^n(1-x)$.

1. Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur$[0,1]$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur [0,1] si et seulement si la série numérique $\sum \frac{a_n}{a}$ converge.c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum f_n$ converge uniformément sur [0, 1].

Exercice 1346 [Centrale PC # 1323] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne.

1. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in]-1,1[$. Montrer qu'il existe une unique fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \lambda F(x+a) = f(x)$.

1. Expliciter F lorsque $f = \cos$.

Exercice 1347 [Centrale PC # 1324] Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} S_n \frac{x^n}{n!}$.

1. Donner le rayon de convergence de $\sum S_n \frac{x^n}{x!}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = S_n \ln n$. Montrer que $\sum (v_{n+1} v_n)$ est convergente.

1. Donner une équation différentielle vérifiée par f. d) Exprimer, pour x > 0, f(x) à l'aide de $\int_0^x e^{-t} \ln(t) dt$.

Exercice 1348 [Centrale PC # 1325] 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{i=1}^{n} \sin((2k-1)t)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin t} dt$.

1. Rayon de convergence de $\sum I_n x^n$?

Exercice 1349 [Centrale PC # 1326] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(t-1)\dots(t-n+1)\,\mathrm{d}t$.
Rayon de convergence et somme de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 1350 [Centrale PC # 1327] On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est absolument monotone si, pour tout $x \in I$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) \geq 0$.

1. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral.

1. Montrer que, si f et g sont absolument monotones, alors f + g et fg sont absolument monotones.

1. Soient R > 0 et f une fonction absolument monotone sur [0, R].

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $R_n(x) = f(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Montrer que $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $[0, R]$.

ii) Montrer que la série de Taylor de f converge simplement vers f sur [0, R].

Exercice 1351 [Centrale PC # 1328] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.- b) On pose $g : x \in]-1,1[\mapsto (1+x)f(x)$. Montrer que g est développable en série entière

au voisinageqde 0 et expliciter ses coefficients. Déterminer son rayon de convergence. c) Montrer que la série définissant g converge uniformément sur [0, 1].

Exercice 1352 [Centrale PC # 1329] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+\cdots+t^n} \mathrm{d}t$ lorsque cela a un sens.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ est bien définie et calculer sa limite.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $I_n = \int_0^1 u^{n-2} \frac{1-u}{1-u^{n+1}} du$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(nk+k-2)(nk+k-1)}$.

1. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 1353 [Centrale PC # 1330] Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(t^2 2t \cos(x)+1)}{t} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $]0, 2\pi$

Montrer que $\forall x \in]0, 2\pi[$, $f(2\pi x) = f(x)$ et $f\left(\pi \frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} f(x)$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, 2\pi[$. Calculer f'(x) pour tout $x \in]0, \pi[$.

1. On donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

1. En déduire l'expression de f(x) pour tout $x \in [0, 2\pi[$.

Exercice 1354 [Centrale PC # 1331] Soit $f : x \in]0,1[\mapsto \frac{x^2}{x-1} \ln(x)$.

1. Montrer que f se prolongeqcontinûment sur [0,1] et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et trouver un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x^n) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 1355 [Centrale PC # 1332] 1. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1[\,, \mathbb{R})$ croissante telle que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$ converge. Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}du.$$

1. Donner un équivalent de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1-x^n)$ lorsque $x \to 1^-$.

Exercice 1356 [Centrale PC # 1333] Pour $x \in]-1,+\infty[$, on pose $\theta(x) = 2\int_0^1 \frac{s}{1+x^2}ds$

1. Étudier les variations de θ et calculer $\theta(x)$.

1. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. i) Justifier l'existence de $\Gamma(x)$.

- ii) Donner un équivalent de $\Gamma(x+1)$ lorsque $x \to +\infty$. Ind. Poser $u = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$.

Exercice 1357 [Centrale PC # 1334] Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1\cos(t)}{t^2}e^{-xt}dt$.

1. Montrer que f est définie, continue sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

1. Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

Exercice 1358 [Centrale PC # 1335] On donne $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$. Donner une expression simple de f(x).

Exercice 1359 [Centrale PC # 1336] Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$.

1. Montrer que f est bien définie et continue. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

1. Déterminer $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $f(x) = \sum_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Exercice 1360 [Centrale PC # 1337] Soit $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. Déterminer une équation différentielle linéaire satisfaite par F sur $]0,+\infty[$. On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 1361 [Centrale PC # 1338] 1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Montrer que $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x^n t}g(t)dt$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ pour toute fonction g continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant $g(0) \neq 0$.

1. À l'aide du changement de variable $u = x^{1/n}t$, montrer que $f(x) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{nx^{n-1}}g(0)$.

Exercice 1362 [Centrale PC # 1339] Soit $\lambda \in]-1,1[$. On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de $(E) : \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$.

1. Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière. b) Déterminer les solutions de (E).

Exercice 1363 [Centrale PC # 1340] 1. Déterminer les valeurs de $m \in \{0,1,2,3,4\}$ pour lesquelles l'équation différentielle $xy'' + (x-4)y' - 3y = x^m$ admet au moins une solution polynomiale.

1. Déterminer les solutions développables en série entière au voisinageqde 0 de l'équation différentielle xy" + (x-4)y' - 3y = 0.

Exercice 1364 [Centrale PC # 1341] Soit $f : x \mapsto \int_a^{\pi/2} \cos(x\sin(t))dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que, si $x \in \mathbb{R}$, xf"(x) + f'(x) + xf(x) = 0.

1. Trouver les solutions de l'équation différentielle xy" + y' + xy = 0 qui sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

1. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$ pour tout entier naturel n.

Exercice 1365 [Centrale PC # 1342] On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.

Soit $K : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ et $U : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)f(y)\mathrm{d}y$.

1. Montrer que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$, $\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(x,t) \xrightarrow[t\to 0+]{} f(x)$.

Exercice 1366 [Centrale PC # 1343] Soit $n \geq 2$. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbb{R}^n$ fixé. Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, X \mapsto \langle X, AX - Y\rangle$.

1. On suppose que n=2, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que Φ a un unique point critique et déterminer si Φ admet un extremum local en celui-ci.

1. On revient au cas général. Montrer que $\Phi(X) \xrightarrow[\|X\|\to+\infty]{} +\infty$.

Montrer que Φ admet un minimum et que celui-ci est atteint en un unique point.

Exercice 1367 [Centrale PC # 1344] 1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On écrit $z = x + iy = re^{i\theta}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. Montrer que $\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. La formule $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ est-elle valable ?

1. On note $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\ , x \in \mathbb{R}^-\}$. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur D telles que, pour tout $u \in D$, $\langle u, \nabla(f)(u)\rangle = \frac{1}{\|u\|}$ pour la structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1368 [Centrale PC # 1345] Soit $f : (x, y) \mapsto (x - y)^3 + 6xy$.

1. La fonction f admet elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$. Déterminer ces extrema.

1. Étudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

3) Géométrie

Exercice 1369 [Centrale PC # 1346] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les disques fermés de centres ω_1 et ω_2 et de rayons $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$. On pose $f : (u_1, u_2) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \mapsto |\det_\varepsilon(u_1, u_2)|$.

1. Montrer que f admet un maximum.

1. Soit (v_1, v_2) un point où f atteint son maximum. Pour $i \in \{1, 2\}$, montrer que v_i appartient au cercle de centre ω_i et de rayon r_i.

4) Probabilités

Exercice 1370 [Centrale PC # 1347] Pour $\lambda > 0$, soit Y_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

1. Montrer qu'il existe $L_1, L_2 \in \mathbb{Z}[X]$ tels que, pour tout $\lambda > 0$, $\mathbf{E}(Y_\lambda) = L_1(\lambda)$ et $\mathbf{E}(Y_\lambda^2) = L_2(\lambda)$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $L_p \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall \lambda > 0$, $\mathbf{E}(Y_\lambda^p) = L_p(\lambda)$.

Exercice 1371 [Centrale PC # 1348] On dispose de N pièces qui ont toutes pour probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber sur Pile. Au premier tour, on lance toutes les pièces et on ne conserve que les pièces qui sont tombées sur Pile pour le tour suivant. On recommence ainsi l'expérience : on lance au tour n toutes les pièces tombées sur Pile au tour n-1. On note X_n le nombre de Pile obtenus au n-ième tour. On note $U_n = (\mathbf{P}(X_n = 0) \cdots \mathbf{P}(X_n = N))^T$. Déterminer une matrice A telle que, pour tout n, $U_{n+1} = AU_n$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Exprimer U_n en fonction de A et de U_0.

Exercice 1372 [Centrale PC # 1349] On effectue une infinité de lancers identiques et indépendants d'une pièce. La probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0, 1[$. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de Face avant l'apparition du deuxième Pile.

1. Donner la loi de Y.

1. Montrer que Y est d'espérance finie, la calculer.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire donnant le nombre de Face avant l'apparition du k-ème Pile. Déterminer la loi de Y_k.

Exercice 1373 [Centrale PC # 1350] Soit $p \in]0, 1[$. On considère une pièce qui tombe sur Pile avec une probabilité p. On lance la pièce jusqu'à obtenir Pile pour la première fois. On note N le nombre de lancers. On lance ensuite N fois la pièce et on note X le nombre de Pile obtenus lors de cette deuxième série de lancers.

1. Déterminer la loi de N, la loi du couple (N, X), puis celle de X.

1. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes telles que $U \sim \mathcal{B}(\lambda)$ et $V \sim \mathcal{G}(\lambda)$. À quelle condition (portant sur λ) a-t-on $X \sim UV$?

1. Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 1374 [Centrale PC # 1351] On lance deux pièces équilibrées n fois. On note A_n l'événement « on obtient autant de Pile que de Face après le n-ème lancer ». On note $p_n = \mathbf{P}(A_n)$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.- b) Déterminer p_n.

1. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de $\sum p_n x^n$.

Exercice 1375 [Centrale PC # 1352] Soit $p \in \mathbb{N}$. On dispose de p+1 urnes numérotées de 0 à p contenant des boules rouges et blanches. La proportion de boules rouges de l'urne numéro j est $\frac{j}{p}$. On choisit au hasard une urne, on effectue n tirages avec remise dans cette urne et l'on note X_n le nombre de boules rouges piochées.

1. Loi et espérance de X_n.

1. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\lim_{p \to +\infty} \mathbf{P}(X_n = k)$. Commenter.

Exercice 1376 [Centrale PC # 1353] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$.

1. Donner $\mathbf{E}(\mathrm{rg}(M))$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de la plus grande valeur propre de M.

XIV) Autres Écoles - MP

1) Algèbre

Exercice 1377 [IMT # 1354] Soient a et n deux entiers supérieurs ou égaux à a. Montrer que si $a^n 1$ est premier, alors a = 2 et n est un nombre premier.

Exercice 1378 [IMT # 1355] Résoudre l'équation $x^2 + x + \overline{1} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 1379 [IMT # 1356] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.

Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1380 [IMT # 1357] 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nilpotents et non nuls tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\text{rg}(u \circ v) < \text{rg}(v)$.

1. Soient $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nilpotents et commutant deux à deux.

Montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Exercice 1381 [CCINP # 1358] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = J$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de J. En déduire les valeurs propres éventuelles de M.

1. Trouver un polynôme annulateur de M. Montrer que M est diagonalisable.

1. Déterminer les matrices M solutions.

Exercice 1382 [IMT # 1359] Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 1383 [IMT # 1360] Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A(c) = \begin{pmatrix} -c & 1 & -1 \\ 1 & 1-c & 1 \\ -1 & -1 & -c \end{pmatrix}$.

1. La matrice A(c) est-elle diagonalisable ?

1. Trouver $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}A(c)P$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 1384 [IMT # 1361] Soient $a > 0$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a^2 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer Au. Que peut-on en déduire b) Calculer det(A). La matrice A est-elle inversible ?

1. Déterminer le spectre réel de A.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 1385 [IMT # 1362] Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1386 [IMT # 1363] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres de A, ainsi que la dimension de ses sous-espaces propres.

Exercice 1387 [IMT # 1364] Soit $n \geq 2$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,j} = -1$ si $i > j$, $a_{i,j} = 1$ si $i < j$ et $a_{i,i} = 0$. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que : $P : x \mapsto \det(\lambda I_n A x J)$ est polynomiale de degré au plus 1.

1. En déduire χ_A.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.

Exercice 1388 [CCINP # 1365] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathbb{R}_n[X]$ non nuls. On considère l'application f qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme. Est-ce un automorphisme ?

1. On note p le degré de B et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses racines.

- i) Montrer que 0 est valeur propre de f.

- ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ une valeur propre de f. Montrer qu'il existe $i \in [1, p]$ tel que $A(\lambda_i) = \alpha$.iii) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 1389 [IMT # 1366] Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

. Pour quels réels a la suite $(a^n A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-telle ?

Exercice 1390 [IMT # 1367] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\alpha \neq 0$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f \circ gg \circ f = \alpha f$.

1. Donner une expression simple de $f^n \circ gg \circ f^n$.

1. En s'intéressant à $h \mapsto h \circ g - g \circ h$, montrer que f est nilpotente.

Exercice 1391 [CCINP # 1368] Soit $A = \left(\frac{i}{j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle inversible ?

1. Trouver un polynôme annulateur de A.

1. Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

1. Donner les sous-espaces propres de A.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec A. Montrer que $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Im}(A)$ sont stables par M.

Exercice 1392 [IMT # 1369] Soient $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A, B \in E \setminus \{0\}$ et $f : M \in E \mapsto \operatorname{Tr}(AM)B$.

1. Quels sont les éléments propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

1. On note $C = \{k \in \mathbb{R}^+ : \forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \operatorname{Tr}(f(M)^2) \leq k \operatorname{Tr}(M^2)\}$. Montrer que $C \neq \emptyset$ et déterminer son minimum.

Exercice 1393 [CCINP # 1370] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

1. On suppose que f^2 est inversible et diagonalisable. À l'aide d'un polynôme annulateur de f, montrer que f est diagonalisable.

1. On suppose que f^2 n'est plus inversible, que f^2 est diagonalisable et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 1394 [IMT # 1371] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $tr(A) \neq 0$.

Exercice 1395 [CCINP # 1372] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$.

1. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$ non nul. Montrer que (x, f(x)) est libre.

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Construire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^2 = f$.

Exercice 1396 [IMT # 1373] Donner toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^5 = M^2$ et $\operatorname{Tr}(M) = n$.

Exercice 1397 [Dauphine # 1374] Soient

$$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$$

et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

On suppose a_1 et a_n non nuls.

1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, justifier que A n'est pas toujours diagonalisable avec un contre-exemple pour n=2.

Exercice 1398 [CCINP # 1375] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'un projecteur de rang $p \in [1, n]$.
On pose

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & -A \end{pmatrix}$$

1. La matrice B est-elle diagonalisable ? Ind. On pourra calculer B^3.

b) Calculer les sous-espaces propres éventuels de B et donner leur dimension en fonction de n et p -

Exercice 1399 [Navale # 1376] On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.
Calculer la distance de la matrice $M = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ à l'espace F des matrices de trace nulle.

Exercice 1400 [Navale # 1377] On munit

$$\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$$

du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$. On pose $e_1 : t \mapsto 1$, $e_2 : t \mapsto t$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Calculer la distance de $\Phi : t \mapsto t^2$ à l'espace F.

Exercice 1401 [IMT # 1378] Soient $p,q \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathrm{Sp}(MM^T) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(M^TM)$.

1. Montrer que, pour $\lambda \neq 0$, les dimensions des espaces propres de MM^T et M^TM sont les mêmes.

1. Relier les polynômes caractéristiques de MM^T et de M^TM.

Exercice 1402 [CCINP # 1379] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux

1. Déterminer la distance de

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 1403 [CCINP # 1380] On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, et on fixe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. On pose $H_v = I_n 2 \frac{v^T v}{\|v\|^2}$. Montrer que $H_v \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Quelle est la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_v ?

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que ||x|| = ||y||.

1. Montrer que les vecteurs x y et x + y sont orthogonaux.

ii) Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que Vx = y.

Exercice 1404 [IMT # 1381] Soit E l'espace des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.- a) Montrer que l'application qui à $(f,g) \in E^2$ associe $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg$ définit un produit scalaire sur E.

1. Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto \sin^2(x)$ sur $\mathrm{Vect}(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x))$.

Exercice 1405 [CCINP # 1382] On munit $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle,\rangle$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et w celui associé à A^T.

1. Montrer que : $\forall x, y \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, w(y)\rangle$.

1. Montrer que, si un sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par w.

1. On choisit ici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- i) Calculer χ_A. Les matrices A^T et A sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

- ii) Déterminer les sous-espaces stables par u.

Exercice 1406 [Navale # 1383] Soit $n \geq 2$. Soit $F : (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)\,\mathrm{tr}(AB)$. On note $E_{i,j}$, pour $1 \leq i,j \leq n$, les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\mathrm{tr}(E_{i,j}A)$ pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $(i,j) \in [1,n]^2$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), F(A,M) = 0$. Montrer que A = 0.

1. Soit u un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, si $v : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, F(u(A), B) = F(A, v(B)), alors v est linéaire.

1. L'application F définit-elle un produit scalaire ?

Exercice 1407 [IMT # 1384] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$ avec $A \neq 0$.

1. Trouver un polynôme annulateur non nul de A.

1. Lorsque $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, trouver $\mathrm{Sp}(A)$ et montrer que A est orthogonalement semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1408 [CCINP # 1385] Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{S}(E)$. On note a (resp. b) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de f.

1. Montrer que $a||x||^2 \leq \langle f(x), x\rangle \leq b||x||^2$ pour tout $x \in E$.

1. Soit $r \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x\rangle \leqslant r||x||^2$. Montrer que $b \leqslant r$.

1. Soit $k \in \mathbb{R}$. On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,i} = k$, $a_{i,j} = 1$ si $i = j \pm 1$, $a_{i,j} = 0$ sinon. Montrer que la plus grande valeur propre de A est inférieure ou égale à k + 2.

Exercice 1409 [IMT # 1386] Soient E un espace euclidien et $a, b \in E$ unitaires et non colinéaires. On considère $\varphi : x \mapsto \langle a, x\rangle\, a + \langle b, x\rangle\, b$. Montrer que φ est un endomorphisme autoadjoint et donner ses éléments propres.

Exercice 1410 [IMT # 1387] Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$ et deux vecteurs a, b de E non colinéaires. On considère l'endomorphisme $f : x \in E \mapsto \langle a, x\rangle\, a + \langle b, x\rangle\, b$. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ puis montrer que f est autoadjoint.

Exercice 1411 [IMT # 1388] Soient $M, N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que : $0 \leq \mathrm{tr}(MN) \leq (\mathrm{tr}\, M)(\mathrm{tr}\, N)$.

Exercice 1412 [IMT # 1389] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de polynôme caractéristique noté χ_A. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\chi_A = \prod(X - \lambda_k)$ et
que $||A||^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$.

Exercice 1413 [IMT # 1390] Soient E un espace euclidien de dimension n et F un sous-espace de dimension $r \in [1, n-1]$. Soit p le projecteur orthogonal sur F. On note $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{S}(E), p \circ f = f \circ p\}$.

1. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $f \in \mathcal{C}$ si et seulement si $f(F) \subset F$.

1. Soit $f \in S^+(E)$. Montrer que $f^2 = p$ si et seulement si f = p.

2) Analyse

Exercice 1414 [CCINP # 1391] On note $E = \mathbb{C}[X]$ et, pour $P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$, $\|P\| = \sup_{k\geq 0} |a_k|$.

1. Montrer que $\|\|$ est une norme de E.

1. Soit $b \in \mathbb{C}$. On souhaite étudier la continuité de l'application $f : P \in E \mapsto P(b) \in \mathbb{C}$. i) Montrer que, si |b| < 1, alors f est continue.

- ii) Étudier la continuité de f lorsque |b|=1 à l'aide des polynômes $P_n = \sum_{k=0}^n \overline{b}^k X^k$.

- iii) Montrer que, si |b| > 1, alors f n'est pas continue.

Exercice 1415 [IMT # 1392] On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ la norme $\| \cdot \|_\infty$.
Si $f \in E$, on pose $u(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \inf(x,t) f(t) dt$. Montrer que u est un endomorphisme continu et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 1416 [IMT # 1393] Soient $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}, (w_n)_{n\geq 0}$ trois suites complexes. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur (u_0, v_0, w_0) pour que les trois suites convergent.

Exercice 1417 [IMT # 1394] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$. À quelles conditions sur a, b, c la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 1418 [IMT # 1395] On pose, pour $n \geq 3$, $u_n = \ln\left(\frac{n^4 2n^3 + 2n1}{n^4 2n^3}\right)$. Étudier la nature de la série de terme général u_n et calculer sa somme en cas de convergence.

Exercice 1419 [IMT # 1396] Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sigma(3n) = 4n$, $\sigma(3n+1) = 4n+2$ et $\sigma(3n+2) = 2n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que σ est bijective. b) On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = u_{\sigma(n)}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, et calculer leurs sommes.

Exercice 1420 [IMT # 1397] 1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2(X+1)}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

- i) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

- ii) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n \frac{1}{n}$. iii) Déterminer la nature de la série de terme général $(n\, u_n - 1)$

Exercice 1421 [CCINP # 1398] On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

1. Étudier la nature de la série $\sum(u_{n+1} u_n)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$. c) Étudier la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u}\right)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

Exercice 1422 [CCINP # 1399] On se donne deux réels α et β vérifiant $0 < \beta \leq 1 < \alpha$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta}$ et $\mu_n = \frac{R_n}{S_n}$.

1. Montrer que R_n est définie

1. Donner un équivalent de R_n puis de S_n. Étudier la nature des séries $\sum \mu_n$ et $\sum(-1)^n \mu_n$.

Exercice 1423 [IMT # 1400] Soient $\alpha \geq 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

1. Étudier la convergence de (u_n) en fonction de α.

1. Étudier la convergence de $\sum u_n$ en fonction de α.

Exercice 1424 [IMT # 1401] Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)\, t^n \, \mathrm{d}t = 0$. Rappeler le théorème de Weierstrass. Prouver que f est nulle.

Exercice 1425 [Dauphine # 1402] Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi f(t) |\sin(nt)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt$.

Exercice 1426 [IMT # 1403] Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$ et $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$. Déterminer les limites de (S_n) et (T_n).

Exercice 1427 [Navale # 1404] Justifier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}} dt$$

pour $x \geq 0$.

Exercice 1428 [Navale # 1404] sustiner to convergence de

$$\int_0^{\infty} \sqrt{t+x}\, dx \, pour \; x \geq 0$$

Exercice 1429 [CCINP # 1405] On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{t^2+1} dt$.

1. Justifier l'existence de I. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $J(x) = \int_0^x \frac{t|\sin(t)|}{t^2+1} dt$.

1. Montrer que, pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, $J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(u+k\pi)\sin(u)}{(u+k\pi)^2+1} du$.

Exercice 1430 [CCINP # 1406] Soit

$$f \in \mathcal{C}^1(]0,1], \mathbb{R}$$

) telle que $|f'(t)| \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$.

Déterminer un équivalent en 0^+ de $F : x \mapsto \int_0^1 |f'(t)| dt$.

1. Déterminer un équivalent en

0^+ de $F : x \mapsto \int_x^1 |f'(t)| dt$.

1. En déduire que $x f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Montrer qua

$$\int_{-1}^1 f(t) dt$$

converge

1. L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

1. Montrer que

$$\int_{-1}^1 f(t) dt$$

converge.

Exercice 1431 [CCINP # 1407] Soit $f : x \in [0,1] \mapsto 2x(1-x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur [0,1] vers une fonction g que l'on précisera.

La convergence est-elle uniforme ?

1. Soit $a \in [0, 1/2]$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, 1-a]$.

Exercice 1432 [IMT # 1408] On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \cos^n(x)$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, \pi[$ puis calculer f'.

Exercice 1433 [IMT # 1409] Soit $f : x \mapsto \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(nx)}$. Domaine de définition de f ? Équivalent en 0^+ ?

Exercice 1434 [CCINP # 1410] On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer les domaines de définition et de continuité de

f.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

1. Déterminer un équivalent de f(x) quand $x \to 0^+$.

Exercice 1435 [CCINP # 1411] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2n-1}$. Déterminer le rayon de convergence de f. Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1}$$
et en déduire $f(x)$.

Exercice 1436 [IMT # 1412] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence

R de f.

1. Donner une expression de $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Ind. Utiliser $I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

Exercice 1437 [IMT # 1413] On pose
$$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) dt$$
pour tout $n \geq 0$.

1. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

1. Calculer $a_n + a_{n+2}$ pour tout $n \geq 2$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. On note f sa somme.

1. La fonction f admet-elle une limite en 1^- ? e) Expliciter f.

Exercice 1438 [IMT # 1414] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence de
$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$$
et donner une expression de $f(x)$.

Exercice 1439 [IMT # 1415] Pour tout $n \geq 1$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)^n}$.

1. Montrer que les a_n sont bien définis.

1. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$. c) Quelle est la nature de la série $\sum(-1)^n a_n$?

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Exercice 1440 [CCINP # 1416] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt^2)e^{-t} dt$.

1. Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Calculer $F^{(k)}(0)$.

1. La fonction F est-elle développable en série entière en 0 ?

Exercice 1441 [IMT # 1417] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^e (\ln t)^n dt$.

1. Déterminer la limite de (I_n).

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e(n+1)I_n$. En déduire un équivalent de I_n.- c) Donner un développement asymptotique à deux termes de I_n

Exercice 1442 [CCINP # 1418] 1. Montrer que l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la monotonie de la suite (I_n) et montrer qu'elle converge.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \frac{4n-1}{4n} I_n$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum \ln\left(\frac{4n-1}{4n}\right)$. En déduire la limite de I_n.

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^4)^n}$.

Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}^+$. Y a-t-il convergence uniforme ?

1. Déterminer la limite de la suite (I_n) à l'aide du théorème de convergence dominée.

Exercice 1443 [IMT # 1419] Soit $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

1. Vérifier la convergence de l'intégrale $I_n(\alpha)$. b) Montrer la suite $(I_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est convergente et préciser sa limite.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}^{n}(-1)^{n-1}I_n(\alpha)$ est une série convergente et exprimer sa somme sous forme intégrale.

Exercice 1444 [IMT # 1420] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}dx$.

Justifier l'existence de I_n. Montrer que $I_n \sim n\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}du$.

Exercice 1445 [IMT # 1421] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}dt$. Déterminer la limite de (I_n), puis un développement asymptotique à deux termes de I_n.

Exercice 1446 [IMT # 1422] Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}e^{-x}}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$

Exercice 1447 [IMT # 1423] On admet que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \sqrt{2\pi}$.

1. Existence et calcul de l'intégrale $\int_{\mathbb{D}} t^{2n}e^{-t^2}dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Existence et calcul de l'intégrale $\int_{\mathbb{T}} \cos(tz)e^{-t^2}dt$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1448 [IMT # 1424] Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_x : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{\mathrm{sh}(xt)}{\mathrm{sh}(t)}$.- a) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_x(t)dt$ converge.

1. Montrer l'égalité $\int_0^{+\infty} f_x(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2x^2}$ pour tout $x \in D$.

1. Trouver un équivalent de la somme quand $x \to 1^-$.

Exercice 1449 [IMT # 1425] On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et trouver une équation différentielle vérifiée par f.

b) Montrer que f est développable en série entière et donner son développement.

Exercice 1450 [CCINP # 1426] 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $t \mapsto e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(xt)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

1. La fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(xt)dt$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

1. On admettra que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$. Établir une équation différentielle vérifiée par F. Donner une expression simple de F.

Exercice 1451 [IMT # 1427] On admettra que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi}$. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)dt$. Préciser le domaine de définition de f et exprimer f à l'aide d'une équation différentielle.

Exercice 1452 [IMT # 1428] Soit $\eta : x \in]-1, +\infty[\mapsto \int_0^1 (1-t^2)^x dt$. Montrer que η est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1453 [IMT # 1429] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 1454 [IMT # 1430] Soient $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-espace des fonctions paires (resp. impaires) de E.

1. Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

1. Déterminer les $f \in E$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = x + \cos(x)$.

Exercice 1455 [IMT # 1431] On considère l'équation différentielle $xy' + y = \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}$.

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^*$ puis sur $\mathbb{R}$.

1. Donner un développement limité d'une solution de l'équation différentielle à l'ordre 3 au voisinageqde 0.

Exercice 1456 [CCINP # 1432] 1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.

1. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en (0,0).

ii) Donner la définition de « f différentiable en (0,0) ».- b) On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1457 [IMT # 1433] Soit $f : [a,b] \to E$ où E est un espace euclidien et $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient a < b. On suppose f continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $||f(b) - f(a)|| \leq ||f'(c)||(b-a)$. Ind. On pourra introduire $\varphi : t \mapsto \langle f(t), f(b) - f(a)\rangle$.

Exercice 1458 [IMT # 1434] Soient $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x, y \geq 0 \text{ et } 0 \leq x+y \leq 1\}$ et $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy(1-x-y)$. Montrer que f atteint un maximum et un minimum sur K et les déterminer.

Exercice 1459 [CCINP # 1435] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et f, g définies sur $\mathbb{R}^n$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \langle u(x), x\rangle$ et $g(x) = ||x||^2 1$.

1. On pose $K = g^{-1}\{0\}$. Montrer que K est compact.

1. Montrer que $f_{|K}$ admet un maximum en $a \in K$.

1. Montrer que g est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.

1. Montrer que a est un vecteur propre de u.

3) Probabilités

Exercice 1460 [IMT # 1436] Est-il possible de truquer deux dés à six faces de sorte que la somme obtenue pour un double lancer suive une loi uniforme ?

Exercice 1461 [IMT # 1437] Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire simultanément n boules et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Donner la loi de X. Calculer son espérance.

Exercice 1462 [CCINP # 1438] Lors d'une compétition de saut en hauteur, un participant saute à plusieurs reprises et, à l'instant n, a une chance sur n de réussir son saut. S'il chute, la compétition s'arrête pour lui. On note X le nombre de sauts réussis. Quelle est la loi de X ? Existence et valeur de $\mathbf{E}(X)$ et de $\mathbf{V}(X)$?

Exercice 1463 [IMT # 1439] On considère une pièce ayant une probabilité $p \in]0,1[$ d'obtenir pile et un dé équilibré à 6 faces. On note N le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pile, puis on lance N fois le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un unique 6 parmi les N lancers ?

Exercice 1464 [IMT # 1440] Soit S la somme de N dés équilibrés à 6 faces, où N suit la loi uniforme sur $[\![1,52]\!]$. Déterminer la probabilité des événements (S=1), (S=2), (S=3). Calculer l'espérance de S.

Exercice 1465 [IMT # 1441] On joue des parties indépendantes d'un jeu où la probabilité de gagner est de $\frac{2}{3}$. Soit A_n l'événement « les parties n et n+1 sont gagnées, mais ce sont les premières à être gagnées consécutivement ». On note $p_n = \mathbf{P}(A_n)$.

1. Calculer p_1 et p_2.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$.

Exercice 1466 [IMT # 1442] On dispose de N coffres. Avec probabilité p, on place dans l'un des coffres un trésor (le choix du coffre est effectué sous loi uniforme). Quelle est la probabilité que le N-ième coffre contienne un trésor sachant que les N-1 autres coffres sont vides ?

Exercice 1467 [IMT # 1443] Soient $n, N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On considère N clients et n fournisseurs. Chaque client peut choisir individuellement un fournisseur. On note X_i le nombre de clients ayant choisi le fournisseur numéro i.

1. Pour tout $i \in [1,n]$, déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i.

1. On pose $Y = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$. Exprimer $\mathbf{E}(Y)$ de deux manières.

1. Calculer $\mathbf{E}(X_iX_j)$ et $\mathbf{Cov}(X_i, X_j)$ pour $(i,j) \in [1,n]^2$.

Exercice 1468 [IMT # 1444] Soient X et Y indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer la loi de S=X+Y. Déterminer la loi de X sachant (S=n).

Exercice 1469 [Navale # 1445] Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $X = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Calculer $\mathbf{P}(X \geq k)$, en déduire la loi de X.

Exercice 1470 [IMT # 1446] Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi est donnée par $\mathbf{P}((X,Y) = (j,k)) = \frac{j+k}{e^{2j+k}j!k!}$ pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\mathbf{E}\left(2^{X+Y}\right)$.

Exercice 1471 [IMT # 1447] Soient X et Y deux variables indépendantes suivant la loi géométrique de para- mètre $p \in]0,1[$. On pose D=X-Y et $I = \min(X,Y)$. a) Rappeler l'espérance et la variance de X.

1. Déterminer la loi conjointe de (D, I).

1. Préciser les lois de D et I. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 1472 [IMT # 1448] Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois données par $\mathbf{P}(X_k = -k^\lambda) = \mathbf{P}(X_k = k^\lambda) = \frac{1}{2}$, où $\lambda \in]0,1/2[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n}$.

1. Déterminer $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.

1. Donner un équivalent de $u_n = \sum_{n=1}^{n} k^\alpha$, où $\alpha > 0$.c) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et déterminer $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(|Y_n| > \alpha)$.

Exercice 1473 [ISUP # 1449] Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance nulle et d'écart-type σ. Montrer que, pour tous $\lambda, \mu > 0$, $\mathbf{P}(X \geq \lambda) \leqslant \frac{\sigma^2+\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}$ et $\mathbf{P}(X \geq \lambda) \leqslant \frac{\sigma^2}{\lambda^2+\sigma^2}$.

XV) Autres Écoles - PSI

1) Algèbre

Exercice 1474 [IMT # 1450] Soit le polynôme $P(X) = X^4 + \alpha X^3 + \beta X - 16$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles le polynôme P admet une racine triple.

Exercice 1475 [Navale # 1451] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $D_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^T + M = \mathrm{Tr}(M)A\}$. Caractériser le sous-espace D_A et déterminer sa dimension.

Exercice 1476 [IMT # 1452] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$ et AB = -BA.

1. Montrer que A et B sont inversibles et diagonalisables.

1. Montrer que n est pair, puis que A et B sont semblables.

Exercice 1477 [CCINP # 1453] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = (a_{i,j} + x)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On note $D(x) = \det(A(x))$.

1. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer D(x).

1. Montrer que D(x) est un polynôme en x de degré au plus 1.

1. Dans le cas où $a_{i,i} = a$, $a_{i,j} = b$ pour $i > j$ et c pour $i < j$, calculer det(A).

Exercice 1478 [ENSEA # 1454] On souhaite déterminer les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante : $\begin{cases} a_{n+1} = 3\ a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3\ b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3\ c_n \end{cases}$

1. Écrire le système sous la forme $X_{n+1} = AX_n$. En déduire X_n en fonction de A et de X_0.

1. Calculer, pour tout n, A^n.

1. Conclure.

Exercice 1479 [IMT # 1455] Soient $a \in \mathbb{C}$ et $U \in \mathbb{C}[X]$ non nul. On pose $f : P \mapsto P + P(a)U$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que $Ker(f) \subset Vect(U)$. c) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si U(a) = -1. Que vaut le noyau de f sinon ?

Exercice 1480 [CCINP # 1456] 1. Énoncer le théorème du rang.

1. On considère l'énoncé suivant :

« Soient E et F deux espaces et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u injective $\Leftrightarrow$ u surjective. » Quelles hypothèses suffit-il de rajouter pour que cet énoncé soit vrai ? Donner des contreexemples pour illustrer l'importance de ces hypothèses.- c) Démontrer que ces hypothèses sont en fait équivalentes à $\forall u \in \mathcal{L}(E, F), u$ injective $\Leftrightarrow$ u surjective.

Exercice 1481 [CCINP # 1457] On considère E un espace vectoriel de dimension finie, $p, q \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $p + q = \mathrm{id}\,\mathrm{et}\,\mathrm{r}\,\mathrm{rg}(p) + \mathrm{rg}(q) \leqslant \dim(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) = E$

1. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 1482 [IMT # 1458] 1. Rappeler la définition de deux matrices semblables.

1. Soit A une matrice non inversible et non nulle.

- i) Montrer que A est semblable à une matrice A' de première colonne nulle.

ii) Montrer qu'il existe (i, j) dans $\{1, \dots, n\}^2$ tels que $A'E_{i,j} = E_{i,j}A' = 0$, où $E_{i,j}$ est la matrice avec des zéros partout, excepté un 1 sur la i-ème ligne et la **j**-ème colonne.

- iii) En déduire qu'il existe B non nulle telle que AB = BA = 0.

1. Étudier la réciproque de la propriété précédente.

Exercice 1483 [IMT # 1459] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(\overline{A}) = \overline{\det A}$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB = BA. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Exercice 1484 [CCINP # 1460] Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $K_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$.

1. Si u est injectif, que peut-on dire que I_k et K_k ?

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} \subset I_k$ et $K_k \subset K_{k+1}$.

1. On suppose que u n'est pas injectif.

- i) Montrer qu'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $I_{p+1} = I_p$ et $K_{p+1} = K_p$.
- ii) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $K_{p+k} = K_p$ et $I_{k+p} = I_k$.
- iii) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

Exercice 1485 [Navale # 1461] Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ n-1 & \cdots & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 1486 [Navale # 1462] On note

$$A = \left(\binom{j-1}{i-1} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

, avec comme convention que $\binom{j-1}{i-1} = 0$ si $i > j$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

b) La matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable ? Donner ses espaces propres.

Exercice 1487 [Navale # 1463] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si i = 1 ou i = n ou j = 1 ou j = n et 0 sinon. Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 1488 [IMT # 1464] Soit $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X^2-1)P' - nXP$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer ses valeurs propres.

Exercice 1489 [CCINP # 1465] Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Soit λ une valeur propre non nulle de $f \circ g$. Montrer que λ est valeur propre de $g \circ f$.

1. Même question lorsque $\lambda = 0$.

1. Que peut-on en déduire sur les spectres de $f \circ g$ et $g \circ f$?

Exercice 1490 [IMT # 1466] Soient

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2$$

et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. À quelles conditions sur a et b, la matrice A est-elle diagonalisable ?

1. Ces conditions étant vérifiées, déterminer une base de vecteurs propres de A.

Exercice 1491 [IMT # 1467] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le spectre de A et son polynôme caractéristique.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a,b,c, pour que A soit diagonalisable.

Exercice 1492 [CCINP # 1468] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

1. i) Déterminer les valeurs propres de A.

ii) La matrice A est-elle diagonalisable ? iii) Calculer la dimension du noyau de A.

1. Soit $\Phi : X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mapsto AXA$.

1. Déterminer les valeurs propres de Φ.

ii) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ? iii) Déterminer son image.

Exercice 1493 [IMT # 1469] Soient $n \geq 2$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $f : M \in E \mapsto \operatorname{tr}(M)$.

1. Déterminer le rang de f. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Vect}(I_n)$.

1. On définit $g : M \in E \mapsto M + \operatorname{tr}(M) I_n$. Montrer que g est diagonalisable.

1. Soit $J \in E$ de trace nulle. On définit $h : M \in E \mapsto M + \operatorname{tr}(M) J$. Le polynôme caractéristique de h est-il scindé ? L'endomorphisme h est-il diagonalisable ?

Exercice 1494 [CCINP # 1470] Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $A = XX^T$.

1. Déterminer le rang et le spectre de A.

1. Exprimer $\chi_A(\lambda)$ en fonction de λ et X.

1. Montrer que $\det(I_n + XX^T) = 1 + X^T X$.

Exercice 1495 [IMT # 1471] Soient f et g dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que f n'est pas une homothétie.- a) Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

1. On suppose f diagonalisable. Montrer que g est diagonalisable et qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $g = \alpha \operatorname{id} + \beta f$.

Exercice 1496 [IMT # 1472] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 + f^2 + f = 0$. On suppose que f n'admet aucun polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 2.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

1. Montrer que rg(f) = 2.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$ puis que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id})$.

1. Soit x non nul dans $Ker(f^2 + f + id)$. Montrer que la famille (x, f(x)) est libre.

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1497 [IMT # 1473] On considère $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de A. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D que l'on explicitera.

1. Montrer que toute matrice commutant avec D est une matrice diagonale.

1. Soit $P(X) = X^7 + X + 1$. Identifier les matrices M telles que P(M) = A.

Exercice 1498 [CCINP # 1474] Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que $Im(a) \subset ker(a)$.

1. Déterminer une base de Im(a) et ker(a).

1. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1499 [CCINP # 1475] Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On pose $A = (\alpha^{i+j-2})_{1 \le i,j \le n}$.

1. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.

1. Déterminer le rang et le spectre de A.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{C}^*$, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 1500 [CCINP # 1476]

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

1. Soient $(e_1, \dots, e_{2p})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2p}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p} \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2p})$ dont la matrice dans cette base est $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le 2p}$ où $a_{i,2p+1-i} = \alpha_i$, les autres coefficients étant nuls.

- i) Représenter la matrice A.
- ii) Montrer que le sous-espace $E_i = \mathrm{Vect}(e_i, e_{2p+1-i})$ est stable par f.- iii) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tous les induits f_{E_i} sont diagonalisables.
- iv) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

1. Que peut-on dire en dimension impaire ?

Exercice 1501 [CCINP # 1477] Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MM^T$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer son noyau et sa dimension ; est-il inversible ?

1. Montrer que f est diagonalisable et déterminer ses sous-espaces propres.

1. Montrer que $\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 1502 [CCINP # 1478] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB = BA et on pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Si $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables et si $R \in \mathbb{C}[X]$, montrer que R(U) et R(V) sont

semblables. b) Soit $P \in \mathbb{C}[Y]$ Exprimer P(M) an fonction de P(A) P'(A) at P(A)

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer P(M) en fonction de P(A), P'(A) et B.

1. On suppose B nulle et A diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable. d) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ n'est pas valeur propre de A, justifier que $A - \lambda I_n$ est inversible.

1. On suppose M diagonalisable. Montrer que B est nulle et A diagonalisable.

Exercice 1503 [IMT # 1479] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB BA = A. Soit $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XBBX$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(A^k) = kA^k$.

1. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 1504 [CCINP # 1480] Soit $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ A^3 + 4A^2 + 5A = 0\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{E}$. Est-ce que A est diagonalisable ? Justifier.

1. Quelle relation peut-on écrire entre les racines d'un polynôme annulateur de A et ses valeurs propres ?

1. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}$.

Exercice 1505 [CCINP # 1481] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose $A^3 2A^2 + A2I_n = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

1. On suppose $A^2 + A + 2I_n = 0$. Montrer que n est pair. c) On suppose $A^3 + A^2 + 2A = 0$. Montrer que rg(A) est pair.

1. On suppose A + A + 2A = 0. Monther que $\mathrm{Ig}(A)$ est pair.

Exercice 1506 [CCINP # 1482] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 A^2 + AI_n = 0$. a) Soit P un polynôme annulateur de A. Quel est le lien entre les racines de P et les valeurs propres de A ? b) Déterminer $\det(A)$.

1. Montrer que $tr(A) \in \mathbb{N}$.

Exercice 1507 [ENSEA # 1483] Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $\mathrm{tr}(M) = 3$ et $M^5 = M^2$.

Exercice 1508 [CCINP # 1484] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(\mathcal{P}) : M^3 - 4M = 0$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$.

1. Montrer que les valeurs propres de M sont racines de $X^3 - 4X$.

1. Caractériser les matrices vérifiant (P).

Exercice 1509 [CCINP # 1485] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de $\det(A)$ s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2+a & 2 & 1+a \\ 3-a & 3 & 3-a \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A)$. En déduire une condition

pour qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que B^2

1. Désormais $a \geq 0$. Déterminer les éléments propres de A puis donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

1. Désormais $a \neq 1$ et $a \neq 3$. Montrer que, si M est telle que $M^2 = D$ alors MD = DM. Déterminer les matrices M telles que $M^2 = D$. En déduire les matrices B telles que $B^2 = A$.

Exercice 1510 [IMT # 1486] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec A symétrique et les valeurs propres de A positives ou nulles. On suppose que AB + BA = 0.

1. Montrer que, pour tout α valeur propre de A, et pour tout vecteur propre X associé à α, on a ABX = 0.

1. En déduire que AB = BA = 0.

Exercice 1511 [NIL # 1487] Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit P un polynôme annulateur de u. On suppose que 0 est une racine simple de P.

1. Caractériser la condition sur P à l'aide de ses coefficients.

1. Montrer que le noyau de u et celui de u^2 sont égaux.

1. Démontrer que, si u est nilpotent, alors u est nul.

Exercice 1512 [CCINP # 1488] Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E, v \in E \setminus \{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = v$. Déterminer le rang de f et son éventuelle diagonalisablilité.

Exercice 1513 [IMT # 1489] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que $(\mathrm{Tr}(A))^2 \leq \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{Tr}(A^2)$.

Exercice 1514 [CCINP # 1490] Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $U \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que U est diagonalisable. Montrer que U^2 est diagonalisable.

1. Montrer que la réciproque est fausse en donnant un contre-exemple.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que : $\ker(U^2 - \lambda^2 \,\mathrm{id}) = \ker(U - \lambda \,\mathrm{id}) \oplus \ker(U + \lambda \,\mathrm{id})$.

1. Montrer que si U est un automorphisme alors la réciproque de la question a) est vraie, c'est-à-dire que U^2 diagonalisable implique U diagonalisable.

1. Montrer que, si U est diagonalisable, alors, pour tout polynôme Q, Q(U) est diagonalisable.

1. On suppose qu'il existe Q dans $\mathbb{C}[X]$ tel que Q(U) est diagonalisable et que Q'(U) est bijectif. Montrer que U est diagonalisable.

Exercice 1515 [CCINP # 1491] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension n, vérifiant $u^3 = u^2$, $u \neq id$, $u^2 \neq u$ et $u^2 \neq 0$.

1. Montrer que $Sp(u) \subset \{0, 1\}$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E, x \neq 0$, tel que u(x) = 0. Que peut-on en déduire ?

1. Montrer de même que 1 est une valeur propre de u.

1. Montrer que $E = \ker(u^2) \oplus \operatorname{Im}(u^2)$ et que $\operatorname{Im}(u^2) = \ker(u \operatorname{Id}_E)$. e) Soient $p = \dim(\ker(u\,\mathrm{id}))$, $r = \dim(\ker(u))$ et q = $n\ p\ r$. Montrer qu'il existe

une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où A une matrice quelconque.

Exercice 1516 [CCINP # 1492] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi^k(M) = A^k M$. c) Montrer que $P \in \mathbb{C}[X]$ annule A si et seulement s'il annule Φ.

1. En déduire que A est diagonalisable si et seulement si Φ l'est.

1. Montrer que A et Φ ont le même spectre (on s'intéressera aux colonnes de M).

1. On suppose A diagonalisable et on note $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A. Exprimer une base de vecteurs propres de Φ en fonction de $X_1, \ldots, X_n$.

Exercice 1517 [CCINP # 1493] Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrer que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

1. Montrer que le résultat est vrai pour $\lambda = 0$ en dimension finie.

1. On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$u(P)(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$$

et $v(P)(x) = P'(x)$. Déterminer $u \circ v,\ v \circ u$. Montrer que 0 est valeur propre de l'un de ces deux endomorphismes mais pas de l'autre.

Exercice 1518 [CCINP # 1494] Soit φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Donner la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. La matrice A est-elle diagonalisable ? **Ind.** On pourra calculer A^2.

1. Donner le spectre de φ.

1. Donner les sous-espaces propres de φ.

1. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donnez son inverse.

1. L'endomorphisme φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$? g) Que représente la matrice A géométriquement ?

Exercice 1519 [CCINP # 1495] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que P(A) et P(B) sont semblables.

1. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.- c) Exprimer P(M) en fonction de A, P(A), P'(A).

1. En déduire que si M est diagonalisable alors A l'est aussi.

1. Démontrer que si M est diagonalisable alors A est nulle.

Exercice 1520 [CCINP # 1496] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 5A + 6I_n = 0$.

1. Citer deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice carrée réelle soit diagonalisable.

1. Montrer que A est diagonalisable et que $Sp(A) \subset \{2, 3\}$. On notera D une matrice diagonale associée.

1. Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto DMMD$. Montrer que f est un endomorphisme et que f est diagonalisable. Ind. Écrire M et D sous forme de matrices par blocs.

Exercice 1521 [IMT # 1497] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} B$.

1. Montrer que $B^2 = B$.

1. On suppose A diagonalisable sur $\mathbb{R}$ avec p valeurs propres distinctes. En utilisant une division euclidienne, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.

1. En déduire que $B \in \mathbb{R}_{p-1}[A]$.

1. Caractériser géométriquement B à l'aide des sous-espaces propres de A.

Exercice 1522 [CCINP # 1498] 1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Exercice 1523 [IMT # 1499] Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k$, où les a_k (resp. b_k) sont les coefficients de P (resp. de Q). On admet qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur E.

1. Soit $H = \{P \in E, P(1) = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et en donner la dimension.

1. Déterminer la distance de X à H.

1. On prend n=3. Donner une base orthonormée de H.

Exercice 1524 [CCINP # 1500] Soient E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille quelconque de E. On suppose que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2$.
Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 1525 [IMT # 1501] Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(1)Q'(1) + P''(2)Q''(2)$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Calculer $d(X^2 + X2, \mathbb{R}_1[X])$.

Exercice 1526 [CCINP # 1502] 1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que le cas d'égalité.

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x+ty|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \sqrt{1+t^2}$.

1. Montrer que $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{|x+ty|}{\sqrt{x^2+u^2}} = \sqrt{1+t^2}$.

Exercice 1527 [ENSEA # 1503] 1. Montrer que l'application $\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}\left(A^T B\right)$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $M = E_{1,2} + E_{2,3}$. Déterminer la projection orthogonale de M sur le sous-espace vectoriel $S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1528 [CCINP # 1504] Soit E l'ensemble des fonctions continues sur [-1,1]. Pour toutes fonctions f et g dans E, on pose $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E. Dans la suite, on munit E de ce produit

scalaire. b) Soit $F = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) = 0\}$ et $G = \{g \in E : \forall x \in [-1,0], g(x) = 0\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces de E orthogonaux et en somme directe. c) Sont-ils supplémentaires dans E ?

1. Montrer que $G \subset F^\perp$.

1. Le but de cette question est de montrer que $G = F^\perp$. Soit $g \in F^\perp$.

1. On définit $f_n \in E$ par la fonction nulle sur [0,1], g(0) sur [-1,-1/n] et affine sur [-1/n, 0]. Calculer $\langle f_n, g\rangle$ puis montrer que $g(0)\int_{-1}^0 g(x)dx = 0$.

ii) En considérant la fonction nulle sur [0,1] et égale à $x \mapsto g(x)g(0)$ sur [-1,0], montrer que $g \in G$.

Exercice 1529 [IMT # 1505] Soient $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien, u un vecteur non nul de E et H = $\operatorname{Vect}(u)^\perp$. On note p le projecteur orthogonal sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

1. Montrer $\forall x \in E, p(x) = x\frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u$.

1. Montrer $\forall x \in E, s(x) = x2\frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}u$.

1. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$. Écrire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale s par rapport à H.

Exercice 1530 [Navale # 1506] Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une similitude vectorielle s'il existe $v \in \mathcal{O}(E)$ et $\lambda \in]0, +\infty[$ tels que $f = \lambda v$.

1. Montrer que, si f est une similitude vectorielle, alors f conserve l'orthogonalité.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que g conserve l'orthogonalité.

1. Si $a, b \in E$ sont unitaires, calculer $\langle a + b, ab\rangle$.

1. Montrer que q est une similitude vectorielle. Conclure.

Exercice 1531 [IMT # 1507] On munit $\mathbb{R}^n$ euclidien de sa structure euclidienne canonique. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^T = M^3$. On pose $N = M^4$.- a) Montrer que N est symétrique.

1. Montrer que, pour tout X dans E, on a $\langle NX, X\rangle \geq 0$.

1. Montrer que $N^3 = N$.

1. En déduire que M est orthogonale.

1. Pour n=2, déterminer toutes les matrices M qui vérifient l'équation initiale.

Exercice 1532 [IMT # 1508] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux. Soient $f = p \circ q \circ p$ et $g = q \circ p \circ q$. a) Montrez que f et q sont des endomorphismes auto-adjoints

1. Montrez que f et g sont des endomorphismes auto-adjoints.b) Montrer que f et g sont positifs.

c) Montrer que f et g ont les mêmes valeurs propres non nulles.

1. Montrer que $\ker(f) = \ker(q \circ p)$ et que $\ker(g) = \ker(p \circ q)$. e) Démontrer que f = g si et seulement si p et q commutent.

Exercice 1533 [ENSEA # 1509] On se place dans $\mathbb{R}^3$ munit de sa structure euclidienne orientée canonique.
Soient $\vec{n}$ un vecteur unitaire et θ un angle. a) Montrer que la rotation Φ d'axe orienté Vect($\vec{n}$) et d'angle θ est définie par :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ \Phi(\vec{u}) = \cos(\theta)\vec{u} + (1 - \cos(\theta))\,\langle \vec{u}, \vec{n}\rangle\,\vec{n} + \sin(\theta)(\vec{n} \wedge \vec{u}).$$

1. Donner la matrice de Φ dans la base canonique pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 1534 [IMT # 1510] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = A + A^T$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = 0$. Montrer que A est antisymétrique.

Exercice 1535 [IMT # 1511] Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \langle f(x), x\rangle = 0$. a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$. On pourra considérer la quantité

1. On note g l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $g \in \mathrm{GL}(\mathrm{Im}(f))$. c) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $g - \lambda\,\mathrm{id} \in \mathrm{GL}(\mathrm{Im}(f))$.

Exercice 1536 [IMT # 1512] 1. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $S = AA^T$ est symétrique positive.

1. Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = AA^T$.

Exercice 1537 [IMT # 1513] Soient $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient les trois propositions suivantes : i) $u \in \mathcal{O}(E)$, ii) $u^2 = -\,\mathrm{id}$, iii) $\forall x \in E^2$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Montrer si l'on suppose deux propositions vraies, alors la troisième est vraie.

Exercice 1538 [CCINP # 1514] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^TM = MM^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$.

1. Justifier que M^TM est diagonalisable.

1. Déterminer les valeurs propres de M^TM.

1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}}M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer l'ensemble des matrices vérifiant les hypothèses.

Exercice 1539 [IMT # 1515] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M\mathrm{Tr}(M)A$.- a) Montrer que u est un endomorphisme.

1. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

1. On prend $A = I_n$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que u est autoadjoint pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Répondre d'une autre manière à la question b).

Exercice 1540 [Navale # 1516] Soient $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $u, v \in \mathcal{O}(E)$.

1. On suppose que u + v = 2 id. Montrer que u = v = id.

1. On suppose qu'il existe $m \in \mathcal{L}(E)$ telle que $umu^{-1} + vmv^{-1} = 2m$. Que dire de u, vet m ?

Exercice 1541 [CCINP # 1517] Soient $n \geq 3$ et $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang de A. En déduire la dimension de ker(A). La matrice A est-elle diagonalisable ? En déduire la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre nulle.

1. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $X^TAX \leqslant \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)}(\lambda)X^TX$.

1. Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si X est nul ou est un vecteur propre associé à la plus grande des valeurs propres.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont 0, λ et 1λ, où λ désigne la plus grande valeur propre de A.

Exercice 1542 [IMT # 1518] Soient $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^n \langle f(e_k), e_k\rangle$.

1. Soient $f, g \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que $0 \leq \mathrm{tr}(f \circ g) \leq \mathrm{tr}(f)\,\mathrm{tr}(g)$. c) Soit $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Déterminer les $g \in \mathcal{S}^+(E)$ tels que $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(f)\,\mathrm{tr}(g)$.

2) Analyse

Exercice 1543 [CCINP # 1519] Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $N_0(f) = \int_0^1 |f(t)|dt$,

$$N_1(f) = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt \text{ et}$$

$$N_2(f) = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| + \left|\int_0^1 f'(t)\,dt\right| + \left|\int_0^1 f''(t)\,dt\right|.$$

1. Soit $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$. Calculer $N_0(f)$, $N_1(f)$ et $N_2(f)$.

1. Montrer que N_1 est une norme. Est-ce que N_2 est une norme ?

1. Montrer que, pour toute $f \in E$, il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$.

1. Montrer que $\forall f \in E, N_1(f) \leqslant N_0(f)$. Existe-t-il une fonction f non identiquement nulle telle que $N_1(f) = N_0(f)$?- e) Existe-t-il $C \geq 0$ tel que $\forall f \in E, N_0(f) \leq CN_1(f)$?

Exercice 1544 [IMT # 1520] Soient E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace de E. On suppose que l'adhérence de F est égale à E. Soient $v \in E \setminus F^\perp$ unitaire et $G = \{v\}^\perp$.

1. Soient $(x,y) \in F^2$ et $z = \langle x,v\rangle y\langle y,v\rangle x$. Montrer que $z \in F \cap G$.

1. Montrer que tout élément de G est limite d'une suite d'éléments de $F \cap G$.

Exercice 1545 [IMT # 1521] Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien. On fixe $k \in [0,1[$, et on considère l'ensemble : $F = \{f \in \mathcal{L}(E); \forall x \in E, ||f(x)|| \leq k||x||\}$.

1. Déterminer l'ensemble F lorsque k=0.

1. Vérifier que l'application identité id n'appartient pas à F.

1. Montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une norme sur $\mathcal{L}(E)$ telle que F est une boule fermée pour cette norme.

Exercice 1546 [IMT # 1522] Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés et $f : E \to F$.

1. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- i) f est continue en $a \in E$,

- ii) pour toute suite (x_n) telle que $x_n \to a$, on a $f(x_n) \to f(a)$.

On suppose ici que $E = F = \mathbb{R}$ et que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. On suppose de plus que $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. $\forall a, b \in \mathcal{Q}, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. b) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1547 [IMT # 1523] 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x^n + x\sqrt{n}1 = 0$ possède une unique solution dans [0, 1], que l'on note x_n.

1. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Que dire de la nature de la série de terme général x_n ?

Exercice 1548 [IMT # 1524] Pour $n \geq 2$, soit $f_n : x \mapsto nx^3 + n^2x2$.

1. Pour $n \geq 2$, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans]0,1[. On la note u_n.

1. Déterminer les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ et la déterminer.

1. Déterminer un équivalent de $u_n\ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 1549 [ENSEA # 1525] 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $xe^{\sqrt{x}} = \sqrt{n}$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}^+$.

1. Déterminer la limite de la suite (x_n).

1. Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 1550 [IMT # 1526] Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 1551 [Navale # 1527] On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n dt$.- a) Donner une relation entre U_{n+2} et U_n.

1. Donner un équivalent de U_n en $+\infty$.

1. Étudier la série de terme général $(-1)^n U_n$.

1. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et calculer sa somme.

Exercice 1552 [CCINP # 1528] Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n(\alpha) = \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} R_n(\alpha) = 0$.

1. Montrer que $R_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha 1)^{\alpha 1}_n}$.

Exercice 1553 [IMT # 1529] 1. Montrer que : $\forall x > -1,\ \forall k \in \mathbb{N},\ (1+x)^k \geq 1+kx$. b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$. Donner un encadrement de x_n.

1. i) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\int_t^t \frac{dt}{t}\right)$ converge.

- ii) En déduire un équivalent de x_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 1554 [IMT # 1530] Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 1555 [IMT # 1531] Étudier la nature de la série de terme général $u_n = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 1556 [IMT # 1532] Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Exercice 1557 [CCINP # 1533] Étudier la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln(n))}{n}$.

Exercice 1558 [CCINP # 1534] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, \pi/2]$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

1. Montrer que $\sum u_n^3$ converge. c) Montrer que $(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2})$ converge.

1. Donner un équivalent de u_n.

Exercice 1559 [CCINP # 1535] 1. Énoncer le critère spécial des séries alternées.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

Montrer que $u_n = \frac{(-1)^n\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 1560 [IMT # 1536] Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\left(e^{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} - 1\right)dx$.

Exercice 1561 [ENSEA # 1537] Étudier, en fonction des paramètres réels α et β, l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha \ln(x)}$.

Exercice 1562 [CCINP # 1538] On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}dt$.

1. Justifier la convergence de I.

1. Montrer $\forall t \in \mathbb{R}, \sin^3(t) = \frac{3}{4}\sin(t)\frac{1}{4}\sin(3t)$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}dt = \frac{3}{4}\lim_{x\to 0^+}\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}dt$.

1. Soit $g : t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(t)t}{t^2}$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

1. Calculer I.

Exercice 1563 [CCINP # 1539] 1. Établir pour $n \in \mathbb{N}$ l'existence de $I_n = \int_n^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

1. Déterminer la nature des séries $\sum I_n$ et $\sum nI_n$.

Exercice 1564 [NIL # 1540] Soit $f : x \geq 0 \mapsto \int_{-\pi}^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)dt$.

1. Justifier l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f'.

1. Que peut-on dire de f' en 0 ?

Exercice 1565 [NAVALE # 1541] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in]0, 1[\mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\int_1^n \frac{x^t}{t}dt$. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 1566 [ENSEA # 1542] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in [0, 1] \mapsto \frac{n^2x^2}{1\perp n^3x^3}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme sur [0, 1] de la suite (f_n). b) Étudier la convergence simple et uniforme sur [0, 1] de (f_n').

Exercice 1567 [NIL # 1543] Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geq 0$ et $f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on précisera.

1. Montrer que les f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et étudier la convergence de (f_n').

Exercice 1568 [CCINP # 1544] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{\text{sh}(nx)}$.

1. Donner le domaine de définition de $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

1. Donner le domaine de continuité de f.

1. Déterminer les variations de f.

1. Démontrer l'existence de $x_0 > 0$, tel que : $\forall x \geq x_0, \forall n \geq 2, f_n(x) \leq 3e^{-nx}$.

1. Montrer que $f(x) \sim \frac{1}{\sinh(x)}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 1569 [IMT # 1545] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(2n+1)x}}{(2n+1)^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

1. Montrer que f est de classe C^2 sur son domaine de définition.

1. En déduire une expression de f sur son domaine de définition.

Exercice 1570 [NAVALE # 1546] Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

1. Donner une expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 1571 [CCINP # 1547] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : x \mapsto \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$. Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S.

1. Montrer que S est continue sur D.

1. Montrer que la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur D. On s'aidera d'une comparaison série-intégrale.

1. Montrer que S est de classe C^1 sur D.

Exercice 1572 [CCINP # 1548] Soient a>0 et φ une fonction continue sur I=[-a,a]. On suppose qu'il existe un réel $c \geq 0$ tel que $\forall x \in I,\ |\varphi(x)| \leqslant c|x|$. On cherche l'ensemble des fonctions f continues sur I telles que f(0)=0 et $\forall x \in I,\ f(x) - f(x/2) = \varphi(x)$.

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(x/2^n)$ est définie et continue sur I.

1. Montrer que S est l'unique solution du problème.

1. On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Montrer que S est dérivable sur I.

Exercice 1573 [IMT # 1549] Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $z_n = (1+i)^n$.

1. Calculer le module et un argument de z_n.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^x \cos(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

1. En notant $e^x \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1574 [CCINP # 1550] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. On note R' le rayon de la série entière $\sum b_n z^n$, où $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$. a) Montrer que $R' \geq \max(1, R)$.

1. Si R' > 1, montrer que R' = R. c) Montrer que $R' = \max(1, R)$.

Exercice 1575 [IMT # 1551] Soit $u_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$. a) Donner la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.

1. Sur quel ensemble la somme de cette série entière est-elle définie ?

Exercice 1576 [CCINP # 1552] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite

1. Montrer que $\sum (-1)^n a_n$ converge

1. Montrer que, pour tout n, $a_n \geq \frac{1}{2n+1}$.

1. En déduire le rayon de convergence R de f. e) Montrer que, pour tout n, $(2n+2)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.

1. Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.

Exercice 1577 [CCINP # 1553] Soit (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$. a) Montrer que (a_n) est strictement positive.

1. Étudier sa monotonie.

1. Montrer que la série $\sum (a_{n+1} a_n)$ diverge. Quelle est la limite de (a_n) ?

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

1. Montrer que S est solution de (x-1)y' + (x+1)y = 0. En déduire S.

1. Montrer que $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(n-k+1)$.

1. Déterminer un équivalent de a_n en $+\infty$.

Exercice 1578 [CCINP # 1554] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4r^3} dx$.

1. Justifier l'existence de I_n.

1. Montrer que $I_n = \frac{1}{n^{5/3}} J_n$, où $J_n = \int_{-1}^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin(n^{-1/3}t)}{1+t^3} dt$.

1. Montrer que la suite (J_n) admet pour limite $K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$. En déduire la limite de la suite (I_n).d) À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

1. Montrer que $2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

J_0 $1+t^3$ $3\sqrt{3}$ f) En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 1579 [IMT # 1555] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $J_n = \int_{-\pi}^{\pi/2} \cos(t)^n \sin(t)^\alpha dt$.

1. Étudier l'existence de J_n.

1. On suppose $\alpha \geq 2$ et on pose $g : t \mapsto \frac{\sin(t)^\alpha}{1\cos(t)}$. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)dt$ existe.

1. On pose $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\cos(t)^n dt$. En rappelant les hypothèses du théorème utilisé, donner la limite de (K_n).

Exercice 1580 [IMT # 1556] 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ converge. b) Existence et calcul de la limite de (u_n) où $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$.

Exercice 1581 [Navale # 1557] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx$. Montrer que I_n est défini pour tout n et déterminer la limite de (I_n).

Exercice 1582 [IMT # 1558] On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale U_n est bien définie.

1. Étudier la convergence de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 1583 [Navale # 1559] Prouver la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sinh t}\,\mathrm{d}t$ et en donner une valeur explicite.

Exercice 1584 [IMT # 1560] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

1. Existence et calcul de I_n.

1. Montrer $\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.

Exercice 1585 [CCINP # 1561] On note I l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2} dt$.

1. Montrer que I est bien définie.

1. Montrer que $t \mapsto \ln(1-t^2)$ est développable en série entière ; préciser le développement et son rayon.- c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto -\frac{2}{n} t^{2n-2} \ln(t)$. Montrer : $\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

1. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt$. En déduire $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

- e) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(2n-1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{2n-1} + \frac{c}{(2n-1)^2}$.

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\frac{2}{2n-1}\right) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 1586 [CCINP # 1562] Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. On admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $I = -4\ln(2) + \frac{\pi^2}{2}$.

1. Montrer que l'intégrale suivante est définie : $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt$.

1. Montrer que l'intégrale suivante est définie et calculer sa valeur : $\int_0^1 t^{na} dt$. c) On souhaite montrer que $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$.

- i) Est-il possible de le montrer grâce à une intégration terme à terme en montrant la conver-

gence uniforme ? ii) Est-il possible de le montrer grâce à une intégration terme à terme en montrant la convergence de la série des intégrales ?

1. Que se passe-t-il pour a = 1 et a = 2 ?

Exercice 1587 [CCINP # 1563] Soit $f : x \in]0,1[\mapsto \frac{\ln(x)}{x-1}$. On pose $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.

1. Soit $g : t \mapsto f(1-t)$. Montrer que g est développable en série entière en 0 ; préciser le

iii) Est-il possible de le montrer en montrant que l'intégrale du reste tend vers 0 ?

rayon de convergence. c) Calculer I en admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 1588 [IMT # 1564] On note $f : t \mapsto \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$.

1. Montrer l'existence de $I = \int_0^1 f(t)dt$.

1. Exprimer f sous la forme d'une série et calculer I, en sachant que $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 1589 [CCINP # 1565] Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $I_{k,n} = \int_a^{+\infty} t^k e^{-nt}dt$ et $a_n = I_{n,n}$.- a) Déterminer la limite de $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$.

1. Montrer que l'intégrale $I_{k,n}$ est bien définie.

1. Calculer explicitement $I_{k,n}$ en fonction de k et de n. d) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

1. Étudier la nature de la série $\sum a_n e^n$.

1. Étudier la nature de la série $\sum (-1)^n a_n e^n$.

1. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty}\frac{tx}{e^t tx}dt$.

Exercice 1590 [IMT # 1566] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{1+t^2}dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe C^1 sur D et exprimer f' sans symbole d'intégrale.

1. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{r^2 1}dx$.

Exercice 1591 [IMT # 1567] Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{r^2+t^2}dt$.

1. Montrer que f est bien définie.

1. Montrer que f est continue.

1. Montrer que f(1) = 0.

1. Donner une expression explicite de f.

Exercice 1592 [IMT # 1568] Soit $g : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{xt}\frac{\sin(t)^2}{t}dt$.

1. Montrer que q est bien définie

1. Trouver la limite de g en $+\infty$. Ind. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \sin(t)^2 \leq t^2$.

1. Montrer que q est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Calculer g'(x) pour x > 0 et trouver g.

Exercice 1593 [CCINP # 1569] Le but est de calculer l'intégrale $A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du$. On pose $\psi : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que ψ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Calculer $\psi(0)$ et déterminer la limite de ψ en $+\infty$. d) Montrer que, pour tout x > 0, $\psi'(x) = -A\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi'(x)dx = -2A^2$. En déduire la valeur de A.

Exercice 1594 [IMT # 1570] Soit $F : x \in]-1, +\infty[\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)e^{-xt}}{t}dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur $]-1, +\infty[$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$ et calculer F'.

1. Montrer que F admet une limite en $+\infty$ et la donner.

Exercice 1595 [Saint-Cyr # 1571] Soit $f : x \mapsto \int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^x}dt$

1. Calculer F(x) pour tout x > -1.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

1. Montrer que f est continue puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$.

1. Conjecturer à l'aide de Python la valeur de f(2). Prouver cette conjecture.

1. Étudier la monotonie de la fonction f sur son domaine. e) Calculer les limites de f en 1^+ et en $+\infty$.

Exercice 1596 [IMT # 1572] Soit $F : x \mapsto \int_0^{\pi}\sin(x\sin(t))dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1. En déduire la limite de $x \mapsto \frac{F(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 1597 [CCINP # 1573] Soient $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ et $g : x \mapsto \int_0^x \ln(f(t))dt$. a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. Trouver une relation entre f(x) et f(x-1). c) Montrer que g est dérivable et calculer g'.

1. Nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{a(n)}$?

Exercice 1598 [IMT # 1574] Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt.$

1. Montrer que f est bien définie. La fonction f est-elle paire ? continue ?

1. Montrer que f est de classe C^∞.

1. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$. d) Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre satisfaite par f.

Exercice 1599 [CCINP # 1575] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

1. Montrer que f est continue sur D.

1. Pour tout $x \in D$, montrer que $1x \in D$ et que f(1 x) = f(x). d) Soit $h : x \mapsto \int_a^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

1. Montrer que h est continue sur $]0, +\infty[$.- ii) Pour tout $x \in D$, prouver $f(x) = h(1-x) + \frac{1}{x} h(1+x)$.

iii) Donner un équivalent de f en chaque borne de D.

Exercice 1600 [IMT # 1576] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^{tx}+e^{-t}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

1. Montrer que f est continue sur D.c) Donner des équivalents de f aux bornes de D.

Exercice 1601 [IMT # 1577] Trouver les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \int_0^x f(t)dt = 1$.

Exercice 1602 [CCINP # 1578] Soit (E) l'équation différentielle : $y'2xy = (-2x1)e^x$.

1. Soit l'équation différentielle homogène y' + a(x)y = 0, où a est une fonction continue sur

$\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, où A est une primitive de a.

1. Résoudre l'équation (E).

Exercice 1603 [CCINP # 1579] Soit (E) l'équation différentielle $(x^2+x)y'' + (3x+1)y' + y = 0$.

1. Déterminer une solution de (E) développable en série entière au voisinageqde 0.

1. En déduire que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est solution de E.

1. Trouver une autre solution de (E) indépendante de la première à l'aide du changement d'inconnue $y(x) = \frac{u(x)}{1+x}$.

Exercice 1604 [ENSEA # 1580] On considère l'équation différentielle $x^2 y'(x) + y(x) = x$. Soit $h : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_a^x \frac{1}{t} e^{-1/t} dt$.

1. Montrer que h est bien définie.

1. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $\{x \mapsto \lambda e^{\frac{x}{2}} + h(x)e^x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $h(x) = xe^{-\frac{1}{x}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{1+ux} du$. Ind. Effectuer le change-

ment de variable $t = \frac{x}{1+ux}$.

1. En déduire un équivalent de h en 0^+.

Exercice 1605 [CCINP # 1581] Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

1. Trigonaliser explicitement A.

1. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -x4y + \mathrm{sh}(t) \\ y' = x + 3y + te^t. \end{cases}$

Exercice 1606 [IMT # 1582] 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre x" + ax = 0.b) Résoudre

$$\begin{cases} x'' &= 2y + z \\ y'' &= 2x - z \\ z'' &= x + y \end{cases}$$

Exercice 1607 [CCINP # 1583] Soit $f : (x, y) \mapsto xe^y + ye^x$.

1. Montrer que f n'admet pas d'extremum.

1. Qu'est-ce qu'un point critique ? Quel est le rapport entre point critique et extremum ?

1. Montrer que, si (x, y) est un point critique de f, alors $y + e^{y\frac{1}{y}} = 0$.

1. Prouver que f admet un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 1608 [IMT # 1584] Soit $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 - x - y \geq 0\}$. Soit $f : (x, y) \in T \mapsto xy\sqrt{1 - x - y}$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur T.

1. Déterminer ces extrema.

Exercice 1609 [IMT # 1585] Trouver les plans tangents à la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z = 1$, qui sont parallèles au plan d'équation x + y + z = 0.

3) Probabilités

Exercice 1610 [IMT # 1586] Soit $p \in [0, 1]$. On lance une pièce, dont la probabilité de tomber sur pile est p. Soit X la variable aléatoire qui compte le premier instant où on obtient pile, Y celle qui compte le second.

1. Donner la loi de X et celle du couple (X,Y).

1. En déduire la loi de Y.

1. On note $Z = \frac{1}{V-1}$. Donner $\mathbf{E}(Z)$.

Exercice 1611 [CCINP # 1587] On lance une pièce équilibrée, les lancers sont supposés indépendants. On note Y le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier pile et X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la séquence **pile-face** pour la première fois.

1. Déterminer la loi de Y et son espérance.

1. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

1. En déduire la loi de X.

1. Calculer pour $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 1612 [CCINP # 1588] On lance un dé à 6 faces, équilibré, un certain nombre de fois. On note X_i la valeur du i-ème lancer.

1. Déterminer la probabilité que $X_1 \neq X_2$.

1. Quelle est la probabilité que, pour tout i dans $\mathbb{N}$, $X_i = X_1$?

1. On note $N = \inf\{i \in \mathbb{N}, X_i \neq X_1\}$. Déterminer la loi de N.

Exercice 1613 [IMT # 1589] On note, pour tout $n \geq 1, p_n = \alpha\lambda^n$ la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants, où $0 < \lambda < 1$ et $(1 + \alpha)\lambda < 1$. La probabilité d'avoir un garçon est q = 1 - p, où $p \in]0, 1[$ est la probabilité d'avoir une fille.

1. Calculer la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant.

1. Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

1. Calculer la probabilité qu'une famille ait exactement k garçons.

1. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins deux garçons, sachant qu'elle en a au moins un.

Exercice 1614 [NIL # 1590] Une entreprise vend deux produits, notés A et B. Les commandes sont passées par téléphone, chaque appel étant indépendant des précédents. La probabilité qu'à un appel le produit A (resp. B) soit commandé est 2/10 (resp. 8/10). On note X_A (resp. X_B) la variable aléatoire donnant le nombre d'appels consécutifs nécessaires pour obtenir une première commande du produit A (resp. B). On note L la variable aléatoire donnant la longueur de la première « ligne d'appels », c'est-à-dire le nombre d'appels consécutifs qui commandent un même produit à partir du premier appel. Par exemple, si la suite d'appels est AAABAABB, alors $X_A = 1$, $X_B = 4$ et L = 3.

1. Déterminer la loi de X_A, donner une expression de $\mathbf{P}(X_A = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que X_A admet une espérance et une variance, et les calculer.

1. Même question pour la variable X_B.

1. Déterminer $P(X_A = n + 1, L = n)$.

1. En séparant les cas selon la nature du (n+1)-ième appel, calculer $\mathbf{P}(L = n)$, et vérifier que $\mathbf{P}(L = n) = 0.8\,\mathbf{P}(X_A = n) + 0.2\,\mathbf{P}(X_B = n)$.

1. Justifier que la variable L admet une espérance, et la calculer.

1. Les variables X_A et X_B sont-elles indépendantes ?

1. Les variables X_A et L sont-elles indépendantes ?

Exercice 1615 [CCINP # 1591] On considère une urne contenant $b \geq 2$ boules rouges et $v \geq 2$ boules vertes.
À chaque tirage, on prélève une boule avec remise, avec une probabilité de $p \in [0, 1]$.
On effectue une suite infinie de tirages indépendants.

1. Soit X_1 le rang d'apparition de la première boule verte. Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance.

1. Soit X_2 le rang d'apparition de la deuxième boule verte. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.

Exercice 1616 [NAVALE # 1592] Un conciergeqpossède n clés et souhaite ouvrir une porte. On suppose qu'une seule clé du trousseau permet de l'ouvrir.

1. À chaque essai infructueux, il écarte la clé utilisée. Quel est le nombre moyen de tentatives avant qu'il arrive à ouvrir la porte ?

1. Même question, en supposant qu'à chaque tentative il remet la clé utilisée avec les autres.

Exercice 1617 [IMT # 1593] Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$, où $p, q \in]0, 1[$.

1. Déterminer P(Y > k) pour tout $k \in \mathbb{N}$.- b) Déterminer P(Y > X).

Exercice 1618 [IMT # 1594] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

1. Montrer que Z = X + Y suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

1. Montrer que la loi de X sachant (Z = n) est binomiale et déterminer ses paramètres.

Exercice 1619 [CCINP # 1595] Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $Z = \min(X, Y)$.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

1. Calculer P(X > 2).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbf{P}(X > n)$.

1. Calculer P(Z > n).

Exercice 1620 [CCINP # 1596] Soient $\lambda > 0$ et $p \in]0, 1[$. Soient X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et Y telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de Y sachant (X = n) est la loi binomiale de paramètres n et p.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

1. Déterminer la loi de Y.c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

1. Déterminer la loi de Z = X Y.

Exercice 1621 [CCINP # 1597] Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$. On suppose que $\forall k, n \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X = k, Y = n) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} p(1-p)^n$ où $p \in [0, 1]$ est fixé.

1. Déterminer la loi de Y.

1. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

1. En déduire la loi de X.

1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1622 [NAVALE # 1598] Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires, avec X à valeurs dans $\{1, 2\}$,
Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\forall i \in \{1, 2\}, \forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X = i, Y = k) = \frac{q^k}{2i}$.

1. Déterminer la valeur de q.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.

1. Déterminer l'espérance de Y.

Exercice 1623 [IMT # 1599] Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle *taux d'arrêt de* X la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \mathbf{P}(X = n \,|\, X \geq n)$.

1. Soit Y de loi donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$. Vérifier qu'il s'agit bien d'une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$, puis déterminer le taux d'arrêt de Y.- b) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le taux d'arrêt de X, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X \geq n) = \prod_{n=1}^{n-1}(1 - x_k)$.

1. On suppose que X est de taux d'arrêt constant. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 1624 [IMT # 1600] Soient X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Soit $M = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant deux manière d'écrire $(1 + X)^{2n}$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

1. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

Exercice 1625 [IMT # 1601] Soient $p \in [0,1]$ et $\lambda > 0$. Soient X,Y,Z trois variables aléatoires indépendent dantes telles que $X \sim \mathcal{G}(p), Y \sim \mathcal{G}(p), Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Soit $M_n = \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & Y \\ 0 & Z & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & Z & 0 \\ Y & 0 & \cdots & 0 & X \end{pmatrix}$.

Déterminer la probabilité que M_n soit dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 1626 [IMT # 1602] On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $P_0 = 1,\ P_1 = X$ et, pour tout n dans $\mathbb{N},\ P_{n+2} = \frac{1}{2}(XP_{n+1} + P_n)$.

1. Montrer que $\bar{P}_n$ définit une fonction génératrice d'une variable aléatoire X_n.

1. Exprimer $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de n. c) Déterminer la variance de X_n.

Exercice 1627 [Navale # 1603] Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{2k}$.

1. Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$.

1. Donner la fonction génératrice de X. Quel est son rayon de convergence ? c) La variable X admet-elle une espérance finie ? Si oui, que vaut-elle ?

Exercice 1628 [CCINP # 1604] Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ avec |x| < 1.

1. Donner le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$ puis celui de $\frac{1}{(1-x)^r}$.

1. Soit $p \in]0,1[$. On pose q=p-1 et $\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = \binom{k+r-1}{k} p^r q^k$. Montrer que

$\mathbf{P}(X = k) = p_k$ définit une probabilité.

1. Calculer la fonction génératrice de X.

1. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 1629 [IMT # 1605] Soient $\lambda \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}$.a) Montrer que la série $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k}(1-\lambda)^{n-k}$ converge et déterminer sa somme. **Ind.** Utiliser la série entière $\sum_{n>0} x^n$.

1. Soit X_k une variable aléatoire telle que $\mathbf{P}(X_k = n) = \binom{n}{k}(1-\lambda)^{n-k}\lambda^{k+1}$ si $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq k$.

- i) Déterminer la fonction génératrice de X_k ; en préciser le rayon de convergence.

- ii) Montrer que X_k est d'espérance finie et la calculer.

Exercice 1630 [IMT # 1606] 1. Calculer la fonction génératrice, puis l'espérance, d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(\{0,\ldots,n\})$.

1. Peut-on trouver deux variables aléatoires X_1 et X_2 à valeurs entières, indépendantes et de même loi telles que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{U}(\{0,\ldots,n\})$?

Ind. Par indépendance de X_1 et X_2, on a $G_{X_1+X_2} = G_{X_1}G_{X_2}$.

XVI) Autres Écoles - PC

1) Algèbre

Exercice 1631 [CCINP # 1607] Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. Montrer que j est racine de P et déterminer sa multiplicité. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1632 [CCINP # 1608] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM$. Vérifier que f est linéaire. Montrer que f est bijective si et seulement si A est inversible. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable

Exercice 1633 [CCINP # 1609] Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$ et $A^2 = 0$.

Montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A)$ et que A est semblable à $\begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$ où $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1634 [CCINP # 1610] On admet que l'on définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant, pour $A \in$

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|A\| = \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|,\ i \in [\![1,n]\!]\right\}. \text{ On pose } \rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\|A\|$ et $\rho(A)$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $||AB|| \leq ||A|| \times ||B||$.

1. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X = (x_1 \cdots x_n)^T$ un vecteur propre associé.

Montrer que, pour tout $i \in [1, n]$, $|\lambda||x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}||x_i|$. En déduire que $\rho(A) \leqslant ||A||$.

1. On suppose A diagonalisable. Montrer que $\lim_{p\to+\infty} A^p = 0$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Exercice 1635 [CCINP # 1611] Soit $n \geq 2$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthodiagonalisable (resp. orthotrigonalisable) s'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^T MP$ est diagonale
(resp. triangulaire supérieure). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est orthodiagonalisable, alors A est diagonalisable.
1. i) Montrer que A est orthodiagonalisable si et seulement si A est symétrique. ii) Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et non symétrique.
1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On note $(u_1, \dots, u_n)$ le système de ses vecteurs colonnes. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel.

- i) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ telle que

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, u_j = \sum_{i=1}^{J} \langle u_j, v_i \rangle v_i.$$

ii) Montrer qu'il existe Q orthogonale et R triangulaire supérieure telles que M = QR.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est orthotrigonalisable si et seulement si A est trigonalisable.
1. Que dire d'une matrice antisymétrique et trigonalisable ?

2) Analyse

Exercice 1636 [CCINP # 1612] Soit $\lambda \in [-1, 1]$. On note S_λ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\lambda x)$.

1. Montrer que S_λ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. i) Déterminer S_1.

- ii) Montrer que, si $f \in S_0$, alors f est affine. Déterminer S_0.

1. Soit $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{n(n-1)/2} x^n$. Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi \in \mathcal{S}_\lambda$.
1. Soit $f \in \mathcal{S}_\lambda$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \lambda^{n(n-1)/2} f(\lambda^n x)$.
1. Soit $f \in \mathcal{S}_\lambda$ telle que f(0) = 0. Montrer que f est la fonction nulle.
1. Déterminer S_λ.

Exercice 1637 [CCINP # 1613] Montrer que $\lim_{a\to 0} \int_{-u}^{3a} \frac{\cos(u)}{u} du = \ln(3)$.

Exercice 1638 [CCINP # 1614] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2 x}$ et $g_n(x) = x f_n(x)$.
Pour

$$x \in \mathbb{R}^{+*}$$

, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
1. Étudier la monotonie et la continuité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
1. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
1. Montrer que la série $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.- e) Montrer qu'il existe une constante A > 0 telle que $f(x) \sim \frac{A}{x\to+\infty} \frac{A}{x}$.
1. Trouver un équivalent de f(x) lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 1639 [NIL # 1615] Soit $F : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x+t^2} dt$.

1. Montrer que F est bien définie.
1. Calculer F(x) à l'aide du changement de variable $\sqrt{x}u = t$.

3) Probabilités

Exercice 1640 [CCINP # 1616] On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Soit X le temps d'attente du premier pile. Soit Y une variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y sachant (X = n) est la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Rappeler la loi de X et son espérance. b) Déterminer $\mathbf{P}(X = n, Y = k)$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n2^k}$.
1. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 - x)$. Calculer $\mathbf{P}(Y = 1)$.
1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(Y = k) = \int_0^{1/2} \frac{t^{k-1}}{1-t} dt$.
1. Calculer $\mathbf{E}(Y)$.