Exercices 2026

Table des matières

I) ENS MP/MPI XENS **2**
1) Algèbre . . . 2
2) Géométrie . . . 14
3) Probabilités . . . 14

II) ENS PSI AUTRE **17**
1) Algèbre . . . 17
2) Analyse . . . 20
3) Probabilités . . . 22

III) ENS PC AUTRE **23**
1) Algèbre . . . 23
2) Analyse . . . 25
3) Probabilités . . . 27

IV) X MP/MPI XENS **28**
1) Probabilités . . . 28
2) Algèbre . . . 28
3) Analyse . . . 33
4) Géométrie . . . 37
5) Probabilités . . . 37

V) X PSI AUTRE **38**
1) Algèbre . . . 38
2) Analyse . . . 39
3) Probabilités . . . 40

VI) X – ESPCI – PC AUTRE **40**
1) Algèbre . . . 40
2) Analyse . . . 43
3) Probabilités . . . 46

VII) Mines-Ponts MP/MPI AUTRE **47**
1) Algèbre . . . 47
2) Analyse . . . 55
3) Géométrie . . . 66
4) Probabilités . . . 66

VIII) Mines-Ponts PSI 2026 **69**
1) Algèbre . . . 69
2) Analyse . . . 73
3) Probabilités . . . 80

IX) Mines-Ponts PC 2026 **82**
1) Algèbre . . . 82
2) Analyse . . . 89
3) Probabilités . . . 97

X) Centrale MP-MPI 2026 **100**
1) Algèbre . . . 100
2) Analyse . . . 103
3) Probabilités . . . 106

XI) Centrale PSI 2026 **107**
1) Algèbre . . . 107
2) Analyse . . . 109
3) Probabilités . . . 112

XII) Centrale PC 2026 **113**
1) Algèbre . . . 113
2) Analyse . . . 115
3) Probabilités . . . 118

XIII) Autres Écoles MP-MPI 2026 **119**
1) Algèbre . . . 119
2) Analyse . . . 120

3) Probabilités . . . 121
XIV) Autres Écoles PSI 2026 **122**
1) Algèbre . . . 122
2) Analyse . . . 123
3) Probabilités . . . 125
XV) Autres Écoles PC 2026 **125**
1) Algèbre . . . 125
2) Analyse . . . 126
3) Probabilités . . . 127
XVI) De Christophe **XENS** **128**

I) ENS MP/MPI XENS

1) Algèbre

Exercice 1 [ENS SR 2026 # 1] Soit F un sous-ensemble fini de R. On note $F+F=\{e+f \mid (e,f)\in F^2\}$. Majorer le cardinal de $F+F$; montrer qu'il est minoré par $2|F|-1$. Cela reste-t-il vrai dans R^d ?

Exercice 2 [ENS ULSR 2026 # 2] Soit $f:\{-1,1\}^n\to\mathbb{R}$. Montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $c:\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)\to\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\{-1,1\}^n$,

$$f(x)=\sum_{S\subset\{1,2,\dots,n\}} c(S)\prod_{i\in S} x_i.$$

Exercice 3 [ENS U 2026 # 3] Soient E un ensemble et $n\in\mathbb{N}$. On note $C(E,n)$ l'ensemble des parties de E de cardinal n. Déterminer toutes les parties $\{a_1,\dots,a_n\}\in C(\mathbb{Z},n)$, avec $a_1<\dots<a_n$, telles que l'application qui, à une paire $\{i,j\}$, associe $|a_i-a_j|$, réalise une bijection de $C(\llbracket 1,n\rrbracket,2)$ sur un intervalle d'entiers $\llbracket 1,m\rrbracket$.

Exercice 4 [ENS U 2026 # 4] Pour tout réel $x\geq 1$, on note $\pi(x)=\mathrm{card}\{p\in\mathbb{P}\mid p\leq x\}$. Trouver une minoration la plus précise possible de $\pi(x)$.

Exercice 5 [ENS U 2026 # 5] Pour K un corps et $a\in K$, on note $C(K,a)=\{(x,y)\in K^2\mid x^2+y^2=a\}$.

1. Soient p un nombre premier et $a\in\mathbb{F}_p^*$. Dénombrer l'ensemble $C(\mathbb{F}_p,a)$. Indication : on pourra décrire $C(\mathbb{Q},1)$ et $C(\mathbb{C},1)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que 2 soit un carré modulo p.

Exercice 6 [ENS ULSR 2026 # 6] Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on se propose d'établir la propriété P_n : pour toute famille de $2n-1$ entiers relatifs, il existe une sous-famille de n entiers dont la somme est divisible par n.

1. Traiter les cas $n=1$ et $n=2$.
2. On suppose que $n\geq 2$. Montrer qu'il existe une famille de $2n-2$ entiers relatifs dont aucune sous-famille de n entiers n'a une somme divisible par n.
3. Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que, si P_m et P_n sont vraies, il en est de même de P_{mn}.
4. Soit p un nombre premier. Déterminer la classe modulo p de $\binom{2p-1}{p}$ et, si $s\in\llbracket 1,p\rrbracket$, de $\binom{2p-1-s}{p-s}$.
5. Soient p un nombre premier, I un ensemble de cardinal $2p-1$, $(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{Z}^I$. On suppose que, pour toute partie J de I de cardinal p, $\sum_{i\in J}a_i$ n'est pas divisible par p. Obtenir une contradiction en considérant

$$\sum_{\substack{J\subset I\\ |J|=p}}\left(\sum_{i\in J}a_i\right)^{p-1}.$$

Conclure.

Exercice 7 [ENS ULSR 2026 # 7] Soit G un groupe. Une fonction $f:G\to\mathbb{R}$ est un quasi-morphisme quand il existe $C\geq 0$ tel que, pour tous $a,b\in G$, $|f(ab)-f(a)-f(b)|\leq C$. Un quasi-morphisme f est dit homogène quand, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et tout $a\in G$, $f(a^n)=nf(a)$.

1. Soit f un quasi-morphisme. Montrer que, pour tout $a\in G$, la suite $\left(f(a^{2^k})/2^k\right)$ converge.
2. On suppose G abélien. Montrer que tout quasi-morphisme f se décompose de façon unique sous la forme $f=f'+h$, où f' est un quasi-morphisme homogène et h une fonction bornée.
3. Montrer que, si f est un quasi-morphisme homogène, alors, pour tous $a,b\in G$, $f(aba^{-1})=f(b)$.

Exercice 8 [ENS U 2026 # 8] Soit φ un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres de $\mathbb{Q}[X]$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que le noyau de φ contient un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$. On note K le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par l'image de φ, et G le sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$ engendré par la famille $(\varphi(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que G soit dense dans K.

Exercice 9 [ENS ULSR 2026 # 9]

1. Soit $p\geq 2$ un entier. On suppose que le groupe $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times,\cdot)$ des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z},+)$. Montrer que p est premier. On admet que, si p est premier, le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.
2. Soit $N\geq 2$. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes : a. N est non premier et $\forall x\in\mathbb{Z},\ x^N\equiv x\pmod N$. b. N possède au moins trois facteurs premiers distincts et, pour tout premier p divisant N, $p^2\nmid N$ et $p-1\mid N-1$.

Dans ce cas, on dit que N vérifie (C).

3. a. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $6k+1$, $12k+1$ et $18k+1$ soient premiers. b. Soit k un tel entier. Montrer que $(6k+1)(12k+1)(18k+1)$ vérifie (C).

Exercice 10 [ENS U 2026 # 10]

1. Déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$.
2. Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que, pour $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et une famille d'entiers $(b_p)_{p\in\mathbb{P}}$ tels que
$$\frac{m}{n} = a + \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{b_p}{p^{v_p(n)}}, \qquad 0 \leq b_p < p^{v_p(n)}.$$
3. En déduire que tout morphisme de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$ est déterminé par ses valeurs sur les $1/p^k$, pour tout premier p et tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 [ENS ULSR 2026 # 11] Soit R un anneau commutatif. On note
$$\mathrm{SL}_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R) \mid ad - bc = 1_R \right\}.$$
Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$; on admet que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$ est un groupe pour le produit matriciel.

1. Soit $\Pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la réduction modulo p. Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes surjectif.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ nilpotente. On suppose à présent $p > 3$. Montrer que si $A \equiv I_2 + X \pmod p$, alors $A^p \equiv I_2 + pX \pmod{p^2}$.
3. Soit H un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ tel que $\Pi(H) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Montrer que $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.
4. Montrer le même résultat avec $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$ à la place de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.

Exercice 12 [ENS ULSR 2026 # 12]

1. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soient $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ avec B unitaire. Montrer qu'il existe $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'application $\varphi : P \in \mathbb{Z}[X] \mapsto P(y) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un morphisme surjectif d'anneaux, de noyau
$$\{(X - y)A + nB \mid (A, B) \in \mathbb{Z}[X]^2\}.$$
4. Soient $Q \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré strictement positif et R un anneau. On suppose qu'il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[X]$ dans R de noyau $\{QA + nB \mid (A, B) \in \mathbb{Z}[X]^2\}$. Montrer que R est fini et déterminer son cardinal.
5. On suppose désormais que $Q(X) = X^2 + bX + c$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n, b, c pour que l'anneau R soit intègre.

Exercice 13 [ENS U 2026 # 13] Un idéal I d'un anneau commutatif est dit premier si $A \setminus I$ est stable par multiplication ; il est dit maximal si les seuls idéaux qui le contiennent sont I et A.

1. Montrer que tout idéal premier non nul de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est maximal.
2. Montrer que tout idéal maximal de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est premier.

Exercice 14 [ENS ULSR 2026 # 14] Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre commutative unitaire de dimension finie. On note $\mathrm{Nil}(A) = \{x \in A \mid x \text{ est nilpotent}\}$.

1. Rappeler la définition d'un idéal et montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal.
2. Montrer que si $x \in \mathrm{Nil}(A)$, alors $1 - x$ est inversible.
3. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $x_1, \ldots, x_M \in \mathrm{Nil}(A)$, $x_1 \cdots x_M = 0$.
4. Montrer que $M = \dim A$ convient.
5. Soit $L_x : y \in A \mapsto xy \in A$. Montrer que $x \in \mathrm{Nil}(A)$ si et seulement si $\chi_{L_x} = X^{\dim A}$.
6. Montrer que, pour tout $x \in A$, $\chi_{L_x}(x) = 0$.

Exercice 15 [Magistère de Rennes 2026 # 15]

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$ si et seulement s'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$. Indication : montrer que l'ensemble $\{A^2 + B^2 \mid (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2\}$ est stable par produit.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $P(x) \geq 0$ si et seulement s'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $P = A^2 + XB^2$.

Exercice 16 [ENS U 2026 # 16] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins 2. Le polynôme P est dit sympathique s'il est le produit de deux polynômes non constants à coefficients positifs. On suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que $P(X^n)$ soit sympathique. Démontrer que P est également sympathique.

Exercice 17 [ENS U 2026 # 17] Soient K un corps de caractéristique nulle et $a \in K$. Soit $(P, Q) \in K[X]^2$ non tous deux nuls en a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in K^2$ tels que $\lambda P + \mu Q$ soit un polynôme non nul admettant a comme racine de multiplicité n si et seulement si a est racine de $P'Q - PQ'$ de multiplicité $n - 1$.

Exercice 18 [ENS ULSR 2026 # 18]

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $U_n, V_n \in \mathbb{Z}[X]$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(1 + iz)^n = U_n(z) + iV_n(z)$. Donner le degré de V_n, puis ses racines.
2. Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, p divise $V_{p+1}(k)$.
3. Soient p un nombre premier impair, $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $d = m \wedge n$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On suppose que $p \mid V_m(k)$ et $p \mid V_n(k)$. Montrer que $p \mid V_d(k)$.

Exercice 19 [ENS SR 2026 # 19] On pose $P = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_N = 1$, et

$$H(P) = \sup_{|z|=1} \frac{|P(z)|}{\sqrt{|a_0|}}.$$

1. Montrer que
$$\frac{1}{|a_0|} \sum_{i=0}^{N} |a_i|^2 \leq H(P)^2 \leq \frac{N+1}{|a_0|} \sum_{i=0}^{N} |a_i|^2$$
et étudier les cas d'égalité.
2. On pose $\ln^+(x) = \max(0, \ln x)$. Montrer que
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} \right) d\theta \leq \ln H(P).$$

Exercice 20 [ENS L 2026 # 20] Soit (u, v) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On appelle cristal engendré par (u, v) l'ensemble $C = \{au + bv \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Trouver les $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que $\Phi(C) = C$, pour C le cristal engendré par la base canonique.
2. Trouver les rotations Φ de $\mathbb{R}^2$ telles que $\Phi(C) = C$, pour C le cristal engendré par la base canonique.
3. Trouver les rotations Φ de $\mathbb{R}^2$ telles que $\Phi(C) = C$, pour C un cristal quelconque.
4. Soit C une partie de $\mathbb{R}^2$ stable par $+$ et $-$. Montrer que C est un cristal si et seulement si $\mathrm{Vect}(C) = \mathbb{R}^2$ et C est discret.

Exercice 21 [ENS U 2026 # 21] Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On dit que A est équivalente à B par rapport aux lignes si, pour tous k et tous $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$, la famille $(L_{i_1}(A), \ldots, L_{i_k}(A))$ est libre si et seulement si $(L_{i_1}(B), \ldots, L_{i_k}(B))$ est libre, où $L_i(A)$ est la i-ème ligne de A. On définit de même l'équivalence par rapport aux colonnes. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ si et seulement s'il existe $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ équivalente à A par rapport aux lignes et équivalente à B par rapport aux colonnes.

Exercice 22 [ENS SR 2026 # 22] Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $n_k(\sigma)$ le nombre de k-cycles de σ, et $m(\sigma)$ le nombre total de cycles.

1. Soit c un k-cycle de $\mathfrak{S}_n$ et $i \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de c^i.
2. Montrer que σ et τ sont conjugués si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $n_k(\sigma) = n_k(\tau)$.
3. Trouver le nombre total de cycles dans c^i pour c un k-cycle et $i \in \mathbb{N}^*$.
4. Calculer $\det\big((i \wedge j)_{1 \leq i,j \leq n}\big)$.
5. Montrer que σ et τ sont conjugués si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $m(\sigma^i) = m(\tau^i)$.

Exercice 23 [ENS U 2026 # 23] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit S_i un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ de cardinal au moins $n + 1$. On suppose que, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, la matrice $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$ est nilpotente. Montrer que, pour tout i, A_i est nilpotente.

Exercice 24 [ENS U 2026 # 24] Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ et $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\prod_{i=1}^{n} i!$ divise le déterminant de la matrice

$$\left(\binom{x_i}{k_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Exercice 25 [ENS SR 2026 # 25] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Soient $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ une combinaison convexe des lignes de A et $Y = (y_1 \ \cdots \ y_m)^T$ une combinaison convexe des colonnes de A.

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant tous les x_j et J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant tous les y_i. Montrer que $I \cap J \neq \varnothing$.
2. On suppose que $X = (\alpha \ \cdots \ \alpha)$ et $Y = (\beta \ \cdots \ \beta)^T$. Montrer que $\alpha = \beta$.
3. On note
$$\alpha = \min_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Delta_m} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_{k,j}, \qquad \beta = \max_{(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \Delta_n} \min_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mu_j,$$
où $\Delta_k = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in (\mathbb{R}_+)^k \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1\}$. Montrer que $\alpha \geq \beta$.

Exercice 26 [ENS ULSR 2026 # 26] Soient p un nombre premier et n un entier strictement positif.

1. Dénombrer les bases de l'espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^n$.
2. Soit E un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple (V, W) de sous-espaces de E tels que $E = V \oplus W$, V et W soient stables par u, l'endomorphisme induit par u sur V soit inversible, et celui induit sur W soit nilpotent.
3. En déduire le nombre de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$.
4. Peut-on mener le même calcul dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ pour un entier d quelconque ?

Exercice 27 [ENS U 2026 # 27] Soient $n \geq 2$ et E_n l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi : E_n \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(\{0\}) = 0$ et, pour tous $(V, W) \in E_n^2$,

$$\varphi(V \cap W) + \varphi(V + W) \leq \varphi(V) + \varphi(W).$$

Montrer qu'il existe un unique sous-espace vectoriel $V_0 \in E_n$ de dimension maximale tel que

$$\min_{V \in E_n \setminus \{0\}} \frac{\varphi(V)}{\dim V} = \frac{\varphi(V_0)}{\dim V_0}.$$

Exercice 28 [ENS L 2026 # 28] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bistochastique si ses coefficients sont positifs et de somme égale à 1 le long de chaque ligne et de chaque colonne. Montrer que si Q est une matrice bistochastique qui n'est pas une matrice de permutation, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

1. si $Q_{i,j} = 0$, alors $M_{i,j} = 0$;
2. $\sum_{k=1}^n M_{i,k} = \sum_{k=1}^n M_{k,j} = 0$.

Exercice 29 [ENS ULSR 2026 # 29]

1. Montrer que tout endomorphisme de l'anneau $\mathcal{M}_n(K)$ est injectif.
2. Montrer que les endomorphismes de la K-algèbre $\mathcal{M}_n(K)$ sont les applications $M \mapsto PMP^{-1}$ pour $P \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Exercice 30 [ENS ULSR 2026 # 30] Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathcal{L}(V)$ nilpotents et commutants. On note $\mathbb{C}[A,B]$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$ engendrée par A et B, et on pose $V_1 = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$. Soit W un supplémentaire de V_1 dans V.

1. Montrer que $\dim(\mathbb{C}[A]) \leq n$.
2. Montrer que $V = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} A^i B^j W$.
3. Montrer que l'application de restriction à W définit une injection linéaire de $\mathbb{C}[A,B]$ dans $\mathcal{L}(W,V)$ et en déduire que $\dim(\mathbb{C}[A,B]) \leq n\dim(W)$.
4. On note A_1 (resp. B_1) l'endomorphisme induit par A (resp. B) sur V_1. Montrer que $\dim(A\mathbb{C}[A,B]) \leq \dim(\mathbb{C}[A_1,B_1])$.

Exercice 31 [ENS ULSR 2026 # 31] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{Z}).$$

1. Montrer que J_n est inversible et donner son inverse.
2. Soit $G_n = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{Z}) \mid M^T J_n M = J_n\}$. Montrer que $(G_n, \times)$ est un groupe, stable par transposition.
3. Soit $M \in G_n$ dont la première ligne est $(1,0,\dots,0)$. On suppose $n > 1$ et on écrit par blocs

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & A & X & B \\ * & * & y & * \\ * & C & Z & D \end{pmatrix},$$

avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$, $y \in \mathbb{Z}$ et $X, Z \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{Z})$. Montrer que $y = 1$, $X = Z = 0$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G_{n-1}$.

Exercice 32 [Magistère de Rennes 2026 # 32] On souhaite déterminer les ordres possibles des éléments A de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Pour cela, on écrit $\chi_A = X^2 - tX + d$. Préciser les valeurs de t et d, puis discuter les ordres possibles. Fournir des exemples explicites pour les différents ordres possibles.

Exercice 33 [ENS U 2026 # 33] Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 + B^2 = 2AB$. Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

Exercice 34 [ENS U 2026 # 34] Soit G un sous-groupe d'ordre 6 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Étudier les propriétés de réduction simultanée des éléments de G.

Exercice 35 [ENS L 2026 # 35] Soient K un corps et $A \in \mathcal{M}_2(K)$. On suppose que le polynôme caractéristique χ_A est irréductible sur K. Soit $B \in \mathrm{GL}_2(K)$ telle que B ne commute pas avec A. Montrer que B^2 est une matrice scalaire.

Exercice 36 [ENS SR 2026 # 36] Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que G est fini. Montrer que les éléments de G sont diagonalisables. Que peut-on dire de leurs spectres ?
2. On suppose que G est compact. Soit $M \in G$. a. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}$. b. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Montrer que $\ker(M - \lambda I_n) = \ker((M-\lambda I_n)^2)$ et en déduire que M est diagonalisable.
3. Caractériser les sous-groupes abéliens finis et les sous-groupes abéliens compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 37 [ENS ULSR 2026 # 37] Soit K un corps. Une matrice $M \in \mathrm{GL}_2(K)$ est dite super-puissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $A_n \in \mathcal{M}_2(K)$ tel que $M = A_n^n$.

1. Déterminer les matrices super-puissantes dans le cas où $K = \mathbb{C}$.
2. On suppose $K = \mathbb{R}$. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est super-puissante si et seulement s'il existe $R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $M = R^2$.
3. Sur $\mathbb{Q}$, montrer que les matrices super-puissantes sont de déterminant 1.

Exercice 38 [ENS ULSR 2026 # 38]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $\det A = 1$. Exprimer χ_A en fonction d'une forme linéaire usuelle de A.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\det A = \det B = 1$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB^2) = \mathrm{Tr}(B)\,\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A)$.
3. Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = xyz\}$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de déterminant 1. Montrer que $(\mathrm{Tr}(A), \mathrm{Tr}(B), \mathrm{Tr}(AB)) \in S$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = -2$.
4. Montrer que, pour tout $(x,y,z) \in S \setminus \{(0,0,0)\}$, il existe $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de déterminant 1 tels que $x = \mathrm{Tr}(A)$, $y = \mathrm{Tr}(B)$ et $z = \mathrm{Tr}(AB)$.

Exercice 39 [ENS ULSR 2026 # 39] Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que, si $M \in \mathcal{M}_n(K)$, alors M est nilpotente si et seulement si $\chi_M = X^n$.

2. Pour $M \in \mathcal{M}_n(K)$, on pose $\sin(M) = \frac{1}{2i}(e^{iM} - e^{-iM})$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\sin$ induit une bijection de $\mathcal{N}$ sur elle-même.
3. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0,\ P'(0) \neq 0\}$. Pour $P, Q \in G$, on note $P * Q = P(Q(X)) \pmod{X^{n+1}}$. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 40 [ENS SR 2026 # 40] Pour $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[X, Y] = XY - YX$.

1. On pose $A = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} X = 0\}$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ stable par crochet.
2. On pose
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calculer les différents crochets.
3. Soit $\rho : A \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)]$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $E_\lambda = \ker(\rho(H) - \lambda I_n)$. Soit α une valeur propre de $\rho(H)$. a. Montrer que $\rho(X)(E_\alpha) \subset E_{\alpha+2}$ et $\rho(Y)(E_\alpha) \subset E_{\alpha-2}$. b. Soit $V \in E_\alpha$. Montrer que la suite $(\rho(X)^k V)_{k \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.
4. On dit que ρ est irréductible si, pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathbb{C}^n$ et tout $A \in A$, la condition $\rho(A)(V) \subset V$ implique $V = \{0\}$ ou $V = \mathbb{C}^n$. Si ρ est irréductible, montrer que $\rho(H)$ est diagonalisable.
5. Montrer que $\operatorname{Sp}(\rho(H)) = \{-m, -m+2, \ldots, m-2, m\}$ avec $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 41 [ENS ULSR 2026 # 41] Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de V. Dans les deux premières questions, on suppose V de dimension finie.

1. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de u si et seulement si elle est racine du polynôme caractéristique de u.
2. On dit que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre imaginaire de u s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 2 tel que $P(\lambda) = 0$ et $P(u)$ n'est pas injectif. Une valeur propre complexe de u est une valeur propre réelle ou imaginaire. Montrer que les racines complexes de χ_u sont exactement les valeurs propres complexes de u.
3. On suppose maintenant que V est de dimension quelconque et muni d'une norme, et que u est un homéomorphisme linéaire de V sur lui-même. On munit $\mathcal{L}_c(V)$ des endomorphismes continus de la norme d'opérateur associée. Montrer que si la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée, alors, pour tout $x \in V \setminus \{0\}$, 0 n'est pas valeur d'adhérence de la suite $G(x) = (u^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$.

Exercice 42 [ENS U 2026 # 42] Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base orthogonale de E. Déterminer, en fonction de $\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|$, quels sont les entiers $m \in \mathbb{N}$ avec $0 < m < n$ tels qu'il existe un sous-espace vectoriel $F \subset E$ de dimension m pour lequel les projetés orthogonaux $y_1, \ldots, y_n$ des x_i sur F ont tous la même norme.

Exercice 43 [ENS ULSR 2026 # 43] Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe deux symétries orthogonales A, B telles que $M = AB$.

Exercice 44 [ENS U 2026 # 44] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k, \ell \leq n$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les k premières lignes et les ℓ premières colonnes sont orthonormées. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale ayant les mêmes k premières lignes et ℓ premières colonnes que M.

Exercice 45 [ENS ULSR 2026 # 45]

1. Pour $a \in \mathbb{C}$, montrer que $|a| < 1$ si et seulement si, pour tout $v \in \mathbb{C}$ non nul, il existe un unique $\rho > 0$ tel que $|a + \rho v| = 1$.
2. On identifie $\mathbb{C}$ au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient T un automorphisme de $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. On définit
$$T_a : z \in \mathbb{U} \longmapsto \frac{a + T(z)}{|a + T(z)|} \in \mathbb{U}.$$
Montrer que T_a est bien définie, continue et bijective si et seulement si $|T^{-1}(a)| < 1$.
3. On suppose la condition précédente vérifiée. Montrer que T_a est une involution si et seulement si T est autoadjoint, a est un vecteur propre de T associé à une valeur propre $\lambda < 0$, et l'autre valeur propre μ vérifie $\lambda^2 = |a|^2 + \mu^2$.

Exercice 46 [ENS U 2026 # 46] Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres simples et $V \in \mathbb{R}^n$ unitaire. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $G(t) = S + tVV^T$.

1. À quelle condition $G(t)$ et S n'ont-elles pas de valeurs propres communes ?
2. Étudier les valeurs propres de $G(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 47 [ENS ULSR 2026 # 47] Soient les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivantes :
$$E = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = IJ.$$
Soit H le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par $\{E, I, J, K\}$.

1. Montrer que H est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4.
2. On pose $A^* = A^T$ pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Vérifier que $A \mapsto A^*$ est un endomorphisme de H. Montrer que $(AB)^* = B^*A^*$ et $A^{**} = A$, puis donner la matrice de $A \mapsto A^*$ dans la base (E, I, J, K).
3. Soit $H_1 = \{X \in H \mid XX^* = E\}$. Montrer que H_1 est un groupe. En identifiant H_1 à $\mathbb{R}^4$, donner une description géométrique de H_1.
4. Soit H_2 le sous-espace de H engendré par $\{I, J, K\}$. Pour $X \in H_1$, on définit $\alpha(X) : Y \in H_2 \mapsto XYX^* \in H_2$. En identifiant $\alpha(X)$ à sa matrice dans la base (I, J, K), montrer que α définit un morphisme surjectif de H_1 dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ dont le noyau est $\{E, -E\}$.

Exercice 48 [ENS ULSR 2026 # 48] Une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite centro-symétrique lorsque $m_{n+1-i,n+1-j} = m_{i,j}$ pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, et elle est dite bisymétrique lorsqu'elle est à la fois symétrique et centro-symétrique. Un vecteur $X = (x_i)_i \in \mathbb{R}^n$ est dit symétrique si $x_{n+1-i} = x_i$ pour tout i, et antisymétrique si $x_{n+1-i} = -x_i$.

1. On suppose $n = 2k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, et on note $J_k = (\delta_{i+j,k+1})_{1\leq i,j\leq k}$. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est centro-symétrique si et seulement s'il existe deux matrices symétriques $A, E \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ telles que
$$M = \begin{pmatrix} A & EJ_k \\ J_kE & J_kAJ_k \end{pmatrix}.$$
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ bisymétrique. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de M, chacun symétrique ou antisymétrique.

Exercice 49 [ENS SR 2026 # 49] Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. On rappelle que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ a une unique racine carrée dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, notée $\sqrt{A}$. Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $A \leq B$ si $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et $A < B$ si $B - A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|A\|^2 = \max(\mathrm{Sp}(A^TA))$. En déduire que, pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,
$$\|A\| = \max_{X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle AX, X\rangle}{\|X\|^2} = \max(\mathrm{Sp}(A)).$$
2. Soient $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $CD \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\|CD\| \leq \|DC\|$.
3. Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $e^B = A$.
5. Montrer que ce B est unique si on impose $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; on le note alors $\ln(A)$.
6. Montrer que $\ln$ est croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Indication : utiliser la question 3.
7. Est-ce que $A \mapsto A^2$ est croissante sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 50 [ENS ULSR 2026 # 50] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note $s_k(x)$ la somme des k plus grandes composantes de x. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose $\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.

1. Montrer que s_k est convexe.
On pose
$$K(x) = \left\{ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma \sigma(x) \;\middle|\; (\lambda_\sigma) \in [0,1]^{\mathfrak{S}_n}, \quad \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma = 1 \right\}$$
et
$$L(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in [\![1,n-1]\!], s_k(y) \leq s_k(x) \text{ et } s_n(y) = s_n(x)\}.$$
2. Montrer que $K(x) \subset L(x)$.
3. On note $D(x)$ l'ensemble des vecteurs dont les composantes sont les coefficients diagonaux d'une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont les composantes de x. Montrer que $K(x) \subset D(x)$.

Exercice 51 [ENS SR 2026 # 51] On note A_+ l'ensemble des matrices diagonales de la forme $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$.

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et un unique $\sigma(M) \in A_+$ tels que $M^TM = P\sigma(M)P^T$. Discuter l'unicité de P.
2. On note $\sigma(M) = \mathrm{Diag}(\sigma_1(M), \ldots, \sigma_n(M))$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. Montrer que $\|M\|_{\mathrm{op}}^2 = \sigma_1(M)$.
3. On munit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle X, Y\rangle = -\mathrm{Tr}(XY)$. Trouver une base orthonormée B de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit φ_M définie par $\varphi_M(X) = MXM^T$ pour $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, et soit F_M la matrice de φ_M dans la base B. Montrer que $\sigma_1(F_M) = \sigma_1(M)\sigma_2(M)$.

Exercice 52 [ENS SR 2026 # 52] On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de leur structure euclidienne canonique. Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_{\max}(A)$ sa plus grande valeur propre.

1. Montrer que $\lambda_{\max}(A) = \max_{x\in\mathbb{R}^n,\, \|x\|=1} x^TAx$.
2. Montrer que la fonction $\lambda_{\max} : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est convexe.
3. Soient X un espace euclidien et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tout $x \in X$, on pose
$$\partial f(x) = \{d \in X \mid \forall y \in X,\ f(y) \geq f(x) + \langle d, y - x\rangle\}.$$
Déterminer ∂f pour une fonction convexe $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\lambda_{\max}(A)$ soit une valeur propre simple. Soit v un vecteur propre unitaire associé à $\lambda_{\max}(A)$. Montrer que $\partial\lambda_{\max}(A) = \{vv^T\}$. Indication : montrer, pour $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$,
$$\lambda_{\max}(A) + v^T(tH)v \leq \lambda_{\max}(A + tH) \leq \lambda_{\max}(A) + v^T(tH)v + \frac{2t^2\|H\|^2}{\lambda_{\max}(A) - \lambda_2},$$
où λ_2 est la deuxième plus grande valeur propre de A.

Exercice 53 [ENS ULSR 2026 # 53] Soit E un espace euclidien. Pour $f \in \mathcal{S}(E)$, on pose $\mathrm{Sp}_a(f) = \{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$. Soit $j \in \mathcal{S}(E)$ tel que $j^2 = \mathrm{id}$. Un vecteur x est dit j-symétrique (resp. j-antisymétrique) lorsque $j(x) = x$ (resp. $j(x) = -x$).

1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathrm{Sp}_a(j)$ et les vecteurs j-symétriques et j-antisymétriques possibles pour j.
2. Donner un exemple d'un couple $(j, f) \in \mathcal{S}(E)^2$ tel que $j^2 = \mathrm{id}$ et que $j \circ f$ ne soit pas diagonalisable.
3. Soient $f \in \mathcal{S}(E)$ et v un vecteur propre de f associé à une valeur propre μ telle que $|\mu| = \max \mathrm{Sp}_a(f) = \max \mathrm{Sp}_a(j \circ f)$. Montrer qu'il existe un unique couple (e, h) de vecteurs propres de f tel que $v = e+h$, avec e j-symétrique et h j-antisymétrique.

Exercice 54 [ENS U 2026 # 54] Soient $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $T = S^{-1} = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $\Phi(S) = (s_{i,j}t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que $\Phi(S)$ est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que sa plus petite valeur propre est 1.

Exercice 55 [ENS L 2026 # 55] Soit E un espace euclidien orienté et soit b une application bilinéaire de $E \times E$ dans E telle que, pour tout $f \in \mathrm{SO}(E)$, $f(b(u, v)) = b(f(u), f(v))$. Que dire de b ?

Exercice 56 [ENS SR 2026 # 56] On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme $\|\cdot\|$, on note B la boule unité fermée et l'on pose

$$\Delta = \sup_{(x,y,z) \in B^3} \min(\|x - y\|, \|y - z\|, \|z - x\|).$$

1. Montrer que Δ est atteint.
2. Montrer que $\Delta \leq 2$.
3. Calculer Δ pour la norme euclidienne canonique.
4. Calculer Δ pour la norme infinie.
5. Montrer que $\Delta \geq 1$.

Exercice 57 [ENS L 2026 # 57] Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

1. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer que f admet un point fixe.
2. On admet que, pour toute fonction continue $g : D \to \mathbb{U}$, il existe une fonction continue $\theta : D \to \mathbb{R}$ telle que $g = \exp(i\theta)$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $r : D \to \mathbb{U}$ dont la restriction à $\mathbb{U}$ soit l'identité de $\mathbb{U}$.
3. Déduire de la question précédente que toute fonction continue de D dans D admet un point fixe.
4. Soit C un convexe fermé de $\mathbb{R}^2$. Est-il vrai que toute fonction continue de C dans C admet un point fixe ?

Exercice 58 [ENS L 2026 # 58] Soit A l'ensemble des fonctions $f : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ telles que

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2, \quad f(0, v) = f(u, 0) = 0 \text{ et } f(u, 1) = u,$$

et, pour tous $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ et $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$,

$$f(u_1, v_2) - f(u_1, v_1) \leq f(u_2, v_2) - f(u_2, v_1).$$

Déterminer $h_0, h_1 \in A$ tels que, pour tout $f \in A$ et tout $(u, v) \in [0, 1]^2$, $h_0(u, v) \leq f(u, v) \leq h_1(u, v)$.

Exercice 59 [ENS U 2026 # 59] On appelle groupe réel tout ensemble G qui est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Un groupe réel G est discret si, pour tout $x \in G$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap G = \{x\}$.

1. Soit G un groupe réel connexe par arcs. Montrer que, si H est un sous-groupe de G d'intérieur relatif non vide, alors $H = G$.
2. Montrer qu'un groupe réel discret est fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 60 [ENS ULSR 2026 # 60] Soient $d, p \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$. On munit $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^p$ de leur structure euclidienne canonique. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $y, z \in B(x, \varepsilon)$,

$$|\|f(y) - f(z)\| - \|y - z\|| \leq \delta \|y - z\|.$$

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.
3. On suppose $d = p = 1$. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

Exercice 61 [ENS ULSR 2026 # 61] Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Une forme linéaire $\varphi \in E^*$ est dite positive si, pour tout $f \in E$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\varphi(f) \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que toute forme linéaire positive sur E est continue pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. Soit φ une forme linéaire sur E continue pour $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que φ est différence de deux formes linéaires positives sur E.

Exercice 62 [ENS U 2026 # 62] Soient $n \geq 2$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \|g - I_n\| \leq \varepsilon\}$.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que S_ε soit compact et, si l'on note U son intérieur, que le groupe engendré par U soit à la fois ouvert et fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. On note $S = S_\varepsilon$ pour le $\varepsilon > 0$ trouvé en 1 et $\langle S \rangle$ le sous-groupe engendré par S. Pour $g \in \langle S \rangle$, on note

$$\ell_S(g) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid g = g_1^{s_1} \cdots g_k^{s_k}, \quad g_i \in S,\ s_i = \pm 1\}.$$

   Trouver tous les $g \in \langle S \rangle$ tels que $(\ell_S(g^n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

Exercice 63 [ENS ULSR 2026 # 63] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'une norme N. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est stable si la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle, et contractante pour N s'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $N(Ax) \leq cN(x)$ pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est contractante pour N, alors elle est stable.
2. On suppose A stable. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty}(A^k)^T A^k$ converge et que sa somme est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si A est stable, alors A est contractante pour une norme euclidienne bien choisie.

Exercice 64 [ENS U 2026 # 64] Soit d un entier supérieur ou égal à 2.

1. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$ et que $\{\mathrm{tr}(M^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\mathbb{R}$?
2. Même question lorsque M a exactement deux valeurs propres non réelles. Indication : considérer une énumération des rationnels.

Exercice 65 [ENS L 2026 # 65] Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On note d la distance associée à la norme. Soit $f : E \to E$ une application s'annulant en 0.

1. On suppose que f est continue et que, pour tous $(x, y) \in E^2$,
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$
Que dire de f ?
2. On suppose dans la suite que f préserve la distance d et est surjective. Montrer que f est linéaire dans les deux cas suivants : a. $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne canonique ; b. $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie.
3. On revient au cas général. Soient $p, q \in E$ avec $q = -p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties de E définie par
$$X_0 = \{e \in E \mid d(e,p) = d(e,q) = d(p,q)/2\},$$
$$X_n = \{e \in X_{n-1} \mid \forall x \in X_{n-1},\ d(e,x) \leq \mathrm{diam}(X_{n-1})/2\}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$
Montrer que $0 \in X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis caractériser $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Conclure que f est linéaire.

Exercice 66 [ENS ULSR 2026 # 66] Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

1. Montrer que $B(0,1) \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.
2. Soient U un ouvert connexe par arcs de E et V une partie finie de E. Montrer que $U \setminus V$ est connexe par arcs.
3. Soient U un ouvert connexe par arcs de E et V une union dénombrable de sous-espaces affines de E de dimension au plus $n-2$. Montrer que $U \setminus V$ est connexe par arcs.

Exercice 67 [ENS ULSR 2026 # 67] On considère l'espace vectoriel normé des suites réelles sommables, noté E, muni de la norme $\|u\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$.

1. Rappeler la définition d'une partie compacte de E.
2. Montrer que la boule unité fermée $B(0,1) = \{u \in E \mid \|u\| \leq 1\}$ n'est pas compacte dans E.
Une partie $K \subset E$ est dite équisommable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $u \in K$,
$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} |u_k| < \varepsilon.$$

Exercice 68 [Magistère de Rennes 2026 # 68] Montrer qu'il existe un unique couple $(\alpha, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que
$$\sin\left(\frac{\theta}{n^\alpha}\right) = \frac{\theta}{(n+1)^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right) \qquad (n \to +\infty).$$

Exercice 69 [ENS U 2026 # 69] Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$x_n = \sqrt[p]{c_1 + \sqrt[p]{c_2 + \sqrt[p]{\cdots + \sqrt[p]{c_n}}}}.$$
Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la suite $\left(\frac{\ln(c_n)}{p^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

Exercice 70 [ENS SR 2026 # 70] Soient N un entier supérieur ou égal à 2 et α un réel strictement positif. On pose
$$S_N = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{m^\alpha} \sin^2\left(\frac{m\pi}{N}\right).$$

1. Pour quelles valeurs de α la série définissant S_N est-elle convergente ?
2. Déterminer la limite de S_N lorsque $N \to +\infty$.
3. Déterminer un équivalent de S_N lorsque $N \to +\infty$ dans le cas où $1 < \alpha \leq 2$.

Exercice 71 [Magistère de Rennes 2026 # 71]

1. Soient $\alpha \geq 0$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ une suite positive. On suppose que $\sum d_n$ converge. Montrer que $\sum \frac{d_n}{1+n^\alpha d_n}$ converge.
2. Soient $\alpha > 1$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ une suite positive. Montrer que $\sum \frac{d_n}{1+n^\alpha d_n}$ converge.

3. Soit $(d_n)_{n\geq 0}$ une suite positive telle que $\sum d_n$ diverge. Montrer que $\sum \frac{d_n}{1+d_n}$ diverge.
4. Soit $\alpha \in]0,1]$. Montrer l'existence de deux suites positives $(e_n)_{n\geq 0}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ telles que : a. $\sum e_n$ diverge et $\sum \frac{e_n}{1+n^\alpha e_n}$ diverge ; b. $\sum f_n$ diverge et $\sum \frac{f_n}{1+n^\alpha f_n}$ converge.

Exercice 72 [ENS SR 2026 # 72] Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^{\sigma(n)}} < +\infty$$
et expliciter un majorant de la somme.
2. Soit $\alpha \leq 2$. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha} = +\infty.$$

Exercice 73 [ENS SR 2026 # 73]
1. Déterminer le nombre de solutions de $ye^y = x$ selon la valeur de x.
2. Soit f qui à $x \in [-1/e, +\infty[$ renvoie l'unique solution $y \geq -1$ de $ye^y = x$. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1/e, +\infty[$.
3. Montrer que $f'(x) = \frac{1}{x+e^{f(x)}}$ et en déduire que f est solution de $x(1+y)y' = y$.
4. Trouver un développement asymptotique de f en $+\infty$, à deux termes, et montrer que le troisième terme est un $o(1)$.
5. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, et trouver son rayon de convergence.

Exercice 74 [ENS U 2026 # 74] Soit $\beta \geq 1$. On considère l'équation $y^\beta = \frac{1}{3}e^y$. Montrer qu'il existe une unique solution sur $[1, +\infty[$, que l'on note $y(\beta)$, puis déterminer un développement asymptotique de $y(\beta)$ lorsque β tend vers $+\infty$.

Exercice 75 [ENS L 2026 # 75] Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$. Soit T_x la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 définie sur $\mathbb{R}$ telle que $T_x(x) = f(x), T_x'(x) = f'(x)$ et $T_x''(x) = f''(x)$. Que dire de l'ensemble
$$\{(y, T_x(y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}?$$

Exercice 76 [ENS ULSR 2026 # 76]
1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction f non nulle, de classe C^k, à support compact et telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.
2. Montrer qu'il existe une fonction f non nulle, de classe C^∞ et à support compact.
3. Montrer qu'il existe une fonction f non nulle, de classe C^∞, à support compact et telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 77 [ENS L 2026 # 77] Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit
$$E = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0, \quad \|f'\|_\infty \leq a, \quad \|f''\|_\infty \leq b\}.$$
Calculer $\sup_{f\in E} \|f\|_\infty$.

Exercice 78 [ENS L 2026 # 78] Soit f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit S un segment non trivial de $\mathbb{R}$ sur lequel f n'est pas polynomiale. Montrer qu'il existe un sous-segment non trivial S' de S sur lequel f n'est pas polynomiale et ne s'annule pas.
2. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Montrer que f est polynomiale.

Exercice 79 [ENS SR 2026 # 79]
1. Soit $f \in C^0([0,\pi], \mathbb{R})$. Montrer que
$$\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
2. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}.$$
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Exercice 80 [ENS U 2026 # 80] Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer
$$\int_0^{+\infty} x^{k+\frac{1}{2}} e^{-ax-\frac{b}{x}}\,dx.$$

Exercice 81 [ENS SR 2026 # 81] Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient de carré intégrable.

1. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2$ converge.
2. Montrer que f et f' tendent vers 0 en $\pm\infty$.
3. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2 \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (f'')^2}.$$

Exercice 82 [ENS ULSR 2026 # 82] Soit $\alpha > 0$. On note E l'ensemble des fonctions f de classe C^2 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$J(f) = \int_0^{+\infty} \left((f')^2 + \alpha f^2\right) < +\infty.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}$, il existe $x \in E$ tel que $x(0) = v$.
3. On fixe $v \in \mathbb{R}$. Déterminer la borne inférieure de J sur l'ensemble des $x \in E$ tels que $x(0) = v$.

Exercice 83 [ENS L 2026 # 83] Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$ continues par morceaux et telles que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leq 1$. Pour $f \in E$, on pose

$$F(f) = -\int_0^{+\infty} f(x)\ln(x)\,dx.$$

1. Montrer que $F(E) = [-\infty, 1]$.
2. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Caractériser

$$G_\varepsilon = \sup\left\{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \mid f \in E \text{ et } F(f) \geq 1 - \varepsilon\right\}.$$

Exercice 84 [ENS L 2026 # 84] Trouver une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction f continue à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on ait, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(y)|}{\sqrt{|y - x|}}\,dy \leq C\sqrt{\|f\|_\infty \|f\|_1}.$$

Exercice 85 [ENS U 2026 # 85]

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$, tendant toutes vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$. Montrer que cette suite admet une suite extraite qui converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes. Montrer qu'il existe une extraction φ telle que $(\mathbf{E}(g(X_{\varphi(n)})))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et nulle en dehors d'un segment.

Exercice 86 [ENS U 2026 # 86] On note f la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

1. La fonction f est-elle limite simple sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues ?
2. Existe-t-il une famille $(f_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} f_{n,m}($

Exercice 87 [ENS L 2026 # 87] Soient $q, n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $p \in \{1, \ldots, q^n\}$ tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $d(px_i, \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{q}$.
2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la série $\sum a_n/n^x$ converge si et seulement si $x > x_0$. Soit $T > 0$. Pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(z) > x_0$, on pose

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^z}.$$

On considère $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > x_0, \mathrm{Im}(z) \geq T\}$. Montrer que f est bien définie sur F et qu'elle n'y est pas bornée.

Exercice 88 [ENS U 2026 # 88] Soient $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On pose

$$E_c(f) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ et } \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}.$$

1. Montrer que $E_c(f)$ peut être vide, le cercle unité $\mathbb{U}$ tout entier, ou $\mathbb{U} \setminus S$ avec S une partie finie. Montrer en revanche que $E_c(f)$ ne peut pas être n'importe quel sous-ensemble de $\mathbb{U}$.
2. On suppose que $a_n \to 0$. Montrer qu'il est possible que $E_c(f) = \varnothing$ ou que $E_c(f) = \{1\}$.

Exercice 89 [ENS ULSR 2026 # 89] Si n est un entier supérieur ou égal à 2, un élément σ de $\mathfrak{S}_n$ est dit en zigzags si, pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, $\sigma(i)$ n'est pas compris entre $\sigma(i-1)$ et $\sigma(i+1)$. Une permutation en zigzags est dite ascendante si $\sigma(2) > \sigma(1)$, descendante dans le cas contraire.

1. Montrer que, si $n \geq 2$, il y a autant de permutations en zigzags ascendantes que descendantes.
2. Pour $n \geq 2$, soit A_n le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ en zigzags et ascendantes. On convient que $A_0 = A_1 = 1$. Pour $n \geq 1$, vérifier que

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k}.$$

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

3. Montrer que le rayon de convergence de f est supérieur ou égal à 1.
4. En utilisant une équation différentielle, déterminer une expression de $f(x)$.

Exercice 90 [ENS ULSR 2026 # 90] Soit $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $\varphi : E \to E$ l'application qui à $f \in E$ associe

$$\varphi(f) : x \in [0, 1] \longmapsto \int_0^x sf(s)\,ds + x\int_x^1 f(s)\,ds.$$

1. Déterminer $\ker(\varphi)$ et l'ensemble des valeurs propres de φ, ainsi que les espaces propres associés.
2. On pose $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = \varphi(P_n)$. Déterminer, pour tout $x \in [0,1]$, le rayon de convergence de la série entière $\sum P_n(x) z^n$.

Exercice 91 [ENS SR 2026 # 91]
1. Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ et un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$.

Exercice 92 [ENS SR 2026 # 92] Soient $r > 0$ et $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Pour $f : G \to \mathbb{C}$ continue, on note

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) re^{i\theta} \, d\theta.$$

1. Calculer $I(z \mapsto z^k)$ et $I\left(z \mapsto \frac{1}{z-a}\right)$ si $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C} \setminus G$.
2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < r$. Montrer que

$$I\left(z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}\right) = f(a).$$

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, si r est assez grand,

$$e^M = I\left(z \mapsto e^z (zI_n - M)^{-1}\right),$$

où la fonction I est appliquée coefficient par coefficient.

Exercice 93 [ENS U 2026 # 93] Déterminer un équivalent, quand $\delta \to 0$, de

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_\delta^{+\infty} \frac{e^{-n^2 t}}{t} \, dt\right).$$

Exercice 94 [ENS ULSR 2026 # 94] Pour $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note (E_u) l'équation différentielle $y'' + u(t)y = 0$.
1. Soient $b > a > 0$ réels. Montrer qu'il existe une fonction continue $u : \mathbb{R} \to [a,b]$ telle que (E_u) possède une solution non bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une fonction continue $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tendant vers 1 en $+\infty$, telle que (E_u) possède une solution non bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 95 [ENS L 2026 # 95] Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$. On considère une solution $y \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ du problème aux limites

$$y'' - y = f, \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

1. Montrer que la solution y est unique.
2. Montrer que

$$\int_0^1 y^2 \leq \frac{1}{(1+\pi^2)^2} \int_0^1 f^2.$$

Exercice 96 [ENS ULSR 2026 # 96] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $X' = JSX$ sont bornées.
2. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que JS soit semblable sur $\mathbb{C}$ à la matrice diagonale de coefficients diagonaux $i\lambda_1, -i\lambda_1, \ldots, i\lambda_n, -i\lambda_n$.

Exercice 97 [Magistère de Rennes 2026 # 97] Soient $N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et strictement croissante, et $a > 0$.
1. Montrer que l'application

$$L : v \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \int_v^a \frac{dw}{N(w)}$$

est bien définie, de classe C^1, injective et possède une limite (finie ou infinie) en 0. On note cette limite $L(0)$.
2. Soient $T > 0$, $u \in C^1([0,T[, \mathbb{R}_+)$, $A \in \mathbb{R}_+$ et $B : [0,T[\to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable tels que, pour tout $t \in [0,T[$,

$$u(t) \leq A + \int_0^t B(s) N(u(s)) \, ds.$$

a. On suppose $A > 0$. Montrer que, pour tout $t \in [0,T[$,

$$-L(u(t)) \leq -L(A) + \int_0^t B(s) \, ds.$$

b. Expliciter l'inégalité précédente quand B est constante et N est l'identité. c. On suppose $A = 0$ et $L(0) = +\infty$. Montrer que $u(t) = 0$ pour tout $t \in [0,T[$.

3. Étendre ce qui précède au cas où u est seulement continue.

Exercice 98 [ENS L 2026 # 98] Soient $x, y \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t)(1 + x(t)y(t)) - x^3(t), \\ y'(t) = x(t)(1 - x(t)y(t)) - y^3(t). \end{cases}$$

1. Étudier le comportement asymptotique de x et y.
2. En posant $X(t) = (x(t), y(t))$, décrire le mouvement.

Exercice 99 [ENS ULSR 2026 # 99] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. On pose $S = \{X \in \mathbb{R}^m \mid AX = B\}$ et on suppose S non vide.

1. Montrer que S admet un élément de norme minimale et le caractériser géométriquement.
2. Soient $t > 0$, $q > 1$ et
$$f_t : X \in \mathbb{R}^m \longmapsto \frac{1}{2}\|X\|^2 + \frac{t}{q}\|AX - B\|^q.$$
a. Montrer que f_t atteint son minimum en un unique point X_0. b. Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^m$ telle que $f_t(u_k) \to \min f_t$. Que dire de la suite (u_k) ?

Exercice 100 [ENS SR 2026 # 100] On se place dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\rho = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$.

1. Montrer que f est trigonalisable puis que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base B_ε de E telle que la matrice $M = \mathrm{Mat}_{B_\varepsilon}(f)$ vérifie $M_{i,j} = 0$ si $j < i$ et $|M_{i,j}| < \varepsilon$ si $j > i$.
2. En déduire qu'il existe une norme N_ε sur E telle que $N_\varepsilon(f(x)) \leq (\rho + \varepsilon)N_\varepsilon(x)$ pour tout $x \in E$.
3. Montrer que le résultat persiste sur $\mathbb{R}$.
4. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que $\varphi : x \in E \setminus \{0\} \mapsto f(x)/\|f(x)\|$ est de classe C^1 et calculer sa différentielle.
5. Quels sont les points fixes de φ ?

Exercice 101 [ENS SR 2026 # 101] Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On définit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$A(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t(x - x_0), y)\, dt,$$

$$B(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + t(y - y_0))\, dt.$$

1. Après avoir rappelé les hypothèses de continuité sous le signe intégral, montrer que A et B sont continues.
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)A(x,y) + (y - y_0)B(x,y).$$
3. Montrer que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses suivantes : a. φ est continue ; b. $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; c. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; alors φ est de classe C^1.

Exercice 102 [ENS SR 2026 # 102] Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On note $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ la norme subordonnée sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

1. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et U un ouvert convexe tels que $\|df(x)\|_{\mathrm{op}} \leq M$ pour tout $x \in U$. Montrer que, pour tous $(x, y) \in U^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$.
2. Dans la suite, f est de classe C^2 et U n'est plus supposé convexe. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $df(a)$ soit inversible. Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a tel que, pour tout $x \in V$, $df(x)$ soit inversible.
3. On définit $F : V \to \mathbb{R}^n$ par $F(x) = x - (df(x))^{-1}(f(x))$. Montrer qu'il existe un ouvert non vide $W \subset V$ tel que $F(W) \subset W$ et que, pour toute suite définie par $x_0 \in W$ et $x_{k+1} = F(x_k)$, la suite (x_k) converge vers a.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe une matrice A telle que $P(A) = 0$ et $P'(A)$ soit inversible. On définit au voisinage de A l'application $F : M \mapsto M - (P'(M))^{-1}P(M)$. Montrer qu'il existe un ouvert non vide W tel que, pour toute suite définie par $M_0 = M \in W$ avec $AM = MA$ et $M_{k+1} = F(M_k)$, la suite (M_k) converge vers A.

Exercice 103 [ENS L 2026 # 103] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée canonique. On note S la sphère unité, B la boule unité fermée et r la rotation d'angle $\pi/2$. Soient $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 et $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 telles que :

1. $x'(t) = u(x(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$;
2. $\langle u(y), y\rangle < 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^2 \setminus B$;
3. $\langle u(y), r(y)\rangle = \|y\|^2$ pour tout $y \in S$;
4. il existe $e \in S$ tel que $\langle u(e), e\rangle < 0$.

Montrer qu'il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \in [T, +\infty[$, $\|x(t)\| < 1$.

Exercice 104 [ENS ULSR 2026 # 104] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction minorée. On note $f^* = \inf_{\mathbb{R}^n} f$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) = 0\}$ et $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f^*\}$. On note (PL) la propriété

$$\exists \mu > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) - f^* \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|^2.$$

1. Quel lien y a-t-il entre S et E lorsque f vérifie (PL) ?
2. Soit $E' \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace affine. Existe-t-il une fonction f vérifiant (PL) pour laquelle $E = E'$? Même question lorsque E' est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
3. On suppose que f vérifie (PL). Montrer que E est connexe par arcs.

Exercice 105 [ENS L 2026 # 105] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telles que, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = u(\varphi(t, x)), \qquad \varphi(0, x) = x.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$. On suppose que $\operatorname{tr}(du(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer que, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $\det d\varphi_t(x) = 1$.

2) Géométrie

Exercice 106 [ENS SR 2026 # 106] On appelle similitude directe de $\mathbb{C}$ une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

1. Montrer que l'ensemble des similitudes directes est un groupe pour la composition.
2. Rappeler l'écriture complexe d'une rotation.
3. Soient A_1, A_2, A_3 des points du plan d'affixes z_1, z_2, z_3. Montrer que $A_1A_2A_3$ est un triangle équilatéral direct si et seulement si $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$.
4. Peut-on généraliser pour caractériser un polygone régulier à n côtés ?

Exercice 107 [ENS L 2026 # 107] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure affine euclidienne canonique. Pour $v \in \mathbb{R}^2$, soit t_v la translation de vecteur v.

1. Soit G l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même de la forme $t_v \circ u$ où $u \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^2$. Montrer que G est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même et que, si (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont deux triplets de points non alignés de $\mathbb{R}^2$, il existe un unique $g \in G$ tel que $g(a_1) = a_2$, $g(b_1) = b_2$, $g(c_1) = c_2$.
2. On appelle ellipse toute image d'un cercle de rayon strictement positif de $\mathbb{R}^2$ par un élément de G. Montrer que, pour tout triangle non aplati $T = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^2$, il existe une ellipse tangente aux côtés de T en leurs milieux.

Exercice 108 [ENS L 2026 # 108] Soit $M \subset \mathbb{R}^2$ une partie du plan contenant au moins deux points. On dit que M vérifie la propriété (P) si, pour tous $P, Q \in M$ avec $P \neq Q$, la droite (PQ) n'intersecte M qu'en P et Q. On dit que M est maximale si, pour tout $X \notin M$, $M \cup \{X\}$ ne vérifie plus (P).

1. Trouver tous les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}^2$ vérifiant (P).
2. Montrer qu'il existe une partie dense de $\mathbb{R}^2$ vérifiant (P).
3. Montrer que le cercle unité est maximal.
4. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ tel que la frontière de Ω vérifie (P). Que dire de Ω ?

Exercice 109 [ENS L 2026 # 109] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne standard. Une ellipse est définie comme l'image directe du disque unité fermé par un certain endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, et l'on définit son aire comme $\pi|\det(f)|$. Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que, parmi les disques fermés contenant K, il en existe un et un seul de rayon minimal (éventuellement nul).
2. Montrer que, parmi les ellipses contenant K, il en existe une d'aire minimale.

Exercice 110 [ENS ULSR 2026 # 110] Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ une partie convexe compacte dont la frontière est une courbe de classe C^1. On définit un billard commençant par un point M de la frontière et un vecteur $\vec{v}$ comme le chemin obtenu en faisant des rebonds chaque fois que la trajectoire touche la frontière, de sorte que les rebonds soient symétriques par rapport à la normale au point de réflexion. Montrer qu'il existe une trajectoire triangulaire périodique. Indication : prendre un triangle dont la somme des longueurs des côtés est maximale.

3) Probabilités

Exercice 111 [ENS SR 2026 # 111]

1. On considère trois dés équilibrés dont les faces sont numérotées respectivement par les ensembles $\{18, 9, 8, 7, 6, 5\}$, $\{17, 16, 15, 4, 3, 2\}$ et $\{14, 13, 12, 11, 10, 1\}$, et l'on note A, B, C les résultats de chaque lancer. Calculer $\mathbb{P}(A > B)$, $\mathbb{P}(B > C)$ et $\mathbb{P}(C > A)$. Commenter le résultat.
2. On numérote les faces de trois dés à n faces avec les entiers de 1 à $3n$ et l'on note A, B, C les résultats de chaque lancer. Montrer que l'une des trois probabilités $\mathbb{P}(A > B)$, $\mathbb{P}(B > C)$ ou $\mathbb{P}(C > A)$ est inférieure ou égale à $2/3$.

Exercice 112 [ENS SR 2026 # 112] On considère un tableau de taille $n \times n$, dont on révèle les cases une par une aléatoirement.

1. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$. Calculer la probabilité qu'après m étapes, la ligne i n'ait aucune case révélée. La majorer par $(1 - 1/n)^m$.
2. On note H_n le nombre d'étapes nécessaires pour que toute ligne et toute colonne contienne au moins une case révélée. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(H_n > \lfloor(1 + \varepsilon)n \ln n\rfloor) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Déterminer la vitesse de convergence.
3. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On note X_n le nombre de lignes ne contenant pas de case révélée à l'instant $\tau = \lfloor(1 - \varepsilon)n \ln n\rfloor$. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(X_n = 0) \to 0$.

Exercice 113 [ENS U 2026 # 113] Que dire de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes X et Y telles que $X+Y$ et Y soient indépendantes ?

Exercice 114 [ENS U 2026 # 114] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, M_n une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Montrer qu'il existe une constante absolue $c > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(M_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) \geq c.$$

Exercice 115 [ENS U 2026 # 115] Soit $R > 0$. On choisit aléatoirement un polynôme $P_n \in \mathbb{C}_n[X]$ unitaire de degré n, à coefficients indépendants suivant la loi uniforme sur $B(0,R) \cap \mathbb{Z}[i]$. Où se situent les racines de P_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 116 [ENS L 2026 # 116] On définit, pour une suite de réels $u = (u_i)_{i\geq 0}$, la suite de matrices $H(u)$ telle que $H_n(u) = (u_{i+j-2})_{1\leq i,j\leq n}$.

1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbf{E}(X^n)$, avec X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment de tout ordre. Montrer que toutes les matrices $H_n(u)$ sont symétriques positives. Quel est leur rang ?
2. On suppose que $u_0, \dots, u_{2M-2}$ vérifient $H_M(u) \in \mathcal{S}_M^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que la suite u peut être prolongée à partir du rang $2M-1$ en une suite infinie telle que, pour tout $n \geq M$, $\mathrm{rg}(H_n(u)) = M$.
3. On suppose que $H_n(u) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les seules natures possibles pour la suite $(\mathrm{rg}(H_n(u)))_{n\geq 0}$ sont : soit $\mathrm{rg}(H_n(u)) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; soit il existe M tel que $\mathrm{rg}(H_n(u)) = n$ pour $n \leq M$, puis cette suite est stationnaire égale à M.

Exercice 117 [ENS U 2026 # 117] Soit σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_m$. Quelle est la loi de la longueur du cycle de σ contenant 1 ?

Exercice 118 [ENS L 2026 # 118] Soit $p \geq 5$ un nombre premier. On admet que le polynôme $X^3 - 1$ a pour unique racine 1 dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 2 \pmod 3$. On tire une matrice M dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ avec la probabilité uniforme. Calculer $\mathbb{P}(M^3 = I_3)$.

Exercice 119 [ENS ULSR 2026 # 119] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est inversible modulo n s'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que, pour tous $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$, $(AB)_{i,j} \equiv \delta_{i,j} \pmod n$.

1. Montrer que A est inversible modulo n si et seulement si $\det(A) \wedge n = 1$.
2. Soient a, b, c, d des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$, et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité que M soit inversible modulo n pour $n = p^k$, avec p premier et $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 120 [ENS L 2026 # 120] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k), \dots$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit σ_m la permutation aléatoire $\sigma_m = (a_1\ b_1) \circ \cdots \circ (a_m\ b_m)$, et soit μ_m la loi de σ_m.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, exprimer μ_{m+1} en fonction de μ_m.
2. À quelle condition sur m a-t-on $\mu_m(\{\sigma\}) > 0$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$?

Exercice 121 [ENS U 2026 # 121] Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{i^\alpha}, \qquad F_N : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(S_N \leq x).$$

Montrer que la suite (F_N) converge ; on note F sa limite. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ et $x \geq 0$ a-t-on $F(x) > 0$?

Exercice 122 [ENS L 2026 # 122] 1. Soient $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $c_{a,b} > 0$ tel que, pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\mathbf{E}(Z) = 1$ et $\mathbf{E}(Z^2) \leq b$, on ait $\mathbb{P}(Z \geq a) \geq c_{a,b}$.

2. Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. a. Montrer que, pour tout $a > 0$, il existe $\varphi(a) > 0$ tel que, pour tout n assez grand, $\mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \geq a) \geq \varphi(a)$. b. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1} \text{ est bornée}\right) = 0.$$

Exercice 123 [ENS ULSR 2026 # 123] 1. Montrer que la fonction τ qui associe à un entier naturel non nul son nombre de diviseurs positifs vérifie $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

2. Trouver un équivalent de $\mathbf{E}(\tau(T_N))$ quand $N \to +\infty$, où $T_N \sim \mathcal{U}([\![1,N]\!])$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(\tau(T_N) > \ln^3(N)) = O(1/\ln^3(N))$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 124 [ENS L 2026 # 124] Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$, et $X_0, X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires complexes telles que, pour tous $i, j \in \{0, \dots, N\}$,

$$\mathbf{E}(|X_i - X_j|^p) \leq \left(\frac{|i-j|}{N}\right)^2.$$

1. Soit $\eta > 0$. Donner une majoration de $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq N} |X_i - X_0| \geq \eta\right)$.
2. À partir de quel p cette majoration est-elle pertinente ?

Exercice 125 [ENS L 2026 # 125] Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. Montrer l'équivalence entre :

1. pour toute distribution de probabilités $(q_i)_{i\geq 0}$ sur $\mathbb{N}$, il existe une suite (g_n) de fonctions de $\{0,1\}^{n+1}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(g_n(X_0, \dots, X_n))$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire suivant la loi associée à (q_i) ;

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(1-p_n) = +\infty$.

Exercice 126 [ENS U 2026 # 126]
1. Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Donner un équivalent simple de $\mathbf{E}(M_n)$ quand $n \to +\infty$.
2. Soit $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$. Montrer que $\mathbf{E}(P_n) = o(\mathbf{E}(M_n))$, puis trouver un équivalent de $\mathbf{E}(P_n)$.

Exercice 127 [ENS U 2026 # 127] Soient $\beta \in]2, +\infty[$ et $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telles que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_1 = m) = \frac{1}{\zeta(\beta)} \frac{1}{m^\beta}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer un équivalent simple de $\mathbf{E}(M_n)$.

Exercice 128 [ENS U 2026 # 128] Soient $(p_k)_{k\geq 0} \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ et $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes telle que $p_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels positifs.

1. On suppose que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k p_k < +\infty$. Montrer que, pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X_k \leq A\right) > 0.$$
2. On suppose que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k p_k = +\infty$ et que (a_k) est bornée. Montrer que, pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X_k \leq A\right) = 0.$$

Exercice 129 [ENS ULSR 2026 # 129] Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles indépendantes. On suppose que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}(|X_k|) < +\infty$ et $\mathbf{E}(X_k) \geq 0$. On note $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

1. Montrer que, pour tout $C > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\max(S_1, \dots, S_n) \geq C\right) \leq \frac{\mathbf{E}(\max(S_n, 0))}{C}.$$
2. On suppose de plus que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}(X_k) = 0$ et $\mathbf{E}(X_k^2) < +\infty$. Montrer que, pour tout $C > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\max(|S_1|, \dots, |S_n|) \geq C\right) \leq \frac{\mathbf{E}(S_n^2)}{C^2}.$$

Exercice 130 [ENS SR 2026 # 130] Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $X \leq_{\text{st}} Y$ la condition $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X \geq m) \leq \mathbb{P}(Y \geq m)$. Soient $0 < p < q < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n, q)$. Montrer que $X \leq_{\text{st}} Y$.
2. Montrer que si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que $k \mapsto \frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(Y=k)}$ est décroissante, alors $X \leq_{\text{st}} Y$.
3. Soient X', Y' deux variables aléatoires telles que $X' \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y' \sim \mathcal{B}(n, q)$. Soient X, Y des variables aléatoires telles que, pour $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\mathbb{P}(X' = k)}{1 - \mathbb{P}(X' = 0)}, \qquad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\mathbb{P}(Y' = k)}{1 - \mathbb{P}(Y' = 0)}.$$
Justifier que de telles variables aléatoires existent. Montrer que $X \leq_{\text{st}} Y$.

Exercice 131 [ENS L 2026 # 131] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, soient

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad u_n(x) = \mathbb{P}(S_n \leq nx).$$

1. On admet que, si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelle sous-additive, alors $(a_n/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la suite $(\sqrt[n]{u_n(x)})_{n\geq 1}$ converge vers un élément $v(x)$ de $[0, 1]$.
2. À quelle condition sur X la fonction v est-elle constante égale à 1 ?
3. On suppose qu'il existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathbf{E}(e^{tX}) < +\infty$. Résoudre l'équation $v(x) = 1$.

Exercice 132 [ENS ULSR 2026 # 132]
1. Soit $h : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto (1+u)\ln(1+u) - u$. Montrer que h est positive, convexe et en donner un équivalent en 0.
2. Soit X une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout $u > 0$,
$$\mathbb{P}(X \geq \lambda(1+u)) \leq e^{-\lambda h(u)}.$$

Exercice 133 [ENS U 2026 # 133] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$, on note $x \preceq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$. On dit que $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ est croissante si $x \preceq y$ implique $f(x) \leq f(y)$. Soient f, g deux fonctions croissantes et bornées de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbf{E}(f(X_1, \dots, X_d)g(X_1, \dots, X_d)) \geq \mathbf{E}(f(X_1, \dots, X_d))\mathbf{E}(g(X_1, \dots, X_d))$$

dans chacun des cas suivants :

1. $X_1, \dots, X_d$ sont des variables de Bernoulli indépendantes ;
2. $X_1, \dots, X_d$ sont des variables de Poisson indépendantes.

Exercice 134 [ENS SR 2026 # 134] Soit X une variable aléatoire réelle. On note $F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$. Pour $q \in]0,1[$, on pose

$$C_X(q) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid F_X(t) \geq q\}.$$

1. Soit $q \in]0,1[$. Montrer que $C_X(q)$ est bien défini. Calculer $C_X(q)$ pour $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $q \in]0,1[$. Montrer que $C_X(q) \leq x$ si et seulement si $q \leq F_X(x)$. En déduire que

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{C_X(q) \leq x}\, dq = \mathbb{P}(X \leq x).$$

   En déduire une expression de $\mathbf{E}(X)$ lorsque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Soit $\widetilde{C}_X(q) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X < t) \leq q\}$. Montrer que $C_{-X}(q) = -\widetilde{C}_X(1-q)$.

Exercice 135 [ENS ULSR 2026 # 135] On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est symétrique si $X \sim -X$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires symétriques i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et, pour $x \in \mathbb{Z}$, $p_n(x) = \mathbb{P}(S_n = x)$.

1. Pour $n, k \geq 1$, montrer que
$$p_{n+k}(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} p_n(y) p_k(x-y).$$
2. Montrer que l'application $x \mapsto p_{2n}(x)$ atteint un maximum sur $\mathbb{Z}$ en un unique point.
3. On suppose maintenant que $X_1 \sim \mathcal{U}(\{-1,1\})$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{Z}$,
$$p_n(x) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi n}}.$$

Exercice 136 [ENS U 2026 # 136] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n \in [\![0,n]\!]$ et $a_n + b_n = n - c$, avec $c \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit V_n (resp. W_n) un sous-espace vectoriel aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des sous-espaces de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ de dimension a_n (resp. b_n). On suppose que V_n et W_n sont indépendants. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite
$$(\mathbb{P}(\dim(V_n + W_n) = a_n + b_n))_{n\in\mathbb{N}}$$
converge et déterminer sa limite le cas échéant.

Exercice 137 [ENS ULSR 2026 # 137] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ avec $x_1 < \dots < x_m$ et $y_1 < \dots < y_n$. Soient $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = 1$. Soient X, Y deux variables aléatoires de lois données par $\mathbb{P}(X = x_i) = a_i$ et $\mathbb{P}(Y = y_j) = b_j$. Une matrice de couplage de X, Y est une matrice $P = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$; on pose $C(P) = \mathbf{E}((X-Y)^2)$ et le couplage est optimal si P minimise $C(P)$.

1. Justifier que $C(P)$ ne dépend que de la matrice P et montrer l'existence d'un couplage optimal.
2. Justifier que minimiser $\mathbf{E}((X-Y)^2)$ revient à maximiser $\mathbf{E}(XY)$.
3. Posons $A_0 = B_0 = 0$, $A_i = a_1 + \dots + a_i$ et $B_j = b_1 + \dots + b_j$. Définissons $I_i =]A_{i-1}, A_i]$ et $J_j =]B_{j-1}, B_j]$, puis $p^*_{i,j} = |I_i \cap J_j|$. Montrer que la matrice $(p^*_{i,j})$ est l'unique matrice de couplage optimal.

Exercice 138 [ENS U 2026 # 138] Soient $n \geq 2$ et $N \geq 2$ deux entiers, et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X_1 + \dots + X_n$ suive la loi uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$. Est-il vrai que les X_i suivent des lois uniformes ?

Exercice 139 [ENS U 2026 # 139] Soit $p \in [0,1]$, $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, et $(Y_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $Y_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_{n+1} = \frac{1}{5}(Y_n^2 + 4X_n + 2).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(\min(Y_1, \dots, Y_n) \leq x), \qquad G_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leq x).$$

Montrer que les suites de fonctions (F_n) et (G_n) convergent simplement vers des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

II) ENS PSI **AUTRE**

1) Algèbre

Exercice 140 [ENS 2026 PSI # 140]
1. Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. Quel est le nombre de multiples de p^α entre 1 et n ?
2. Montrer que la plus grande puissance de p qui divise $n!$ est
$$\sum_{\alpha=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor.$$

3. Montrer que, lorsque $x \to +\infty$,
$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \geq \ln(x) + O(1).$$

Exercice 141 [ENS 2026 PSI # 141] Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ des réels. On pose par convention $a_{n+1} = +\infty$. Soit $(n_k)_{1 \leq k \leq n} \in (\mathbb{N}^*)^n$. Soit
$$f : x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{n_k}{x - a_k}, \qquad d = \sum_{k=1}^{n} n_k.$$
Soit $t > 0$, et posons $R_t : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{t - f(x)}$.

1. Donner un développement asymptotique à deux termes en $+\infty$ de f puis de R_t.
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Justifier que f réalise une bijection de $]a_i, a_{i+1}[$ sur un intervalle I_i que l'on précisera. On note g_i sa réciproque.
3. Montrer que, pour tout $t > 0$,
$$g_i(t) - a_i = \int_t^{+\infty} \frac{ds}{|f'(g_i(s))|}.$$
4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. Montrer que
$$R_t(x) = \frac{1}{t} \frac{\prod_{i=1}^n (x - a_i)}{\prod_{i=1}^n (x - g_i(t))} = \frac{1}{t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - g_i(t)} \frac{1}{|f'(g_i(t))|}.$$
5. Montrer que, pour tout $t > 0$,
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(g_i(t))|} = \frac{d}{t^2}.$$
6. Soit P un polynôme réel scindé. Soit $t > 0$, et posons
$$E_t = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{P'}{P}(x) > t \right\}.$$
Montrer que E_t est une réunion finie d'intervalles ouverts et que la somme de leurs longueurs vaut d/t, où d est le degré de P.

Exercice 142 [ENS 2026 PSI # 142]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'ayant pas de valeur propre réelle. Montrer que $\det A > 0$.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

2. On suppose que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \varnothing$. Montrer que $\det M > 0$.
3. On suppose que M est diagonalisable. Montrer que $\det M \geq 0$.

Exercice 143 [ENS 2026 PSI # 143] Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\ker f = \ker(f^2)$ si et seulement si $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.
2. Trouver un exemple d'espace E et d'application $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Im}\, f = \ker f$.
3. Si $K = \mathbb{C}$, montrer que f est diagonalisable si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) = \ker((f - \lambda\,\mathrm{id})^2)$.

Exercice 144 [ENS 2026 PSI # 144] Soit $n \geq 2$.

1. Résoudre l'équation $AA^TA = I_n$ d'inconnue $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. a. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? b. Trouver une solution non diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Plus généralement, donner une infinité de solutions non diagonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 145 [ENS 2026 PSI # 145] Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = QQ^T$ et $B = QDQ^T$. Montrer que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs.
2. Montrer que $\det(A + B) \geq \det A + \det B$.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. En déduire une inégalité générale valable sur $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Exercice 146 [ENS 2026 PSI # 146] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0, 1\}$ et de trace nulle. Soient $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U \in \mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note $A^2 = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$A^2 + A - (d-1)I_n = J.$$

1. a. Déterminer $\mathrm{Sp}(J)$ et les dimensions des sous-espaces propres de J. b. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_{i,i}$ est égal au nombre de coefficients égaux à 1 dans la colonne (ou la ligne) numéro i de A. c. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = 0$, puis que $b_{i,i} - (d-1) = 1$.
2. Posons $P(X) = X^2 + X - (d-1)$. a. Montrer que si λ est une valeur propre associée à A, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre associée à J. b. Montrer que $n = d^2 + 1$. c. Montrer que $E_J(n) = E_A(d)$.

3. Soient $a > b$ les racines de P, Δ le discriminant de P, $F_a = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = aX\}$, $F_b = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = bX\}$, $\alpha = \dim(F_a)$ et $\beta = \dim(F_b)$. a. Expliciter a et b. Peut-on avoir $\alpha\beta = 0$? b. Montrer que $1 + \alpha + \beta = n$, $d + \alpha a + \beta b = 0$ et $\sqrt{\Delta}(\alpha - \beta) = d^2 - 2d$. c. Montrer que d appartient à un ensemble fini que l'on déterminera. On pourra raisonner sur la condition $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{N}$.

Exercice 147 [ENS 2026 PSI # 147]

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\det((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}) > 0$.
2. On cherche désormais à démontrer la réciproque. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, que l'on écrit par blocs
$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & V \\ V^T & \alpha \end{pmatrix},$$
avec $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$. On suppose que tous les mineurs principaux dominants vérifient $\det((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}) > 0$. a. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$
avec $\beta > 0$. b. Conclure.
3. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice tridiagonale
$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
appartient-elle à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?

Exercice 148 [ENS 2026 PSI # 148] Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$.
2. En déduire que AB est diagonalisable.
3. On suppose de plus que A est positive. Montrer que $\mathrm{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}_+$.
4. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(AB)$. Montrer que
$$\min_{\substack{\alpha \in \mathrm{Sp}(A) \\ \beta \in \mathrm{Sp}(B)}} \alpha\beta \leq \lambda \leq \max_{\substack{\alpha \in \mathrm{Sp}(A) \\ \beta \in \mathrm{Sp}(B)}} \alpha\beta.$$

Exercice 149 [ENS 2026 PSI # 149] Soit $n \geq 2$. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AA^T a n valeurs propres positives notées $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Déterminer
$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_2 = 1}} \|A^T x\|_2.$$
3. On note E_r l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang au plus r. Montrer que tout élément de E_1 peut s'écrire sous la forme xy^T, où $x, y \in \mathbb{R}^n$.
4. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $M \in E_1$,
$$\|A - M\|_2 \geq \left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i \right)^{1/2}.$$
Cette minoration est-elle optimale ?

Exercice 150 [ENS 2026 PSI # 150]

1. Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A^T A) = \mathrm{Tr}(A^2)$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Justifier les inégalités
$$\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(A^{-1}) \geq n^2, \qquad \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(A^{-1}) \geq 2n.$$
Discuter les cas d'égalité.

Exercice 151 [ENS 2026 PSI # 151] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Soient $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle u(x), x \rangle \leq \langle v(x), x \rangle.$$
1. Soit $f : S \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in S$ en lequel la borne inférieure de f est atteinte.

2. Justifier que u et v possèdent n valeurs propres $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ et $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$. On note G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u, avec $u(f_k) = \lambda_k f_k$. On veut montrer que
$$\lambda_k = \sup_{V \in G_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle u(x), x \rangle.$$
a. Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $V \in G_k$. Montrer que $V \cap \mathrm{Vect}(f_k, \ldots, f_n) \neq \{0\}$. b. Montrer que le supremum précédent est inférieur ou égal à λ_k. c. En déduire l'égalité.
3. Montrer que $\lambda_i \leq \mu_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2) Analyse

Exercice 152 [ENS 2026 PSI # 152] 1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $r \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que l'ensemble A_r des matrices de rang supérieur ou égal à r est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A_r soit dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 153 [ENS 2026 PSI # 153] Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{L}(E)$. Lorsque cette définition a un sens, on pose
$$\|f\|_L = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|f(x)\|.$$
1. Si E est de dimension finie, montrer que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f est continue et $\|f\|_L$ existe.
2. Si E est de dimension infinie, montrer que la continuité de f équivaut à l'existence de $\|f\|_L$.
3. Montrer que, pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$ continues,
$$\|f + g\|_L \leq \|f\|_L + \|g\|_L, \qquad \|fg\|_L \leq \|f\|_L \|g\|_L.$$
4. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ continues telles que $fg - gf = \mathrm{id}$. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $fg^n - g^n f$. Montrer qu'un tel couple n'existe pas.
5. On prend $E = \mathbb{R}[X]$. Donner une condition nécessaire pour que $D : P \mapsto P'$ soit continue.

Exercice 154 [ENS 2026 PSI # 154] 1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum z^n/n!$.
2. a. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale. Montrer que la suite
$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$
converge. On note sa limite $\exp(D)$. b. Même question pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. Montrer que A et B commutent si et seulement si $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent.
4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. Montrer que $\exp(A) = \exp(B)$ si et seulement si $A = B$.

Exercice 155 [ENS 2026 PSI # 155] 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence de $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $|z| \neq 1$.
2. Soit $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$. Étudier la convergence de $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $z = e^{i\theta}$.
3. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x_0, \ldots, x_N \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $i, j \in [\![0, N]\!]$ tels que $i \neq j$ et $|x_i - x_j| \leq 1/N$.
4. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On pose $\delta(\alpha) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha - n|$. Justifier l'existence de δ. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\delta(k\alpha - \beta) < \varepsilon$.

Exercice 156 [ENS 2026 PSI # 156] Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs.
1. Déterminer un équivalent simple de $\frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln n}$.
2. A-t-on $(u_n + u_{n+1}) \sim_{n \to +\infty} 2/n \Rightarrow u_n \sim_{n \to +\infty} 1/n$?
3. A-t-on $(u_n + u_{n+2}) \sim_{n \to +\infty} 2/n \Rightarrow u_n \sim_{n \to +\infty} 1/n$?
4. A-t-on $(u_n + u_{2n}) \sim_{n \to +\infty} 3/(2n) \Rightarrow u_n \sim_{n \to +\infty} 1/n$?
5. Reprendre les questions précédentes en supposant (u_n) décroissante.

Exercice 157 [ENS 2026 PSI # 157] Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On considère les suites $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n + a}{n + b}.$$
1. a. Démontrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $u_n \sim K/n^{b-a}$. b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum u_n$ converge.
On suppose désormais cette condition vérifiée.
2. a. Montrer que (nu_n) converge et déterminer sa limite. b. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 158 [ENS 2026 PSI # 158] 1. Montrer qu'une série numérique complexe absolument convergente est convergente.
2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

a. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq 1/n^\alpha$. En déduire que (u_n) converge. b. On suppose $\alpha \leq 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2}{n^\alpha} \leq u_{n+1}^2 - u_n^2 \leq \frac{2}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

En déduire que (u_n) diverge et en donner un équivalent.

3. On suppose $\alpha > 1$. On note f la fonction qui à α associe la limite de la suite (u_n) correspondante. Montrer que f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et ne se prolonge pas par continuité en 1.

Exercice 159 [ENS 2026 PSI # 159] 1. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$. La fonction $F_1 : x \mapsto \cos(x) + \cos(\alpha x)$ est-elle périodique ?

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La fonction $F_1 : x \mapsto \cos(x) + \cos(\alpha x)$ est-elle périodique ?
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La fonction $F_2 : x \mapsto \sin(x) + \sin(\alpha x)$ est-elle périodique ?

Exercice 160 [ENS 2026 PSI # 160] 1. Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et convexe. a. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction affine a telle que $\psi \geq a$ et $\psi(t_0) = a(t_0)$. b. Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ positive et telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = 1$. Montrer que

$$\psi\left(\int_0^1 t f(t)\,dt\right) \leq \int_0^1 f(t)\psi(t)\,dt.$$

2. Soient I un intervalle contenant 0 et $g \in C^2(I, \mathbb{R})$ telle que g'' soit convexe. On pose

$$G : x \longmapsto 2\int_0^1 (1-t)g''(tx)\,dt.$$

a. Montrer que, pour tout $x \in I$, $\frac{x^2}{2}G(x) = g(x) - g(0) - xg'(0)$. b. Montrer que, pour tout $x \in I$, $G(x) \geq g''(x/3)$.

Exercice 161 [ENS 2026 PSI # 161] Soit $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Montrer que g est bien définie et étudier sa continuité.
2. Soit $x > 0$. On pose

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\longmapsto \frac{1}{(2t-1)^x} - \frac{1}{(2t)^x}, \qquad u : t \in [1, +\infty[\longmapsto \lfloor t \rfloor + 1 - t.$$

Montrer que

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\,dt - \int_1^{+\infty} u(t)\varphi_x'(t)\,dt.$$

3. La fonction g admet-elle une limite en 0^+ ?

Exercice 162 [ENS 2026 PSI # 162] Soit

$$J : \lambda \longmapsto \int_0^1 \frac{t^\lambda}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de J.
2. Montrer que J est dérivable en 0.
3. Calculer $J'(0)$, puis en déduire un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction J.

Exercice 163 [ENS 2026 PSI # 163] 1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) \leq e^{-x}f(x)$ pour tout $x \geq 0$. Montrer que $f(x) \leq e$ pour tout $x \geq 0$. Indication : considérer $g(x) = f'(x) - e^{-x}f(x)$.

2. Justifier l'existence et l'unicité de la solution du problème

$$y''(x) = (1 + e^{-x})y(x), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$y(x) = e^x + \frac{e^x}{2}\int_0^x e^{-2t}y(t)\,dt - \frac{e^{-x}}{2}\int_0^x y(t)\,dt.$$

3. On pose $z(x) = e^{-x}|y(x)|$. Montrer que

$$z(x) \leq 1 + \int_0^x z(t)e^{-t}\,dt \quad (x \geq 0).$$

En déduire que $y(x) = O(e^x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 164 [ENS 2026 PSI # 164] Soient $N, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon > 0$ petit devant N. Soit $(x, y, z) \in C^1(\mathbb{R}_+, (\mathbb{R}_+^*)^3)$ solution de

$$x' = -\alpha\frac{xy}{N}, \qquad y' = \alpha\frac{xy}{N} - \beta y, \qquad z' = \beta y,$$

avec $(x, y, z)(0) = (N - \varepsilon, \varepsilon, 0)$.

1. Montrer que (x, y, z) possède une limite en $+\infty$, notée (x^*, y^*, z^*).

2. Trouver une relation entre x^* et y^*.
3. Montrer que
$$x^* = (N-\varepsilon)\exp\left(\frac{\alpha(x^*-N)}{N\beta}\right).$$
On pose $\rho = \alpha/\beta$.
4. Que dire de x^* quand $\rho < 1$?
5. Lorsque $\rho > 1$, montrer que l'équation
$$x = N\exp\left(\frac{\rho(x-N)}{N}\right)$$
possède une unique solution $x(\rho)$ dans $]0, N[$ et que celle-ci est décroissante en ρ.

Exercice 165 [ENS 2026 PSI # 165] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 telle que, pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$, où k est un entier positif. On suppose également que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$
1. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = kf(x,y),$$
puis que
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = k(k-1)f(x,y).$$
2. Soit $h : \theta \in \mathbb{R} \mapsto f(\cos\theta, \sin\theta)$. Montrer que $h''(\theta) + k^2 h(\theta) = 0$.
3. Montrer que f est un polynôme à coefficients réels, c'est-à-dire qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et des réels $a_{i,j}$ tels que
$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} a_{i,j}x^i y^j.$$

3) Probabilités

Exercice 166 [ENS 2026 PSI # 166] On dit qu'une famille $(A_i)_{1\le i\le p}$ de parties d'un ensemble est une p-antichaîne lorsque, pour tous $i \neq j$, $A_i \not\subset A_j$.

1. a. Donner les variations de $k \in \{1,\dots,n\} \mapsto \binom{n}{k}$. b. Soit $k \in \{1,\dots,n\}$, et soit E_k l'ensemble des parties de $\{1,\dots,n\}$ à k éléments. Montrer que E_k est une p-antichaîne, pour un entier p à préciser. c. Déterminer $\max_{1\le k\le n}\mathrm{Card}(E_k)$.
On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$, muni de la loi uniforme. On considère une p-antichaîne $(A_i)_{1\le i\le p}$ formée de parties de $\{1,\dots,n\}$. Pour tout i, on note $a_i = \mathrm{Card}(A_i)$ et $E_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(\{1,\dots,a_i\}) = A_i\}$.
2. a. Montrer que les événements E_i sont incompatibles et déterminer leur probabilité. b. Donner une majoration de p.
3. On note $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de réels supérieurs ou égaux à 1. On munit $\Omega_n = \{-1,1\}^n$ de la loi uniforme. On note X la variable aléatoire définie par $X((\omega_i)_{1\le i\le n}) = \sum_{k=1}^n \omega_k x_k$. Trouver une majoration de $\mathbb{P}(0 < X < 2)$.

Exercice 167 [ENS 2026 PSI # 167] Soient $\alpha, \beta \in]0,1[$. Soit $f : x \mapsto (1-\alpha)e^{-\beta x} + \alpha e^{(1-\beta)x}$.

1. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de ce minimum.
2. Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$. Montrer que, pour tout $t > 0$,
$$\mathbb{P}(X \ge n(p+\varepsilon)) \le \left(\frac{1-p+pe^t}{e^{t(p+\varepsilon)}}\right)^n.$$
3. On suppose $0 < \varepsilon < 1-p$. En utilisant f, montrer que
$$\mathbb{P}(X \ge n(p+\varepsilon)) \le \left[\left(\frac{p+\varepsilon}{p}\right)^{p+\varepsilon}\left(\frac{1-p-\varepsilon}{1-p}\right)^{1-p-\varepsilon}\right]^{-n}.$$
4. Soit
$$H : \theta \in [0, 1-p[\longmapsto (p+\theta)\ln\left(\frac{p+\theta}{p}\right) + (1-p-\theta)\ln\left(\frac{1-p-\theta}{1-p}\right).$$
Montrer que $H(\theta) \ge 2\theta^2$. En déduire que $\mathbb{P}(X \ge n(p+\varepsilon)) \le e^{-2n\varepsilon^2}$. Donner une majoration de cette probabilité par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et comparer les deux majorations.

Exercice 168 [ENS 2026 PSI # 168] 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{b_1+\cdots+b_n}.$$

2. Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires défini sur Ω avec $Y > 0$. Montrer que
$$\mathbf{E}\left(\frac{X^2}{Y}\right) \geq \frac{\mathbf{E}(|X|)^2}{\mathbf{E}(Y)} \geq \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(Y)}.$$

Exercice 169 [ENS 2026 PSI # 169] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de série génératrice G. On suppose que le rayon de convergence R de G est supérieur à 1. On suppose qu'il existe $H \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que
$$G(x)G(y) = H(x^2 + y^2)$$
pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\max(|x|, |y|) < R$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = 2k + 1) = 0$.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par G, dont on exprimera les coefficients en fonction de $\alpha = \mathbf{E}(X)$.
3. En déduire une expression de G et de la variance de X.

III) ENS PC **AUTRE**

1) Algèbre

Exercice 170 [ENS 2026 PC # 170] Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$P_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{X^k}{k!}.$$

1. Montrer que P_N admet N racines complexes distinctes.
2. Montrer que, si N est pair, P_N n'a pas de racine réelle. Montrer que, si N est impair et supérieur ou égal à 3, P_N admet une unique racine réelle α_N et que $-N < \alpha_N < -1$.
3. Tracer le graphe de P_N selon la parité de N. Donner la monotonie de la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 171 [ENS 2026 PC # 171] Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme de degré $n \geq 1$, avec $a_i \in [\![0, 9]\!]$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. On suppose que P a une racine λ vérifiant $\mathrm{Re}(\lambda) > 1$.

1. Montrer que
$$|\lambda|^n \leq |\lambda^n a_n + \lambda^{n-1} a_{n-1}| \leq 9\frac{|\lambda|^{n-1} - 1}{|\lambda| - 1}.$$
2. Montrer que $\mathrm{Re}(\lambda) < 4$.

Exercice 172 [ENS 2026 PC # 172] On dit qu'un nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ est algébrique lorsqu'il existe $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1. Si $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sqrt{k}$ est algébrique.
2. Soit (u_n) une suite d'entiers positifs. On définit (v_n) par $v_0 = u_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_{n+1} = u_{n+1} + \sqrt{v_n}.$$
Montrer que les termes de la suite (v_n) sont tous algébriques.
3. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 173 [ENS 2026 PC # 173] Soient $x_0 < \cdots < x_n$ des réels et, pour $k \in [\![0, n]\!]$, posons
$$L_k(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}.$$

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k(X).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter une constante C_n telle que, pour tout $[a, b] \subset]0, 1[$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$\sup_{x\in[0,1]} |P(x)| \leq \frac{C_n}{(b-a)^n} \sup_{x\in[a,b]} |P(x)|.$$

Exercice 174 [ENS 2026 PC # 174] On considère $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$, avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\det \varphi$ et $\mathrm{Tr}\, \varphi$.

Exercice 175 [ENS 2026 PC # 175] Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Montrer que $I_n + AB$ est inversible si et seulement si $I_p + BA$ l'est.

Exercice 176 [ENS 2026 PC # 176] Pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}_+)$, on note $\mathrm{rg}_+(A)$ le plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+)$ et $C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R}_+)$ tels que $A = BC$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}_+(A)$ existe et que $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}_+(A) \leq \min(n, m)$.

2. On suppose $\mathrm{rg}(A) = 1$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}_+(A)$.

Exercice 177 [ENS 2026 PC # 177] 1. Donner un exemple de sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ne contenant que des matrices non inversibles.

On souhaite montrer par récurrence que $n(n-1)$ est la dimension maximale d'un tel sous-espace vectoriel F.

2. Démontrer le résultat pour $n = 1$ et $n = 2$.
3. On suppose $\dim F > n(n-1)$. Montrer qu'il existe $A \in F \setminus \{0\}$ dont les colonnes numérotées de 2 à n sont nulles, puis qu'il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $PAQ = E_{1,1}$.
4. Montrer que $F' = \{PMQ \mid M \in F\}$ ne contient pas de matrice inversible.
5. On pose
$$g : F' \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}), \quad M = (m_{i,j}) \mapsto (m_{i+1,j+1})_{1 \leq i,j \leq n-1}.$$
Montrer que $g(F')$ ne contient pas de matrice inversible. Conclure.

Exercice 178 [ENS 2026 PC # 178] Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel
$$\left\{ M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R},\ \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{p} m_{k,j} = a = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} \right\}.$$

Exercice 179 [ENS 2026 PC # 179] Soient $A = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $b_{1,n} = 1$, $b_{i,i-1} = 1$ pour $2 \leq i \leq n$, les autres coefficients étant nuls. Montrer que
$$\mathrm{Vect}\{B^k A^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{N}\} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
Indication : commencer par déterminer $\mathrm{Vect}(A^k \mid k \in \mathbb{N})$.

Exercice 180 [ENS 2026 PC # 180] Caractériser les matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} soient à coefficients positifs.

Exercice 181 [ENS 2026 PC # 181] On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $X : f \in E \mapsto (t \mapsto tf(t))$ et $P : f \in E \mapsto f'$.

1. Montrer que X et P sont des endomorphismes de E. Déterminer leur noyau et leur image.
2. On pose $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + P)$ et $a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - P)$. Déterminer leur noyau et leur image.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$F_n = \{t \mapsto Q(t)e^{-t^2/2} \mid Q \in \mathbb{R}_n[X]\}.$$
Montrer que a et $N = aa^*$ induisent des endomorphismes de F_n.

Exercice 182 [ENS 2026 PC # 182] Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $d \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $\dim \mathbb{C}[N]$, où $\mathbb{C}[N] = \{P(N) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}$.
2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(NQ(N)) = N$.

Exercice 183 [ENS 2026 PC # 183] Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & 0 \\ & & \ddots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Exercice 184 [ENS 2026 PC # 184] 1. Montrer qu'une matrice de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit sous la forme XY^T, avec $X, Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

2. Déterminer $\mathrm{Sp}(XY^T)$ pour $(X, Y) \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que XY^T soit diagonalisable.
3. Calculer $\det(I_n + XY^T)$.

Exercice 185 [ENS 2026 PC # 185] 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et B sont diagonalisables et commutent. Montrer que $A + \lambda B$ est diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

2. On suppose $n = 2$. Montrer que si, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda A + \mu B$ est diagonalisable, alors A et B sont codiagonalisables.

Exercice 186 [ENS 2026 PC # 186] Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 187 [ENS 2026 PC # 187] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 188 [ENS 2026 PC # 188] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Étudier les implications entre les deux propositions : (i) A est semblable à B ; (ii) A et B ont même spectre.
2. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $MA = BM$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $MP(A) = P(B)M$. En déduire que A et B ont une valeur propre commune.
3. Étudier la réciproque de la question 2.

Exercice 189 [ENS 2026 PC # 189] 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples et de degré n, et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que, pour tout ε assez petit, $P + \varepsilon Q$ est scindé à racines simples.

2. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, à valeurs propres toutes distinctes. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout réel ε avec $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $D + \varepsilon A$ est diagonalisable.

Exercice 190 [ENS 2026 PC # 190] Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Un drapeau de E est une famille $(E_0, \dots, E_k)$ de sous-espaces vectoriels telle que $\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_k$. Le drapeau est total si $k = n$.

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Exhiber un drapeau total de E. Réciproque ?
2. Soit $(E_0, \dots, E_n)$ un drapeau total de E. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que $E_i = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que le drapeau $(E_0, \dots, E_k)$ est stable par u si $u(E_i) \subset E_i$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. Montrer que si u est diagonalisable, il existe un drapeau total stable par u. A-t-on unicité d'un tel drapeau ?
4. Montrer que u est trigonalisable si et seulement s'il existe un drapeau total stable par u.
5. On suppose u nilpotent d'indice n. Exhiber un drapeau total stable par u. A-t-on unicité d'un tel drapeau ?

Exercice 191 [ENS 2026 PC # 191] Caractériser les matrices qui s'écrivent comme somme de projecteurs orthogonaux.

Exercice 192 [ENS 2026 PC # 192] Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^T = M^2 - I_n$.

Exercice 193 [ENS 2026 PC # 193] Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant chacune des équations suivantes :

1. $A^T A A^T A^2 = I_n$;
2. $A^T A A^T A = I_n$;
3. $A^T A^T A A = I_n$.

2) Analyse

Exercice 194 [ENS 2026 PC # 194] On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique.

1. Soient C une partie convexe, fermée et non vide de $\mathbb{R}^n$, et $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - y\|$.
2. Déterminer les parties convexes fermées de $\mathbb{R}^n$ dont le complémentaire est également convexe.

Exercice 195 [ENS L 2026 # 195] Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$. Montrer que $u_n \to 0$. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 196 [ENS L 2026 # 196] Soit $a \in]0, 1[$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}\left(x_n + \frac{a}{2x_n^2}\right).$$

Montrer que (x_n) converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$, puis déterminer un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 197 [ENS 2026 PC # 197] Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ et $f''(0) \neq 0$. On définit la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ par $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{\Delta_n}, \qquad \Delta_n = \frac{f(a_n) - f(a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}}.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $a_0, a_1 \in]0, \varepsilon[$, alors $a_n \to 0$.

Exercice 198 [ENS 2026 PC # 198] Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a_n) pour que, pour toute suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ convergeant vers ℓ, on ait

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^n a_k u_k = \ell.$$

Exercice 199 [ENS 2026 PC # 199]

1. Montrer que e est irrationnel.
2. Pour tout $x \in [0, 1]$, montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 2}$ telle que

$$x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_n}{n!}, \qquad x_n \in [\![0, n-1]\!] \text{ pour tout } n \geq 2.$$

Exercice 200 [ENS 2026 PC # 200] Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positives telle que $\sum u_n$ diverge. Montrer qu'il existe une suite (w_n) à valeurs strictement positives telle que $w_n = o(u_n)$ et $\sum w_n$ diverge.

Exercice 201 [ENS 2026 PC # 201] Déterminer un équivalent de

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \qquad \alpha > 1.$$

Exercice 202 [ENS 2026 PC # 202] Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) = 0$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $y \in \mathbb{R}_+$ tel que $f^{(k)}(y) = 0$.

Exercice 203 [ENS 2026 PC # 203] Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}.$$

Exercice 204 [ENS 2026 PC # 204] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Pour $a < b$, on pose

$$T_{[a,b]}(f) = \{c \in [a,b] \mid f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)\}.$$

1. Montrer que $T_{[a,b]}(f)$ n'est pas vide.
2. Caractériser les fonctions telles que $T_{[a,b]}(f)$ soit un singleton pour tous $a < b$.
   On suppose désormais que f est de classe C^2 et vérifie la propriété de la question 2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f''(x) \neq 0$. Pour $h > 0$, on note θ_h l'unique réel de $[0,h]$ tel que
   $$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta_h).$$
3. Trouver un équivalent de θ_h lorsque $h \to 0^+$.
4. Proposer un contre-exemple si $f''(x) = 0$.

Exercice 205 [ENS 2026 PC # 205] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et d'intégrale nulle. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\left| \int_0^x f(s)\, ds \right| \leq \frac{1}{8} \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|.$$

Exercice 206 [ENS 2026 PC # 206] Soient $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\int_a^b t^k f(t)\, dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]a,b[$.

Exercice 207 [ENS 2026 PC # 207] Soient $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ et

$$f(x) = \int_0^x \frac{\prod_{k=1}^N \cos(a_k r)}{1+r}\, dr.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f possède une limite finie en $+\infty$.

Exercice 208 [ENS 2026 PC # 208]

1. Soient $r > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
   $$r^N - 1 = \prod_{k=0}^{N-1} (r - e^{2ik\pi/N}).$$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que
   $$\int_0^1 \ln |e^{2\pi i t} - \alpha|\, dt = \ln(\max(1, |\alpha|)).$$
3. Soit $P(X) = \lambda \prod_{k=0}^{N-1} (X - z_k) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $|z_k| \neq 1$. Exprimer
   $$m(P) = \int_0^1 \ln |P(e^{2\pi i t})|\, dt$$
   en fonction des z_k et de λ.
4. On pose $M(P) = \exp(m(P))$ et $L(P) = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|$. Montrer qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$, indépendantes de P mais éventuellement dépendantes de N, telles que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré N,
   $$C_2 M(P) \leq L(P) \leq C_1 M(P).$$

Exercice 209 [ENS 2026 PC # 209] Soient $X_1, \ldots, X_n$ des points distincts du plan euclidien. Pour $t > 0$, on considère

$$L_X(t) = \sup_{A \in \mathbb{R}^2} \mathrm{Card}(\{X_1, \ldots, X_n\} \cap B_f(A,t)).$$

1. Montrer que $L_X(t)$ est définie et que la borne supérieure est atteinte.
2. Montrer que L_X est croissante et déterminer ses limites en 0 et en $+\infty$.
3. La fonction L_X prend-elle nécessairement toutes les valeurs de $\{1, \ldots, n\}$?
4. Pour d'autres points distincts $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathbb{R}^2$, montrer que
   $$\int_0^{+\infty} |L_X(t) - L_Y(t)|\, dt < +\infty.$$
5. On suppose qu'il existe $\delta \geq 0$ tel que $\|X_k - Y_k\| \leq \delta$ pour tout k. Montrer qu'il existe K, dépendant de n mais pas du choix des points, tel que, pour δ assez petit,
   $$\int_0^{+\infty} |L_X(t) - L_Y(t)|\, dt \leq K\delta.$$

Exercice 210 [ENS 2026 PC # 210] Soient $T > 0$, $K \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers f.

1. On suppose les f_n périodiques de période T. Montrer que f est T-périodique.
2. On suppose que, pour tout n, f_n est périodique de période $k(n)T$, où $k(n) \in \{1, \dots, K\}$. Montrer que f est périodique.
3. Donner un exemple où les f_n sont périodiques et f ne l'est pas. Indication : considérer

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \cos\left(\frac{2\pi x}{2^n}\right).$$

Exercice 211 [ENS 2026 PC # 211] On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \cos(32^n \pi x).$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f n'est dérivable en aucun point.

Exercice 212 [ENS 2026 PC # 212] Soient $\varepsilon > 0$, $\alpha \in [0, 1[$ et $\beta > 0$. Déterminer un équivalent, lorsque $\varepsilon \to 0^+$, de

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha (x+\varepsilon)^\beta}.$$

Exercice 213 [ENS 2026 PC # 213] Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\, dt.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
3. L'application f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 214 [ENS 2026 PC # 214] Soient $r \in \mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{C}_r \to \mathbb{C}$, où $\mathbb{C}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. On pose

$$\int_{\mathbb{C}_r} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta}\, d\theta.$$

1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{C}_r} \frac{dz}{z-a}$ pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_r$.
2. On suppose f développable en série entière de rayon de convergence infini. Montrer que, pour tout $r > |a|$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} M^k/k!$ a un sens, puis montrer que, pour r assez grand,

$$\exp(M) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}_r} e^z (zI_n - M)^{-1}\, dz.$$

3) Probabilités

Exercice 215 [ENS 2026 PC # 215] Soit X une variable aléatoire réelle positive et $k \in \mathbb{N}^*$. A-t-on équivalence entre $\mathbf{E}(X^k) < +\infty$ et

$$\mathbf{P}(X \geq n) = o(n^{-k})?$$

Exercice 216 [ENS 2026 PC # 216] Soit $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont i.i.d. et suivent la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

1. Déterminer $\mathbf{E}(\mathrm{tr}(M^2))$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer $\mathbf{E}(\chi_M(t))$.
3. Quelle est la loi de $\mathrm{tr}(M^2)$?

Exercice 217 [ENS 2026 PC # 217] Soient $L > 0$, $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et X une variable aléatoire à valeurs dans $[-L, L]$ telle que $\mathbf{E}(X) = 0$. Montrer que

$$\mathbf{E}(f(X)) \leq \frac{f(L) + f(-L)}{2}.$$

IV) X MP/MPI

1) Probabilités

Exercice 218 [X 2026 # 218] Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = +\infty$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}}{\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_j)} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 219 [X 2026 # 219]

1. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Exprimer $\mathbf{E}((X-a)^2)$ en fonction de $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{E}(X)$ et de a.
2. Soit Y une variable aléatoire réelle telle que $\mathbf{E}(Y) = 1$ et qui admet un moment d'ordre 2. Pour $\theta \in [0,1]$, montrer que
$$\mathbf{P}(Y > \theta) \geq \frac{(1-\theta)^2}{\mathbf{V}(Y) + (1-\theta)^2}.$$
3. Caractériser le cas d'égalité.

Exercice 220 [X 2026 # 220] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k = \mathbf{P}(X = k)$. On définit, pour $\beta \in \mathbb{R}_+$,

$$z(\beta) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-\beta k}, \qquad u_k = \frac{p_k e^{-\beta k}}{z(\beta)}.$$

1. Calculer les u_k lorsque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
2. Montrer que $\beta \mapsto \ln(z(\beta))$ est convexe.
3. Soit X_β une variable aléatoire de loi (u_k). Montrer que $\beta \mapsto \mathbf{E}(X_\beta)$ est décroissante.
4. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, on note m_β la médiane définie par
$$m_\beta = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \mathbf{P}(X_\beta > k) \leq 1/2\}.$$
Montrer que $\beta \mapsto m_\beta$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 221 [X 2026 # 221] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = ((M_n)_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique aléatoire dont les coefficients $(M_n)_{i,j}$, pour $i \leq j$, sont i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On note $\lambda_1(M_n)$ sa plus grande valeur propre.

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,
$$\langle u, M_n u\rangle \leq \lambda_1(M_n)\|u\|^2.$$
2. Déterminer le spectre et les vecteurs propres de la matrice $(\mathbf{E}((M_n)_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$.
3. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\lambda_1(M_n) \geq (\tfrac{1}{2} - \varepsilon)n\right) = 1.$$

Exercice 222 [X 2026 # 222]

1. Caractériser les projecteurs orthogonaux de rang 1.
2. Soient $p_1, \ldots, p_k$ des projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$. Soit $(N_r)_{r\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![1,k]\!]$. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et, pour tout $r \in \mathbb{N}$,
$$X_{r+1} = p_{N_r}(X_r).$$
Étudier la limite éventuelle de $(\mathbf{E}(\|X_n\|))_{n\geq 1}$.

Exercice 223 [X 2026 # 223] Soient $N \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On considère une grille $N \times N$ formée de petits carrés 1×1. Chaque carré est blanc ou noir, indépendamment, avec probabilité $1/2$.

1. Soit A_N l'événement « il existe au moins un carré blanc de taille $k \times k$ ». Montrer que
$$\mathbf{P}(A_N) \leq 2^{-k^2} N^2.$$
2. Déterminer $\mathbf{E}(Y_{k,N})$, où $Y_{k,N}$ est le nombre de carrés blancs de taille $k \times k$.
3. Montrer que
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{V}(Y_{k,N})}{\mathbf{E}(Y_{k,N})^2} = 0.$$
On pourra traiter séparément les cas $k = 1$ et $k = 2$.

2) Algèbre

Exercice 224 [X 2026 # 224] Soit $n \geq 3$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n-i)^{n-2} = n^{n-2}.$$

Exercice 225 [X 2026 # 225]

1. Pour $n \geq 1$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Montrer que si $n \geq 8$, alors $\pi(n) \leq n/2$.
2. Soient p premier et $n, k, \alpha \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq n$ et p^α divise $\binom{n}{k}$. Montrer que $p^\alpha \leq n$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 8$, il existe un nombre premier entre $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ et n.

Exercice 226 [X 2026 # 226] Résoudre l'équation $x^2 + x - 2 = 0$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, puis déterminer les entiers $n \geq 2$ tels que cette équation admette exactement une solution dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 227 [X 2026 # 227] Soit $n \geq 2$.

1. Soit σ une permutation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On suppose que $\sigma - \mathrm{id}$ est une bijection. Montrer que n est impair. Que peut-on dire si $\sigma + \mathrm{id}$ est aussi une bijection ?
2. On suppose n impair et on note D_n le groupe des isométries linéaires du plan $\mathbb{C}$ qui laissent invariant $\mathbb{U}_n$. Montrer qu'il n'existe pas de permutation f de D_n telle que $g \mapsto gf(g)$ soit aussi une permutation de D_n.
3. Montrer que $g \mapsto \det g$ est l'unique morphisme non trivial de D_n dans $\{\pm 1\}$.

Exercice 228 [X 2026 # 228] Déterminer le cardinal de l'ensemble

$$\left\{ (x_k)_{k\geq 0} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \geq 0,\ a_n^2 \equiv a_n \pmod{10^n}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k 10^k \right\}.$$

Exercice 229 [X 2026 # 229] Soient A un anneau fini et $a, b \in A$ tels que $ab^2 = b$. Montrer que $bab = b$.

Exercice 230 [X 2026 # 230] Soit A un anneau tel que, pour tout $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$x = \sum_{k=2}^{n} x^k.$$

1. Déterminer la caractéristique de A.
2. Montrer que, pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.

Exercice 231 [X 2026 # 231] Soit G un groupe fini. On suppose que, pour tout automorphisme f de G, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(x) = x^m$ pour tout $x \in G$.

1. Soient $a, b \in G$ tels que l'ordre de a divise celui de b. Montrer que $ab = ba$.
2. Écrire $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ et poser
$$G_i = \{x \in G \mid x^{p_i^{\alpha_i}} = e\}.$$
Montrer que G_i est un sous-groupe commutatif de G.
3. Pour $i \neq j$, montrer que $xy = yx$ pour tout $(x, y) \in G_i \times G_j$.
4. Montrer que G est commutatif.

Exercice 232 [X 2026 # 232] Soit G un groupe fini.

1. Soient g, h deux éléments d'ordres finis a, b qui commutent, avec a et b premiers entre eux. Montrer que gh est d'ordre fini et déterminer cet ordre.
2. Montrer que, dans un groupe quelconque, le produit de deux éléments d'ordre fini n'est pas nécessairement d'ordre fini.
3. Soit $g \in G$ d'ordre fini n, et soit $n = ab$ avec a, b premiers entre eux. Montrer que $g = hh'$ où h, h' commutent et sont d'ordres respectifs a, b.
4. Y a-t-il unicité du couple (h, h') ?

Exercice 233 [X 2026 # 233] Soit p un nombre premier et G un sous-groupe de S_p transitif sur $[\![1, p]\!]$. On admet que tout groupe fini dont l'ordre est divisible par p contient un élément d'ordre p. On note $\mathrm{Aff}(_p)$ le groupe des permutations de $_p$ de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $a \in _p^*$ et $b \in _p$. Montrer l'équivalence des conditions :

1. Il existe deux éléments distincts $x, y \in [\![1, p]\!]$ tels que le seul élément de G fixant x et y soit l'identité.
2. $|G| < p^2$.
3. G possède un unique sous-groupe d'ordre p.
4. Il existe une bijection $\theta : [\![1, p]\!] \to _p$ et un sous-groupe H de $\mathrm{Aff}(_p)$ tels que $\{\theta \circ g \circ \theta^{-1} \mid g \in G\} = H$.

Exercice 234 [X 2026 # 234] Soit G un groupe fini. On suppose qu'il existe $a \in G \setminus \{e\}$ et un nombre premier p tels que, pour tout $x \in G$,

$$a^{-1}xa = x^{p+1}.$$

1. Montrer que $(xy)^p = y^p x^p$ pour tous $x, y \in G$, puis en déduire que $ay^p = y^p a$ pour tout $y \in G$.
2. On admet que si un nombre premier q divise $|G|$, alors G possède un élément d'ordre q. Montrer que $|G|$ est une puissance de p.
3. Soient $f : x \mapsto x^p$ et $H = \{x \in G \mid x^p = e\}$. Montrer que $|f(G)| = |G|/|H|$.
4. Montrer que $|G| < |H|^2$.

Exercice 235 [X 2026 # 235] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On écrit $P = A + iB$, avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que les racines de P sont dans le demi-plan $\mathrm{Im}(z) > 0$. Montrer que A et B sont scindés sur $\mathbb{R}$.

Exercice 236 [X 2026 # 236] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2n-1$ tel que, pour tout $\theta \in]0, \pi[$,
$$\frac{\sin(4n\theta)}{\cos\theta \sin\theta} = P(\cos^2\theta).$$
2. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$.
3. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)$.

Exercice 237 [X 2026 # 237] Pour $\sigma \in S_n$, on note
$$\mathrm{Inv}(\sigma) = \mathrm{Card}\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i<j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$
Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = \sum_{i=0}^{k} X^i$.
1. Montrer que
$$\sum_{\sigma \in S_n} X^{\mathrm{Inv}(\sigma)} = \prod_{k=1}^{n-1} P_k.$$
2. Soient p premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$. Simplifier $P_{p-1}(e^{2ik\pi/p})$.
3. Exprimer le cardinal de $\{\sigma \in S_n \mid (n+1) \mid \mathrm{Inv}(\sigma)\}$.

Exercice 238 [X 2026 # 238] Soit $L \geq 3$ et $f \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $d>0$, de coefficient constant -1 et de coefficient dominant $a_d > 0$. Montrer que l'ensemble
$$\{p \in \mathbb{P} \mid p \not\equiv 1\ [L],\ \exists m \in \mathbb{Z},\ f(m) \equiv 0\ [p]\}$$
est infini.

Exercice 239 [X 2026 # 239] Soient $a \geq 3$ et $P = X^2 + X + a$. On suppose que, pour tout $n \in [\![0, a-2]\!]$, $P(n)$ est premier. Soit $k \in [\![0, a-2]\!]$.
1. Montrer que si $k+1$ est un carré, alors $P(a+k)$ n'est pas premier.
2. Réciproquement, on suppose que $P(a+k)$ n'est pas premier. a. Montrer que son plus petit facteur premier p vérifie $p \geq a$. b. Montrer que $P(a+k-p) = p$. c. Conclure.

Exercice 240 [X 2026 # 240] Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_0, x_1 > 0$ et
$$x_{n+1}x_{n-1} = 1 + x_n^2 \qquad (n \geq 1).$$
1. Montrer que (x_n) ne peut pas être périodique.
2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ tels que $x_n \sim \alpha\beta^n$.
3. On pose $Q_0 = i$, $Q_1 = iX$ et, pour tout $n \geq 1$, $Q_{n+1}Q_{n-1} = 1 + Q_n^2$. Montrer que, pour tout n, $Q_n \in i\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 241 [X 2026 # 241]
1. Montrer l'existence et l'unicité d'une famille de polynômes de $\mathbb{Q}[q]$, notés $\binom{n}{k}_q$, vérifiant
$$\binom{n}{0}_q = \binom{n}{n}_q = 1, \qquad \binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q = q^k\binom{n-1}{k}_q + \binom{n-1}{k-1}_q.$$
On pourra les exprimer en fonction des $\binom{n}{1}_q$, notés $[n]_q$.
2. Montrer que
$$(X+Y)(X+qY)\cdots(X+q^{n-1}Y) = \sum_{k=0}^{n} q^{k(k-1)/2}\binom{n}{k}_q X^{n-k}Y^k.$$

Exercice 242 [X 2026 # 242] [MPI] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $d \geq 1$, de racines complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, toutes de module au plus 1. On pose $f_n = \lambda_1^n + \cdots + \lambda_d^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que $f_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n, puis qu'il existe $p \geq 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $f_{n+p} = f_n$ pour tout $n \geq n_0$.
2. En déduire que, pour tout $k \in [\![1,d]\!]$, $\lambda_k = 0$ ou $|\lambda_k| = 1$.

Exercice 243 [X 2026 # 243] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
$$\det(M^{2024} - I_2) = \det(M^{2024} + I_2), \qquad \det(M^{2026} - I_2) = \det(M^{2026} + I_2).$$
Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$\det(M^n - I_2) = \det(M^n + I_2).$$

Exercice 244 [X 2026 # 244] Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $(A-B)^2 = 0$.
1. Montrer que $\det(A^2 - B^2) = (\det A - \det B)^2$.
2. Montrer que $\det(AB - BA) = 0$ si et seulement si $\det A = \det B$.

Exercice 245 [X 2026 # 245] Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\det(A + A^{-1}) + \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Montrer que $\det(A + A^{-1}) = (\operatorname{Tr} A)^2$.

Exercice 246 [X 2026 # 246] Soient $A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tels que $AB = BA$ et $\det(A^2 - AB + B^2) = 0$. Montrer que

$$\det(A + B) + 3\det(A - B) = 6(\det A + \det B).$$

Exercice 247 [X 2026 # 247] Soient $n \geq 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et p un nombre premier. Montrer que

$$\operatorname{Tr}((A + B)^p) \equiv \operatorname{Tr}(A^p) + \operatorname{Tr}(B^p) \pmod{p}.$$

Exercice 248 [X 2026 # 248] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on note $\varphi(A)$ le pgcd de ses coefficients.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Trouver une relation entre $\varphi(AB)$ et $\varphi(A)\varphi(B)$.
2. Montrer que $\varphi(AB)$ divise $\det(A)\varphi(B)$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $A^2 - \alpha A + I_n = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(A^k - I_n) \to_{k\to+\infty} +\infty$.

Exercice 249 [X 2026 # 249]

1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})$ ne peut pas être engendré par un nombre fini d'éléments.
2. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que (S, T) engendre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, où

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 250 [X 2026 # 250] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 + B^2 = 2AB$.

1. Montrer que $AB - BA$ n'est pas inversible.
2. On suppose $\operatorname{rg}(A - B) = 1$. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 251 [X 2026 # 251] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$ si et seulement s'il existe $P, Q, R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $AP + QB = ARB$.

Exercice 252 [X 2026 # 252]

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rg}(M^2) \neq \operatorname{rg}(M)$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AM = MA = A^2 = 0$: a. dans le cas $n = 2$; b. dans le cas où M est nilpotente ; c. dans le cas général.
2. Le résultat subsiste-t-il pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(M) \neq \operatorname{rg}(M^2)$?

Exercice 253 [X 2026 # 253] Pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$.

1. Soient $X, Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $[X, [Y, Z]^2] = 0$.
2. A-t-on nécessairement $[X, [Y, Z]] = 0$?
3. Expliciter le sous-espace vectoriel engendré par $\{[X, [Y, Z]] \mid X, Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$.

Exercice 254 [X 2026 # 254] Soient $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $E = \{A_1, \ldots, A_p\} \subset \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ tel que $AB \in E$ pour tous $A, B \in E$. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) \in \{0, 1, -1\}^p \setminus \{0\}$ tel que $\operatorname{rg}(\sum_{i=1}^p \varepsilon_i A_i) \leq n$. On suppose le contraire.

1. Pour $A \in E$, montrer que $M \mapsto AM$ est injective sur E.
2. Pour $A \in E$, montrer que $\operatorname{rg}(A - I_{2n}) \leq n$. Indication : considérer $S = \sum_{i=1}^p A_i$.
3. Conclure.

Exercice 255 [X 2026 # 255] Soit $n \geq 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on pose

$$J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad G = \{M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \mid M^T J M = J\}.$$

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$, stable par transposition.
2. Posons $H = \{(X, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid z^2 - \|X\|^2 = 1\}$ et $a_0 = (0_{\mathbb{R}^n}, 1)$. Montrer que, pour tout $a \in H$, il existe $g \in G$ tel que $ga_0 = a$.
3. Soit $g \in G$, écrit par blocs $g = \begin{pmatrix} M & X \\ Y^T & z \end{pmatrix}$. Montrer que $z \geq 1$. On note $L(g)$ l'unique réel positif tel que $\cosh(L(g)) = z$. Caractériser les g tels que $L(g) = 0$.
4. Montrer que, pour tous $g, h \in G$, $L(g) = L(g^{-1})$ et $L(gh) \leq L(g) + L(h)$.

Exercice 256 [X 2026 # 256] [MPI] Soit p un nombre premier impair.

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ dont les racines sont de module 1 et $Q \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que si

$$P(X) = p^n Q\left(\frac{X - 1}{p}\right),$$

alors $P(X) = (X - 1)^n$.

2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est un groupe et que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \det M = \pm 1\}.$$

3. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ congruentes coefficient par coefficient modulo p. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $AB^{-1} = I_n + pM$.
4. Montrer que si A et B appartiennent à un même sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, alors $A = B$.

Exercice 257 [X 2026 # 257] Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = A^2$. Est-ce encore vrai dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 258 [X 2026 # 258] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie d et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si la suite $(\mathrm{Tr}(u^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors elle est bornée par d.

Exercice 259 [X 2026 # 259] Soient $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $b^k \neq 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = aI_n + bBA$.

1. Montrer que A et B sont inversibles.
2. Que peut-on dire du spectre de AB ?

Exercice 260 [X 2026 # 260] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose

$$\sin(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

1. Quelles sont les matrices réelles diagonalisables qui s'écrivent $\sin(A)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui s'écrivent $\sin(A)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 261 [X 2026 # 261] Soient $n \geq 3$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $b \neq 0$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on pose

$$A_k = \mathrm{diag}(I_{k-1}, H, I_{n-k-1}), \qquad H = \begin{pmatrix} a & b \\ (1-a^2)/b & -a \end{pmatrix}.$$

1. Pour $|k - k'| \neq 1$, déterminer le cardinal du sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ engendré par $A_k, A_{k'}$.
2. Trouver un vecteur propre commun à tous les A_k.
3. Montrer que ce vecteur n'est inclus dans aucun plan de $\mathbb{C}^n$ stable par tous les A_k.

Exercice 262 [X 2026 # 262] Soit $n \geq 2$.

1. Déterminer les couples $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tels que $AB = BA^2$, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$, et A^2, B n'ont pas de vecteur propre commun.
2. Que se passe-t-il si l'on enlève la condition $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$?
3. Déterminer les couples (A, B) tels que $AB = BA^2$, B inversible et A nilpotente.
4. Soit A telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Existe-t-il B inversible telle que $AB = BA^2$?

Exercice 263 [X 2026 # 263] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. On pose

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\},$$

et

$$C(C(A)) = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid MN = NM \text{ pour tout } M \in C(A)\}.$$

1. Montrer que $C(C(A)) = \mathbb{C}[A]$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $C(C(A)) = C(A)$.
3. Montrer que
$$2n - \dim C(A) \leq \dim C(C(A)) \leq n \leq \dim C(A).$$
4. On ne suppose plus A diagonalisable, mais nilpotente non nulle avec $n = 2$. Montrer que $C(A) = \mathbb{C}[A]$.

Exercice 264 [X 2026 # 264] Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Déterminer les fonctions continues $f : E \to \mathbb{R}$ telles que

$$\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 265 [X 2026 # 265] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. On suppose $\langle by - x, x - ay\rangle \geq 0$. Montrer que
$$\|x\|\|y\| \leq \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}|\langle x, y\rangle|.$$
2. On suppose qu'il existe $m_1, m_2, M_1, M_2 > 0$ tels que $x_i \in [m_1, M_1]$ et $y_i \in [m_2, M_2]$ pour tout i. Montrer que
$$\langle x, y\rangle \geq \frac{2\sqrt{m_1 m_2 M_1 M_2}}{\sqrt{M_1 M_2} + \sqrt{m_1 m_2}}\|x\|\|y\|.$$
3. Montrer que $\langle by - x, ay - x\rangle \leq 0$ si et seulement si
$$\left\| x - \frac{a+b}{2} y \right\| \leq \frac{|b-a|}{2}\|y\|.$$

4. Montrer que si $\langle by - x, x - ay\rangle \geq 0$, alors

$$\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}\|y\|^4.$$

Exercice 266 [X 2026 # 266] On se place dans $\mathbb{R}^d$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$, et A, B les matrices des projections orthogonales sur E, F. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $\alpha \in]0,1[$ tels que, pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|v\| \leq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(AB)^n v - Qv\| \leq \alpha^n.$$

Exercice 267 [X 2026 # 267] [MPI]

1. Soient E un espace vectoriel réel, $n \geq 1$ et $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, montrer que $f \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$ si et seulement si $\ker f_1 \cap \cdots \cap \ker f_n \subset \ker f$.
2. Pour $n \geq 1$, on note $L_n(X)$ la dérivée n-ième de $(X^2-1)^n$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)Q(x)\,dx = 0,$$

puis que L_n est simplement scindé à racines dans $]-1,1[$.

3. Notons $-1 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ les racines de L_n. Montrer qu'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i Q(x_i).$$

Exercice 268 [X 2026 # 268]

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Existe-t-il $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ telle que $B = P^T A P$?
2. Même question avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.
3. Même question avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix}$.

Exercice 269 [X 2026 # 269] Soit $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$, et supposons $P = P^2 = P^T$.

1. Montrer que A est symétrique positive.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\, B \subset \mathrm{Im}\, A$.
3. Montrer qu'il existe une unique matrice A^+ telle que A, A^+ commutent, A^+A soit la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}\, A$, et $A^+AA^+ = A^+$.
4. Montrer que $Q = I_{n-r} - D + B^T A^+ B$ est la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(I_{n-r} - D)$.

Exercice 270 [X 2026 # 270] [MPI] Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les formes linéaires ℓ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$, $\ell(PMP^{-1}) = \ell(M)$.

Exercice 271 [X 2026 # 271]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^*$ si et seulement s'il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$ et $c < 0$ tels que $\langle Ax, x\rangle \leq c\langle x, x\rangle$ pour tout x.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ si et seulement s'il existe un produit scalaire et $c < 0$ tels que la même inégalité soit vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 272 [X 2026 # 272] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AA^T = A^TA$ si et seulement si $A^2A^T = AA^TA$.

3) Analyse

Exercice 273 [X 2026 # 273] Soit $B \subset \mathbb{R}_+$ non majorée. Montrer que

$$\left\{\frac{n}{x} \mid n \geq 1,\ x \in B\right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 274 [X 2026 # 274] Soient X une partie compacte d'un espace vectoriel normé et $f : X \to X$ continue. Pour $x \in X$, on pose

$$\omega(f, x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f^k(x) \mid k \geq n\}.$$

1. On suppose qu'il existe x tel que $\omega(f, x) = X$. Montrer que f est transitive : pour tous ouverts non vides U, V de X, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.
2. On suppose que $\omega(f, x)$ est fini et non vide. Montrer que f induit sur $\omega(f, x)$ une permutation cyclique.

Exercice 275 [X 2026 # 275] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $S(A) = \{PAP^{-1} \mid P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$.

1. Si A est diagonalisable, montrer que $S(A)$ est connexe par arcs.
2. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$ et A n'est pas diagonalisable, montrer que $S(A)$ n'est pas connexe par arcs.
3. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, montrer que $S(A)$ n'est pas connexe par arcs.

4. Qu'en est-il dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 276 [X 2026 # 276] Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $d(A) = \dim(\mathbb{C}[A])$.

1. Quelles valeurs peut prendre $d(A)$?
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $d(P(A)) = d(A)$.
3. Étudier les propriétés topologiques de l'ensemble $E_k = d^{-1}(k)$.

Exercice 277 [X 2026 # 277] Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = |u_n - n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver un équivalent de u_n.

Exercice 278 [X 2026 # 278] Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $x_1, x_2 \in]0,1[$ et

$$x_{n+2} = \frac{x_n^2}{x_{n+1} - x_n^2 + 1}.$$

1. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $(x_1 \cdots x_n)$ converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que $(\sqrt{n}\, x_1 \cdots x_n)$ converge et déterminer sa limite.
4. Si $1 - x_n \sim \alpha/n$, la suite $(\sqrt{n}\, x_1 \cdots x_n)$ converge-t-elle nécessairement ?

Exercice 279 [X 2026 # 279] [MPI] Soit $f \in C^0([0,1],[0,1])$. On définit $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 280 [X 2026 # 280] [MPI] Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$, $f(x) = 2x^2 - 1$.

1. Montrer qu'il existe $x \in [-1,1]$ tel que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ soit égal à $[-1,1]$.
2. Montrer que l'ensemble des x vérifiant cette propriété est dense dans $[-1,1]$.

Exercice 281 [X 2026 # 281] Pour $x, y > 0$, on définit $d(x,y) = |x - y|$ et $h(x,y) = |\ln x - \ln y|$.

1. Pour $x > 0$ et $(x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, montrer que $d(x_n, x) \to 0$ si et seulement si $h(x_n, x) \to 0$.
2. Soient $a, b, c, d > 0$ et $T(x) = (c + dx)/(a + bx)$. Montrer que $T(\mathbb{R}_+^*)$ est inclus dans un compact de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour $x \neq x'$ positifs, poser $\lambda = h(a/c, b/d)$, $y = T(x)$ et $y' = T(x')$. Montrer que

$$\frac{h(y,y')}{h(x,x')} \leq \tanh(\lambda/4).$$

4. Pour $x > 0$, poser $x_0 = x$ et $x_{n+1} = T(x_n)$. Montrer que (x_n) converge vers l'unique point fixe de T.

Exercice 282 [X 2026 # 282]

1. Soit $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)$, avec $u_0 \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
2. Soit $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)^2$, avec $u_0 \leq 0$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 283 [X 2026 # 283] On pose

$$\alpha = 4 \sum_{k=0}^{499999} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Montrer qu'exactement une des 16 premières décimales de α diffère de la décimale correspondante de π.

Exercice 284 [X 2026 # 284] Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{\ln(6^x + 1)}{\ln 7} = \frac{\ln(7^x - 1)}{\ln 6}.$$

Exercice 285 [X 2026 # 285] Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$. On suppose que g est monotone et surjective et que $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$ pour tous $x, y \in [0,1]$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.
2. Montrer que $\{x \in [0,1] \mid f(x) = g(x)\}$ est un segment.

Exercice 286 [X 2026 # 286] Soit $T \geq 2$ et $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique telle que, pour tout $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{i=-n}^{n-1} f(i+k) \leq \sum_{i=-n}^{n-1} f(i).$$

1. Si T est impair, montrer que f est constante.
2. Donner un exemple non constant lorsque T est pair.

Exercice 287 [X 2026 # 287] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sous-additive : $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

1. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ et $\varphi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$, φ dérivable en 0 et $f \leq \varphi$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout x.
2. On suppose qu'il existe $x_0, y_0 > 0$ tels que $f(x_0), f(-y_0) \leq 0$ et $x_0/y_0 \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est périodique.
3. Construire une fonction avec $f(x_0), f(-y_0) \leq 0$ pour certains $x_0, y_0 > 0$, mais qui n'est pas périodique.

Exercice 288 [X 2026 # 288] Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que $ff'' - (f')^2 \geq 0$. Montrer que si f s'annule en un point, alors $f = 0$.

Exercice 289 [X 2026 # 289] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $f : I \to I$ vérifie P si, pour tous $x, y \in I$, $f_n(x) - f_n(y) \to 0$, où f_n est la n-ième itérée de f. Pour $f(x) = x + 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, f admet-elle un point fixe ? Vérifie-t-elle P ?

Exercice 290 [X 2026 # 290] [MPI] Déterminer tous les couples (f, g) de polynômes trigonométriques réels tels que $f^2 + g^2 = 1$.

Exercice 291 [X 2026 # 291] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g(x) = 2f(x) + f(-x)$.

1. On suppose g continue en 0 et f bornée au voisinage de 0. Montrer que f est continue en 0.
2. Trouver une fonction f discontinue en 0 telle que g soit continue.

Exercice 292 [X 2026 # 292] Soit

$$F = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid e^{f(x)} + f(x) \geq x + 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}.$$

Calculer $\inf_{f \in F} \int_0^e f$.

Exercice 293 [X 2026 # 293] [MPI] On appelle polynôme trigonométrique complexe toute combinaison linéaire complexe des fonctions $e_k : x \mapsto e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer les polynômes H tels que $H(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et $\cos \circ H$ soit un polynôme trigonométrique.

Exercice 294 [X 2026 # 294] [MPI]

1. Déterminer les endomorphismes T de $\mathbb{R}[X]$ qui commutent avec la dérivation et avec la multiplication par X.
2. Posons
$$S = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k f^{(n)}(x)| < +\infty \text{ pour tous } k, n \in \mathbb{N}\}.$$
Montrer que S est un espace vectoriel stable par dérivation et par multiplication par l'identité de $\mathbb{R}$. Déterminer les endomorphismes de S qui commutent avec ces deux opérateurs.

Exercice 295 [X 2026 # 295] Posons $E = C^0([-1, 1], \mathbb{C})$. Soit $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ continue, croissante et surjective, et $\Phi : f \mapsto f \circ g$. Montrer que 1 est la seule valeur propre possible de Φ.

Exercice 296 [X 2026 # 296] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(1) = P(-1) = 0$ et $P(x) > 0$ pour $x \in]-1, 1[$.

1. Calculer l'aire T du triangle formé par l'axe des abscisses et les tangentes à P en -1 et 1.
2. Posons $A = \int_{-1}^1 P(x)\,dx$. On suppose $P = (X^2 - 1)\prod_{i \in I}(X - \lambda_i)$, avec λ_i réels, distincts et différents de ± 1. Montrer que
$$A \geq \frac{4}{3}\prod_{i \in I}(\lambda_i^2 - 1).$$
3. En déduire que $A \geq 2T/3$.
4. Ce résultat reste-t-il vrai si P possède des racines non réelles ?
5. On suppose de plus P concave sur $[-1, 1]$. Soit R l'aire du rectangle formé par l'axe des abscisses, $x = \pm 1$ et la tangente horizontale de P sur l'intervalle. Montrer que $A \leq cR$ pour une constante $c < 1$ indépendante de P.

Exercice 297 [X 2026 # 297] Soient $a < b$ et $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$. Posons

$$G = \{g \in C^2([a, b], \mathbb{R}) \mid g(a) = g(b) = g'(a) = g'(b) = 0\}.$$

1. Pour $f \in E$ et $n \geq 1$, montrer que
$$h(x) = \int_a^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} f(t)\,dt$$
est de classe C^n et $h^{(n)} = f$.
2. Montrer qu'il existe $g \in G$ telle que $f = g''$ si et seulement si $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b tf(t)\,dt = 0$.
3. Montrer que, pour $f \in E$, $\int_a^b fg'' = 0$ pour tout $g \in G$ si et seulement si f est affine.

Exercice 298 [X 2026 # 298] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f = 1$. Posons $g(x) = \int_x^{+\infty} f$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx$.
2. Si f est décroissante, montrer qu'il existe un unique $M > 0$ tel que $\int_0^M f = 1/2$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx \geq M$.

Exercice 299 [X 2026 # 299] On définit $f_1(x) = \sin x$ sur $]0, \pi[$, puis $f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x))$. Montrer que $(\sqrt{n} f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction constante $\sqrt{3}$.

Exercice 300 [X 2026 # 300] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et

$$|f'(x) - k| \leq \mu x^\lambda,$$

avec $k \in]0, 1[$ et $\lambda, \mu > 0$. Posons $f_0 = \mathrm{id}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$ et $x_n = f_n(x)$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ et $b \in]0, 1[$ tels que, pour $x \in [0, a]$, $x_n \leq b^n x$.
2. Posons $g_n = f_n/k^n$. Montrer que, pour $x \in [0, a]$,
$$\left|\frac{g_n'(x)}{g_{n+1}'(x)} - 1\right| \leq \frac{\mu}{k} x^\lambda b^{\lambda n}.$$

3. Montrer qu'on peut choisir $a > 0$ tel que $f_n'(x) > 0$ sur $[0, a]$.
4. Montrer que (g_n) et (g_n') convergent uniformément sur $[0, a]$.

Exercice 301 [X 2026 # 301] Soit

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2+1}.$$

Montrer que f n'est pas polynomiale.

Exercice 302 [X 2026 # 302] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, avec $a_0 = 1$ et rayon de convergence $R > 0$. On suppose qu'il existe $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, de rayon de convergence positif, telle que $f(x)(1 - g(x)) = 1$ au voisinage de 0.

1. Montrer que si tous les b_n sont positifs, alors tous les $\$a_n$ le sont.
2. Trouver un exemple où tous les a_n sont positifs et où au moins un b_n est strictement négatif.
3. On suppose $a_{n+1}a_{n-1} \geq a_n^2$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $b_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.
4. On suppose, pour $x \in]-R, R[$,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Montrer que $b_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 303 [X 2026 # 303] Soit $P = a_1X + \cdots + a_dX^d \in \mathbb{R}[X]$, avec $a_d \neq 0$, et $f(z) = e^{P(z)}$. On suppose que son développement en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ vérifie $c_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que $a_d > 0$ et $a_v > 0$, où $v = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$.
2. Si $P = a_vX^v + a_mX^m + a_dX^d$ avec $v < m < d$, montrer que $a_m \geq 0$. Indication : poser $\rho = e^{2i\pi/d}$ et considérer $f(\rho z)/f(z)$.
3. Pour le cas général, soit m tel que $v < m < d$. On suppose $a_m < 0$ et que le pgcd des $i \geq m+1$ tels que $a_i \neq 0$ ne divise pas m. Montrer qu'il existe $n \geq 0$ tel que $c_n \leq 0$.

Exercice 304 [X 2026 # 304] Posons

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,dt.$$

1. Montrer que J est de classe C^1 sur un domaine à préciser et exprimer J'.
2. Montrer que $\zeta(2) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt$.
3. Montrer que $\zeta(2) = \pi^2/6$. Indication : considérer $J(1) - J(0)$.

Exercice 305 [X 2026 # 305] [MPI] Soit $k \in C^0([0,1]^2, \mathbb{C})$ et $E = C^0([0,1], \mathbb{C})$. Pour $f \in E$, on pose

$$v(f)(x) = \int_0^x k(x,y)f(y)\,dy.$$

1. Montrer que v est un endomorphisme de E dont l'unique valeur propre possible est 0.
2. Si k est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, montrer que les éléments non nuls du noyau de v ne sont pas développables en série entière en 0.

Exercice 306 [X 2026 # 306] [MPI] Soit

$$E = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)(|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)|) < +\infty \right\}.$$

1. Pour $t, x \in \mathbb{R}$ et $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, poser $A_t(f)(x) = f'(x) + txf(x)$ et $A_t^*(f)(x) = -f'(x) + txf(x)$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $f \in E$,

$$\int_{\mathbb{R}} A_t^*(A_t(f))(x)f(x)\,dx \geq 0.$$

2. Si $\int_{\mathbb{R}} f^2 = 1$, montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)^2\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f'(x)^2\,dx\right) \geq \frac{1}{4}.$$

3. Étudier les cas d'égalité.

Exercice 307 [X 2026 # 307] [MPI]

1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}\,d\theta = 0.$$

2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\int_0^{2\pi} \ln|e^{i\theta} - z|\,d\theta = 2\pi\max(0, \ln|z|).$$

Exercice 308 [X 2026 # 308] Soient $f, g \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $S, T > 0$. On suppose $(f-g)(t) = o(e^{t/2})$ lorsque $t \to +\infty$, et que $F = f'' - f' + f$ est T-périodique et $G = g'' - g' + g$ est S-périodique. On suppose aussi que $F(t) - G(t) \to 0$. Montrer que $f = g$.

Exercice 309 [X 2026 # 309] On considère l'équation fonctionnelle $u'(x) = u(x - x^2)$, où $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dérivable.

1. Montrer que si deux solutions coïncident sur $[0, \varepsilon]$ pour un $\varepsilon > 0$, elles coïncident sur $[0, 1]$.
2. Montrer qu'il existe une solution non nulle. Indication : considérer $u_0(x) = 1$ et

$$u_n(x) = 1 + \int_0^x u_{n-1}(t - t^2)\, dt.$$

Exercice 310 [X 2026 # 310] Soient $\lambda \in]-1, 1[$ et F l'espace des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f'(t) = e^t f(\lambda t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que F est de dimension 1.
2. Majorer asymptotiquement aussi bien que possible les éléments de F lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 311 [X 2026 # 311] Soit $M_0 \in O_2(\mathbb{R})$. Pour quels couples $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ la solution du problème de Cauchy $M(0) = M_0$, $M'(t) = AM(t)B$ est-elle à valeurs dans $O_2(\mathbb{R})$?

Exercice 312 [X 2026 # 312] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour l'équation différentielle $M'(t) = AM(t)B$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions soient bornées.

Exercice 313 [X 2026 # 313] [MPI] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $T > 0$. On note A_T l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels il existe $u \in C^0([0, T], \mathbb{R}^p)$ et une solution de $X' = AX + Bu(t)$ telle que $X(0) = 0$ et $X(T) = v$. Montrer que $A_T = \mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$M = (B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B)$$

est de rang n.

4) Géométrie

Exercice 314 [X 2026 # 314] Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur le cercle unité ?

Exercice 315 [X 2026 # 315] [MPI] Soit $A_0A_1A_2$ un triangle du plan. On définit A_2' comme le sommet extérieur au triangle $A_0A_1A_2$ du triangle $A_0A_1A_2'$ isocèle en A_2', d'angle au sommet $2\pi/3$. On définit de même A_0', A_1' par permutation circulaire. Montrer que $A_0'A_1'A_2'$ est équilatéral.

Exercice 316 [X 2026 # 316] Soit K un quadrilatère convexe de sommets O, u, v, w dans le sens trigonométrique, avec $v > 0$. On note A son aire.

1. Montrer que

$$A^2 = \frac{v^2}{4}\left(|w - u|^2 - (\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Re}(u))^2\right).$$

2. Montrer que

$$A^2 = \frac{1}{4}\left(p^2q^2 - \frac{1}{4}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2\right),$$

où a, b, c, d sont les longueurs des côtés dans le sens direct et p, q celles des diagonales.

3. Si K est inscriptible dans un cercle, montrer que $pq = ac + bd$. En notant $S = (a + b + c + d)/2$, montrer ensuite

$$A^2 = (S - a)(S - b)(S - c)(S - d).$$

5) Probabilités

Exercice 317 [X 2026 # 317]

1. Montrer qu'il existe deux multiensembles distincts de six entiers strictement positifs issus de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tels que deux dés équilibrés construits avec leurs éléments donnent la même loi pour la somme que deux dés classiques.
2. Montrer que, pour N assez grand, il existe deux dés pipés à N faces, portant les entiers de 1 à N, dont la somme suit la loi de la somme de deux dés équilibrés à N faces.

Exercice 318 [X 2026 # 318] Soit σ uniforme sur S_n.

1. Pour $k, i \in [\![1, n]\!]$, calculer la probabilité que i appartienne à un cycle de longueur k dans la décomposition de σ.
2. Si X_k est le nombre de cycles de longueur k, montrer que $\mathbf{E}(X_k) = 1/k$.
3. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et p_n la probabilité que tous les cycles de σ aient longueur au plus αn. Montrer qu'il existe $C_\alpha > 0$ tel que $p_n \geq C_\alpha$ pour n assez grand.

Exercice 319 [X 2026 # 319] On fixe $N \geq 1$. Soit U_1 uniforme sur $[\![1, N]\!]$ et, pour $n \geq 1$, U_{n+1} uniforme sur $[\![1, U_n]\!]$. Posons $E_N = \{U_j \mid j \geq 1\}$.

1. Montrer que $\mathbf{P}(1 \in E_N) = 1$.
2. Calculer $\mathbf{P}(k \in E_N)$ pour $1 \leq k \leq N$.
3. Montrer que les événements $(k \in E_N)$ sont indépendants.

Exercice 320 [X 2026 # 320] Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi de Bernoulli $B(p)$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et

$$T_n = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid |\{i \in [\![1, m]\!] : X_i = 0\}| \geq n\}.$$

1. Montrer que $(S_n \geq k) = (T_{n-k+1} \geq n + 1)$.

2. En déduire
$$\mathbf{P}(S_n \geq k) = \binom{n}{n-k}(1-p)^{n-k+1}p^k \sum_{\ell \geq 0} \frac{(n+1)\cdots(n+\ell)}{(k+1)\cdots(k+\ell)}p^\ell.$$

3. En déduire que, si $p = 1/2$ et $j \geq 3$,
$$\mathbf{P}(S_{nj} \leq n) \sim 2^{-nj}\binom{nj}{n}\frac{j-1}{j-2}.$$

Exercice 321 [X 2026 # 321] Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire à composantes i.i.d. dans L^4, à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $\mathbf{E}(X_1) = 0$ et $\mathbf{V}(X_1^2) = \mathbf{V}(X_1) = 1$. Soient $F \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k et P la matrice de la projection orthogonale sur $F^\perp$.

1. Justifier que $d(X,F)^2 = X^T P X$ et montrer que $\mathbf{E}(d(X,F)^2) = n-k$.
2. Montrer que $\mathbf{V}(d(X,F)^2) \leq n-k$.
3. Si $\lambda \geq 1$, montrer que
$$\mathbf{P}\left(|d(X,F) - \sqrt{n-k}| \geq \lambda\right) \leq \frac{2}{\lambda^2}.$$

Exercice 322 [X 2026 # 322] Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des variables aléatoires X, X_1, X_2 telles que $X = aX_1 + bX_2$, avec $X \sim \mathcal{P}(\nu)$, $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $X_2 \sim \mathcal{P}(\mu)$, et X_1, X_2 indépendantes.

Exercice 323 [X 2026 # 323] Pour $k, n \geq 1$, on note
$$B_{k,n} = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq n^{1/10},\ p \mid k\},$$
et X_n uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Montrer que
$$\mathbf{E}(|B_{X_n,n}|) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq n^{1/10}} \frac{1}{p} + O(n^{-9/10}).$$

2. Montrer que
$$\mathbf{V}(|B_{X_n,n}|) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq n^{1/10}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right) + O(n^{-8/10}).$$

3. Si $\nu(x) = |\{p \in \mathbb{P} \mid p \mid x\}|$ et $a_n \to +\infty$, montrer que
$$\mathbf{P}\left(|\nu(X_n) - \ln\ln n| \geq a_n\sqrt{\ln\ln n}\right) \to 0.$$
On pourra utiliser $\sum_{p \leq n,\ p \in \mathbb{P}} 1/p = \ln\ln n + O(1)$.

V) X PSI **AUTRE**

1) Algèbre

Exercice 324 [X PSI 2026 # 324] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}(-1)^k x^{2k} = 0.$$

Exercice 325 [X PSI 2026 # 325] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 326 [X PSI 2026 # 326] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ sans racine réelle multiple. Quel est le nombre maximal de racines réelles multiples de $Q = P(X^3 - X)$? Donner un polynôme Q réalisant ce maximum.

Exercice 327 [X PSI 2026 # 327] Soit $P_n(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, avec $a_0 \neq 0$, et
$$Q_n(X) = X^n - |a_{n-1}|X^{n-1} - \cdots - |a_0|.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $\rho > 0$ tel que $Q_n(\rho) = 0$.
2. Si $P_n(z) = 0$, montrer que $|z| \leq \rho$.

Exercice 328 [X PSI 2026 # 328] Soit E de dimension n et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur F_1, F_2 pour qu'ils admettent un supplémentaire commun.

Exercice 329 [X PSI 2026 # 329] Déterminer les fonctions $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ telles que
$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$$
pour toutes matrices A, B.

Exercice 330 [X PSI 2026 # 330] 1. Soient $p \geq 1$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer qu'il existe $a, b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{C}$ tels que
$$1 = a(X-\mu)^p + \sum_{k=1}^{p} b_k(X-\lambda)^k.$$

2. Si $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ vérifie $(A-I_d)^2 A = 0$, calculer A^n.
3. Si $\mathbb{C}^d = \ker((A-I_d)^2) \oplus \ker((A-2I_d)^2)$, expliciter la matrice du projecteur sur $\ker((A-I_d)^2)$ parallèlement à $\ker((A-2I_d)^2)$.

Exercice 331 [X PSI 2026 # 331] Soit $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $\Phi(P) = X^n P(1/X)$.

1. Φ est-il diagonalisable ?
2. Trouver une base de vecteurs propres.

Exercice 332 [X PSI 2026 # 332] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T : M \mapsto AM$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si A est diagonalisable, montrer que T l'est aussi et expliciter une base de diagonalisation à partir de celle de A.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 333 [X PSI 2026 # 333] Soit $P = X^7 + 2X^6 + 4X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 2X^2 + X$. Déterminer

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}, P(M) = 0\}.$$

Exercice 334 [X PSI 2026 # 334] Soit $d \geq 1$ et $T : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ défini par

$$T((z_k)_{0\leq k<d}) = \left(\sum_{k=0}^{d-1} z_k e^{2ikn\pi/d}\right)_{0\leq n<d}.$$

Déterminer les valeurs propres de T.

Exercice 335 [X PSI 2026 # 335] Soient $H_1, \dots, H_k$ des hyperplans d'un espace euclidien E et $H_i = \ker \varphi_i$, où (φ_i) est une famille libre. Soit s_i la symétrie orthogonale par rapport à H_i et $S = s_k \circ \cdots \circ s_1$. Montrer que

$$H_1 \cap \cdots \cap H_k = \{x \in E \mid S(x) = x\}.$$

Exercice 336 [X PSI 2026 # 336] Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B = UU^T$. Comparer les valeurs propres de A et $A+B$. Indication : montrer que $\det(I_n + UV^T) = 1 + V^T U$.

Exercice 337 [X PSI 2026 # 337] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : X \mapsto AXA$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\det \varphi$ en fonction de $\det A$.

Exercice 338 [X PSI 2026 # 338] Soient $X, Y \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Étudier l'existence et l'éventuelle unicité de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $AXA = Y$. Indication : commencer par le cas $Y = I_n$.

2) Analyse

Exercice 339 [X PSI 2026 # 339] Soient $\psi, \chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ vérifiant $\psi = 1$ sur $[0,1]$, $\psi = 0$ sur $[2, +\infty[$, $\chi = 0$ sur $[0,1] \cup [4, +\infty[$, et

$$1 = \psi(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \chi(x/2^n).$$

1. Dessiner ψ, χ et $x \mapsto \chi(x/2^n)$.
2. Exprimer χ en fonction de ψ.
3. Pour E l'ensemble des fonctions continues de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$, montrer l'équivalence des normes

$$\|f\|^2 = \int_0^\infty |f(x)|^2 \psi(x)^2 dx + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty |f(x)|^2 \chi(x/2^n)^2 dx, \quad \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx.$$

Exercice 340 [X PSI 2026 # 340] Déterminer l'adhérence de

$$\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 341 [X PSI 2026 # 341] On admet que π est irrationnel. Déterminer l'adhérence de $A = \{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 342 [X PSI 2026 # 342]
1. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_{n+1} - x_n \to 0$. Si $a < b$ sont deux valeurs d'adhérence, montrer que tout élément de $[a,b]$ est une valeur d'adhérence.
2. Soient $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_{n+1} - x_n \to 0$. Montrer que (x_n) a au plus une valeur d'adhérence.

Exercice 343 [X PSI 2026 # 343] Soit E un espace vectoriel réel. Montrer que deux normes N_1, N_2 sur E sont égales si et seulement si elles ont la même boule unité ouverte.

Exercice 344 [X PSI 2026 # 344] Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 1-périodique. Que vaut l'adhérence de $\{f(\sqrt{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Exercice 345 [X PSI 2026 # 345] Soient $d \geq 1$ et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{S}_d^+(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$. On pose $\|A_k\|_2 = \mathrm{Tr}(A_k A_k^T)$.

1. Comparer la nature des séries $\sum \|A_k\|$ et $\sum \mathrm{Tr}(A_k)$.
2. Montrer que $I_d + A_k$ est inversible pour tout k.
3. Montrer que $\sum \mathrm{Tr}(I_d - (I_d + A_k)^{-1})$ converge si et seulement si $\sum \|A_k\|$ converge.

Exercice 346 [X PSI 2026 # 346] Soit (u_n) telle que (e^{iu_n}) et $(e^{\sqrt{2}iu_n})$ convergent. Montrer que (u_n) admet au plus une valeur d'adhérence.

Exercice 347 [X PSI 2026 # 347] Donner une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ continue en les irrationnels et discontinue en les rationnels.

Exercice 348 [X PSI 2026 # 348] Pour $n \geq 1$, poser

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \cos(nx)\, dx.$$

Montrer que $I_n = o(n^{-\alpha})$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 349 [X PSI 2026 # 349] 1. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \cos^n(x/n)\, dx$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la suite $\left(\int_0^n \cos^n(x^\alpha/n)\, dx\right)$ converge.

Exercice 350 [X PSI 2026 # 350] Soient $k \in \mathbb{R}$ et $f_k(x,y) = x^2 + (x-k)y - y^3$. Déterminer les extrema de f_k selon les valeurs de k.

Exercice 351 [X PSI 2026 # 351] Soit $f(x,y) = (xy - y^2)|y^2 - x|$. Déterminer les extrema locaux de f.

3) Probabilités

Exercice 352 [X PSI 2026 # 352] Un promeneur se déplace entre trois sites A, B, C. À l'instant initial, il est en A ; à chaque instant, il reste sur place avec probabilité $2/3$, ou rejoint chacun des deux autres sites avec probabilité $1/6$.

1. Déterminer les probabilités qu'il soit en A, B, C à l'instant n.
2. La suite de ces probabilités possède-t-elle une limite ?

Exercice 353 [X PSI 2026 # 353] Soit $K > 0$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ K-lipschitzienne. Pour $x \in [0,1]$, soit $X_n^x \sim B(n,x)$ et posons $f_n(x) = \mathbf{E}(f(X_n^x/n))$.

1. Comment f_n dépend-elle de x ?
2. Montrer que $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 354 [X PSI 2026 # 354] 1. Soit (u_n) une suite positive sous-additive : $u_{n+m} \leq u_n + u_m$. Montrer que u_n/n converge vers $\inf_{k\geq 1} u_k/k$.

2. On considère une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^3$ et note p_n la probabilité que le chemin de longueur n soit auto-évitant. Montrer que $p_{n+m} \leq p_n p_m$. Que peut-on en déduire sur $(p_n^{1/n})$?

Exercice 355 [X PSI 2026 # 355] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $A \subset \mathbb{Z}$. Posons $f_X(t) = \mathbf{E}(e^{-2i\pi tX})$.

1. Exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ à l'aide d'une intégrale faisant intervenir f_X.
2. Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ i.i.d. de loi de Rademacher et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Donner un équivalent de $\mathbf{P}(S_{2n} = 0)$ sans utiliser la formule de Stirling.

VI) X – ESPCI – PC AUTRE

1) Algèbre

Exercice 356 [ESPCI PC 2026 # 356] Montrer qu'il existe une infinité de points à coordonnées décimales sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Indication : commencer par montrer qu'il y a une infinité de points à coordonnées rationnelles.

Exercice 357 [ESPCI PC 2026 # 357] Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ distincts et $(u_1, \ldots, u_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieur à $2n$ tel que $P(z_k) = u_k$ et $P'(z_k) = w_k$ pour tout k.

Exercice 358 [ESPCI PC 2026 # 358] Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Exercice 359 [ESPCI PC 2026 # 359] Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_N \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_N(n) = \sum_{k=1}^n k^N.$$

Exercice 360 [ESPCI PC 2026 # 360] Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(P''(X)) = (P(X+1) - P(X) - P'(X))^2.$$

Exercice 361 [ESPCI PC 2026 # 361] Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 362 [ESPCI PC 2026 # 362] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire dont les racines sont non nulles et de module au plus 1. Montrer que les racines de P sont des racines de l'unité.

Exercice 363 [ESPCI PC 2026 # 363] On définit $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ par $D(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer l'image et le noyau de D.
2. Montrer qu'il existe une unique base (H_n) de $\mathbb{R}[X]$ telle que $H_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $H_n(0) = 0$ et $D(H_n) = H_{n-1}$.

Exercice 364 [ESPCI PC 2026 # 364] Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre $f^2 = 0$ et l'existence d'un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = p \circ f - f \circ p$.

Exercice 365 [ESPCI PC 2026 # 365] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer un équivalent de $\mathrm{Tr}(A^n)$.

Exercice 366 [ESPCI PC 2026 # 366] Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $A + kB$ soit inversible à inverse entière pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $A + 5B$ est inversible à inverse entière. Généraliser à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$?

Exercice 367 [ESPCI PC 2026 # 367] Soient $n > m$ et $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = 0$ et

$$\|X\|_\infty \leq (n\|M\|_\infty)^{m/(n-m)}.$$

Exercice 368 [ESPCI PC 2026 # 368] Soient $n \geq 2$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k/k!$ est bien définie.
2. Si A est diagonalisable, que dire de e^A ?
3. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer e^A, e^B, e^{A+B}.
4. Même question avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Si $AB = BA$, montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 369 [ESPCI PC 2026 # 369] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k/k!$.

1. Montrer que $\exp(A)$ est bien définie.
2. Si $A = I_n + M$ avec M nilpotente, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

Exercice 370 [ESPCI PC 2026 # 370] Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $d_k = \det((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$. Montrer l'équivalence entre :

1. $d_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$;
2. il existe une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$.

Montrer aussi l'unicité de cette décomposition.

Exercice 371 [ESPCI PC 2026 # 371] Soient $m, n \geq 1$, $m \leq n$, I non vide et $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim V_i = m$ et $\dim(V_i \cap V_j) = m - 1$ si $i \neq j$. Montrer qu'il existe soit un sous-espace de dimension $m - 1$ contenu dans tous les V_i, soit un sous-espace de dimension $m + 1$ contenant tous les V_i.

Exercice 372 [ESPCI PC 2026 # 372] Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Les matrices
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}$$
sont-elles semblables ?
2. Montrer que le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ est à coefficients réels.

Exercice 373 [ESPCI PC 2026 # 373] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que PAQ et PBQ soient triangulaires supérieures.

Exercice 374 [ESPCI PC 2026 # 374] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la limite puis un équivalent de $(\mathrm{tr}(A^n))_n$.

Exercice 375 [ESPCI PC 2026 # 375] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $u : M \mapsto AM - MB$.

1. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$, montrer que $\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}(u)$.
2. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha \in \mathrm{Sp}(u)$ et M est un vecteur propre associé, montrer que $P(A)M = MP(B + \alpha I_n)$.
3. Si $\alpha \in \mathrm{Sp}(u)$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$ tels que $\alpha = \lambda - \mu$. Conclure.

Exercice 376 [ESPCI PC 2026 # 376]
1. Montrer que toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables. En déduire une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.
2. Toute matrice réelle est-elle limite d'une suite de matrices réelles diagonalisables ?

Exercice 377 [ESPCI PC 2026 # 377] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}(AB - BA) \leq 1$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

Exercice 378 [ESPCI PC 2026 # 378] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mu = (X - \alpha)^2(X - \beta)$, avec $\mu(A) = 0$ et le degré minimal d'un polynôme complexe non nul annulant A égal à 3.

1. Montrer qu'il existe un unique $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$(aA + bI_n)(A - \beta I_n) + c(A - \alpha I_n)^2 = I_n.$$
2. Poser $P_\alpha = (aA + bI_n)(A - \beta I_n)$ et $P_\beta = c(A - \alpha I_n)^2$. Montrer que $P_\alpha P_\beta = 0$ et que ces matrices sont des projecteurs. Déterminer leurs espaces propres.
3. Montrer que $\alpha P_\alpha + \beta P_\beta$ est diagonalisable.

Exercice 379 [ESPCI PC 2026 # 379] Soit $n \geq 1$. Quels $\alpha \in \mathbb{R}$ existent tels qu'on puisse trouver des vecteurs unitaires $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle x_i, x_j \rangle = \alpha$ pour tous $i < j$?

Exercice 380 [ESPCI PC 2026 # 380] Soit $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que $P^T P = I_m$. Que peut-on dire de m, n ? Interpréter géométriquement P.

Exercice 381 [ESPCI PC 2026 # 381] Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Pour un sous-espace W, on note p_W la projection orthogonale sur W. Soit $m \in [\![1, n]\!]$. Montrer l'équivalence entre :

1. Il existe W de dimension m tel que $\|p_W(e_i)\| = \|p_W(e_1)\|$ pour tout i.
2. Pour tout i,
$$\|e_i\|^2 \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^{-2} \geq m.$$

Exercice 382 [ESPCI PC 2026 # 382] Soit $n \geq 2$. Pour $w \in \mathbb{R}^n$, soit H_w la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathrm{Vect}(w))^\perp$. Montrer que, si $v \neq 0$ et e est unitaire, alors $H_{v-\|v\|e}(v) = \|v\|e$.

Exercice 383 [ESPCI PC 2026 # 383] Soit E un espace euclidien, $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs unitaires et $\alpha_1, \dots, \alpha_p > 0$ tels que $\sum_i \alpha_i v_i = 0$. Montrer que
$$\left\| \sum_{i=1}^{p} v_i \right\| \leq p - 2,$$
et que cette inégalité ne peut pas être améliorée.

Exercice 384 [ESPCI PC 2026 # 384] Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $B \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\inf_{X \in E} \|X - B\|$ est un minimum, atteint en un unique point à expliciter.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ et $F \subset \mathbb{R}^q$ un sous-espace. Montrer que $\inf_{X \in F} \|AX - B\|$ est atteint. Si le minimum est atteint en X_0, montrer que l'ensemble des minimiseurs est $X_0 + \ker A$.
3. Montrer que $A^T AX = A^T B$ admet une solution et que son ensemble de solutions est l'ensemble des minimiseurs de $X \mapsto \|AX - B\|$.

Exercice 385 [ESPCI PC 2026 # 385] Soient E, F euclidiens et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. La restriction de L à $(\ker L)^\perp$ est un isomorphisme sur $\mathrm{Im}\, L$. Notons M cette restriction, π le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}\, L$ et $L^+ = M^{-1} \circ \pi$.

1. Montrer que $L^+ L$ est le projecteur orthogonal sur $(\ker L)^\perp$.
2. Montrer que $LL^+ = \pi$.
3. Pour $b \in F$, montrer que $\inf_{x \in E} \|L(x) - b\|$ est atteint en $L^+(b)$.

Exercice 386 [ESPCI PC 2026 # 386]

1. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ses valeurs propres sont imaginaires pures.
2. Montrer que $x \mapsto (1 - ix)/(1 + ix)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.
3. Pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, poser $g(A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Déterminer l'image de g.

Exercice 387 [ESPCI PC 2026 # 387] Posons $E_n = \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\, M = 1\}$.

1. Montrer que E_n est convexe.
2. Montrer que tout projecteur orthogonal de rang 1 appartient à E_n.
3. Montrer que ces projecteurs sont exactement les matrices de rang 1 de E_n.
4. Pour $M \in E_n$, montrer l'équivalence entre l'existence d'un unitaire U tel que $\langle U, MU \rangle = 1$ et le fait que M soit un projecteur orthogonal de rang 1.
5. Montrer que les points extrémaux de E_n sont exactement ces projecteurs.

Exercice 388 [ESPCI PC 2026 # 388] Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont non nuls. On suppose que $N = (1/m_{i,j})$ appartient aussi à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que M est de rang 1.

Exercice 389 [ESPCI PC 2026 # 389]

1. Pour $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, poser $H(V) = I_n - 2VV^T/\|V\|^2$. Caractériser géométriquement $H(V)$.
2. Si e est unitaire, montrer que $H(V - \|V\|e)V = \|V\|e$.
3. En déduire un algorithme de décomposition QR de toute matrice inversible A, avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à diagonale positive.

Exercice 390 [ESPCI PC 2026 # 390] Soit $\rho \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(\rho) = 1$. Posons $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(\rho A^T B)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que cela définit un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée contenant I_n.

Exercice 391 [ESPCI PC 2026 # 391] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Pour un sous-espace M, posons
$$\mu(M) = \inf\{\langle Au, u \rangle \mid u \in M,\ \|u\| = 1\}.$$

1. Montrer que la borne inférieure est atteinte.
2. Si G_k est l'ensemble des sous-espaces de dimension k, montrer que
$$\lambda_k = \max\{\mu(M) \mid M \in G_{n+1-k}\}.$$

Exercice 392 [ESPCI PC 2026 # 392] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, les égalités $X^T AX = 0$ et $X^T BX = 0$ impliquent $X = 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $P^T AP$ et $P^T BP$ soient triangulaires supérieures.

2) Analyse

Exercice 393 [ESPCI PC 2026 # 393] Soit E un espace vectoriel normé réel et posons

$$\eta = \sup_{(u,v)\neq(0,0)} \frac{\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2}{2(\|u\|^2+\|v\|^2)}.$$

Montrer que $\eta = 1$ si et seulement si la norme est associée à un produit scalaire.

Exercice 394 [ESPCI PC 2026 # 394] On munit $\ell_1(\mathbb{R}) = \{u = (u_n) \mid \sum |u_n| < +\infty\}$ de sa norme naturelle. Montrer que toute suite de Cauchy de $\ell_1(\mathbb{R})$ converge.

Exercice 395 [ESPCI PC 2026 # 395] On note ℓ_1' le dual continu de $\ell_1(\mathbb{R})$, muni de sa norme d'opérateur, et $\ell_\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites bornées. Pour $v \in \ell_\infty$, poser $F(v)(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que F est une isométrie bijective de ℓ_∞ sur ℓ_1'.

Exercice 396 [ESPCI PC 2026 # 396] Soit V un espace vectoriel réel et $T : V \to V$ additive. On suppose T bornée sur la boule unité. Montrer que T est un endomorphisme continu de V. Que peut-on dire de T ?

Exercice 397 [ESPCI PC 2026 # 397] Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace des endomorphismes continus.

1. Pour $f \in \mathcal{L}_c(E)$, poser $N(f) = \sup_{x\neq 0} \|f(x)\|/\|x\|$. Montrer que $N(f)$ est définie.
2. Montrer que N est une norme et que $N(f\circ g) \leq N(f)N(g)$.
3. Si $f\circ g - g\circ f = \lambda\,\mathrm{id}$, montrer que $\lambda = 0$ lorsque E est de dimension finie, puis lorsque f, g sont continus.
4. Pour $E = \mathbb{R}[X]$, $f(P) = P'$ et $g(P) = XP$, montrer qu'il n'existe pas de norme rendant f et g continus.

Exercice 398 [ESPCI PC 2026 # 398] Soit $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Montrer que tout entier naturel s'écrit comme somme de termes F_i distincts.
2. Montrer que tout entier naturel s'écrit comme somme de puissances de 2 distinctes.
3. Généraliser à d'autres suites d'entiers.

Exercice 399 [ESPCI PC 2026 # 399] Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n^2 \sum_{k=0}^{n^2} \frac{1}{k^2+n^2}$.

Exercice 400 [ESPCI PC 2026 # 400] Déterminer les réels x qui s'écrivent

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_i}{i}, \qquad \varepsilon_i \in \{0,1\}.$$

Exercice 401 [ESPCI PC 2026 # 401] Déterminer les réels qui s'écrivent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^2}, \qquad \varepsilon_n \in \{0,1\}.$$

Exercice 402 [ESPCI PC 2026 # 402] Soient (c_n) une suite bornée d'entiers naturels non nuls et (t_n) une suite strictement croissante d'entiers, avec $t_0 \geq 2$. On pose

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{\prod_{k=0}^{n} t_k}.$$

1. Montrer que S est bien définie et irrationnelle.
2. Que dire si les c_n sont des entiers relatifs non nuls ?

Exercice 403 [ESPCI PC 2026 # 403] Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 404 [ESPCI PC 2026 # 404] Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y| \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 405 [ESPCI PC 2026 # 405] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2, avec $f(0) = 0$ et $f''(x) > 0$ sur $]0,1[$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f'(\alpha) < f(1)$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\beta \in]\alpha,1[$ tel que $f'(\alpha) = f(\beta)/\beta$.

Exercice 406 [ESPCI PC 2026 # 406] Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \geq 0$ et f'' bornée. Montrer que

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2\|f''\|_\infty f(x)}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 407 [ESPCI PC 2026 # 407] Montrer que

$$\sqrt{\frac{3}{\pi}+\frac{10\sqrt{10}}{3\cdot 6^3\cdot\pi}}\leq 1.$$

Exercice 408 [ESPCI PC 2026 # 408]

1. Soient $\varphi\in C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda>0$. On suppose $|\varphi'|\geq 1$ et φ' monotone. Montrer qu'il existe une constante universelle C telle que
$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right|\leq C/\lambda.$$
2. Pour $k\geq 2$, montrer qu'il existe C_k tel que, si $|\varphi^{(k)}|\geq 1$,
$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)}dx\right|\leq C_k\lambda^{-1/k}.$$

Exercice 409 [ESPCI PC 2026 # 409] Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ lorsque $x\to+\infty$.

Exercice 410 [ESPCI PC 2026 # 410] Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ avec $\alpha>0$. Étudier la convergence et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2+\beta t+\gamma}\,dt.$$

Exercice 411 [ESPCI PC 2026 # 411] Soit $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables. Montrer que $(f')^2$ est intégrable et que

$$\left(\int_{\mathbb{R}}(f')^2\right)^2\leq\left(\int_{\mathbb{R}}f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}}(f'')^2\right).$$

Exercice 412 [ESPCI PC 2026 # 412] Soient $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ continue et $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ continue, C^1 par morceaux. On définit $\int_\gamma f(z)\,dz$ par paramétrisation.

1. Si f est développable en série entière et $\gamma(a)=\gamma(b)$, montrer que $\int_\gamma f(z)\,dz=0$.
2. Pour $f(z)=\exp((i-1)z^2)$ et $\gamma_R(t)=Re^{it}$ sur $[0,\pi/8]$, montrer que $\int_{\gamma_R}f(z)\,dz\to 0$.
3. Calculer $\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(t^2)dt$ et $\int_0^\infty e^{-t^2}\sin(t^2)dt$.

Exercice 413 [ESPCI PC 2026 # 413]

1. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est C^1, montrer que les intégrales de $f(t)\cos(nt)$ et $f(t)\sin(nt)$ tendent vers 0.
2. Pour $x\in]0,2\pi[$, montrer que
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nx)}{n}\longrightarrow\frac{\pi-x}{2}.$$
3. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nx)}{n}=\int_0^{(N+1/2)x}\frac{\sin y}{y}dy-\frac{x}{2}+o(x)\quad(x\to 0).$$
4. Montrer que le supremum de l'erreur entre la somme et $(\pi-x)/2$ sur $x\in]0,2\pi[$ et $N\geq 1$ est au moins $0,27$.

Exercice 414 [ESPCI PC 2026 # 414]

1. Calculer $A_n=\int_0^\infty t^ne^{-t}\cos t\,dt$ et $B_n=\int_0^\infty t^ne^{-t}\sin t\,dt$.
2. Montrer qu'il existe $f\in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ non nulle telle que $\int_0^\infty t^nf(t)dt=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de telle fonction non nulle continue sur $[0,1]$ avec les intégrales prises sur $[0,1]$.

Exercice 415 [ESPCI PC 2026 # 415] Soit $f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. Montrer que f est polynomiale.

Exercice 416 [ESPCI PC 2026 # 416] Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue telle qu'il existe $M\geq 0$ vérifiant $|f(x+y)-f(x)-f(y)|\leq M$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$.

1. Poser $g_n(x)=f(2^nx)/2^n$. Montrer que (g_n) converge uniformément vers une fonction continue g.
2. Montrer que f est somme d'une fonction affine et d'une fonction bornée.

Exercice 417 [ESPCI PC 2026 # 417] On donne $\sum_{n=1}^\infty 1/n^4=\pi^4/90$.

1. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx$.
2. Pour $x\in\mathbb{R}$, poser
$$g(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$
Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}g(x)^2dx$.
3. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}(x^2-g(x))^2dx$ et conclure.

Exercice 418 [ESPCI PC 2026 # 418] Quel est le rayon de convergence maximal de $\sum a_n z^n$ lorsque (a_n) est une suite entière non presque nulle ?

Exercice 419 [ESPCI PC 2026 # 419] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum a_n$ converge. Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Déterminer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

Exercice 420 [ESPCI PC 2026 # 420] L'abscisse de convergence de f est $\inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid e^{-\alpha t} f(t) \text{ est bornée}\}$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f d'abscisse strictement inférieure à α. Pour $s > \alpha$, poser $L(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$.

1. Calculer $L(f)$ pour $f(t) = t^n$, e^t, te^t.
2. Si $f \in C^n(\mathbb{R}_+)$ et les $f^{(k)}$ ont abscisse de convergence strictement inférieure à α, calculer $L(f^{(n)})$.

Exercice 421 [ESPCI PC 2026 # 421] Soient

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2, \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que f et g sont C^1 et calculer leurs dérivées.
2. Montrer que $g' = -f'$.
3. En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 422 [ESPCI PC 2026 # 422] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Pour $t > 0$, poser

$$P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/(2t)} dy.$$

1. Montrer que $P_t(f)$ est bien définie.
2. Montrer que $P_t(f)(x) \to f(x)$ lorsque $t \to 0^+$.
3. Si $f \in C^3$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 sont bornées, montrer que $(P_t(f)(x) - f(x))/t \to f''(x)/2$.

Exercice 423 [ESPCI PC 2026 # 423]

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ sans racine de module r. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} re^{i\theta} d\theta$$

est le nombre de racines de P de module inférieur à r, comptées avec multiplicité.

2. Si $|Q(z)| < |P(z)|$ sur le cercle de rayon r, montrer que P et $P+Q$ ont le même nombre de racines dans le disque de rayon r.

Exercice 424 [ESPCI PC 2026 # 424] Pour $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, poser

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iyx}\, dx.$$

On admet Plancherel : si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\widehat{f} \in L^2$ et $\int |\widehat{f}|^2 = 2\pi \int |f|^2$. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $xf(x), xf'(x) \in L^2$. Poser

$$\Delta_f = \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx, \qquad c = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

1. Montrer que $f \in L^2$ et $x \mapsto x(f(x))^2 \in L^1$.
2. Montrer que $f, f' \in L^1$.
3. Montrer que $f(x), f'(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$.
4. Montrer que $x(f(x))^2 \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$.
5. Montrer que $\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y)$.
6. Montrer que

$$\sqrt{\Delta_f \Delta_{\widehat{f}}} \geq \sqrt{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} xf(x)f'(x)dx \right|.$$

7. Montrer que $\sqrt{\Delta_f \Delta_{\widehat{f}}} \geq \sqrt{\pi/2}\, c$.

Exercice 425 [ESPCI PC 2026 # 425] Pour $x \in \mathbb{R}$, noter $x_+ = \max(x, 0)$ et poser

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{i\xi x} dx.$$

1. Montrer que $\widehat{f}$ est définie et continue.
2. Pour $N \in \mathbb{N}$, établir

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=-k}^{k} e^{ijx} = \sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e^{ijx} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right)^2.$$

3. En déduire la formule des coefficients de Fourier de ce noyau de Fejér.
4. En comparant les noyaux correspondants, montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(\xi) = \pi \left(1 - \frac{|\xi|}{2}\right)_+.$$

Exercice 426 [ESPCI PC 2026 # 426] Soient

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t\sqrt{t}} \cos(tx) dt, \qquad J(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t\sqrt{t}} \sin(tx) dt.$$

1. Montrer que I, J sont définies et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer I et J.

Exercice 427 [ESPCI PC 2026 # 427] Soient $f, g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$W_{f,g}(t) = \det \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix}.$$

Dans les deux premières questions, f, g sont solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, où a, b sont continues.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$W_{f,g}(t) = C \exp\left(-\int_0^t a(s) ds\right).$$

2. Montrer que (f, g) est une base de l'espace des solutions si et seulement si $W_{f,g}$ ne s'annule pas.
3. Dans le cas général, si $W_{f,g}$ ne s'annule pas, montrer qu'il existe des fonctions continues a, b telles que f, g forment une base de solutions de cette équation différentielle.

Exercice 428 [ESPCI PC 2026 # 428]

1. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a, y \in C^0([t_0, +\infty[)$ avec $a \geq 0$ et

$$y(t) \leq C + \int_{t_0}^t a(s)y(s) ds.$$

Montrer que $y(t) \leq C \exp(\int_{t_0}^t a(s) ds)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne et $y' = f \circ y$. Pour deux solutions y_1, y_2, montrer qu'il existe M tel que

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq |y_2(0) - y_1(0)| e^{Mt} \quad (t \geq 0).$$

Exercice 429 [ESPCI PC 2026 # 429] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. Posons

$$J(X) = \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - B^T X.$$

1. Montrer que J est strictement convexe.
2. Montrer que $J(X) \to +\infty$ lorsque $\|X\| \to +\infty$.
3. Montrer que J admet un unique minimum en la solution X_0 de $AX = B$.

3) Probabilités

Exercice 430 [ESPCI PC 2026 # 430] Soit d_n le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$ et $A(x) = \sum_{n \geq 0} d_n x^n / n!$.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$.
2. Minorer le rayon de convergence de A.
3. Calculer $e^x A(x)$, puis en déduire une expression de d_n.
4. Quelle est la probabilité qu'une permutation soit un dérangement et quelle est sa limite lorsque $n \to \infty$?
5. On répète n fois une expérience de réussite $1/n$. Quelle est la probabilité d'au moins une réussite ? Que devient-elle lorsque n croît ?

Exercice 431 [ESPCI PC 2026 # 431] Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire et $A = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j}$.

1. Montrer que A est diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles.
2. Si λ est sa plus grande valeur propre, montrer que

$$\lambda = \sup_{\|V\|=1} \mathbf{V}(V^T X),$$

et donner un cas d'égalité.

Exercice 432 [ESPCI PC 2026 # 432]

1. Soient $H, K \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ commutant et $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe des variables aléatoires réelles X, Y telles que, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}(e^{i(sX+tY)}) = \mathrm{Tr}(Re^{i(sH+tK)}).$$

2. Pour $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $R = I_2/2$, montrer que la propriété précédente est fausse.

VII) Mines-Ponts MP/MPI AUTRE

1) Algèbre

Exercice 433 [Mines-Ponts 2026 # 433] On note $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[$. Pour $r = p/q$ irréductible, on pose

$$f(r) = \frac{p(p-1)}{2} + q.$$

1. Montrer que f prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que 3 n'a pas d'antécédent. Que peut-on en déduire ?
2. Si $f(p/q) = f(p'/q')$, établir $(p'-p)(p+p'-1) = 2(q-q')$, puis montrer que f est injective.
3. Montrer que $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Exercice 434 [Mines-Ponts 2026 # 434] Majorer asymptotiquement aussi bien que possible l'ordre maximal d'un élément de S_n.

Exercice 435 [Mines-Ponts 2026 # 435] Soit $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Exprimer F_n en fonction de n.
2. Montrer que $F_n \wedge F_{n+1} = 1$ pour $n \geq 1$.
3. Montrer que $F_{n+m} = F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m$ pour $n, m \geq 1$.

Exercice 436 [Mines-Ponts 2026 # 436] Fermat conjecturait que 26 est le seul entier naturel qui s'écrit à la fois comme un carré augmenté de 1 et comme un cube diminué de 1. On se propose de le démontrer en étudiant l'équation $y^3 = x^2 + 2$ dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $A = \{a + ib\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et que cette écriture est unique.
2. Montrer que A est euclidien, puis principal.
3. Déterminer les inversibles de A.
4. Si (x,y) est solution, montrer que $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux dans A, puis en déduire que $x + i\sqrt{2}$ possède une racine cubique dans A.
5. Déterminer les couples $(x,z) \in \mathbb{Z} \times A$ tels que $z^3 = x + i\sqrt{2}$, puis conclure pour l'équation initiale.

Exercice 437 [Mines-Ponts 2026 # 437]

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
2. Poser $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$, que les F_n sont deux à deux premiers entre eux, et conclure.
3. On suppose les nombres premiers en nombre fini et p maximum. Soit q premier divisant $2^p - 1$. Montrer que 2 est d'ordre p modulo q, puis obtenir une contradiction.

Exercice 438 [Mines-Ponts 2026 # 438] Le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il cyclique ? On pourra traiter le cas où n est premier puis une puissance d'un nombre premier.

Exercice 439 [Mines-Ponts 2026 # 439] Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer que chaque $k \in [\![1, p-1]\!]$ admet un unique inverse k' modulo p.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} k' \equiv 0 \pmod{p}$.
3. Si $p-1$ divise m, montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} k^m = -1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. Sinon, trouver a tel que $a^m \not\equiv 1 \pmod{p}$ et en déduire $\sum_{k=1}^{p-1} k^m \equiv 0 \pmod{p}$.

Exercice 440 [Mines-Ponts 2026 # 440] Soit G un groupe fini dont tous les éléments non neutres sont d'ordre 2.

1. Montrer que G est abélien.
2. Soient H un sous-groupe et $y \in G \setminus H$. Montrer que $H \cup yH$ est un sous-groupe et que cette union est disjointe.
3. En déduire que $|G|$ est une puissance de 2.
4. Calculer le produit de tous les éléments de G.

Exercice 441 [Mines-Ponts 2026 # 441] Soient A un anneau commutatif et I un idéal. Posons

$$R(I) = \{x \in A \mid \exists n \geq 1,\ x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal contenant I.
2. Pour des idéaux I, J, montrer que $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$ et $R(I) + R(J) \subset R(I+J)$.
3. Montrer que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ si et seulement si n est sans facteur carré.

Exercice 442 [Mines-Ponts 2026 # 442] Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes z, z^2, z^5 soient alignés.

Exercice 443 [Mines-Ponts 2026 # 443] Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, avec $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$. Montrer que toute racine complexe z de P vérifie $|z| \geq 1$.

Exercice 444 [Mines-Ponts 2026 # 444] Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ et $M = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|/|a_n|$.

1. Montrer que toute racine z de P vérifie $|z| \leq 1 + M$.
2. Si $m \in \mathbb{N}$, $m > M + 2$ et $P(m)$ est premier, montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 445 [Mines-Ponts 2026 # 445]

1. Soient $0 < a_0 < \cdots < a_n$ et $P = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$. Montrer que toute racine z vérifie $|z| > 1$.
2. Si $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ a des coefficients strictement positifs, montrer que toute racine z vérifie

$$\min_{0 \leq k < n} \frac{b_k}{b_{k+1}} \leq |z| \leq \max_{0 \leq k < n} \frac{b_k}{b_{k+1}}.$$

Exercice 446 [Mines-Ponts 2026 # 446] Soient $a < b$, une subdivision $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, des réels $y_0, \ldots, y_n, z$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x_k) = y_k$ pour tout k et $\int_a^b P(t)dt = z$?

Exercice 447 [Mines-Ponts 2026 # 447] Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$, non tous deux constants. Posons $P = A + iB$ et $\overline{P} = A - iB$. On suppose que les racines de P ont une partie imaginaire strictement négative.

1. Montrer que $|P(z)| = |\overline{P}(z)|$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $aA + bB$ n'a que des racines réelles.

Exercice 448 [Mines-Ponts 2026 # 448] Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que
$$X^{2n} - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right).$$
2. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

Exercice 449 [Mines-Ponts 2026 # 449] Soient $n \geq 1$ et $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in K^{n+1}$. Montrer que $a_0 \neq 0$ si et seulement si, pour tout $Q \in K[X]$, il existe un unique $P \in K[X]$ tel que
$$\sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = Q.$$

Exercice 450 [Mines-Ponts 2026 # 450] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$, scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de P'/P.
2. Montrer que $(P')^2(x) - P(x)P''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $(P^{(k+1)}(0))^2 > P^{(k+2)}(0)P^{(k)}(0)$ pour $0 \leq k < n$.
5. Si $P = \sum a_k X^k$, montrer que $a_{k+1}^2 > a_k a_{k+2}$.

Exercice 451 [Mines-Ponts 2026 # 451] Soit K un corps. On appelle pgcd de $P_1, P_2 \in K[X]$ un diviseur commun de degré maximal.

1. Montrer qu'un pgcd existe et qu'il existe un unique pgcd unitaire.
2. Rappeler la division euclidienne et énoncer puis démontrer Bézout.
3. Montrer que l'algorithme d'Euclide s'applique dans $K[X]$ et calculer le pgcd de $X^3 - 3X^2 + 1$ et $2X^2 - 1$.
4. Soient $A, B \in K[X]$, A non constant, $d = \deg A$, et R_n le reste de $X^n B$ modulo A. Montrer qu'il existe U_n, V_n tels que $R_n = U_n A + V_n B$, $\deg R_n < \deg A$, et que (R_n) vérifie une récurrence linéaire d'ordre au plus d. Si $\gcd(A, B) = 1$, montrer que (R_n) engendre $K_{d-1}[X]$ et que $(R_0, \ldots, R_{d-1})$ en est une base.

Exercice 452 [Mines-Ponts 2026 # 452] Un complexe est un entier algébrique s'il annule un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$. Soient a, b deux entiers algébriques.

1. Montrer que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\{a^k b^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{N}\}$ est de dimension finie.
2. Si P, Q sont les polynômes minimaux unitaires entiers de a, b, la famille $(a^k b^\ell)_{0 \leq k < \deg P,\ 0 \leq \ell < \deg Q}$ est-elle toujours libre ?
3. Si elle est libre, montrer que $a + b$ et ab sont des entiers algébriques.
4. Établir le même résultat dans le cas général.

Exercice 453 [Mines-Ponts 2026 # 453] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente de rang $n - 1$. Montrer qu'elle est semblable à la matrice ayant des 1 sur la surdiagonale et des 0 ailleurs.

Exercice 454 [Mines-Ponts 2026 # 454] Trouver les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que
$$M^3 + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 455 [Mines-Ponts 2026 # 455] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$ telle que $A + D$ soit inversible.

Exercice 456 [Mines-Ponts 2026 # 456] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que
$$\mathrm{tr}((A + B)^k) = \mathrm{tr}(A^k) + \mathrm{tr}(B^k)$$
pour tout $k \geq 1$.

Exercice 457 [Mines-Ponts 2026 # 457] Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $M = (z^{|p-q|})_{1 \leq p,q \leq n}$. Donner une condition sur z pour que M soit inversible et déterminer alors M^{-1}.

Exercice 458 [Mines-Ponts 2026 # 458] Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.

1. Montrer que deux sous-espaces de même dimension ont un supplémentaire commun.
2. Soit K un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ et F stable par tous ses éléments. Montrer que F possède un supplémentaire stable par K.

Exercice 459 [Mines-Ponts 2026 # 459] 1. Soit J_n la matrice nulle sur la diagonale et égale à 1 ailleurs. Pour $n \geq 2$, poser $A_n = \mathrm{diag}(J_2, J_{n-2})$. Calculer $\det J_n$ et $\det A_n$.

2. Soit $M \in \mathcal{S}_n$ telle que $m_{ii} = 0$ et $m_{ij} > 0$ si $i \neq j$. M est-elle nécessairement inversible ?

Exercice 460 [Mines-Ponts 2026 # 460] 1. Soit $P = X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$ de racines x_1, x_2. Poser $N_1 = x_1 + x_2$, $N_2 = x_1^2 + x_2^2$. Calculer $\det \begin{pmatrix} 2 & N_1 \\ N_1 & N_2 \end{pmatrix}$.

2. Pour $P = X^3 + pX + q$ de racines x_1, x_2, x_3, poser $N_k = \sum_i x_i^k$. Calculer $\det(N_{i+j})_{1 \leq i,j \leq 3}$.

3. Pour un polynôme unitaire P de degré n et ses racines $x_1, \ldots, x_n$, poser $N_0 = n$, $N_k = \sum_i x_i^k$. Relier $\det(N_{i+j})_{0 \leq i,j < n}$ au déterminant de Vandermonde des racines.

Exercice 461 [Mines-Ponts 2026 # 461] Soient E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\ker(u^3) = \mathrm{Im}(u^2)$. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^4)$.

Exercice 462 [Mines-Ponts 2026 # 462] Soient E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v$ soit inversible.

Exercice 463 [Mines-Ponts 2026 # 463] Soient E un K-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si E est de dimension finie, montrer l'équivalence entre $\ker u = \ker u^2$, $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$ et $E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u$.
2. Donner un contre-exemple en dimension infinie.
3. Montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u$ équivaut à $\ker u = \ker u^2$ et $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$.

Exercice 464 [Mines-Ponts 2026 # 464] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^m = \mathrm{id}$. Montrer que

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k$$

est un projecteur et que

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{tr}(u^k) = \dim \ker(u - \mathrm{id}).$$

Exercice 465 [Mines-Ponts 2026 # 465] Soient E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit G l'ensemble des u tels que $uf = fu$, $u^2 f = u$ et $f^{p+1} u = f$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $u \in G$, la suite $(u^{k+1} f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante.
2. Pour $a, b \in G$, considérer afb et montrer que $a = b$.
3. À quelle condition G est-il non vide ?

Exercice 466 [Mines-Ponts 2026 # 466] Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_k)_{1 \leq k \leq n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le rang de la matrice $(P^{(i-1)}(a_j))_{1 \leq i,j \leq n+1}$.

Exercice 467 [Mines-Ponts 2026 # 467] Soient $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in K$ et $P_1, \ldots, P_n \in K_{n-1}[X]$. Posons $M = (P_i(a_j))_{1 \leq i,j \leq n}$. Déterminer $\mathrm{rg}(M)$.

Exercice 468 [Mines-Ponts 2026 # 468] Soient $A, B \in K[X]$ avec $\deg A = m$, $\deg B \leq n$. On pose

$$\varphi : (U, V) \in K_{n-1}[X] \times K_{m-1}[X] \mapsto AU + BV \in K_{m+n-1}[X].$$

1. Montrer que φ est bien définie et linéaire.
2. Décrire son noyau et son image en fonction de $D = \gcd(A, B)$.

Exercice 469 [Mines-Ponts 2026 # 469] Soient $A, B \in K[X]$, $D = \gcd(A, B)$, E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\ker A(f) \cap \ker B(f) = \ker D(f)$ et $\mathrm{Im}\, A(f) + \mathrm{Im}\, B(f) = \mathrm{Im}\, D(f)$.
2. Existe-t-il des relations analogues avec le ppcm ?

Exercice 470 [Mines-Ponts 2026 # 470] Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rg}\, M < 3\}$.

1. Pour $M_1, M_2 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, montrer que $[M_1, M_2] \cap E$ est fini et de cardinal au plus 3.
2. Pour chaque $m \in \{0, 1, 2, 3\}$, donner M_1, M_2 tels que $|[M_1, M_2] \cap E| = m$.

Exercice 471 [Mines-Ponts 2026 # 471] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant.

1. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$, puis que $\det(A^{2k} + B^{2k}) \geq 0$ pour tout $k \geq 1$.
2. Si $\det(A + B) \geq 0$, montrer que $\det(A^{2k+1} + B^{2k+1}) \geq 0$ pour tout $k \geq 1$.

Exercice 472 [Mines-Ponts 2026 # 472] Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \setminus \{0\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\dim F \leq n$.
2. Si n est impair, montrer que $\dim F \leq 1$.
3. Donner un cas d'égalité dans la première question pour $n = 2$ ou 4.

Exercice 473 [Mines-Ponts 2026 # 473] Soit

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), +\forall z \in \mathbb{C},\ P - zM \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}.$$

1. Montrer que E ne contient aucune matrice inversible.
2. Décrire E.

Exercice 474 [Mines-Ponts 2026 # 474] Soit A une partie finie non vide de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ stable par produit. Posons $S = \sum_{M\in A} M$. Montrer que $|A|$ divise $\mathrm{Tr}(S)$.

Exercice 475 [Mines-Ponts 2026 # 475] Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour $a \in \mathbb{R}$, poser $f_a(x) = f(x+a)$, et $F_f = \mathrm{Vect}(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

1. Donner un exemple non nul où F_f est de dimension finie et préciser cette dimension.
2. Montrer que si F_f est de dimension finie, alors $F_{f'}$ l'est aussi.
3. Déterminer les fonctions f telles que $\dim F_f = 1$, puis 2.

Exercice 476 [Mines-Ponts 2026 # 476] Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute matrice nilpotente N, AN soit nilpotente.

Exercice 477 [Mines-Ponts 2026 # 477]

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A, B, A+B$ soient nilpotentes. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = 0$.
2. Pour un sous-espace $F \subset \mathcal{M}_n(K)$ de base $(A_1,\dots,A_p)$, poser $F^\perp = \{B \mid \mathrm{Tr}(AB) = 0\ \forall A \in F\}$. Montrer que l'application $B \mapsto (\mathrm{Tr}(A_iB))_i$ est surjective et que $\dim F^\perp = n^2 - \dim F$.
3. Si G ne contient que des matrices nilpotentes, donner un exemple de dimension $n(n-1)/2$ et montrer que, en général, $\dim G \leq n(n-1)/2$.

Exercice 478 [Mines-Ponts 2026 # 478] On considère une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

1. Montrer qu'une telle norme existe et que $\|B^k\| \leq \|B\|^k$. Que dire pour $k = 0$?
2. Si $AB - BA = B$, montrer que $AB^m - B^mA = mB^m$ pour $m \geq 1$, puis en déduire que B est nilpotente.

Exercice 479 [Mines-Ponts 2026 # 479] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que leurs polynômes caractéristiques sont égaux si et seulement si $\mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k)$ pour $0 \leq k \leq 2n-1$.

Exercice 480 [Mines-Ponts 2026 # 480] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe P, Q inversibles tels que $Q^{-1}AP$ et $Q^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

Exercice 481 [Mines-Ponts 2026 # 481] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $A^3 + dA = 0$, déterminer d et calculer A^{2n}.

Exercice 482 [Mines-Ponts 2026 # 482]

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_r = \mathrm{diag}(I_r, 0)$.
2. En déduire que, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 483 [Mines-Ponts 2026 # 483] Soit $T : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (1-X)^n P(X/(X-1))$. Montrer que T est un endomorphisme. Est-il diagonalisable ?

Exercice 484 [Mines-Ponts 2026 # 484] Soit $n \geq 1$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, définissons $T(P)$ par

$$T(P)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x P(t)dt \quad (x > 0).$$

1. Montrer que T définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 485 [Mines-Ponts 2026 # 485] Soient $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et F le sous-espace des suites convergentes. Pour $u \in E$, poser $\varphi(u)_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k$.

1. Déterminer les éléments propres de φ.
2. Montrer que F est stable et déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme induit.

Exercice 486 [Mines-Ponts 2026 # 486] Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = (n-1)i + j$.

1. Calculer $\mathrm{rg}(A)$.
2. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 487 [Mines-Ponts 2026 # 487]

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $AB - BA = B$. Montrer que B est nilpotente.
2. Si $AB - BA = \lambda A + \mu B$, montrer que A, B possèdent un vecteur propre commun, puis sont cotrigonalisables.

Exercice 488 [Mines-Ponts 2026 # 488] Soit $n \geq 3$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,1} = a_{i,n} = 1$ pour tout i, les autres coefficients étant nuls. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.

Exercice 489 [Mines-Ponts 2026 # 489] Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les éléments propres complexes de B. Est-elle diagonalisable ?

Exercice 490 [Mines-Ponts 2026 # 490] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A^i) = 0$ pour $1 \leq i < n$ et $\mathrm{tr}(A^n) \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 491 [Mines-Ponts 2026 # 491] Pour $a \in \mathbb{Z}$, poser

$$S_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler le lien entre inverse et comatrice.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe et que $S_a, T_a \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
3. Calculer $T_b S_a T_b^{-1}$.
4. Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ a pour polynôme caractéristique $X^2 - 1$, montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $M = PS_0P^{-1}$ ou $M = PS_1P^{-1}$.

Exercice 492 [Mines-Ponts 2026 # 492] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

1. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(M)$ si et seulement si $1 \in \mathrm{Sp}(M)$.
2. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 493 [Mines-Ponts 2026 # 493] Soit (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et S_n le groupe des permutations. Pour $\sigma \in S_n$, soit $P_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$.

1. Montrer que $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme injectif.
2. Pour le cycle $(1 \cdots n)$, expliciter P_σ et calculer son polynôme caractéristique.
3. Pour une matrice diagonale par blocs $M = \mathrm{diag}(A, B)$, établir la multilinéarité et l'alternance du déterminant par rapport aux colonnes de A, puis en déduire $\det M = \det A \det B$.

Exercice 494 [Mines-Ponts 2026 # 494] Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $\chi_f = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{n_k}$ avec λ_k distincts et $F_k = \ker(f - \lambda_k \,\mathrm{id})^{n_k}$, montrer que $E = \bigoplus_k F_k$.
2. Si u est nilpotent sur un espace V de dimension p avec $u^{p-1} \neq 0$, montrer qu'il existe une base où sa matrice est un bloc de Jordan et en déduire que le nombre de sous-espaces stables par u est fini.
3. Si tous les F_k sont de dimension 1, montrer que f n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables.

Exercice 495 [Mines-Ponts 2026 # 495] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.

1. Montrer que $\dim E$ est paire.
2. Déterminer les polynômes minimal et caractéristique de f.
3. Pour $a \neq 0$, montrer que $(a, f(a))$ est libre et poser $F(a) = \mathrm{Vect}(a, f(a))$.
4. Montrer que E est somme directe de tels plans.
5. En déduire qu'il existe une base où la matrice de f est diagonale par blocs égaux à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 496 [Mines-Ponts 2026 # 496] Soient E un espace vectoriel complexe de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. S'il existe $k \geq 2$ tel que f^k soit un projecteur, montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^k)$.

Exercice 497 [Mines-Ponts 2026 # 497] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A = I_n$. On suppose $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Q}$. Montrer que n est divisible par 3 et déterminer $\det A$.

Exercice 498 [Mines-Ponts 2026 # 498] Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie. Montrer que les éléments nilpotents de $\mathbb{C}[u]$ forment un sous-espace vectoriel et déterminer sa dimension en fonction du degré du polynôme minimal de u et du nombre de valeurs propres de u.

Exercice 499 [Mines-Ponts 2026 # 499] Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$, de racines $r_1, \ldots, r_n$ avec multiplicités. Poser $S_k = \sum_{i=1}^n r_i^k$ et C la matrice compagnon de P.

1. Déterminer χ_C et le polynôme minimal de C.
2. Pour $\ell \geq 0$, calculer $\sum_{k=0}^n a_k S_{k+\ell}$.

Exercice 500 [Mines-Ponts 2026 # 500] Soient E réel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Exprimer les coefficients de X^{n-1} et X^{n-2} dans χ_u avec $\mathrm{Tr}(u)$ et $\mathrm{Tr}(u^2)$.
2. Si u est de rang 2, montrer que $\chi_u = X^{n-2}P(X)$ pour un polynôme P de degré 2, dont on déterminera les coefficients.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit trigonalisable.

Exercice 501 [Mines-Ponts 2026 # 501] Soit E complexe de dimension $n \geq 2$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $fg - gf = f$.

1. Montrer que f est nilpotent.
2. Si $\dim \ker f = 1$, déterminer l'indice de nilpotence de f et montrer qu'il existe une base où f est un bloc de Jordan et $g = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda + 1, \ldots, \lambda + n - 1)$.

Exercice 502 [Mines-Ponts 2026 # 502] On considère l'équation matricielle $M^3 - 2M^2 + M = 0$. Quelles sont les traces possibles des solutions $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Déterminer le nombre de classes de similitude dans l'ensemble des solutions.

Exercice 503 [Mines-Ponts 2026 # 503] Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\pi_A(X^2) = \pi_A(X)\pi_A(X - 1)$.

1. Montrer que n est pair.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit semblable à une matrice diagonale par blocs de tailles 1 ou 2.

Exercice 504 [Mines-Ponts 2026 # 504] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMA = 0\}$. Calculer $\dim F$ lorsque A est diagonalisable, puis dans le cas général.

Exercice 505 [Mines-Ponts 2026 # 505] Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ de degré au moins 2 et $f : M \mapsto P(M)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si $\deg P$ est pair, f est-elle surjective ?
2. Même question si $\deg P = 3$, puis si $\deg P$ est impair.

Exercice 506 [Mines-Ponts 2026 # 506] Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que PA soit diagonalisable pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 507 [Mines-Ponts 2026 # 507] Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ pour tout i.

1. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont de module au plus 1.
2. Si $|\lambda| = 1$ est une valeur propre, montrer que $\ker(A - \lambda I_n) = \ker((A - \lambda I_n)^2)$.
3. Si tous les coefficients sont strictement positifs, montrer que la seule valeur propre de module 1 est 1.

Exercice 508 [Mines-Ponts 2026 # 508] 1. Si $n \geq 2$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, montrer qu'il existe B telle que $B^2 = I_n + N$.

2. En déduire que toute matrice inversible complexe admet une racine carrée.

Exercice 509 [Mines-Ponts 2026 # 509] 1. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & M \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

2. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A, B diagonalisables et $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$. Montrer que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est semblable à $\mathrm{diag}(A, B)$.
3. Que devient le résultat sans diagonalisation de A, B ?
4. Que devient-il si les spectres ont une intersection non vide ?

Exercice 510 [Mines-Ponts 2026 # 510] Soient $n \geq 2$ et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $N \geq 1$ avec $A^N = I_n$ pour tout $A \in G$.

1. Montrer que tous les éléments de G sont diagonalisables.
2. Soit (M_i) une base de $\mathrm{Vect}(G)$ formée d'éléments de G et $f(A) = (\mathrm{tr}(AM_i))_i$. Si $f(A) = f(B)$, poser $C = AB^{-1}$ et montrer que $\mathrm{tr}(C^k) = n$ pour tout k, puis que $C - I_n$ est nilpotente.
3. Montrer que G est fini.

Exercice 511 [Mines-Ponts 2026 # 511] Soient K un corps, E un K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ annulé par un polynôme dont 0 est racine simple.

1. Montrer que $E = \ker f + \mathrm{Im}\, f$.

On suppose ensuite $K = \mathbb{C}$ et $\dim E = n < +\infty$.

1. Si $g \circ f = 0$, montrer que f, g sont cotrigonalisables.
2. Montrer que toute famille finie d'endomorphismes commutants est cotrigonalisable.
3. Si $f_1, \ldots, f_n$ sont nilpotents et commutent, calculer $f_1 \circ \cdots \circ f_n$.

Exercice 512 [Mines-Ponts 2026 # 512] Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ si et seulement si $a \mapsto a(A + aI_n)^{-1}$ admet une limite finie lorsque $a \to 0$.

Exercice 513 [Mines-Ponts 2026 # 513] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_A : M \mapsto AM - MA$. À quelle condition Φ_A est-il diagonalisable ?

Exercice 514 [Mines-Ponts 2026 # 514] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Étudier les éléments propres et la diagonalisabilité des endomorphismes

$$f(M) = \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A, \qquad g(M) = \mathrm{tr}(A)BM - \mathrm{tr}(BM)A.$$

Exercice 515 [Mines-Ponts 2026 # 515] Soient $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Posons $\Phi_A(M) = AM$ et $\Psi_B(M) = MB$.

1. Déterminer leurs polynômes minimaux et la condition de diagonalisabilité.
2. Lorsque cette condition est satisfaite, montrer qu'il existe une base de matrices de rang 1 dans laquelle les deux endomorphismes sont diagonaux.

Exercice 516 [Mines-Ponts 2026 # 516] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 + B^2 = 2AB$. Poser $X = A - B$.

1. Montrer que $X^k B - BX^k = kX^{k+1}$ pour tout $k \geq 1$.
2. En déduire que X est nilpotente.
3. A et B sont-elles cotrigonalisables ?

Exercice 517 [Mines-Ponts 2026 # 517] Soit $n \geq 2$. Déterminer, selon la parité de n, les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(M) = 0$ implique $\det M = 0$.

Exercice 518 [Mines-Ponts 2026 # 518] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^k \to B$.

1. Montrer que B est un projecteur commutant avec A et expliciter son noyau et son image.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{|z| < 1\} \cup \{1\}$.
3. Si $1 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, montrer que $B = 0$.
4. Montrer que la multiplicité de 1 dans χ_A vaut $\dim \ker(A - I_n)$.

Exercice 519 [Mines-Ponts 2026 # 519] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ est diagonalisable.

Exercice 520 [Mines-Ponts 2026 # 520] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \prod_{i=1}^{q}(X - \lambda_i)$ où les λ_i sont ses valeurs propres distinctes.

1. Montrer qu'il existe $R, S \in \mathbb{C}[X]$ tels que $RP + SP' = 1$.
2. Poser $A_0 = A$ et $A_{k+1} = A_k - P(A_k)S(A_k)$. Montrer qu'il existe $C_k \in \mathbb{C}[A]$ tel que $A_k = P(A)^{2^k}C_k$, puis qu'un certain A_p est diagonalisable.
3. En déduire que $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente.

Exercice 521 [Mines-Ponts 2026 # 521] Soient K un corps, E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $x \in E$, poser $I_x = \{P \in K[X] \mid P(f)(x) = 0\}$.

1. Montrer que I_x est un idéal principal.
2. Si le polynôme minimal est P^α avec P unitaire irréductible, montrer qu'il existe x tel que $I_x = (\pi_f)$.
3. Montrer que $\deg \pi_f = n$ si et seulement s'il existe x tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit libre.
4. Étudier le cas général.

Exercice 522 [Mines-Ponts 2026 # 522] Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$|\det M| \leq \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2\right)^{1/2}.$$

Exercice 523 [Mines-Ponts 2026 # 523] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente non nulle. Déterminer l'image de $\varphi : X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^T MX$.

Exercice 524 [Mines-Ponts 2026 # 524]

1. Montrer que

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer qu'il existe une unique suite (T_n) telle que $T_n(\cos x) = \cos(nx)$, puis déterminer degré et coefficient dominant.
3. Pour $U_n[X]$ les polynômes unitaires de degré n, calculer $\min_{P \in U_n[X]} \int_{-1}^{1} P(t)^2/\sqrt{1-t^2}\, dt$.
4. Que dire de la factorisation réelle de T_n ?

Exercice 525 [Mines-Ponts 2026 # 525] Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$$

est un produit scalaire sur E. Montrer qu'il existe une unique base orthonormée échelonnée en degré et à coefficients dominants positifs. La déterminer lorsque tous les a_k sont égaux.

Exercice 526 [Mines-Ponts 2026 # 526] Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Calculer

$$\inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt.$$

Exercice 527 [Mines-Ponts 2026 # 527] Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Pour $n \geq 1$, calculer la distance π_n de $X^n/\|X^n\|$ au sous-espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, puis un équivalent de π_n.

Exercice 528 [Mines-Ponts 2026 # 528] Soit $n \geq 2$ et $f_{i,j}(x) = x_i x_j$ sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\dim \mathrm{Vect}(f_{i,j}) = n(n+1)/2$.
2. Soient $m \geq 2$, $\alpha \in [0, 1[$, $\varepsilon > 0$ et des unitaires $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ tels que $|\langle u_i, u_j\rangle^2 - \alpha^2| < \varepsilon^2$ pour $i \neq j$. Poser $G(x, y) = \langle x, y\rangle^2 - \alpha^2\|x\|^2\|y\|^2$. Montrer que, pour ε assez petit, $(G(u_i, u_j))$ est inversible et $m \leq n(n+1)/2$.

Exercice 529 [Mines-Ponts 2026 # 529] Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel. Montrer qu'il existe $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ tels que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\right\| \leq \sqrt{n}.$$

Exercice 530 [Mines-Ponts 2026 # 530] Soit E euclidien. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u(V^\perp) = u(V)^\perp$ pour tout sous-espace vectoriel V de E.

Exercice 531 [Mines-Ponts 2026 # 531] Soit E euclidien et $f : E \to E$ telle que $f(0) = 0$ et $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

1. Que peut-on dire de f ?
2. Étudier la convergence de $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.
3. Que se passe-t-il si f est linéaire et $\|f(x)\| \leq \|x\|$?
4. Que devient l'exercice dans un espace préhilbertien ?

Exercice 532 [Mines-Ponts 2026 # 532] Soient E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que $f(x) = x$ implique $f^*(x) = x$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(f - \mathrm{id}) = E$.

Exercice 533 [Mines-Ponts 2026 # 533] Soient E euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. Caractériser les $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\|v(x)\| = \|u(x)\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 534 [Mines-Ponts 2026 # 534] Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $\langle U, V\rangle = \mathrm{Tr}(UV^T)$. Pour $A \in E$, poser $T_A(M) = AM - MA$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(T_A)^\perp = \{M \mid A^T M = MA^T\}$.
2. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $A \in \mathrm{Im}(T_A)$.
3. Montrer que A est nilpotente si et seulement si elle est semblable à $2A$.

Exercice 535 [Mines-Ponts 2026 # 535] Soient E euclidien, V l'ensemble de ses sous-espaces et $x \in E$. Pour $W \in V$, soit π_W la projection orthogonale sur W. Déterminer $\{\pi_W(x) \mid W \in V\}$.

Exercice 536 [Mines-Ponts 2026 # 536] Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $P(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 537 [Mines-Ponts 2026 # 537] Déterminer les matrices $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 538 [Mines-Ponts 2026 # 538] Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux non nuls sont de taille 2×2.

Exercice 539 [Mines-Ponts 2026 # 539] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre A antisymétrique et $P^{-1}AP$ à diagonale nulle pour toute $P \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 540 [Mines-Ponts 2026 # 540] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Discuter le nombre de matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

Exercice 541 [Mines-Ponts 2026 # 541] Déterminer les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M^T$.

Exercice 542 [Mines-Ponts 2026 # 542]

1. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \geq 1$ tels que $(M + M^T)^p = 0$. Montrer que M est antisymétrique.
2. Trouver $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $(M + M^T)^2 = 0$ mais $M + M^T \neq 0$.

Exercice 543 [Mines-Ponts 2026 # 543] Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^T = A^2$.

Exercice 544 [Mines-Ponts 2026 # 544] Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non colinéaires et $M = AB^T + BA^T$.

1. Justifier que M est diagonalisable.
2. Calculer $\mathrm{rg}\, M$.
3. Expliciter ses éléments propres.

Exercice 545 [Mines-Ponts 2026 # 545] Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{Q})$ telles que $\mathrm{rg}(A + tB) < n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}$ tel que $X^T AX = X^T BX = 0$.

Exercice 546 [Mines-Ponts 2026 # 546] Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sans coefficient nul. Posons $B = (1/a_{i,j})$. À quelle condition $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?

Exercice 547 [Mines-Ponts 2026 # 547] Soit n impair, $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $C(A) = \{M \mid AM = MA\}$. Montrer que $C(A) \cap C(B) = \mathrm{Vect}(I_n)$ si et seulement s'il n'existe pas de sous-espaces non nuls F, G stables par A, B tels que $F \oplus G = \mathbb{R}^n$.

Exercice 548 [Mines-Ponts 2026 # 548] On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

1. Si $AA^T = A^T A$ et F est stable par A, montrer que $F^\perp$ est stable par A.
2. Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $AA^T = A^T A$, montrer que A est diagonalisable ou orthosemblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Exercice 549 [Mines-Ponts 2026 # 549] Posons $C_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = \lambda I_n \text{ pour un } \lambda \in \mathbb{R}\}$. Soit d_n la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel inclus dans C_n. Déterminer d_1, d_2, d_3.

Exercice 550 [Mines-Ponts 2026 # 550] Soit $n \geq 2$, $V_n = \mathrm{Vect}(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))$ et munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Déterminer V_2.
2. Montrer que $e^A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ pour toute matrice antisymétrique A.
3. En déduire que $V_n^\perp \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.

Exercice 551 [Mines-Ponts 2026 # 551] Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(\exp(xA)) > 0$.

Exercice 552 [Mines-Ponts 2026 # 552] Soit $n \geq 2$ et $U_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M^T = M\}$.

1. Montrer que si $M \in U_n$, ses valeurs propres sont réelles.
2. Pour $M = (m_{k,j})$ définie par $m_{k,j} = i$ si $k < j$, $m_{k,j} = -i$ si $k > j$ et diagonale nulle, montrer que M est diagonalisable et déterminer valeurs propres et vecteurs propres.

Exercice 553 [Mines-Ponts 2026 # 553] Posons $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid I_n + M \text{ est inversible}\}$.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe.
2. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \Omega$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \neq \Omega$.
3. Pour $M \in \Omega$, poser $f(M) = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Si $M \in O_n(\mathbb{R}) \cap \Omega$, montrer que $f(M)$ est antisymétrique et $f(f(M)) = M$.
4. Pour $M \in O_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une diagonale J à coefficients dans $[-1, 1]$ telle que $\det(M + J) = 0$.

Exercice 554 [Mines-Ponts 2026 # 554] Soient $p \geq 2$, $A \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^p$ et $\alpha > 0$. Posons $a = A^{-1}b$ et $x_{n+1} = x_n + \alpha(b - Ax_n)$. Pour quelles valeurs de α la suite converge pour tout x_0 ?

Exercice 555 [Mines-Ponts 2026 # 555] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et diagonale D telles que $A = P^T P$ et $B = P^T D P$.
2. Si B est définie positive et $\alpha, \beta \geq 0$ avec $\alpha + \beta = 1$, montrer que

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq \det(A)^\alpha \det(B)^\beta.$$

Exercice 556 [Mines-Ponts 2026 # 556] Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\ker(A^T A) = \ker A$, donc A et $A^T A$ ont même rang r.
2. Montrer qu'il existe une famille orthonormée $(y_1, \ldots, y_r)$ de $\mathbb{R}^p$ telle que la matrice de restriction de $A^T A$ soit diagonale à coefficients strictement positifs.
3. Montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$, $V \in O_p(\mathbb{R})$ et $\Lambda \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ diagonale rectangulaire positive telle que $A = U\Lambda V$.

Exercice 557 [Mines-Ponts 2026 # 557]

1. Donner deux définitions de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et établir leur équivalence.
2. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{tr}(AB) \geq 0$ pour toute $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 558 [Mines-Ponts 2026 # 558] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $a\|X\|^2 \leq \langle X, AX\rangle \leq b\|X\|^2$ pour tout X. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(x) > 0$ sur $[a, b]$, montrer que $P(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 559 [Mines-Ponts 2026 # 559] Soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que SS' est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 560 [Mines-Ponts 2026 # 560]

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.
2. Soient E euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{S}^+(E)$ de spectre $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Montrer que

$$\prod_i \lambda_i = \inf_{(e_i) \text{ base orthonormée}} \prod_i \langle f(e_i), e_i\rangle.$$

Exercice 561 [Mines-Ponts 2026 # 561] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et A_i sa sous-matrice principale d'ordre i.

1. Si A est définie positive, montrer que chaque A_i l'est et $\det A_i > 0$.
2. Réciproquement, si $\det A_i > 0$ pour tout i, montrer que A est définie positive (traiter d'abord $n = 1, 2$).

Exercice 562 [Mines-Ponts 2026 # 562] Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{X \in \mathbb{R}^n \mid X^T S X = 1\}$ est compact non vide si et seulement si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 563 [Mines-Ponts 2026 # 563] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :

1. A est symétrique et la somme de deux valeurs propres de A n'est jamais nulle.
2. Pour toute matrice symétrique B, il existe une unique matrice symétrique M telle que $B = MA + AM$.

Exercice 564 [Mines-Ponts 2026 # 564]

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}\, A \leq r$ si et seulement si $A = \sum_{i=1}^r X_i X_i^T$ pour des $X_i \in \mathbb{R}^n$.
2. Cette propriété reste-t-elle vraie pour A symétrique quelconque ?
3. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ de rang 1, montrer qu'il existe X tel que $A = XX^T$.
4. Généraliser aux matrices complexes symétriques de rang r.

Exercice 565 [Mines-Ponts 2026 # 565] Soit E euclidien et N la norme d'opérateur.

1. Pour $f \in \mathcal{S}^+(E)$, montrer qu'il existe un unique $r \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $f = r^2$.
2. Pour $u \in \mathcal{S}(E)$, exprimer $N(u)$ à l'aide de son spectre.
3. Pour $f, g \in \mathcal{S}^+(E)$, montrer que

$$N(R(f) - R(g)) \leq \sqrt{N(f - g)}.$$

2) Analyse

Exercice 566 [Mines-Ponts 2026 # 566] Soit C une partie d'un espace normé telle que, pour tous $u \neq v$ de C, $]u, v[\cap C = \varnothing$. Montrer que si C est fermée, alors C est convexe. Est-ce vrai sans l'hypothèse de fermeture ?

Exercice 567 [Mines-Ponts 2026 # 567] Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, poser $N(M) = \sup_{P \in O_n(\mathbb{R})} |\mathrm{Tr}(PM)|$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 568 [Mines-Ponts 2026 # 568] Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $N(f) = (f(0)^2 + \int_0^1 (f')^2)^{1/2}$.

1. Montrer que N est une norme.
2. La comparer à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 569 [Mines-Ponts 2026 # 569] Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, poser $\|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)|dt$, $\|P\|_\infty = \sup_{[0,1]} |P|$ et $N(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\int_0^1 P(t)t^n dt|$.

1. Montrer que N est une norme.
2. N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. N et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 570 [Mines-Ponts 2026 # 570] Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, poser $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt$.

1. Montrer que N_a est une norme.

2. Comparer N_a et N_b et étudier la continuité de $P \mapsto P(b)$ pour la norme N_a.

Exercice 571 [Mines-Ponts 2026 # 571] Soient $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. Est-ce encore vrai pour $N(f) = \int_0^1 |f|$?

Exercice 572 [Mines-Ponts 2026 # 572] Soit $E = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme.
2. Si $g = f + 2f' + f''$, exprimer f en fonction de g.
3. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq aN(f)$.
4. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 573 [Mines-Ponts 2026 # 573] Soient K un compact d'un espace normé et $\varepsilon > 0$. Une partie $A \subset K$ est ε-séparée si deux points distincts sont à distance au moins ε. Montrer qu'il existe $M(\varepsilon)$ tel que toute partie ε-séparée de K ait cardinal au plus $M(\varepsilon)$.

Exercice 574 [Mines-Ponts 2026 # 574] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$ pour tous x, y. Montrer que f est constante.

Exercice 575 [Mines-Ponts 2026 # 575] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \mid f(x) > \alpha\}$ et $\{x \mid f(x) < \alpha\}$ soient ouverts. Montrer que f est continue.

Exercice 576 [Mines-Ponts 2026 # 576]

1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré n, montrer que
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(a + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{n} \frac{|P^{(k)}(a)|^2}{(k!)^2} r^{2k}.$$
2. Si K est un compact et $\partial K = K \setminus \mathring{K}$, montrer que $|P(z)| \leq \max_{w \in \partial K} |P(w)|$ pour $z \in K$.

Exercice 577 [Mines-Ponts 2026 # 577] Soit K un compact non vide d'un espace normé et $f : K \to K$ une isométrie. Montrer que f est surjective.

Exercice 578 [Mines-Ponts 2026 # 578] Décrire les sous-groupes compacts de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 579 [Mines-Ponts 2026 # 579] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue.

1. S'il existe c tel que $f^{-1}(\{c\})$ soit un singleton, que peut-on dire de c ?
2. S'il existe c tel que cette fibre soit compacte non vide, montrer que f possède un extremum.
3. Si toutes les fibres sont compactes, montrer que $f(x)$ admet une limite, éventuellement infinie, lorsque $\|x\| \to +\infty$.

Exercice 580 [Mines-Ponts 2026 # 580] Soit E un espace normé.

1. Si $f : E \to E$ est additive et bornée sur la boule unité, montrer que f est linéaire.
2. Si E est de dimension finie, f linéaire et $\|f(x)\| \leq \|x\|$, poser $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k$. Étudier la convergence si $\|f\|_{op} < 1$, puis si $\|f\|_{op} = 1$.

Exercice 581 [Mines-Ponts 2026 # 581] Soit u une contraction d'un espace normé E. Posons $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k$.

1. Simplifier $v_n \circ (u - \mathrm{id})$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \cap \ker(u - \mathrm{id}) = \{0\}$.
3. Si E est de dimension finie, montrer que leur somme est E.
4. Si $E = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - \mathrm{id})$, montrer que v_n converge simplement et que l'image est fermée.
5. Réciproquement, si v_n converge simplement et l'image est fermée, montrer que cette somme directe vaut E.

Exercice 582 [Mines-Ponts 2026 # 582] Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue non nulle sur un espace normé, et $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.

1. Montrer que $\|f\|_{op} = |f(a)|/d(a, \ker f)$.
2. Montrer que la distance est atteinte si et seulement s'il existe $b \neq 0$ tel que $\|f\|_{op} = |f(b)|/\|b\|$.
3. Pour $E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, poser $F(g) = \int_0^1 g - \int_{-1}^0 g$. Montrer que F est continue et calculer sa norme d'opérateur. Est-elle atteinte ?

Exercice 583 [Mines-Ponts 2026 # 583] Soit E l'espace des fonctions réelles continues bornées sur $\mathbb{R}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, poser $N_p(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^p e^{-|t|} f(t)|$.

1. Montrer que N_p est une norme.
2. Pour $c \in \mathbb{R}$, la forme $f \mapsto f(c)$ est-elle continue pour N_p ?
3. Si $p \neq q$, les normes N_p, N_q sont-elles équivalentes ?

Exercice 584 [Mines-Ponts 2026 # 584]

1. Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.
2. Soit C un convexe compact non vide d'un espace euclidien. Pour x, montrer qu'il existe un unique projeté $p(x) \in C$ réalisant la distance à C, et caractériser $y = p(x)$ par $\langle x - y, c - y\rangle \leq 0$ pour tout $c \in C$.
3. Montrer que $x \mapsto p(x)$ est continue.

Exercice 585 [Mines-Ponts 2026 # 585] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

Exercice 586 [Mines-Ponts 2026 # 586] 1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un fermé non compact.
2. Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
3. Pour $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $M = OS$.
4. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs et déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 587 [Mines-Ponts 2026 # 587] Soit $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1/(nu_n)$. Étudier (u_n) et donner un équivalent de u_n.

Exercice 588 [Mines-Ponts 2026 # 588] 1. Soit $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Étudier la suite.
2. Soit $v_0 \geq 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n} + 1/(n+1)$. Étudier la suite.

Exercice 589 [Mines-Ponts 2026 # 589] Soient $p, q > 0$, $p + q = 1$ et $p < q$. Montrer la convergence et calculer la limite de

$$u_n = \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Exercice 590 [Mines-Ponts 2026 # 590] Soit c_n le nombre d'éléments $a \in S_n$ tels que $a_{i+1} \neq a_i + 1$ pour tout $i < n$.
1. Montrer que $c_n = (n-1)c_{n-1} + (n-2)c_{n-2}$ pour $n \geq 3$.
2. Montrer que $c_n/n!$ converge et calculer sa limite.

Exercice 591 [Mines-Ponts 2026 # 591] Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + n/u_n$.
1. Étudier la monotonie de (u_n) et le cas $u_0 = 1$.
2. Montrer que $(u_n - n)_{n \geq 1}$ converge.
3. Poser $y_n = n(u_n - n)$. Si $u_n > n$, montrer que $y_{n+1}/y_n = 1 + O(n^{-2})$, puis qu'il existe $\alpha \neq 0$ tel que $u_n = n + \alpha/n + O(n^{-2})$.

Exercice 592 [Mines-Ponts 2026 # 592] 1. Montrer que, pour $n \geq 2$, $P_n = X^n - nX + 1$ possède une unique racine $u_n \in]0, 1[$.
2. Montrer que (u_n) converge.
3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 593 [Mines-Ponts 2026 # 593] Soit $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + 1/S_n$, où $S_n = x_0 + \cdots + x_n$.
1. Montrer que $x_n \to +\infty$ et $x_{n+1} \sim x_n$.
2. En étudiant $S_{n+1}/x_{n+1} - S_n/x_n$, montrer que $S_n \sim nx_n$.
3. Déterminer un équivalent de $x_{n+1}^2 - x_n^2$, puis de x_n.

Exercice 594 [Mines-Ponts 2026 # 594] Pour $m \in \mathbb{N}$, poser

$$F_m(x) = \int_0^x \frac{u^m e^u}{m!}\, du.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_m > 0$ tel que $F_m(x_m) = 1$.
2. Pour $v > 0$, déterminer la limite et un équivalent de $F_m(vm)$.
3. Donner un équivalent de x_m lorsque $m \to +\infty$.

Exercice 595 [Mines-Ponts 2026 # 595] Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + u_0 u_1 \cdots u_n$. Posons $v_n = u_n - 1/2$.
1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. Montrer que $v_n \geq 2^{n-2}$ pour $n \geq 1$.
3. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $v_n = r^{2^n}(1 + O(4^{-n}))$.
4. Montrer qu'il existe (x_n) tendant vers 0 tel que $u_n = r^{2^n} + 1/2 + x_n$.

Exercice 596 [Mines-Ponts 2026 # 596] 1. Pour $n \geq 3$, montrer qu'il existe $k < n$ tel que $\prod_{i=1}^{k}(1 - i/n) < 1/2$.
2. Si K_n est le plus petit tel k, montrer que $K_n \to +\infty$.
3. A-t-on $K_n = o(n)$?

Exercice 597 [Mines-Ponts 2026 # 597] Soit (u_n) positive bornée et telle que $u_{n+1} - u_n^2 \to 0$.
1. Montrer que la suite admet une valeur d'adhérence.
2. Pour l'ensemble E de ses valeurs d'adhérence, montrer que $\lambda \in E$ entraîne $\lambda^{2^k} \in E$ pour tout k, puis que $E \subset [0, 1]$.
3. Montrer que $E \subset \{0, 1\}$.
4. Montrer que la suite a une unique valeur d'adhérence et converge vers 0 ou 1.
5. La question 4 reste-t-elle vraie sans positivité, ou sans bornitude ?

Exercice 598 [Mines-Ponts 2026 # 598] Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \sin(k)/k$ converge. Indication : poser $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k)$ et utiliser $\sin(n) = S_n - S_{n-1}$.

Exercice 599 [Mines-Ponts 2026 # 599] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sin(\arctan(n^\alpha))}{n}.$$

Exercice 600 [Mines-Ponts 2026 # 600] Pour $n \geq 1$, poser $a_n = n! e^n / n^{n+1/2}$. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} (\ln a_{n+1} - \ln a_n).$$

Donner un équivalent du reste de $\sum_{k\geq 1} 1/k^2$, puis en déduire l'existence de $C>0$ tel que

$$n! = C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+o(1/n)\right).$$

Exercice 601 [Mines-Ponts 2026 # 601] Posons $u_n = \ln(n)/n$,

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}, \qquad R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+k/n)}{1+k/n}.$$

1. Étudier la décroissance de u_n et la convergence de (s_{2n}).
2. Établir $s_{2n} = H_n\ln 2 - T_n$, où $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ et $T_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k)/k$.
3. À l'aide des développements de H_n et $\sum_{k=1}^n \ln(k)/k$, déterminer l'asymptotique de T_n.
4. Montrer que R_n est une somme de Riemann, calculer sa limite et établir $T_n = \ln(n)(H_{2n}-H_n)+R_n$.
5. En déduire la somme $\sum_{k\geq 1}(-1)^k\ln(k)/k$.

Exercice 602 [Mines-Ponts 2026 # 602] Pour $n\geq 1$, poser $v_n = \sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k}$ et $u_n = (-1)^n(v_n-(-1)^n)$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et donner un équivalent du reste en cas de convergence, ou de la somme partielle en cas de divergence.

Exercice 603 [Mines-Ponts 2026 # 603] Soit (u_k) positive.

1. Si $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k$ pour tout n, déterminer la nature de $\sum u_n$.
2. Même question si la borne de la somme de gauche est $2n+p$ et son départ $n+p+1$, pour un $p\geq 1$ fixé.
3. Même question si la somme est de $pn+1$ à $(p+1)n$.

Exercice 604 [Mines-Ponts 2026 # 604] Soit $u_0>0$ et $u_{n+1} = e^{-u_n}/(n+1)$.

1. Déterminer les limites de u_n et nu_n.
2. Donner un développement asymptotique à trois termes de u_n.
3. Étudier $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$.
4. Donner un équivalent du reste des séries convergentes et des sommes partielles des séries divergentes.

Exercice 605 [Mines-Ponts 2026 # 605] Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ réelle, $u_n\neq -1$, et

$$v_n = \frac{u_n}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)}.$$

1. Si $u_n\geq 0$, montrer que $\sum v_n$ converge. Si $\sum u_n$ diverge, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
2. Étudier $\sum v_n$ pour $u_n = (-1)^n/(n+1)$ puis $u_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$.

Exercice 606 [Mines-Ponts 2026 # 606] Soit $f\in C^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$ strictement croissante telle que $f(x)\to+\infty$ et $f'(x)\to 0$.

1. En utilisant $|e^{if(b)}-e^{if(a)}|\leq (b-a)\sup_{[a,b]}|f'|$, montrer que $\{e^{if(n)} \mid n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle unité.
2. Pour $f\in C^1([a,+\infty[)$, montrer que
$$\left|f(n)-\int_n^{n+1} f(t)dt\right| \leq \frac{1}{2}\max_{[n,n+1]}|f'(x)|.$$
3. En déduire la nature de $\sum \sin(\ln n)/n$.

Exercice 607 [Mines-Ponts 2026 # 607] Comparer π^3 et 3^π.

Exercice 608 [Mines-Ponts 2026 # 608] Soit $f(x) = \arctan(1/(1+x^2))$. Montrer que f est C^∞ et calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 609 [Mines-Ponts 2026 # 609] Déterminer les fonctions dérivables $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ telles que $f'(x) = f(1/x)$ pour tout $x>0$.

Exercice 610 [Mines-Ponts 2026 # 610] Déterminer les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

pour tous $x,y\in\mathbb{R}$.

Exercice 611 [Mines-Ponts 2026 # 611] Déterminer les fonctions deux fois dérivables $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

$$f''(x)\cos(f(x)) \geq f'(x)^2\sin(f(x))$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 612 [Mines-Ponts 2026 # 612] Soit E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $D(f)(x) = f(x+1)-f(x)$. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit

$$F_n = \{x\mapsto x^{n-1}w_{n-1}(x)+\cdots+xw_1(x)+w_0(x) \mid w_0,\dots,w_{n-1}\in\ker D\}.$$

1. Montrer que $F_n = D(F_{n+1})$.
2. Montrer par récurrence que $\ker(D^n) = F_n$.

Exercice 613 [Mines-Ponts 2026 # 613] Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est dérivable en 0 si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en 0.
2. Si $f(0) = 0$ et f est dérivable en 0, montrer que $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n^2)$ converge et calculer sa limite.
3. Si f est continue en 0 et $\lambda \in]0,1[$, montrer que f est dérivable en 0 si et seulement s'il existe ℓ tel que $(f(x) - f(\lambda x))/x \to \ell$, et préciser le lien avec $f'(0)$.

Exercice 614 [Mines-Ponts 2026 # 614] Soit $f(x) = x - \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$.

1. Montrer que les restrictions de f à $]-1, 0]$ et $[0, +\infty[$ sont des bijections sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer un équivalent de f en 0, puis ceux des fonctions réciproques en 0.

Exercice 615 [Mines-Ponts 2026 # 615] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, bornée et intégrable. Posons $\alpha = \sup_{\mathbb{R}_+} |f|$ et $u_n = \int_0^{+\infty} f(t)^n dt$.

1. Montrer que les u_n sont bien définis.
2. Si $\alpha < 1$, montrer que $\sum u_n$ converge.
3. Si $\alpha > 1$, montrer que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 616 [Mines-Ponts 2026 # 616] Soient $a < b$, $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme et $A = \{f \in E \mid f(x) > 0 \, \forall x\}$. Pour $f \in A$, poser

$$\Phi(f) = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right).$$

1. Montrer que Φ admet un minimum et le déterminer.
2. A est-elle ouverte ? Fermée ?
3. Déterminer $\Phi(A)$.

Exercice 617 [Mines-Ponts 2026 # 617] Soit $F(x) = \int_x^{\sqrt{x}} e^t/t \, dt$. Déterminer la limite et un équivalent de F en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 618 [Mines-Ponts 2026 # 618] Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$F = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = x^{n+1} g(x) \text{ pour un } g \in C^\infty\}.$$

Pour $f \in C^\infty$, poser

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Montrer que φ est le projecteur sur F parallèlement aux polynômes de degré au plus n.

Exercice 619 [Mines-Ponts 2026 # 619] Étudier la nature des intégrales impropres

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{x}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x + \sqrt{x}} dx.$$

Exercice 620 [Mines-Ponts 2026 # 620] Posons $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$.

1. Justifier la convergence et montrer que $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ et $I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt$.
2. Calculer I.

Exercice 621 [Mines-Ponts 2026 # 621]

1. Pour $\alpha > 1$, montrer que $x^\alpha = \sin x$ a une unique solution $a > 0$.
2. Déterminer la nature de
$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{|t^\alpha - \sin t|}} dt.$$

Exercice 622 [Mines-Ponts 2026 # 622]

1. Pour $a > -1$, calculer $\int_0^{\pi/2} (1 + a \sin^2 t)^{-1} dt$ en posant $x = \tan t$.
2. Déterminer la nature des séries et intégrales :
$$\sum_n \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2 t}, \quad \sum_n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}.$$

Exercice 623 [Mines-Ponts 2026 # 623] Soit $a > 0$. Étudier la convergence et calculer éventuellement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t^a)^2} dt.$$

Exercice 624 [Mines-Ponts 2026 # 624] Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$, puis un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-k^2}$.

Exercice 625 [Mines-Ponts 2026 # 625]

1. Soient $a < b$ et $f, g \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ avec f de signe constant. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$\int_a^b f(t) g(t) dt = g(c) \int_a^b f(t) dt.$$

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $f(x) \to \lambda$ en 0 et $(f(t)-\mu)/t$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$. Pour $0 < a < b$, montrer la convergence et calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt.$$

Exercice 626 [Mines-Ponts 2026 # 626] Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Étudier la convergence puis calculer
$$\int_0^{2\pi} \ln|P(e^{it})| dt$$
en fonction des racines de P.

Exercice 627 [Mines-Ponts 2026 # 627]

1. Pour $a < b$ et $f \in C^0([a,b], \mathbb{R}_+)$, montrer que
$$\left(\int_a^b f(t)^x dt\right)^{1/x} \to \sup_{[a,b]} f$$
lorsque $x \to +\infty$.
2. Calculer
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln x - \frac{\ln \Gamma(x+1)}{x}\right),$$
où $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$.

Exercice 628 [Mines-Ponts 2026 # 628] Soit $E = L^2(\mathbb{R}_+)$ muni de sa norme usuelle. Pour $f \in E$, montrer que $x \mapsto x^{-1} \int_0^x f$ se prolonge de manière unique en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, notée $T(f)$. Montrer que $T(f) \in E$ et que T est un endomorphisme continu de E.

Exercice 629 [Mines-Ponts 2026 # 629] Soit E l'espace des fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe $(x_1, \dots, x_n)$ tel que $\det(f_i(x_j)) \neq 0$.
2. Si $F \subset E$ est de dimension finie et $(f_k) \subset F$ converge simplement vers f sur $[0,1]$, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 630 [Mines-Ponts 2026 # 630] Soit $(f_n) \subset C^2([0,1], \mathbb{R})$.

1. Si $(f_n(0))$ converge et $(f_n' - f_n)$ converge uniformément, montrer que (f_n) converge uniformément.
2. Si $(f_n(0))$ et $(f_n(1))$ convergent et $(f_n'' - f_n)$ converge uniformément, montrer que (f_n) converge uniformément.

Exercice 631 [Mines-Ponts 2026 # 631] Soit $E = \{u \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid |u(x)| < |x| \text{ pour } x \neq 0\}$.

1. Les fonctions $\sin x$ et $x \cos x$ appartiennent-elles à E ?
2. Pour $f \in E$, poser $f_n = f \circ \cdots \circ f$. Montrer que (f_n) converge simplement et déterminer sa limite.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment mais pas nécessairement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 632 [Mines-Ponts 2026 # 632] Soit $f \in C^2([a,b], \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre f convexe et l'existence d'une suite de polynômes convexes convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

Exercice 633 [Mines-Ponts 2026 # 633] Soit $(\varphi_n) \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \to 1$ et $\int_{|t|>\alpha} \varphi_n(t) dt \to 0$ pour tout $\alpha > 0$. Pour f continue bornée, poser $f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t) f(x-t) dt$. Montrer que $f_n \to f$ uniformément sur tout segment.

Exercice 634 [Mines-Ponts 2026 # 634]

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que
$$e^A - e^B = \int_0^1 e^{xA}(A-B)e^{(1-x)B} dx.$$
2. Montrer que $f_p : A \mapsto (I_n + A/p)^p$ converge vers l'exponentielle uniformément sur les compacts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 635 [Mines-Ponts 2026 # 635] Posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}x}$. Déterminer son domaine, montrer que S est continue, puis déterminer sa limite en $+\infty$ et un équivalent en 0.

Exercice 636 [Mines-Ponts 2026 # 636] Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}/(n+x)$.

1. Déterminer le domaine D et étudier la continuité sur D.
2. La série converge-t-elle uniformément sur D ?
3. Déterminer limites et équivalents aux bornes de D.

Exercice 637 [Mines-Ponts 2026 # 637] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(2^n x)/2^n$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 638 [Mines-Ponts 2026 # 638] Déterminer le rayon de convergence de
$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{(\sqrt{n})^{\sqrt{n}}}.$$

Exercice 639 [Mines-Ponts 2026 # 639] Soit $\alpha > 1$ et

$$a_n = \left(\sin(n)^\alpha + \alpha \sin(1/n)\right)^n.$$

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. On admet que π est irrationnel.

Exercice 640 [Mines-Ponts 2026 # 640] Pour $m \in \mathbb{N}$, poser $W_m = \int_0^{\pi/2} \cos^m(t)dt$ et $f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} W_m x^m$.

1. Montrer que $mW_m = (m-1)W_{m-2}$ pour $m \geq 2$.
2. Montrer que $1/(m+1) \leq W_m \leq \pi/2$.
3. Calculer le rayon de convergence de f.
4. Exprimer $f(x)$ à l'aide du résultat de la question 1, puis à l'aide de $\int_0^{\pi/2}(1 - x\cos t)^{-1}dt$.

Exercice 641 [Mines-Ponts 2026 # 641] Pour $n \in \mathbb{N}$, poser $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$ et $u_n(x) = a_n x^n/n^\alpha$.

1. Déterminer la limite de (a_n).
2. Trouver une relation simple entre a_{n+2} et a_n.
3. Étudier la série de terme général $u_n(x)$ selon x, α.
4. Pour $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, exprimer f avec des fonctions usuelles.

Exercice 642 [Mines-Ponts 2026 # 642] Pour $n \in \mathbb{N}$, poser $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Expliciter $f(x)$.

Exercice 643 [Mines-Ponts 2026 # 643] Soient $a_n = n!/(1 \cdot 3 \cdots (2n+1))$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence, une équation différentielle vérifiée par f et une expression simplifiée de f.
2. Étudier la convergence de la série aux bornes du disque.

Exercice 644 [Mines-Ponts 2026 # 644] Soient $a, b, c \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. Pour $n \geq 1$, poser

$$u_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(a+k)(b+k)}{c+k}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que la série converge sur le bord de son disque de convergence.

Exercice 645 [Mines-Ponts 2026 # 645] Pour $n \in \mathbb{N}$, poser $I_n = \int_0^{\ln 2} (e^t - 1)^n dt$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$.

1. Trouver une récurrence vérifiée par (I_n).
2. Donner un équivalent de I_n.
3. Déterminer le rayon de convergence de f et exprimer $f(x)$.

Exercice 646 [Mines-Ponts 2026 # 646] Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence.
2. Étudier la convergence de la série en $\pm R$.
3. Exprimer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Exercice 647 [Mines-Ponts 2026 # 647] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle telle que $\sum a_n$ converge et $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n/n!$.

1. Montrer que F est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\sum_p F^{(p)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, d'abord si $\sum a_n$ converge absolument, puis dans le cas général.

Exercice 648 [Mines-Ponts 2026 # 648] Soit $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}/(n+1)$ pour $n \geq 1$. Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que $1 \leq a_n \leq n^2$ pour $n \geq 1$.
2. Déterminer le rayon de convergence.
3. Montrer que $(1-x)y' - (2x+1)y = 0$ est vérifiée par f.
4. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 649 [Mines-Ponts 2026 # 649] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $f'(x) = f(x+1)$.

1. Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0)x^n/n!$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(0) = -\sum_{n=k+2}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-k)!}.$$

3. Conclure que $f = 0$.

Exercice 650 [Mines-Ponts 2026 # 650] Pour $p \geq 2$, poser

$$I_p = \int_0^1 \frac{t^p \ln t}{t^2 - 1} dt.$$

1. Justifier la bonne définition de I_p.
2. Calculer I_2 (on admet la valeur de $\zeta(2)$).
3. Déterminer un équivalent simple de I_p lorsque $p \to +\infty$.

Exercice 651 [Mines-Ponts 2026 # 651] 1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \sin(u^2)du$ converge.
2. Pour $a, b > 0$, donner un équivalent simple de $I_n = \int_0^{+\infty} \sin(n(au^2 + bu^3))du$ en fonction de I.

Exercice 652 [Mines-Ponts 2026 # 652] Pour $n \geq 1$, poser

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{1 + n^5 t^3} dt.$$

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Déterminer sa limite et un équivalent simple.

Exercice 653 [Mines-Ponts 2026 # 653] 1. Déterminer l'ensemble Δ des $z \in \mathbb{C}$ tels que $u_z(t) = e^{-t}t^{z-1}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $z \in \Delta$, montrer que

$$\int_0^n (1 - t/n)^n t^{z-1} dt \to \Gamma(z).$$

3. Montrer que Γ ne s'annule pas sur Δ.

Exercice 654 [Mines-Ponts 2026 # 654] Soit (a_n) positive, $0 < a_n \leq 1$ et $a_n \to 1$. Posons

$$b_n = \int_0^1 \prod_{k=1}^n (1 - a_k x)dx, \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

1. Montrer que $b_n \geq 1/(n+1)$.
2. Montrer que $b_n \leq (1 - e^{-\sigma_n})/\sigma_n$.
3. Déterminer un équivalent de b_n.

Exercice 655 [Mines-Ponts 2026 # 655] Poser $f(x) = \int_0^{+\infty} (1 + t^x)^{-1} dt$.
1. Déterminer le domaine D de définition.
2. Montrer que $f(x) > 1$ sur D.
3. Pour $y \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre de solutions de $f(x) = y$.

Exercice 656 [Mines-Ponts 2026 # 656] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt$.
1. Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 657 [Mines-Ponts 2026 # 657] Pour $x \geq 0$ et $0 < t \leq 1$, poser $f(x,t) = t^{-t}t^x$.
1. Montrer que

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{x+n} \ln^n t}{n!}.$$

2. Pour $y \geq 0$ et $q \in \mathbb{N}$, poser $I(y,q) = \int_0^1 t^y \ln^q(t) dt$. Établir une récurrence et calculer $I(y,q)$.
3. Poser $F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt$. Montrer que $F \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et exprimer F comme une somme.

Exercice 658 [Mines-Ponts 2026 # 658] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2 + t^2} dt$. Déterminer son domaine, étudier continuité et dérivabilité, puis trouver des équivalents aux bornes de son domaine.

Exercice 659 [Mines-Ponts 2026 # 659] Pour $x > 0$, poser

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1 + t^2)(x^2 + t^2)}}.$$

Justifier l'existence, montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ et donner des équivalents lorsque $x \to +\infty$ puis $x \to 0$.

Exercice 660 [Mines-Ponts 2026 # 660] Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. Pour $0 < a < b$:
1. Montrer que $\int_0^{+\infty} (f(at) - f(bt))/t \, dt$ converge et calculer sa valeur. En déduire $\int_0^{+\infty} (e^{-at} - e^{-bt})/t \, dt$.
2. Retrouver ce résultat en étudiant la fonction de a définie par cette dernière intégrale.

Exercice 661 [Mines-Ponts 2026 # 661] Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t + x} dt$.
1. Déterminer le domaine de définition.
2. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ et expliciter $f'(x)$.
3. Pour $x > 0$, calculer $f(x) + f(1/x)$.

Exercice 662 [Mines-Ponts 2026 # 662] Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x + t} dt$.
1. Déterminer le domaine et étudier la continuité.

2. Donner un équivalent de F en $+\infty$ et en 0^+.

Exercice 663 [Mines-Ponts 2026 # 663] Posons $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt}-1} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que
$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

Exercice 664 [Mines-Ponts 2026 # 664] Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Déterminer le domaine D et montrer que $F \in C^1(D)$.
2. Exprimer F sur D (on pourra calculer d'abord F' sur $\mathbb{R}_+$).
3. Calculer $\int_0^{+\infty} (\arctan t)^2/t \, dt$.

Exercice 665 [Mines-Ponts 2026 # 665] Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1-xt+xt^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Montrer que f est développable en série entière et préciser un intervalle de validité.
3. Expliciter les coefficients de ce développement.

Exercice 666 [Mines-Ponts 2026 # 666] Soit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Établir une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.
3. Montrer que $\ln \circ \Gamma$ est convexe.
4. Pour $x > 1$, en utilisant les différences de $\ln \Gamma$, montrer que
$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \ln x + o(1) \quad (x \to +\infty).$$
5. Montrer que $\sum_{k=1}^n 1/k - \ln n$ converge vers une constante γ.
6. En déduire $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$.

Exercice 667 [Mines-Ponts 2026 # 667] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \arctan(t) dt$.

1. Déterminer son domaine et montrer que $f \in C^\infty$.
2. Donner un développement asymptotique de f à tout ordre en $+\infty$.
3. Terminer l'étude de f.

Exercice 668 [Mines-Ponts 2026 # 668] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} (\sin t/t) e^{-xt} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D.
2. Montrer que f est continue sur D et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} \sin(t)/t \, dt$.

Exercice 669 [Mines-Ponts 2026 # 669] Soit $f(x) = \int_0^{\pi/2} (x - \cos t)^{-1/2} dt$. Déterminer le domaine de définition et tracer le graphe aussi précisément que possible.

Exercice 670 [Mines-Ponts 2026 # 670] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} (\cosh^2 t - x)^{-1/2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Montrer que f est développable en série entière autour de 0 et expliciter ce développement.

Exercice 671 [Mines-Ponts 2026 # 671] Soit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $\ln \circ \Gamma$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$, $f(x+1) = xf(x)$ et $\ln \circ f$ convexe. Montrer que $f = \Gamma$.

Exercice 672 [Mines-Ponts 2026 # 672] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable, avec $f(0) \neq 0$. On admet $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/2$.

1. Pour $t > 0$, montrer que $x \mapsto e^{-tx^2} f(x)$ est continue et intégrable.
2. Pour $a > 0$, montrer que $\sqrt{t} \int_a^{+\infty} e^{-tx^2} f(x) dx \to 0$.
3. Déterminer A tel que
$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} f(x) dx \sim A/\sqrt{t}.$$

Exercice 673 [Mines-Ponts 2026 # 673] On admet $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t^2) dt = \sqrt{\pi/2}$. Posons $K(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ix \cos t} dt$ et $J(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x \cos t) dt$.

1. Montrer que
$$K(x) = 2e^{ix} \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} e^{-2ixy^2} (1-y^2)^{-1/2} dy.$$

2. Développer $(1-y^2)^{-1/2}$ en série entière.
3. Montrer que $\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-iy^2}dy = -ie^{-ix}/\sqrt{x} + O(1/x)$.
4. En déduire une constante explicite C telle que $J(x) = C/\sqrt{x} + O(1/x)$ en $+\infty$.

Exercice 674 [Mines-Ponts 2026 # 674] Soit

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(t-y)^2+x^2}dt.$$

Déterminer son domaine de définition et calculer $f(x,y)$ sur ce domaine.

Exercice 675 [Mines-Ponts 2026 # 675] Pour $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, poser

$$U_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^\alpha \cos(t)^n dt.$$

Préciser la nature de $\sum U_n(1)$, puis de $\sum U_n(\alpha)$ selon α. Calculer $U_2(3)$.

Exercice 676 [Mines-Ponts 2026 # 676] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continue et $u_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$.

1. Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ converge vers $S = \int_0^1 f(t)/(1+t)dt$.
2. Montrer que $2S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n f(t)dt$ et en déduire une expression de $\ln 2$.

Exercice 677 [Mines-Ponts 2026 # 677] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Pour $r > 0$ assez grand, montrer que $re^{it}I_n - A$ est inversible et développer son inverse en série géométrique.
2. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,
$$P(A) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(re^{it})re^{it}(re^{it}I_n - A)^{-1}dt.$$
3. En déduire Cayley-Hamilton.

Exercice 678 [Mines-Ponts 2026 # 678] Déterminer les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que

$$f'(x) = \int_0^x \frac{f(r)}{r}dr + f(x) + 2.$$

Exercice 679 [Mines-Ponts 2026 # 679] Soit $k \geq 1$ et $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π-périodique. Donner une condition nécessaire et suffisante simple sur f pour que l'équation $y'' + k^2 y = f$ admette des solutions 2π-périodiques.

Exercice 680 [Mines-Ponts 2026 # 680] Soit y une solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ de $y'' + \varphi(x)y = 0$, où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $y'(x) \to 0$ en $+\infty$.

Exercice 681 [Mines-Ponts 2026 # 681] Soit l'équation différentielle $x^2y' + y = x$.

1. Admet-elle une solution développable en série entière en 0 ?
2. Admet-elle une solution définie sur $\mathbb{R}$?

Exercice 682 [Mines-Ponts 2026 # 682] Soit y solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $xy'' + y' + xy = 0$, et posons $u(x) = \sqrt{x}\,y(x)$.

1. Donner une équation différentielle vérifiée par u.
2. Pour $v'' + v = 0$ et $0 < a < b$, montrer que
$$\int_a^b \frac{u(x)v(x)}{4x^2}dx = (uv' - u'v)(b) - (uv' - u'v)(a).$$
3. Montrer que, pour tout $a > 0$, il existe $x_a \in [a, a+\pi[$ tel que $y(x_a) = 0$.
4. En déduire que $J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(x^2/4)^k/(k!)^2$ s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 683 [Mines-Ponts 2026 # 683] Soient $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $g = f + f'$, avec $\int_0^\infty |g(t)|^2 dt < \infty$.

1. Montrer que
$$f(x) = e^{-x}f(0) + e^{-x}\int_0^x e^t g(t)dt.$$
2. Montrer que f est bornée.
3. Montrer que $\int_A^\infty g(t)^2 dt \to 0$ puis $f(x) \to 0$.

Exercice 684 [Mines-Ponts 2026 # 684] On considère l'équation différentielle $ty''(t) + ty'(t) - y(t) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Pour quels $a \in \mathbb{R}$, $h_a(t) = t^a$ est-elle solution ?
2. Justifier que $g(t) = e^{-t}/t^2$ admet une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier les variations et limites de $G(x) = \int_1^x g(t)dt$.
4. Pour $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*)$, poser $s(t) = tf(t)$. Montrer que f est solution de l'équation
$$E' : \quad z'(t) + \left(1 + \frac{2}{t}\right)z(t) = 0$$
si et seulement si s' est solution de E.

Exercice 685 [Mines-Ponts 2026 # 685] Résoudre les systèmes différentiels

$$\begin{cases} x' = x + 2y + te^t \\ y' = 8x + y + e^{-t} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 - tx_2 - e^t \\ x_2' = tx_1 + (1-t)x_2 + e^t. \end{cases}$$

Exercice 686 [Mines-Ponts 2026 # 686] Posons $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \cup \{(0,0)\}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $f(0,0) = \alpha$ et, ailleurs sur E,

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Montrer qu'aucune valeur de α ne rend f continue en $(0,0)$.

Exercice 687 [Mines-Ponts 2026 # 687] Montrer que la fonction

$$f(x_1, \dots, x_n) = -\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$$

est convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

Exercice 688 [Mines-Ponts 2026 # 688] Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \pi/2,\ |y| \leq \cos x\}$ et $f(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2$. Déterminer les extrema de f.

Exercice 689 [Mines-Ponts 2026 # 689] Soit $f(x,y) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - xy/\sqrt{2}$. Déterminer les extrema locaux, s'ils existent, et les caractériser.

Exercice 690 [Mines-Ponts 2026 # 690] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne, $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ et $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i^2$.

1. Déterminer le maximum de f sur S.
2. En déduire que
$$\left|\prod_{i=1}^n x_i\right| \leq \left(\frac{\|x\|}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Exercice 691 [Mines-Ponts 2026 # 691] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Déterminer le minimum de $g(x) = \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

Exercice 692 [Mines-Ponts 2026 # 692] Étudier les extrema locaux de $f(x,y) = x\sin(xy) + y^2/2$.

Exercice 693 [Mines-Ponts 2026 # 693] Soit $f(x,y) = x^y - xy$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Déterminer les extrema de f.

Exercice 694 [Mines-Ponts 2026 # 694] Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\}$ et $\Delta = \{(x,y) \mid xy = 0\}$.

1. Représenter D, Δ et dire s'ils sont ouverts ou fermés.
2. Pour $f(x,y) = \ln(1+xy)/(xy)$, montrer qu'on peut prolonger f en une fonction C^∞ sur D.
3. Calculer $df(0,0)$. La fonction atteint-elle un extremum local en $(0,0)$?

Exercice 695 [Mines-Ponts 2026 # 695] Soit $f : M \mapsto MM^T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $df(M)$ est surjective si M est inversible.
2. Pour la restriction $g = f|_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$, si M est symétrique inversible, $dg(M)$ est-elle surjective ?

Exercice 696 [Mines-Ponts 2026 # 696] Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n, puis en un point quelconque.

Exercice 697 [Mines-Ponts 2026 # 697]

1. Calculer la différentielle de $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en I_n.
2. Montrer de deux façons que $\det$ n'atteint pas d'extremum local en I_n.
3. Que peut-on dire d'un éventuel extremum local de $\det$?
4. Pour $1 \leq r < n$, expliciter une matrice simple de rang r. La fonction $\det$ y atteint-elle un extremum local ?

Exercice 698 [Mines-Ponts 2026 # 698] Soit

$$D = \left\{ x \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^4 < 16, \quad \sum_{i=1}^n x_i > 1 \right\}.$$

Si $f : D \to \mathbb{R}$ vérifie $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$ pour tous $x, y \in D$, que peut-on dire de f ?

Exercice 699 [Mines-Ponts 2026 # 699] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

1. Si $f(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$, montrer que f atteint un minimum.
2. Si $f(x)/\|x\| \to +\infty$, montrer que ∇f est surjective.

Exercice 700 [Mines-Ponts 2026 # 700] Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que, pour chaque $x \in U$, il existe $\alpha_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que

$$|f(y) - f(x) - \alpha_x(y - x)| \leq \|y - x\|^2 \quad (y \in U).$$

1. Montrer que f est différentiable et préciser df.
2. Si $U = \mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que
$$|df(x)h - df(y)h| \leq C(\|h\|^2 + \|h\|\|x - y\| + \|x - y\|^2),$$
puis en déduire que df est lipschitzienne.

Exercice 701 [Mines-Ponts 2026 # 701] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable et minorée. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x_ε tel que

$$|d_{x_\varepsilon} f(h)| \leq \varepsilon \|h\| \quad (h \in \mathbb{R}^n).$$

Indication : considérer $x \mapsto f(x) + \varepsilon\|x\|$.

Exercice 702 [Mines-Ponts 2026 # 702] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, exprimer $t \mapsto f(tx)$ avec le gradient et la hessienne de f.
2. Si, en tout point, les valeurs propres de la hessienne sont dans $[1, +\infty[$, montrer que

$$f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle + \frac{1}{2}x^T x,$$

que f admet un minimum et que ∇f est bijective de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 703 [Mines-Ponts 2026 # 703] Soit $m \geq 1$ et $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = 1\}$.

1. Pour $a \in S^m$, montrer que $T_a S^m = \mathrm{Vect}(a)^\perp$.
2. Si $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ est C^1 et $f(a) = \max_{x \in S^m} f(x)$, montrer que $\nabla f(a) \in \mathbb{R}a$.
3. En déduire qu'un endomorphisme symétrique réel possède un vecteur propre, puis établir le théorème spectral.

Exercice 704 [Mines-Ponts 2026 # 704] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne. Soient $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, et f continue sur la boule fermée $B(a, r)$, de classe C^2 dans son intérieur. Posons $\Delta f = \sum_i \partial^2_{x_i} f$.

1. Montrer que f atteint un maximum sur la boule et sur la sphère.
2. Si $\Delta f > 0$, montrer que les maxima sur la boule et la sphère sont égaux.
3. Étendre au cas $\Delta f \geq 0$ en considérant $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x - a\|^2$.

3) Géométrie

Exercice 705 [Mines-Ponts 2026 # 705] Sur un cercle de centre O, on place trois arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ et $\widehat{EF}$ d'angle au centre $\pi/3$. Soient M, N, P les milieux de $[BC], [DE], [AF]$. Montrer que MNP est équilatéral.

4) Probabilités

Exercice 706 [Mines-Ponts 2026 # 706] Un immeuble a n étages. Au rez-de-chaussée, p personnes montent dans un ascenseur et choisissent indépendamment et uniformément un étage parmi les n. Calculer l'espérance et la variance du nombre d'arrêts.

Exercice 707 [Mines-Ponts 2026 # 707] Deux sacs contiennent chacun les boules numérotées de 1 à n. À chaque étape, on tire simultanément une boule de chaque sac, sans remise. Soit X_n le premier tirage après lequel un numéro a été tiré deux fois depuis le début.

1. Déterminer $\mathbf{P}(X_n \geq k)$.
2. Pour k fixé, donner un équivalent de $\mathbf{P}(X_n = k)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 708 [Mines-Ponts 2026 # 708] Une urne contient a boules rouges, b blanches, c noires. On tire avec remise jusqu'au premier tirage blanc. Soit X le nombre de boules rouges tirées. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 709 [Mines-Ponts 2026 # 709] On lance une pièce infiniment souvent, avec probabilité $p \in]0, 1[$ de Pile à chaque lancer. Pour $n \geq 2$, soit A_n l'événement que les lancers $n-1, n$ soient Pile et qu'aucune paire consécutive de Pile ne soit apparue auparavant. Posons $a_n = \mathbf{P}(A_n)$.

1. Calculer a_2, a_3, a_4.
2. Pour $n \geq 4$, trouver une relation entre a_n, a_{n-1}, a_{n-2}.
3. Déterminer $\mathbf{P}(\bigcup_{n \geq 2} A_n)$.

Exercice 710 [Mines-Ponts 2026 # 710] Soit $E = A \sqcup B$, avec $|A| = a$, $|B| = b$.

1. Construire une bijection entre les parties à n éléments de E et $\bigcup_{k=0}^n \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{n-k}(B)$.
2. En déduire l'identité de Vandermonde

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

3. Deux joueurs lancent chacun n fois une pièce équilibrée. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la valeur absolue de la différence de leurs nombres de Pile.

Exercice 711 [Mines-Ponts 2026 # 711] Une urne contient les boules numérotées de 1 à n. On effectue n tirages sans remise. Il y a rencontre à l'instant k si la boule tirée porte le numéro k. Soit p_n la probabilité de n'avoir aucune rencontre, avec $p_0 = 1$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} p_k = 1$.
2. En déduire une expression simplifiée de p_n.

Exercice 712 [Mines-Ponts 2026 # 712]

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbf{P}(X = k) = (k-1)/2^k$.
2. Calculer son espérance et sa variance, sous réserve d'existence.

Exercice 713 [Mines-Ponts 2026 # 713] Soit $\theta \in]0, \pi/2[$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathbf{P}(X=n)=\frac{\cos\theta}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin\theta\sin t)^n dt.$$

2. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 714 [Mines-Ponts 2026 # 714] Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\theta_n=\mathbf{P}(T=n\mid T\geq n)$, avec $\mathbf{P}(T\geq n)>0$ pour tout n.

1. Montrer que $\theta_n\in[0,1[$.
2. Exprimer $\mathbf{P}(T\geq n)$ avec les θ_n et montrer que $\sum\theta_n$ diverge.
3. Réciproquement, pour toute suite $\theta_n\in[0,1[$ de somme divergente, peut-on construire une telle variable T ?

Exercice 715 [Mines-Ponts 2026 # 715] Une expression bien parenthésée de longueur $2n$ est une suite de n parenthèses ouvrantes et n fermantes telle que tout préfixe contient au moins autant d'ouvrantes que de fermantes. Notons C_n leur nombre, avec $C_0=1$.

1. Montrer que $C_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k}$.
2. Pour $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nx^n$, montrer que son rayon $R>0$ et établir une relation entre f et f^2 sur $]-R,R[$.
3. Donner une expression de C_n.
4. Pour n fixé, quelle est l'espérance du nombre d'expressions bien parenthésées parmi 1400 tirages uniformes indépendants ?
5. Sans limiter le nombre de tirages, calculer le temps moyen d'attente de la première expression bien parenthésée.

Exercice 716 [Mines-Ponts 2026 # 716] Soient $a\in]0,1[$ et $b>0$. On considère un couple (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi jointe

$$\mathbf{P}(X=n,Y=k)=e^{-b}\frac{b^n}{k!(n-k)!}a^k(1-a)^{n-k}$$

pour $0\leq k\leq n$, et nulle sinon.

1. Déterminer la loi de X, puis son espérance et sa variance.
2. Montrer que $Y\sim\mathcal{P}(ab)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $X-Y$ et vérifier que Y et $X-Y$ sont indépendantes.

Exercice 717 [Mines-Ponts 2026 # 717] Soit G un groupe fini. On munit $\Omega=G^2$ de la probabilité uniforme, et l'on pose $C=\{(x,y)\in G^2\mid xy=yx\}$ et $p=\mathbf{P}(C)$.

1. Montrer que $p>0$. Que dire si $p=1$?
2. Calculer p pour $G=S_3$ et $G=S_4$.
3. On définit $x\sim y$ si et seulement s'il existe $g\in G$ tel que $x=gyg^{-1}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence et que le nombre s de ses classes vérifie $s=p|G|$.

Exercice 718 [Mines-Ponts 2026 # 718] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Calculer $\mathbf{P}(X^Y\leq Y^X)$.

Exercice 719 [Mines-Ponts 2026 # 719] Soit X une variable aléatoire discrète réelle à valeurs dans $[a,b]$.

1. Montrer que $X\in L^2$ et que $V(X)\leq\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.
2. Caractériser le cas d'égalité.

Exercice 720 [Mines-Ponts 2026 # 720] Soient $p\in]0,1[$ et X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. On pose $Y=\left\lfloor\frac{X+1}{2}\right\rfloor$.

1. Montrer que Y suit une loi géométrique.
2. Montrer que Y et $2Y-X$ sont indépendantes.

Exercice 721 [Mines-Ponts 2026 # 721] Soit $(X_k)_{k\geq1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Pour $n\geq1$, on pose $Y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k$ et $f_n(t)=\mathbf{E}(e^{itY_n})$ pour $t\in\mathbb{R}$. Montrer que (f_n) converge vers une limite à préciser.

Exercice 722 [Mines-Ponts 2026 # 722] Soit $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de variables aléatoires telle que $A_\lambda\sim\mathcal{P}(\lambda)$ pour tout $\lambda>0$. Montrer qu'il existe un automorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tous $\lambda>0$ et $P\in\mathbb{R}[X]$,

$$\mathbf{E}(P(A_\lambda))=u(P)(\lambda).$$

Exercice 723 [Mines-Ponts 2026 # 723] Soient $1\leq i\leq p\leq n$. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire uniformément une poignée de p jetons et l'on note X_i le numéro du i-ième jeton dans l'ordre croissant.

1. Déterminer la loi de X_i.
2. Calculer $\mathbf{E}(X_i)$ puis $V(X_i)$.

Exercice 724 [Mines-Ponts 2026 # 724] Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même espérance et de même variance. On pose $M_n=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$. Montrer qu'il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon>0$,

$$\mathbf{P}(|M_n-\ell|\geq\varepsilon)\longrightarrow0.$$

Exercice 725 [Mines-Ponts 2026 # 725] Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ tels que $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ et

$$\left|\mathbf{E}(e^{i\alpha X})\right| = \left|\mathbf{E}(e^{i\beta X})\right| = 1.$$

Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 726 [Mines-Ponts 2026 # 726] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Pour $h > 0$, on pose $u_0^h = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$,

$$u_{n+1}^h(x) = \frac{u_n^h(x+h) - u_n^h(x)}{h}.$$

1. Donner une expression de $u_n^h(x)$ à l'aide des valeurs de f. On pose $a_n^h = u_n^h(0)$. Montrer que $S(h,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^h \frac{x^n}{n!}$ est bien définie et exprimer cette somme à l'aide d'une variable de loi de Poisson de paramètre x/h.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $S(h,x) \to f(x)$ quand $h \to 0^+$.

Exercice 727 [Mines-Ponts 2026 # 727] Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,1\}$ et $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.

1. Montrer que, pour $k \geq 1$ et $s, t > 0$, $\mathbf{P}(e^{tS_k} \geq e^{ts}) \leq e^{-ts} \operatorname{ch}^k(t)$.
2. En déduire que, pour tous $s > 0$ et $k \geq 1$, $\mathbf{P}(|S_k| > s) \leq 2e^{-s^2/(2k)}$.

Exercice 728 [Mines-Ponts 2026 # 728] Soient $n \geq 2$, $p, q \in]0,1[$ et (X,Y) deux variables indépendantes de lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Calculer $\mathbf{P}(X \equiv Y\ [n])$.

Exercice 729 [Mines-Ponts 2026 # 729] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \longrightarrow \int_0^1 f.$$
2. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_k = 0) = 1 - 1/k$ et $\mathbf{P}(X_k = k) = 1/k$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pour $a > 0$, calculer la limite de $\mathbf{E}(e^{aS_n/n})$.

Exercice 730 [Mines-Ponts 2026 # 730] Soient X et Y deux variables indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ et $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la probabilité que M soit inversible.
2. Justifier que M admet deux valeurs propres réelles $v_1 \leq v_2$ et calculer leur covariance. Ces variables sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 731 [Mines-Ponts 2026 # 731] Soient $p \in]0,1[$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de Bernoulli de paramètre p. On pose $U = (X_1, \ldots, X_n)^T$ et $M = UU^T$.

1. Déterminer les lois de $\operatorname{tr}(M)$ et de $\operatorname{rg}(M)$.
2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?
3. Pour $n = 2$, on pose $V = (1,1)^T$ et $S = V^T M V$. Calculer $\mathbf{E}(S)$ et $V(S)$.

Exercice 732 [Mines-Ponts 2026 # 732] Soit $n \geq 1$ et $J = (J_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $J_{i+1,i} = 1$, $J_{1,n} = 1$ et $J_{i,j} = 0$ sinon.

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de J.

Soient ensuite $X_0, \ldots, X_{n-1}$ i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,1\}$, et M la matrice circulante dont la première ligne est $(X_0, X_{n-1}, \ldots, X_1)$.

1. Exprimer M en fonction de J.
2. Pour $n = 2$, calculer $\mathbf{P}(M \in GL_2(\mathbb{C}))$.
3. Déterminer le spectre de M.
4. On suppose n premier et on admet que $1 + X + \cdots + X^{n-1}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Déterminer $\mathbf{P}(M \in GL_n(\mathbb{C}))$.

Exercice 733 [Mines-Ponts 2026 # 733] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \geq 1$, on pose $C_n = |\{X_1, \ldots, X_n\}|$. Montrer que $\mathbf{E}(C_n) = o(n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 734 [Mines-Ponts 2026 # 734] Soit $a \in]1/2, 1[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \left\{ k \in \{0, \ldots, n\} : \left| k - \frac{n}{2} \right| \leq \frac{n^a}{2} \right\}.$$

1. Montrer que $|I_n| = o(n)$ et déterminer la limite de $2^{-n} \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k}$.
2. Pour une suite quelconque de parties $I_n \subset \{0, \ldots, n\}$, a-t-on équivalence entre $|I_n| = o(n)$ et $\sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} = o(2^n)$?

Exercice 735 [Mines-Ponts 2026 # 735] Une suite $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est dite transiente si, pour toute partie bornée A de $\mathbb{Z}$, $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_i \in A) < +\infty$.

1. Soit $\alpha > 0$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ indépendantes, avec $X_i \sim \mathcal{P}(\alpha/i)$. Déterminer la loi de $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ et dire si (Y_n) est transiente.
2. Soit $p \in]0,1[$ et $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. avec $\mathbf{P}(Z_1 = 1) = 1 - \mathbf{P}(Z_1 = -1) = p$. La suite $T_n = Z_0 + \cdots + Z_n$ est-elle transiente ?

Exercice 736 [Mines-Ponts 2026 # 736] On considère $n \geq 1$ sièges numérotés en rangée. Des personnes entrent successivement et s'assoient sur un siège libre n'ayant pas de voisin, jusqu'à ce que cela ne soit plus possible. Soit X_n le nombre de sièges occupés à la fin, et posons $X_0 = X_{-1} = 0$. On suppose les X_n indépendantes.

1. Soit Y le numéro du siège choisi par la première personne. a) Expliquer que, pour $1 \leq j, k \leq n$, $\mathbf{P}(X_n = k \mid Y = j) = \mathbf{P}(X_{j-2} + X_{n-j-1} = k-1)$. b) Montrer que $\mathbf{E}(X_n) = 1 + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-2} \mathbf{E}(X_j)$.
2. On pose $u_i = \sum_{j=0}^{i} \mathbf{E}(X_j)$ et $f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \frac{x^i}{i!}$. a) Établir une relation entre u_n, u_{n+1}, u_{n+2}. b) Montrer que la série entière définissant f a un rayon non nul. c) Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f. d) Déterminer (u_n) puis un équivalent de $\mathbf{E}(X_n)$.

Exercice 737 [Mines-Ponts 2026 # 737] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $G_X(t) = (2-t)^{-\alpha}$.
2. Si cette condition est vérifiée, calculer $\mathbf{E}(X)$ et $V(X)$, puis montrer que $\mathbf{P}(X = n) = O\left(\frac{n^{\lfloor \alpha \rfloor}}{2^n}\right)$.

Exercice 738 [Mines-Ponts 2026 # 738] Soit $a > 0$ et X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbf{P}(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$.

1. Déterminer a.
2. X admet-elle une espérance finie ? une variance ?
3. Expliciter sa fonction génératrice.

Exercice 739 [Mines-Ponts PSI 2026 # 739] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t - x}}$ pour $x \in]-1, 1[$. Soient $\lambda > 0$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$, puis déterminer la loi de $Y = f^{(X)}(0)$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbf{E}(Y)$ soit finie et, dans ce cas, montrer que $\mathbf{E}(Y) = \frac{2e^{-\lambda} \arcsin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}$.

Exercice 740 [Mines-Ponts PSI 2026 # 740] On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \int_n^{n+1} f$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que p_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{P}(X = n) = p_n$?
3. Si oui, X est-elle d'espérance finie ?

Exercice 741 [Mines-Ponts PSI 2026 # 741] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie. Soit T une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_n et d'espérance finie. On pose $Y = \sum_{i=1}^{T} X_i$. Montrer que Y est d'espérance finie et calculer $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 742 [Mines-Ponts PSI 2026 # 742] Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables de Poisson indépendantes, avec $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ et $\lambda_i > 0$.

1. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
2. On suppose $\sum_i \lambda_i$ convergente. Montrer que $\mathbf{P}(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{i \geq n} (X_i \neq 0)) = 0$, puis que $\sum_i X_i$ converge presque sûrement.
3. Soit Y indépendante des X_i, de loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$,

$$|G_{X_0 + \cdots + X_n}(t) - G_Y(t)| \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \lambda_i,$$

puis que $\sum_{i=0}^{+\infty} X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

VIII) Mines-Ponts PSI 2026

1) Algèbre

Exercice 743 [Mines-Ponts PSI 2026 # 743] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 0$ et $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$.

Exercice 744 [Mines-Ponts PSI 2026 # 744] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P'(x)^2 - P''(x)P(x) > 0.$$

Exercice 745 [Mines-Ponts PSI 2026 # 745] Pour $n \geq 1$, soit $h(n)$ le plus petit entier k, s'il existe, tel que pour tout $g \in \mathbb{C}[X]$, il existe $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $g = f_1^n + \cdots + f_k^n$.

1. Peut-on se contenter de vérifier la propriété pour un polynôme g particulier pour établir l'existence de $h(n)$?
2. Déterminer $h(2)$.
3. Montrer que $h(n) \geq 3$ si $n \geq 3$.
4. Montrer que $h(n) \leq n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 746 [Mines-Ponts PSI 2026 # 746] Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Que vaut BA ?

Exercice 747 [Mines-Ponts PSI 2026 # 747] Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$ l'équation

$$X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 748 [Mines-Ponts PSI 2026 # 748] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que A et B commutent et B est nilpotente. Montrer que $\det(A+B) = \det(A)$.

Exercice 749 [Mines-Ponts PSI 2026 # 749] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $n+1$ complexes distincts $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que $A + \alpha_i B$ soit nilpotente pour chaque i.

1. Montrer que si $N \in M_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $N^n = 0$.
2. Montrer que $(A+\alpha B)^n = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 750 [Mines-Ponts PSI 2026 # 750] Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = (I_n) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur n pour qu'il existe $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tels que $(AB-BA)^2 = I_n$.

Exercice 751 [Mines-Ponts PSI 2026 # 751] Soient $m \geq 1$ et $A \in M_m(\mathbb{R})$ tels que $A^{m-1} \neq 0$ et $A^m = 0$. On pose $L = \{M \in M_m(\mathbb{R}) : AM = MA\}$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que $(x_0, Ax_0, \dots, A^{m-1}x_0)$ soit une base de $\mathbb{R}^m$.
2. En déduire que $(I_m, A, \dots, A^{m-1})$ est une base de L.

Exercice 752 [Mines-Ponts PSI 2026 # 752] Soit $p \geq 1$ et E_p l'ensemble des suites complexes p-périodiques.

1. Montrer que E_p est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et donner sa dimension.
2. Donner une base de E_p constituée de suites géométriques.

Exercice 753 [Mines-Ponts PSI 2026 # 753] Une fonction $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ est dite affine par morceaux s'il existe une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ telle que f soit affine sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$. On note A l'ensemble de ces fonctions.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $C^0([0,1], \mathbb{R})$.
2. Pour $a \in [0,1]$, poser $f_a(x) = |x-a|$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in [0,1]}$ est libre.
3. Déterminer une base de A.

Exercice 754 [Mines-Ponts PSI 2026 # 754] Dans $M_n(\mathbb{Z})$, on note $GL_n(\mathbb{Z})$ les matrices inversibles dont l'inverse est aussi à coefficients entiers. Soient $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ tels que $A + kB \in GL_2(\mathbb{Z})$ pour $1 \leq k \leq 5$.

1. Montrer que $A \in GL_2(\mathbb{Z})$.
2. Est-ce que B est inversible ?

Exercice 755 [Mines-Ponts PSI 2026 # 755] Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\varphi_P : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_P(M) = P^{-1}MP$. Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme φ_P.

Exercice 756 [Mines-Ponts PSI 2026 # 756] On considère $E = M_n(\mathbb{C})$ et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

1. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, poser $L_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$. a) Montrer que L_A est une forme linéaire. b) Montrer que $L : A \mapsto L_A$ est un isomorphisme de E sur E^*. c) En déduire une caractérisation des hyperplans de E.
2. Soit T triangulaire supérieure et $H = \mathrm{Ker}(L_T)$. On note T_n^+ et T_n^- les sous-espaces des matrices triangulaires strictement supérieure et inférieure. a) Déterminer $H \cap T_n^+$. b) Déterminer la dimension de $H \cap T_n^-$. c) Montrer que les matrices de $T_n^+ \cup T_n^-$ sont nilpotentes.
3. Montrer que tout hyperplan de E contient au moins $n^2 - n - 1$ matrices nilpotentes linéairement indépendantes.

Exercice 757 [Mines-Ponts PSI 2026 # 757]

1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer que son indice de nilpotence est inférieur ou égal à $\dim E$.
2. Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $D : P \mapsto P'$. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = D$. a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D et par f. b) Montrer que les restrictions de f et D à $\mathbb{R}_n[X]$ sont nilpotentes. Conclure.

Exercice 758 [Mines-Ponts PSI 2026 # 758] Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$, écrit $P = Q + iR$ avec $Q, R \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q + \lambda R \in GL_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que deux matrices réelles semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ le sont aussi dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tels que $A^3 = B^3 = I_n$ et $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 759 [Mines-Ponts PSI 2026 # 759] Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & -a \\ a & -a & 2-a \end{pmatrix}.$$

Déterminer les sous-espaces stables par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

Exercice 760 [Mines-Ponts PSI 2026 # 760] Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{C}).$$

Étudier la diagonalisabilité de M en fonction de $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$.

Exercice 761 [Mines-Ponts PSI 2026 # 761] Soient $n \geq 3$ et $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou $j = n$, et $a_{i,j} = 0$ sinon.

1. Déterminer A^k.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Trouver un polynôme annulateur de degré 3 de A.

Exercice 762 [Mines-Ponts PSI 2026 # 762] Soit $n \geq 3$. Diagonaliser la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{n,i} = a_{i,n} = 1$ pour $1 \leq i \leq n$, les autres coefficients étant nuls.

Exercice 763 [Mines-Ponts PSI 2026 # 763] Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \sin(i + j)$.

1. Quel est le rang de A ?
2. Déterminer ses valeurs propres.

Exercice 764 [Mines-Ponts PSI 2026 # 764] Trouver les éléments propres de la matrice $M = (i + j)_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 765 [Mines-Ponts PSI 2026 # 765] Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,j} = \delta_{i+1,j}$ si $i < n$ et $a_{n,j} = \delta_{1,j}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Soit $p \geq 2$ et $B = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur n, p pour que B soit inversible.

Exercice 766 [Mines-Ponts PSI 2026 # 766] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ pour tous $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^k A = kB^k$.
3. En déduire que B est nilpotente.

Exercice 767 [Mines-Ponts PSI 2026 # 767] Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = -2$ si $i = j$, $m_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$, et $m_{i,j} = 0$ sinon. On pose $T = M + 2I_n$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Exprimer le spectre de T en fonction de celui de M et comparer leurs sous-espaces propres.
3. Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(T)$. a) Montrer qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|t_{i,i} - \mu| \leq \sum_{j \neq i} |t_{i,j}|$. b) Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\mu = 2\cos\alpha$. c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ soit un vecteur propre de T associé à μ. d) Qu'en déduire pour α ?

Exercice 768 [Mines-Ponts PSI 2026 # 768]

1. Soient $B \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que si B est diagonalisable alors l'équation $P(X) = B$ admet au moins une solution dans $M_n(\mathbb{C})$.
2. Soient $n \geq 3$ et $B = (b_{i,j})$ définie par $b_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leq i < n$, les autres coefficients étant nuls. Que dire de l'équation $X^2 = B$?

Exercice 769 [Mines-Ponts PSI 2026 # 769] Soit $(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \beta_0) \in \mathbb{R}^5$ tel que $k\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On pose $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et

$$f_n(P) = (\alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0)P'' + (\beta_1 X + \beta_0)P'.$$

1. Montrer que $f_n \in \mathcal{L}(E_n)$. Est-ce un automorphisme ?
2. Exprimer la matrice de f_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.
3. L'application f_n est-elle diagonalisable ?

Exercice 770 [Mines-Ponts PSI 2026 # 770] Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles distinctes. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $M_1, \ldots, M_n \in (I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = \sum_{k=1}^n \alpha_k^p M_k$.

Exercice 771 [Mines-Ponts PSI 2026 # 771] Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A.
2. À quelle condition M est-elle diagonalisable ?

Exercice 772 [Mines-Ponts PSI 2026 # 772] Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\sum_{i=1}^n f_i = \mathrm{id}$ et $f_i \circ f_j = 0$ si $i \neq j$. Pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$, montrer que $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ est diagonalisable.

Exercice 773 [Mines-Ponts PSI 2026 # 773] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et $T_{A,B} : M \mapsto AM - MB$.

1. Montrer que $T_{A,B}$ est linéaire et donner $T_{A,B}(E_{i,j})$. On pose $\Phi : (A, B) \mapsto T_{A,B}$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Phi$. L'application Φ est-elle injective ?
3. Est-elle surjective ?
4. Donner $\mathrm{Tr}(T_{A,B})$ en fonction de A, B.
5. Déterminer $\det(T_{A,B})$. On pourra commencer par supposer A, B diagonalisables.

Exercice 774 [Mines-Ponts PSI 2026 # 774] Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 32$ et $A^2 - 6A + 8I_n = 0$. On considère $\varphi_A : B \mapsto AB$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de n ? Déterminer $\mathrm{Tr}(A)$ selon ces valeurs de n.
2. φ_A est-il diagonalisable ?
3. Déterminer $\mathrm{Sp}(\varphi_A)$ et la dimension de chacun de ses espaces propres.

Exercice 775 [Mines-Ponts PSI 2026 # 775] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in GL(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{u^k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ est fini. Montrer qu'il existe $n \geq 1$ tel que $u^n = \mathrm{id}$.

Exercice 776 [Mines-Ponts PSI 2026 # 776] Soient $n \geq 1$, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et $r \in \{0, \dots, n\}$. Montrer l'équivalence entre l'existence d'une solution de rang r à $AX = XB$ et l'existence de valeurs propres distinctes communes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de A et B telles que

$$\dim E_{\lambda_k}(A) = \dim E_{\lambda_k}(B) \quad (1 \leq k \leq s), \qquad \sum_{k=1}^{s} \dim E_{\lambda_k}(A) = r.$$

Indication : étudier les éléments propres de B^T pour le sens direct ; pour la réciproque, utiliser qu'une matrice M est de rang r si et seulement si $M = PJ_rQ$ pour des P, Q inversibles, avec $J_r = \mathrm{diag}(I_r, 0)$.

Exercice 777 [Mines-Ponts PSI 2026 # 777] Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1. Pour $a \in E$, on définit $\varphi_a(x) = \langle a, x \rangle$. Montrer que $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme entre E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P(1/2) = \int_{-1}^{1} A(t)P(t)dt$. Déterminer A.

Exercice 778 [Mines-Ponts PSI 2026 # 778] Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, et H_1, H_2 deux hyperplans distincts. Choisir des vecteurs unitaires $e_k \in H_k^\perp$ et poser $f_k(x) = x - 2\langle e_k, x \rangle e_k$.

1. Décrire géométriquement f_1, f_2 et montrer que $H_1 \cap H_2 = \{x : f_1(f_2(x)) = x\}$.
2. Poser $F = H_1^\perp + H_2^\perp$. Montrer que cette somme est directe, que $(f_1 \circ f_2)(F) \subset F$, et justifier qu'il existe e tel que (e_1, e) soit une base orthonormale de F.
3. Montrer qu'il existe une unique rotation r de F telle que $r(e_1) = e_2$. Donner la matrice dans la base (e_1, e) de l'endomorphisme de F induit par $f_2 \circ f_1$, à l'aide de r.

Exercice 779 [Mines-Ponts PSI 2026 # 779] Soient $n \geq 2$ et V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. On pose

$$V^\circ = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \forall A \in V,\ \mathrm{Tr}(AM) = 0\}.$$

1. Montrer que V° est un sous-espace vectoriel.
2. Exprimer $\dim V^\circ$ en fonction de $\dim V$.
3. Si V est le sous-espace des matrices triangulaires supérieures, déterminer V°.

Exercice 780 [Mines-Ponts PSI 2026 # 780] Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, $n \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Poser $M = (\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j}$ et $G(x_1, \dots, x_n) = \det M$.

1. Montrer que $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.
2. Soit $F = (x_1, \dots, x_n)$ et $x \in E$. Montrer que $G(x_1, \dots, x_n, x) = d(F, x)^2 G(x_1, \dots, x_n)$.
3. En déduire $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 + ax + b)^2 dx$.

Exercice 781 [Mines-Ponts PSI 2026 # 781] On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'espace vectoriel des suites réelles, et on définit $D : E \to E$ par $D((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer que D est un endomorphisme de E. Étudier son injectivité et sa surjectivité.
2. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
3. On pose $F = \{(u_n) \in E : \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty\}$ et, pour $u, v \in F$, $\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que F est stable par D et que φ est un produit scalaire sur F.
4. Montrer que
$$\left\{ \frac{\langle u, D(u) \rangle}{\|u\|^2} : u \in F \setminus \{0\} \right\} =]-2, 0[.$$

Exercice 782 [Mines-Ponts PSI 2026 # 782] Un tournoi réunit les joueurs $A_1, \dots, A_m$. Les parties $P_1, \dots, P_N$ opposent chacune deux joueurs. On définit $A = (a_{i,k}) \in M_{m,N}(\mathbb{R})$ par $a_{i,k} = 1$ si A_i gagne P_k, $a_{i,k} = -1$ s'il perd et $a_{i,k} = 0$ s'il n'y participe pas. On pose $M = AA^T$.

1. Calculer et interpréter les coefficients de M.
2. Justifier que M est diagonalisable et préciser le signe de ses valeurs propres.
3. Si $m = N$, relier $\det(M)$ et $\det(A)$, puis en déduire $\det(M) \geq 0$.
4. Dans le cas général, soit A' une sous-matrice carrée extraite de A en conservant certaines lignes et colonnes. Montrer que $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$.

Exercice 783 [Mines-Ponts PSI 2026 # 783] Pour $n \geq 3$, on considère $A_n = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \max(i, j)$.

1. Montrer que A_n est inversible.
2. Montrer que tous ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Exercice 784 [Mines-Ponts PSI 2026 # 784] Soient $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On définit $f_A : M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T M - M^T A$.

1. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer sa trace.
3. On suppose désormais $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f_A est diagonalisable.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_A soit bijectif.

Exercice 785 [Mines-Ponts PSI 2026 # 785] Soit $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que les coefficients diagonaux de PAP^T soient tous égaux.

Exercice 786 [Mines-Ponts PSI 2026 # 786] Soient p, q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $u = p - q$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $[-1, 1]$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$.

Exercice 787 [Mines-Ponts PSI 2026 # 787] Soient p, q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien et posons $u = p + q$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toutes les valeurs propres de u appartiennent à $[0, 2]$.

Exercice 788 [Mines-Ponts PSI 2026 # 788] Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On considère un endomorphisme antisymétrique u, c'est-à-dire $\langle u(x), x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que u^2 est diagonalisable. Quel est le signe de ses valeurs propres ?
2. Montrer que le spectre de u est vide ou égal à $\{0\}$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.
4. Montrer que le rang de u est pair.

Exercice 789 [Mines-Ponts PSI 2026 # 789] Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer toutes les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $M^T A M = A$.

Exercice 790 [Mines-Ponts PSI 2026 # 790] Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 - M + M^T = I_n$. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 791 [Mines-Ponts PSI 2026 # 791] Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M^T = I_n$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. La matrice M est-elle nécessairement symétrique ?

Exercice 792 [Mines-Ponts PSI 2026 # 792] Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + 4I_2 = 0$ et $MM^T = M^T M$.

1. Montrer que $\frac{1}{2}M \in O_2(\mathbb{R})$.
2. En déduire toutes les matrices M vérifiant ces hypothèses.

Exercice 793 [Mines-Ponts PSI 2026 # 793] Soit $E = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \det(M) \in [0, 1]\}$.

1. E est-il un sous-espace vectoriel ? Est-il stable par produit ?
2. E est-il ouvert, fermé, borné ou convexe ? Déterminer son adhérence.
3. Déterminer les matrices $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $\frac{1}{2}(S + S^{-1}) \in E$.

Exercice 794 [Mines-Ponts PSI 2026 # 794] Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(X, Y) \mapsto Y^T S X$ est un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. En déduire qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T telle que $S = T^T T$. Montrer que T est unique si l'on impose que les coefficients diagonaux de T soient positifs.

Exercice 795 [Mines-Ponts PSI 2026 # 795] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Dans ce cas, déterminer le nombre de matrices B possibles.
2. Soient $A, C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de spectres inclus dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AC) \geq 0$.

Exercice 796 [Mines-Ponts PSI 2026 # 796]

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
2. Soient $M, N \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à coefficients strictement positifs telles que $M = P^T D P$ et $N = P^T P$.
3. Soient $M, N \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(M + N) \geq \det(M) + \det(N)$.

Exercice 797 [Mines-Ponts PSI 2026 # 797] Montrer que $M \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $M = SH$.

Exercice 798 [Mines-Ponts PSI 2026 # 798]

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique $C \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telle que $A = C^2$.
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

2) Analyse

Exercice 799 [Mines-Ponts PSI 2026 # 799] Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|)$, est une norme, puis représenter sa sphère unité.

Exercice 800 [Mines-Ponts PSI 2026 # 800] Soit $F = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on pose $\|P\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$. On note $D(P) = P'$.

1. Montrer que D n'est pas continue pour cette norme.

2. Soit $(c_k)_{k\geq 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k|a_k|$. a) Montrer que N est une norme sur F. b) Donner une suite (c_k) telle que D soit continue pour N.
3. Montrer que, quelle que soit la norme sur $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'application de dérivation n'est pas continue.

Exercice 801 [Mines-Ponts PSI 2026 # 801] On munit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme uniforme. Une forme linéaire φ sur E est dite positive si $f \geq 0$ entraîne $\varphi(f) \geq 0$.

1. Donner deux exemples de formes linéaires positives.
2. Montrer que toute forme linéaire positive est continue.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 802 [Mines-Ponts PSI 2026 # 802] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et soit N une norme. On pose

$$N^*(x) = \sup_{y\neq 0} \frac{\langle x,y\rangle}{N(y)}.$$

1. Montrer que N est continue.
2. Montrer que $N^*(x) = \sup\{\langle x,z\rangle : N(z) = 1\} \in \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que N^* est une norme.
4. Montrer que $\langle x,y\rangle \leq N(x)N^*(y)$ pour tous x,y.

Exercice 803 [Mines-Ponts PSI 2026 # 803]
1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné.
2. Montrer que les applications $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ et $A \mapsto \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}$ atteignent un maximum et un minimum sur $O_n(\mathbb{R})$, puis les calculer.

Exercice 804 [Mines-Ponts PSI 2026 # 804] On munit $E = M_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique et, pour $p \geq 1$, on pose $L_p(A) = \sum_{k=1}^p \frac{A^k}{k}$.

1. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pour tous $A,B \in E$.
2. En déduire que si $\|A\| < 1$, la suite $(L_p(A))_{p\geq 1}$ converge.

Exercice 805 [Mines-Ponts PSI 2026 # 805]
1. Soient φ,ψ continues entre deux espaces vectoriels normés et égales sur une partie dense. Montrer qu'elles sont égales.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soient $A,B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Indication : commencer par le cas $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que A^TA et AA^T sont semblables pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 806 [Mines-Ponts PSI 2026 # 806]
1. Montrer qu'un espace vectoriel normé ne possède pas de partie à la fois ouverte et fermée, non vide et distincte de l'espace. On pourra relier deux points par un segment et considérer les paramètres dont l'image appartient à la partie.
2. Soit $g : E \to \mathbb{Z}$ continue et non constante. Choisir x_0,x_1 tels que $g(x_0) = k$ et $g(x_1) \neq k$, puis poser $A = \{x : g(x) = k\}$. Montrer que A est non vide, distinct de E, fermé et ouvert, et conclure que g est constante.

Exercice 807 [Mines-Ponts PSI 2026 # 807] Soit $A = (a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, poser $\|P\|_A = \max_{0\leq k\leq n} |P(a_k)|$.

1. Pour $A = (0,1)$, calculer $\|X\|_A$.
2. Montrer que $\|\cdot\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer qu'il existe un unique $(b_0,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$X^n + P(X) = \sum_{j=0}^n b_j \prod_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\neq j}} (X - a_k).$$

4. Calculer $\sum_{k=0}^n b_k$.

Exercice 808 [Mines-Ponts PSI 2026 # 808] Soit $\alpha > 0$ et E_α l'ensemble des fonctions $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha$ pour tous $x,y \in [0,1]$. On pose

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

1. Montrer que E_α est un espace vectoriel.
2. L'application $f \mapsto \|f\|_\alpha$ est-elle une norme ?
3. Soient $0 < \beta < \alpha \leq 1$. Montrer que $E_\alpha \subset E_\beta$ et donner une inégalité entre les deux quantités. L'inclusion est-elle stricte ?

Exercice 809 [Mines-Ponts PSI 2026 # 809]
1. Soit $f(x) = (1+x)^{1/x}$. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et la représenter graphiquement.
2. Montrer que $u_n = (1+1/n)^n$ et $v_n = (1-1/n)^{-n}$ sont adjacentes.
3. Montrer que $(1+1/n)^n \leq e \leq (1+1/n)^{n+1}$ et commenter cet encadrement.

Exercice 810 [Mines-Ponts PSI 2026 # 810] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement positive. Montrer que les séries

$$\sum u_n, \qquad \sum \ln(1+u_n), \qquad \sum \frac{u_n}{1+u_n}, \qquad \sum \int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^2}$$

sont de même nature.

Exercice 811 [Mines-Ponts PSI 2026 # 811] Pour $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $x_n \geq 0$ tel que $f_n(x_n) = 2$.
2. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
3. Étudier la convergence de $\sum(x_n - \ell)$.

Exercice 812 [Mines-Ponts PSI 2026 # 812] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\sqrt{k}$.

1. La suite (a_n) converge-t-elle ?
2. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $a_n + (-1)^n\sqrt{n}/2 \to \ell$, puis montrer que $\ell > 0$.
3. Étudier la nature de $\sum 1/a_n$.

Exercice 813 [Mines-Ponts PSI 2026 # 813] Pour $n \geq 2$, on pose $v_n = \frac{\cos n}{n}$ et $u_n = \frac{\cos(\ln n)}{\ln n}$.

1. Pour deux suites réelles $(a_n), (b_n)$, poser $A_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$. Montrer que

$$\sum_{m=2}^{N} a_m b_m = \sum_{m=2}^{N-1} A_m(b_m - b_{m+1}) + A_N b_N,$$

   puis en déduire la nature de $\sum v_n$.
2. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 814 [Mines-Ponts PSI 2026 # 814] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ strictement positive et supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n,$$

où (v_n) est le terme général d'une série convergente.

1. Montrer que la série de terme général $\frac{\lambda}{n} + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est absolument convergente.
2. En déduire que $(u_n n^{\lambda})$ converge dans $\mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \frac{n^n}{n!e^n}$.

Exercice 815 [Mines-Ponts PSI 2026 # 815] Calculer la limite et un équivalent de

$$u_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right).$$

Exercice 816 [Mines-Ponts PSI 2026 # 816] Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Déterminer la nature des séries $\sum u_n^2$ et $\sum u_n$.
2. Poser $A_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ et $B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A_k$. Trouver un équivalent de u_n.
3. Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 817 [Mines-Ponts PSI 2026 # 817]

1. Soient $(u_n), (v_n)$ strictement positives telles que $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.
2. Pour $n \geq 1$, poser $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. a) Montrer que $S_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}}$. b) Montrer que $S_n + S_{n+1}$ tend vers une limite réelle positive.

Exercice 818 [Mines-Ponts PSI 2026 # 818] Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $|z_n - z_m| > \sqrt{2}$ si $n \neq m$.

1. Pour $A > 0$, poser \$C_A=\n :|Re(z_n)| \leq A, Im(z_n) \leq A\$. Montrer que C_A est fini.
2. Montrer que $|z_n| \to +\infty$.
3. Si les z_n sont non nuls, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|^{-3}$ converge.

Exercice 819 [Mines-Ponts PSI 2026 # 819] On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

Exercice 820 [Mines-Ponts PSI 2026 # 820] Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_x^1 f(t)dt.$$

1. φ est-elle un endomorphisme ?
2. Est-elle injective ou surjective ? Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$.
3. Déterminer ses valeurs propres.
4. Montrer que $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \|f\|_2$.

Exercice 821 [Mines-Ponts PSI 2026 # 821] Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' est bornée et que $\|f'\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty\|f''\|_\infty$.

Exercice 822 [Mines-Ponts PSI 2026 # 822] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue.

1. Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour $1 \leq k \leq n$,
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)dt.$$
2. Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n f(x_k)$.

Exercice 823 [Mines-Ponts PSI 2026 # 823] Soient $f, g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, avec g 1-périodique.

1. Écrire $\int_0^1 f(x)g(nx)dx$ comme une somme d'intégrales, puis en déterminer la limite quand $n \to +\infty$.
2. Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = 1/2$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 824 [Mines-Ponts PSI 2026 # 824] On pose $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, définir $\Lambda(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt$.

1. Montrer que $\Lambda(f)$ est bien définie.
2. Montrer que Λ est un endomorphisme de E.
3. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 825 [Mines-Ponts PSI 2026 # 825] Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-z)^n}.$$

Exercice 826 [Mines-Ponts PSI 2026 # 826] Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+^*)$ telle que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \to \ell \in]0,1[$ quand $x \to +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $q \in]0,1[$ et $x_0 \geq 0$ tels que, pour tout $x \geq x_0$ et $k \in \mathbb{N}$, $f(x+k) \leq q^k f(x)$.
2. En déduire la nature de $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Exercice 827 [Mines-Ponts PSI 2026 # 827] Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $s_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}dt$ converge. Montrer que, pour tout $s > s_0$, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ converge. Indication : effectuer une intégration par parties.

Exercice 828 [Mines-Ponts PSI 2026 # 828] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right).$$

1. Montrer que f est définie sur $[0,1]$.
2. Montrer que f est continue et intégrable sur $[0,1]$.
3. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.
4. Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$. Est-elle de classe C^k ?

Exercice 829 [Mines-Ponts PSI 2026 # 829] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n+1+x}{n+x}\right)$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 830 [Mines-Ponts PSI 2026 # 830] Soit $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$.

1. Montrer que S est définie, continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $S(0)$, $S(1)$ et $S(1/2)$.
3. Montrer que $u_n = -\ln(n+1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ converge ; noter γ sa limite.
4. Montrer que $\int_0^1 S(x)dx = \gamma$.

Exercice 831 [Mines-Ponts PSI 2026 # 831] Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Déterminer son domaine de définition et montrer sa continuité et sa classe C^∞. Déterminer sa limite en $+\infty$ et un équivalent en 1^+.

Exercice 832 [Mines-Ponts PSI 2026 # 832] Soit $F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n)n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est de classe C^∞ sur ce domaine.
3. Étudier le comportement de F au bord de son domaine de définition.

Exercice 833 [Mines-Ponts PSI 2026 # 833] On considère la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.
2. Montrer que sa somme vérifie $(1-x)y' + (1+x)y = -1$.
3. En déduire une expression de cette somme.

Exercice 834 [Mines-Ponts PSI 2026 # 834] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Étudier la convergence aux extrémités de l'intervalle de convergence.
3. Montrer que f est continue en -1.
4. Déterminer explicitement f sur $[-1, 1[$.

Exercice 835 [Mines-Ponts PSI 2026 # 835]

1. Montrer que l'équation différentielle $f'(x) = xf(x)^2$ admet une solution S développable en série entière et vérifiant $S(0) = 1$.
2. Donner une expression analytique de S.

Exercice 836 [Mines-Ponts PSI 2026 # 836] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} P(n)z^n$.
2. Montrer que f coïncide avec une fraction rationnelle sur son disque ouvert de convergence.

Exercice 837 [Mines-Ponts PSI 2026 # 837] On pose $f(x) = e^{-2x^2} \int_0^x e^{2t^2} dt$.

1. Montrer que f est développable en série entière en 0.
2. Déterminer ce développement.

Exercice 838 [Mines-Ponts PSI 2026 # 838] Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2 + 2x(\alpha) - 1}.$$

Poser

$$g(x) = \frac{(\cos\alpha + 1)/\sin\alpha}{x + (\cos\alpha+1)/\sin\alpha} + \frac{(\cos\alpha - 1)/\sin\alpha}{x + (\cos\alpha - 1)/\sin\alpha}.$$

1. Montrer que $f(x)$ peut s'exprimer à l'aide de $g(x)$.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et donner le domaine de validité de ce développement.

Exercice 839 [Mines-Ponts PSI 2026 # 839] Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$.

1. Déterminer son intervalle de convergence et étudier sa continuité.
2. Poser $a_1 = 1$ et, pour $n \geq 2$, $a_n = -\ln(1-1/n) - 1/n$. Déterminer le domaine de définition de $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
3. Trouver une relation entre f et g.
4. Calculer $g(1)$ et $g(-1)$, puis trouver un équivalent de f en 1^-.

Exercice 840 [Mines-Ponts PSI 2026 # 840] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite p-périodique non nulle et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de S.
2. Donner un équivalent de $S(x)$ quand $x \to 1^-$.
3. Même question si (u_n) est ultimement périodique.

Exercice 841 [Mines-Ponts PSI 2026 # 841] Pour $n \in \mathbb{N}$, poser $u_n = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{1+t} dt$.

1. Montrer que u_n est bien défini, étudier les variations de (u_n) et déterminer sa limite.
2. Calculer $u_{n+1} + u_n$, puis donner un équivalent de u_n.
3. Poser $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Déterminer son rayon et son domaine de définition.
4. Pour $x \in [-1, 1]$, poser $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n^2$. Exprimer $T(x)$ puis $S(x)$ à l'aide d'intégrales.

Exercice 842 [Mines-Ponts PSI 2026 # 842] Soit $a \in]0, 1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) = f(ax)$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ et exprimer $f^{(n)}$ en fonction de f.
2. Montrer que f est égale en tout point à sa série de Taylor en 0.

Exercice 843 [Mines-Ponts PSI 2026 # 843] Pour $n \in \mathbb{N}$, noter T_n le coefficient de X^n dans $(1 + X + X^2)^n$.

1. Pour $R > 0$, montrer que
$$T_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + Re^{i\theta} + R^2 e^{2i\theta})^n e^{-in\theta} d\theta.$$
2. En déduire que $T_n \leq 3^n$.
3. Établir la représentation intégrale gaussienne du coefficient obtenue par le changement d'échelle $t = \theta\sqrt{2n/3}$.
4. Montrer que l'intégrale transformée admet une limite et la calculer. En déduire un équivalent de T_n.

Exercice 844 [Mines-Ponts PSI 2026 # 844]

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et que
$$I = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

2. En déduire que $I = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_{2n}/2$, où $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$.
3. Montrer que $nI_nI_{n-1} = \pi/2$ et en déduire $I_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$.
4. Montrer que $I = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 845 [Mines-Ponts PSI 2026 # 845] Soit $p \geq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{1+pk}.$$

1. Montrer que $S_n = \int_0^1 (1-t^p)^n dt$, puis que
$$S_n = \frac{1}{p}\int_0^1 (1-u)^n u^{1/p-1} du.$$
2. Montrer que, pour $n \geq 1$,
$$S_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+1/(pk)}.$$
3. Déterminer un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 846 [Mines-Ponts PSI 2026 # 846] Soit $f(x) = \int_0^1 |\ln(t)|^x dt$.

1. Déterminer son domaine de définition D.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur D.
3. Calculer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 847 [Mines-Ponts PSI 2026 # 847] Soit $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(x+1)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. Déterminer un équivalent de $f(\alpha)$ quand $\alpha \to 0^+$.

Exercice 848 [Mines-Ponts PSI 2026 # 848] Soit $I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}} e^{x\cos t} dt$. Montrer que

$$I(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Indication : poser $u = \sqrt{x}\, t$ et utiliser $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 849 [Mines-Ponts PSI 2026 # 849] Soit $\alpha \in]0,1[$ et

$$f(\theta) = e^{i\alpha\theta} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+ue^{i\theta}} du.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Poser $g(u) = \frac{u^\alpha}{1+ue^{i\theta}}$. Montrer que f est de classe C^1 sur D et que $f'(\theta) = ie^{i\alpha\theta}\int_0^{+\infty} g'(u)du$. En déduire que f est constante sur chaque intervalle de D.
3. Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, établir la relation trigonométrique donnée par l'intégrale et en déduire
$$\sin(\alpha\theta) f(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{(u\sin\theta - \cos\theta)^\alpha}{1+u^2} du.$$

Exercice 850 [Mines-Ponts PSI 2026 # 850] Soient

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt, \qquad G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer que F, G sont définies et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $x \mapsto F(x) + G(x)$ est constante et déterminer sa valeur.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 851 [Mines-Ponts PSI 2026 # 851]

1. Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt.$$
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt$.

Exercice 852 [Mines-Ponts PSI 2026 # 852] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Montrer que $|\arctan u| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Pour $x^2 \neq 1$, déterminer $A(x), B(x)$ tels que
$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{A(x)}{1+t^2} + \frac{B(x)}{1+x^2t^2}.$$
4. Montrer que $f'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$ pour $x > 0$, puis exprimer $f(x)$.

Exercice 853 [Mines-Ponts PSI 2026 # 853] Soit $f(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f y est continue.
2. Exprimer $f(x)$ sans signe intégral.

Exercice 854 [Mines-Ponts PSI 2026 # 854] Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et
$$k(x,t) = \begin{cases} t^2/x & 0 \leq t < x \leq 1, \\ x^2/t & 0 \leq x < t \leq 1, \\ 1 & x = t. \end{cases}$$
Pour $f \in E$, poser $T(f)(x) = \int_0^1 k(x,t)f(t)dt$.

1. Pour $x > 0$, établir
$$T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^2 f(t)dt + x^2 \int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt.$$
Montrer que $T(f)$ est continue sur $[0,1]$, calculer $T(f)(0)$ et montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $T(f)$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, calculer $T(f)'(0)$, puis montrer qu'elle est de classe C^2 sur $]0,1]$.
3. Résoudre sur $]0,1]$ l'équation différentielle $y'' - \frac{2}{x^2}y = -3f$. Indication : chercher les solutions homogènes sous la forme $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 855 [Mines-Ponts PSI 2026 # 855]

1. Soient $a, c > 0$. Montrer que
$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^c}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nc}.$$
2. En déduire la valeur de cette somme pour $a = 1, c = 3$.

Exercice 856 [Mines-Ponts PSI 2026 # 856] Donner une expression de l'intégrale
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}dx.$$

Exercice 857 [Mines-Ponts PSI 2026 # 857] Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ pour $x > 0$.

1. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer son intégrale. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
2. Poser $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Exprimer $S(x)$, montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer son intégrale.

Exercice 858 [Mines-Ponts PSI 2026 # 858] Soient $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\theta \in \mathbb{C}$. Donner l'unique solution de $z' + \theta z = f$ telle que $z(0) = 0$.

Exercice 859 [Mines-Ponts PSI 2026 # 859] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln(t)dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est solution de $x^2y' + xy + 1 = 0$.

Exercice 860 [Mines-Ponts PSI 2026 # 860] Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que, pour $x \in]0,1[$,
$$f(x) = \int_1^{1-x} \frac{f(t)}{t}dt.$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0,1[$.
2. Donner une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 vérifiée par f sur $]0,1[$.
3. Résoudre cette équation en posant $g(x) = f(x)/x$.

Exercice 861 [Mines-Ponts PSI 2026 # 861] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Montrer que f vérifie $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0$. En déduire une expression de f et déterminer son intervalle de définition.

Exercice 862 [Mines-Ponts PSI 2026 # 862] On considère l'équation différentielle $2xy'' + y' - y = 0$.

1. Déterminer une solution développable en série entière, solution de l'équation et telle que $f(0) = 1$.
2. Exprimer cette fonction à l'aide des fonctions usuelles.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation.

Exercice 863 [Mines-Ponts PSI 2026 # 863] On considère $x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 2(1+x)$.

1. Trouver les solutions homogènes de la forme x^α sur $]0,+\infty[$ et donner une base de l'espace des solutions.
2. Trouver une solution particulière sous la forme $\alpha(x)x + \beta(x)x^2$ sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, avec $\alpha'(x)x + \beta'(x)x^2 = 0$.
3. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 864 [Mines-Ponts PSI 2026 # 864] On considère $y'' + (1 - 2/x^2)y = 0$ sur $]0,+\infty[$.

1. Montrer que ses solutions sont de classe C^2.
2. Poser $f(x) = \sin(x)/x - \cos(x)$. Montrer que f est solution, se prolonge en une fonction développable en série entière en 0, et possède une infinité de zéros sur $]0,+\infty[$.
3. Poser $g_\omega(x) = \cos(x)/x + \omega\sin(x)$. Déterminer les ω pour lesquels g_ω est solution et montrer qu'elle a une infinité de zéros.
4. Montrer que toute solution possède une infinité de zéros.

Exercice 865 [Mines-Ponts PSI 2026 # 865] On considère $(t^2+1)y'' - 2y = 0$.

1. Déterminer une solution polynomiale non nulle φ.
2. Résoudre l'équation en posant $y = \varphi z$.

Exercice 866 [Mines-Ponts PSI 2026 # 866] Soit $f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}$.

1. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition de f.
2. Étudier l'existence de ses dérivées partielles d'ordre 1.

Exercice 867 [Mines-Ponts PSI 2026 # 867] Étudier les extrema de $g : (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto x\ln(y) - y\ln(x)$.

Exercice 868 [Mines-Ponts PSI 2026 # 868] Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $f \in \mathcal{S}_{++}(E)$ et $v \in E$.

1. Montrer que $\langle f(x), x\rangle > 0$ pour tout $x \neq 0$.
2. Montrer que $g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle v, x\rangle$ est de classe C^1.
3. Montrer que g possède un unique point critique c.
4. Montrer que g atteint en c un minimum global.

3) Probabilités

Exercice 869 [Mines-Ponts PSI 2026 # 869] Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer $\mathbf{P}(X \in 2\mathbb{N})$ et $\mathbf{P}(X \in 2\mathbb{N}+1)$, puis les comparer.
2. Poser $Y = (-1)^X$. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 870 [Mines-Ponts PSI 2026 # 870] Une urne contient n boules dont p blanches et $n-p$ noires. On effectue des tirages successifs sans remise. Déterminer la loi et l'espérance du rang de la dernière boule blanche tirée.

Exercice 871 [Mines-Ponts PSI 2026 # 871] Soit $N \geq 2$. On tire sans remise les N boules numérotées de 1 à N. On note B_i le résultat du i-ième tirage. Pour $1 \leq p \leq N$, soit X_p le nombre de p-croissances, c'est-à-dire de i tels que $B_i < B_{i+1} < \cdots < B_{i+p}$. Déterminer $\mathbf{E}(X_p)$ et calculer $V(X_1)$.

Exercice 872 [Mines-Ponts PSI 2026 # 872] Soit $Z = X + Y$, où X, Y sont les résultats de deux dés.

1. Pour des dés équilibrés, déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Peut-on truquer les dés pour que Z suive la loi uniforme sur $\{2,\dots,12\}$?

Exercice 873 [Mines-Ponts PSI 2026 # 873]

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et α une racine complexe non réelle. Montrer que $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P, avec la même multiplicité.
2. Soient X, Y indépendantes et uniformes sur $\{1,\dots,6\}$. Montrer que si X', Y' sont indépendantes, à valeurs dans $\{1,\dots,6\}$, et $X'+Y'$ a la même loi que $X+Y$, alors X' et Y' sont uniformes.

Exercice 874 [Mines-Ponts PSI 2026 # 874] Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 2} a_n/2^n$ converge et calculer sa somme.
2. On lance une pièce équilibrée et X est le rang d'apparition du premier motif face-face. Déterminer la loi de X.
3. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $V(X)$.
4. Donner un équivalent de $\mathbf{P}(X = n)$.

Exercice 875 [Mines-Ponts PSI 2026 # 875] On joue à pile ou face, avec probabilité de pile $p \in]0,1[$. On s'arrête quand on a obtenu deux piles, pas nécessairement consécutifs. Soit X le nombre de faces obtenues. Montrer que X est d'espérance finie et la calculer.

Exercice 876 [Mines-Ponts PSI 2026 # 876] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de Bernoulli de paramètre $1/2$, représentant les lancers d'une pièce équilibrée. Pour $n \geq 2$, $(Y = n)$ est l'événement où les deux premiers piles consécutifs apparaissent aux rangs $n, n+1$; $(Y = 0)$ signifie qu'ils n'apparaissent jamais. Soit C_n l'événement qu'il n'y ait pas deux piles consécutifs parmi $(X_1,\dots,X_n)$, avec $\mathbf{P}(C_0) = 1$.

1. Montrer que $\mathbf{P}(Y = n) = \frac{1}{8}\mathbf{P}(C_{n-2})$.
2. Montrer que $\mathbf{P}(C_n) = \frac{1}{4}\mathbf{P}(C_{n-2}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(C_{n-1})$.
3. En déduire $\mathbf{P}(Y = n)$ et $\mathbf{P}(Y = 0)$, et interpréter.

4. Montrer que Y admet une espérance finie et calculer $\mathbf{E}(Y)$ de deux manières.

Exercice 877 [Mines-Ponts PSI 2026 # 877] Soit $n \geq 2$. On tire indépendamment et uniformément dans un ensemble de n jetons distincts jusqu'à les avoir tous obtenus. On note T_n le nombre de tirages nécessaires et $X_{n,k}$ le nombre de tirages entre l'obtention du $(k-1)$-ième et du k-ième jeton distinct. Ainsi $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}$.

1. Déterminer $\mathbf{E}(T_n)$ et $V(T_n)$ en fonction de $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2$.
2. Donner des équivalents de ces quantités quand $n \to +\infty$.
3. Montrer que, pour $t \in [-1, 1]$,
$$G_n(t) = \frac{n!}{n^n} t^n \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-(k/n)t}.$$
4. À l'aide de la décomposition en éléments simples de $G_n(t)/t$, établir sa décomposition en fractions simples.
5. En déduire une expression de $\mathbf{P}(T_n = m)$ pour $m \geq n$.

Exercice 878 [Mines-Ponts PSI 2026 # 878] Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On définit $f_X(t) = t^X \sin(X/t)$.

1. Déterminer la probabilité que f_X soit prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Quelle est cette probabilité pour la classe C^p, avec $p \geq 2$?

Exercice 879 [Mines-Ponts PSI 2026 # 879] Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0, 1[$, et $Y = \int_0^{2\pi} \sin^X(t) dt$. Montrer que Y est une variable aléatoire qui admet une espérance, puis calculer celle-ci.

Exercice 880 [Mines-Ponts PSI 2026 # 880] Un immeuble compte 7 étages et une personne recherchée s'y trouve avec probabilité $p \in]0, 1[$. Si elle est présente, chaque étage est équiprobable. On a vainement cherché dans les six premiers étages. Quelle est la probabilité qu'elle soit au dernier étage ?

Exercice 881 [Mines-Ponts PSI 2026 # 881] On considère n équipes de division 1 et n équipes de division 2, réparties en n matchs, chaque appariement étant équiprobable. On note p_n la probabilité que chaque match oppose des équipes de divisions différentes et q_n celle que chaque match oppose des équipes de même division.

1. Déterminer p_n et q_n.
2. Étudier les suites (p_n) et (q_n).

Exercice 882 [Mines-Ponts PSI 2026 # 882] Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, $U = (X_1, \ldots, X_n)^T$ et $M = UU^T$.

1. Donner les lois de $\mathrm{rg}(M)$ et $\mathrm{Tr}(M)$.
2. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?

Exercice 883 [Mines-Ponts PSI 2026 # 883] Soit $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, où X, Y sont indépendantes de lois géométriques de paramètres respectifs p, q.

1. Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?
2. Quelle est la probabilité que A soit inversible ?

Exercice 884 [Mines-Ponts PSI 2026 # 884] Soient X, Y indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la probabilité que M soit inversible.
2. Noter U, V les plus grandes et plus petites valeurs propres de M. Calculer $\mathrm{Cov}(U, V)$ et étudier leur indépendance.
3. Poser $Z = \max(X, Y)$. Calculer $\mathbf{E}(Z)$.

Exercice 885 [Mines-Ponts PSI 2026 # 885] Fixer $a \in]0, 1[$ et $b > 0$. Soit (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que
$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & i < j, \\ e^{-b} \dfrac{b^j a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & i \geq j. \end{cases}$$

1. Déterminer les lois de X, Y, leurs espérances et variances.
2. Ces variables sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

Exercice 886 [Mines-Ponts PSI 2026 # 886] Soient X, Y indépendantes avec $X \sim \mathcal{G}(p)$, $Y \sim \mathcal{G}(q)$, où $p, q \in]0, 1[$. On pose $U = X/Y$.

1. Déterminer la loi de U.
2. Calculer $\mathbf{E}(U)$.
3. Pour $p = q$, montrer que $\mathbf{E}(U) > 1$.

Exercice 887 [Mines-Ponts PSI 2026 # 887] Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. uniformes sur $\{-1, 1\}$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Fixer $r > 0$.

1. Montrer que $\mathrm{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$ pour $t > 0$.

2. Montrer que, pour $t > 0$,
$$\mathbf{P}(S_n/n \geq r) \leq \mathbf{E}(e^{t(S_n/n-r)}).$$
3. En déduire que $\mathbf{P}(S_n/n \geq r) \leq e^{-nr^2/2}$.

Exercice 888 [Mines-Ponts PSI 2026 # 888] Soit $\alpha > 0$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice $G_X(t) = (2-t)^{-\alpha}$.
2. Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, donner un équivalent de $\mathbf{P}(X = n)$.
3. Pour $\lambda > 0$, montrer que $\mathbf{P}(X \geq \lambda + \alpha) \leq 2\alpha/\lambda^2$.

Exercice 889 [Mines-Ponts PSI 2026 # 889] Soient $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ des réels positifs et $(X_n)_{n\geq 0}$ des variables indépendantes avec $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$. Déterminer la loi de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n$.

Exercice 890 [Mines-Ponts PC 2026 # 890] On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ issue de l'origine, avec déplacements indépendants et équiprobables vers l'est, l'ouest, le nord ou le sud. On note $A_n = (X_n, Y_n)$ sa position après n pas.

1. Déterminer $\mathbf{E}(X_n), V(X_n)$ puis $\mathbf{E}(Y_n), V(Y_n)$.
2. Poser $Z_n = \|A_n\|_2 = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$. Montrer que $\mathbf{E}(Z_n) \leq \sqrt{n}$.
3. Montrer que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$, puis déterminer $\mathbf{P}(Z_n = 0)$.

Exercice 891 [Mines-Ponts PC 2026 # 891] Soit $p \in]0,1[$ et $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

1. Rappeler la formule de Stirling.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathbf{E}\left(\exp\left(t\frac{X_n - \mathbf{E}(X_n)}{\sqrt{V(X_n)}}\right)\right) \longrightarrow e^{t^2/2}.$$

Exercice 892 [Mines-Ponts PC 2026 # 892] Pour $n \geq 1$, poser $f_n(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $x \geq 0$.

1. Montrer que $f_n(x) = 1/2$ admet une unique solution $a_n \geq 0$ et que (a_n) est croissante.
2. Soit (X_i) i.i.d. de loi de Poisson de paramètre λ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$. Donner la loi, l'espérance et la variance de S_n. Par Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\mathbf{P}(S_n \geq n) \to 0$ si $\lambda < 1$ et tend vers 1 si $\lambda > 1$.
3. Utiliser $\mathbf{P}(S_n \geq n) = f_n(n\lambda)$ pour montrer que $a_n \sim n$.

IX) Mines-Ponts PC 2026

1) Algèbre

Exercice 893 [Mines-Ponts PC 2026 # 893] On pose $a = (5\sqrt{2}+7)^{1/3}$ et $b = (5\sqrt{2}-7)^{1/3}$. Calculer $a^3 - b^3$, ab et $a - b$.

Exercice 894 [Mines-Ponts PC 2026 # 894] Soit $z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{7})$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $2\,\mathrm{Re}(z^n)$ est un entier impair.

Exercice 895 [Mines-Ponts PC 2026 # 895] Calculer
$$\sum_{0\leq 3k\leq n} \binom{n}{3k} \quad \text{et} \quad \sum_{0\leq 3k\leq n} (-1)^k \binom{n}{3k}.$$

Exercice 896 [Mines-Ponts PC 2026 # 896] Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in K^{n+1}$. Montrer que tout $Q \in K_n[X]$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$ si et seulement si $a_0 \neq 0$.

Exercice 897 [Mines-Ponts PC 2026 # 897] Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{(x+1)^n - 1}{x}$ est polynomiale ; noter P le polynôme associé.
2. Pour $n \geq 2$, montrer que les affixes des racines de P sont sur un cercle à déterminer.
3. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 898 [Mines-Ponts PC 2026 # 898] Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, soit Ω_P l'ensemble des $r \in \mathbb{R}$ tels que $P + r$ soit scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

1. Donner un exemple tel que $\Omega_P = \varnothing$.
2. Montrer que Ω_P est un intervalle ouvert.

Exercice 899 [Mines-Ponts PC 2026 # 899] Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X-1) = P(X^2)$.

Exercice 900 [Mines-Ponts PC 2026 # 900] Soient $n \geq 2$ et $P = X^n - 3X + 7$, de racines complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.

1. Déterminer le nombre de racines réelles distinctes de P.
2. Déterminer le nombre de racines complexes distinctes de P.
3. Expliciter $Q = \prod_{i=1}^{n} \left(X - \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}\right)$.
4. Expliciter $R = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^2)$.

Exercice 901 [Mines-Ponts PC 2026 # 901] Soient $n \geq 1$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité et U le cercle unité.

1. Calculer $\sum_{\omega\in U_n}|P(\omega)|^2$ en fonction des coefficients de P.
2. En déduire que $\sup_{z\in U}|P(z)|\geq\sqrt{1+1/n}$.

Exercice 902 [Mines-Ponts PC 2026 # 902]

1. Pour $\theta\not\equiv 0\ [\pi]$ et $n\in\mathbb{N}$, montrer qu'il existe $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\sin((2n+1)\theta)=\sin^{2n+1}(\theta)P\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right),$$
où $P(X)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}X^{n-k}$.
2. En déduire
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos^2(k\pi/(2n+1))\sin^2(k\pi/(2n+1))}=\frac{n(2n-1)}{3},$$
puis $\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-2}=\pi^2/6$.

Exercice 903 [Mines-Ponts PC 2026 # 903] On pose $E=\{Q^2+XR^2:(Q,R)\in\mathbb{R}[X]^2\}$.

1. Montrer que E est stable par produit.
2. Comparer par inclusion E et $G=\{P\in\mathbb{R}[X]:\forall x\in\mathbb{R}_+,\ P(x)\geq 0\}$.

Exercice 904 [Mines-Ponts PC 2026 # 904] Soient $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$ et $P(X)=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k=\prod_{j=1}^{n}(X-\lambda_j)$. Poser $\rho=\max_j|\lambda_j|$.

1. Déterminer le nombre de racines réelles strictement positives de $X^n-\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|X^k$.
2. Si $r\geq 0$ et $r^n\geq\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|r^k$, montrer que $\rho\leq r$.
3. Montrer que $\rho\leq\max(1,\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|)$.
4. En utilisant $Q(X)=(X-1)P(X)$, montrer que $\rho\leq|a_0|+\sum_{k=0}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|$, où $a_n=1$.

Exercice 905 [Mines-Ponts PC 2026 # 905]

1. Montrer qu'il existe une unique famille $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $L_i(j)=\delta_{i,j}$.
2. Préciser le coefficient dominant de L_k.
3. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que $\max_{0\leq k\leq n}|P(k)|\geq n!/2^n$.

Exercice 906 [Mines-Ponts PC 2026 # 906] Soit $\Delta:P\mapsto P(X+1)-P(X)$.

1. Montrer que, pour $P\in\mathbb{R}[X]$ et $n\in\mathbb{N}$,
$$\Delta^n(P)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}P(X+k).$$
2. En déduire que, pour $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}P(k)=0$.
3. Déterminer $\inf_{P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]}\sum_{k=0}^{n}(k^n-P(k))^2$.

Exercice 907 [Mines-Ponts PC 2026 # 907] Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non constant sans racine réelle, de racines complexes $z_1,\dots,z_n$ comptées avec multiplicité.

1. Pour $z\notin\{z_1,\dots,z_n\}$, montrer que
$$\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right|^2\leq n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-z_k|^2}.$$
2. Montrer qu'il existe une constante α telle que, pour $n\geq 2$ et tout tel $P\in\mathbb{R}_n[X]$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P'(x)^2}{P(x)^2+P'(x)^2}dx\leq\alpha n^{3/2}.$$

Exercice 908 [Mines-Ponts PC 2026 # 908] Soit $n\geq 1$. Déterminer le plus petit sous-espace de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ contenant toutes les symétries vectorielles.

Exercice 909 [Mines-Ponts PC 2026 # 909] Soient E un K-espace vectoriel, $(v_1,\dots,v_n)\in E^n$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in K^n$. Poser $w=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kv_k$. Montrer que
$$\mathrm{rg}(v_1+w,\dots,v_n+w)=n$$
si et seulement si $\mathrm{rg}(v_1,\dots,v_n)=n$ et $\lambda_1+\cdots+\lambda_n\neq -1$.

Exercice 910 [Mines-Ponts PC 2026 # 910] Soit $D=\mathrm{Diag}(-1,4)$. Trouver les matrices $M\in M_2(\mathbb{R})$ telles que $M^3-2M=D$.

Exercice 911 [Mines-Ponts PC 2026 # 911] Soit
$$A=\begin{pmatrix}-1&2&0&8\\-1&2&4&-4\\0&0&2&-6\end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $\mathrm{Im}(A)$.

2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
3. Trouver $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $Q \in GL_4(\mathbb{R})$ tels que $PAQ = J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Pour $n \geq 2$, montrer que $\{M \in M_{n,3}(\mathbb{R}) : MA = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension à déterminer.

Exercice 912 [Mines-Ponts PC 2026 # 912] Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$X^T A^{-1} X = \frac{\det(A + XX^T)}{\det A} - 1.$$

Exercice 913 [Mines-Ponts PC 2026 # 913]
1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à son inverse.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Expliciter M^{-1} et montrer que $M - I_3$ et $M^{-1} - I_3$ sont semblables.

Exercice 914 [Mines-Ponts PC 2026 # 914]
1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de dimension $r < n$. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $e_k \notin F$ pour tout k.
2. Quelles sont les matrices $A \in M_d(K)$ telles que toute matrice semblable à A possède au moins une colonne nulle ?

Exercice 915 [Mines-Ponts PC 2026 # 915] Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = A$ et $r = \mathrm{rg}(A)$. Poser $E = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : AM + MA = 0\}$.
1. Déterminer le nombre de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ stables par A.
2. Déterminer $\dim E$.

Exercice 916 [Mines-Ponts PC 2026 # 916] Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, poser $A(z) = (z + z^{-1})I_n + B$.
1. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $A(z)$ soit inversible si $0 < |z| < R$.
2. Trouver $N \geq 1$ tel que $z \mapsto z^N \det(A(z))$ admette une limite finie non nulle en 0 et préciser cette limite.

Exercice 917 [Mines-Ponts PC 2026 # 917] Soit $A \in M_n(K)$ de rang r. Poser $E_A = \{M \in M_n(K) : AMA = 0\}$. Calculer $\dim E_A$.

Exercice 918 [Mines-Ponts PC 2026 # 918] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \geq 0$.

Exercice 919 [Mines-Ponts PC 2026 # 919] Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.
1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x_0, Ax_0, \ldots, A^{n-1}x_0)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Poser $C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$. Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel et que $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ en est une base.

Exercice 920 [Mines-Ponts PC 2026 # 920] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}(AB - BA) = 1$. Montrer que $\mathrm{Im}(B)$ ou $\mathrm{Ker}(B)$ est stable par A.

Exercice 921 [Mines-Ponts PC 2026 # 921] Soit S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.
1. Pour $\sigma \in S_n$, montrer que $\varphi_\sigma : s \mapsto s \circ \sigma$ est une permutation de S_n.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f_\sigma \in \mathcal{L}(E)$ définie par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Montrer que $p_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un projecteur et déterminer son noyau et son image.

Exercice 922 [Mines-Ponts PC 2026 # 922] Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base.
1. Caractériser les hyperplans de E par une équation linéaire en les coordonnées dans cette base.
2. Soient $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille libre de $\mathcal{L}(E, K)$ et $\Phi : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. a) Montrer que Φ est un isomorphisme. b) En déduire qu'il existe une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ telle que $f_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$.
3. Soient $f \in \mathcal{L}(E, K)$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ libre. Montrer l'équivalence entre $f \in (f_1, \ldots, f_p)$ et $\bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(f_i) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
4. Que dire si $(f_1, \ldots, f_p)$ est liée ?

Exercice 923 [Mines-Ponts PC 2026 # 923] Soient $A, B \in M_n(K)$ tels que $ABAB = 0$. A-t-on nécessairement $BABA = 0$?

Exercice 924 [Mines-Ponts PC 2026 # 924]
1. Définir $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1/u_n)$. Étudier la suite.
2. Dans $M_p(\mathbb{R})$, soit N nilpotente. a) Montrer que $A = I_p + N$ est inversible. b) Justifier l'existence de (B_n) définie par $B_0 = A$ et $B_{n+1} = \frac{1}{2}(B_n + B_n^{-1})$. Étudier cette suite.

Exercice 925 [Mines-Ponts PC 2026 # 925] Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Déterminer le rang de $M = (P(i + j))_{1 \leq i,j \leq n+1}$.

Exercice 926 [Mines-Ponts PC 2026 # 926] Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $M = (f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible.

Exercice 927 [Mines-Ponts PC 2026 # 927] Soient $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \geq 1$ et $a_0, \ldots, a_n \in K$ distincts.
1. Soit $P \in K[X]$ de degré n et $P_j(X) = P(X + a_j)$. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $K_n[X]$.
2. Soit $Q \in K_n[X]$ et $M = (Q(a_i + a_j))_{0 \leq i,j \leq n}$. Montrer que M est inversible si et seulement si $\deg Q = n$.

Exercice 928 [Mines-Ponts PC 2026 # 928] Soit $\Delta : P \mapsto P(X + 1) - P(X)$.
1. Montrer que Δ stabilise $\mathbb{R}_n[X]$ et noter Δ_n sa restriction.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$ et $\mathrm{Im}(\Delta_n)$.
3. Trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que la matrice de Δ_n ne comporte que des 0 et des 1.
4. Soit $d \in \mathbb{N}$. a) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(k) = \sum_{i=0}^{k} i^d$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. b) Trouver de deux manières un équivalent de $Q(k)$.

Exercice 929 [Mines-Ponts PC 2026 # 929] Soit $d \in \mathbb{N}$. Poser $P_0 = 1$ et, pour $k \geq 1$, $P_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$.

1. Montrer que $(P_0, \ldots, P_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.
2. Donner la matrice de passage depuis la base canonique et montrer que son inverse est à coefficients entiers.
3. Étudier la convergence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} P_d(n)/n!$.
4. Montrer qu'il existe $N_d \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} n^d/n! = N_d e$.

Exercice 930 [Mines-Ponts PC 2026 # 930] Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont en somme directe. Montrer que $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f+g)$ si et seulement si $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 931 [Mines-Ponts PC 2026 # 931] Soient $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^*$. On pose $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i}$ pour $x > 0$.

1. Montrer que f s'annule au plus $n-1$ fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soient $t_1 < \cdots < t_n$ et $A = (t_i^{\alpha_j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que $\det(A) \geq 0$.

Exercice 932 [Mines-Ponts PC 2026 # 932] Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$. Montrer que u est une homothétie si et seulement si, pour tous $v, w \in \mathcal{L}(E)$, $u = v \circ w$ entraîne $u = w \circ v$.

Exercice 933 [Mines-Ponts PC 2026 # 933] Soient $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1 et de trace nulle. Montrer que A est semblable à $E_{1,n}$.

Exercice 934 [Mines-Ponts PC 2026 # 934] Soit E de dimension $N \geq 1$, $n = \lfloor N/3 \rfloor$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) \geq N - n$.

1. Calculer $\mathrm{rg}(u^2)$ et montrer que $N = 3n$.
2. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 935 [Mines-Ponts PC 2026 # 935] Résoudre dans $M_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 936 [Mines-Ponts PC 2026 # 936] Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$. Montrer que A et $-A$ sont semblables si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.

Exercice 937 [Mines-Ponts PC 2026 # 937] Soit $k \in \mathbb{C}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

1. À quelle condition sur k la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Si elle l'est, déterminer la dimension de $\{M \in M_4(\mathbb{C}) : AM = MA\}$.

Exercice 938 [Mines-Ponts PC 2026 # 938] Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

Exercice 939 [Mines-Ponts PC 2026 # 939] Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $T : E \to E$ défini par $T((u_n)) = (\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer les valeurs propres de T et les dimensions de ses sous-espaces propres.

Exercice 940 [Mines-Ponts PC 2026 # 940] Soit $\varphi_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par

$$\varphi_n(P)(x) = \int_0^{\pi/2} P(1 - x\cos t)dt.$$

φ_n est-il diagonalisable ? Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{Tr}(\varphi_n)$.

Exercice 941 [Mines-Ponts PC 2026 # 941] Pour $t \in \mathbb{R}$, poser

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Montrer que $M(t)$ admet trois valeurs propres $\alpha(t) < 0 < \beta(t) < 2 < \gamma(t)$. Déterminer les limites de $\alpha(t), \beta(t)$ quand $t \to +\infty$ et un développement asymptotique de $\gamma(t)$.

Exercice 942 [Mines-Ponts PC 2026 # 942] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$ et possède une unique valeur propre réelle a, avec $a > 1$.
2. Montrer que $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq 1$.
3. Déterminer la nature de $\sum \sin(\pi a^n)$.

Exercice 943 [Mines-Ponts PC 2026 # 943] Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ dont la matrice dans la base canonique a pour coefficients $a_{i,i+1} = i$, $a_{i+1,i} = n - i + 1$, les autres étant nuls.

1. Montrer que $u(P) = (1 - X^2)P' + nXP$.
2. Si λ est valeur propre et P un vecteur propre, montrer que $\deg P = n$ et que ses racines complexes appartiennent à $\{-1, 1\}$.
3. En étudiant les multiplicités de 1 et -1, déterminer tous les vecteurs propres de u.
4. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 944 [Mines-Ponts PC 2026 # 944] Soit $E = M_n(\mathbb{C})$ et $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

1. ρ est-elle une norme sur E ?
2. Si $A^p \to 0$, montrer que $\rho(A) < 1$.
3. Pour $0 \leq k < n$ et $|\lambda| < 1$, déterminer la limite de $\binom{p}{k}\lambda^{p-k}$ quand $p \to +\infty$. On admet qu'on peut écrire $A = D + N$ avec $DN = ND$, D diagonalisable et N nilpotente. Montrer que $\rho(A) < 1$ entraîne $A^p \to 0$.

Exercice 945 [Mines-Ponts PC 2026 # 945] Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $m_{i+1,i} = a_i$ pour $1 \leq i < n$, $m_{1,n} = a_n$, les autres coefficients étant nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 946 [Mines-Ponts PC 2026 # 946] Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et expliciter le noyau et l'image de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer les sous-espaces stables par A.
4. Déterminer la dimension de $\{C \in M_3(\mathbb{C}) : AC = CA\}$.

Exercice 947 [Mines-Ponts PC 2026 # 947] On dit que $B \in M_2(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe $A \in M_2(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = B$.

1. Montrer que cette propriété est invariante par similitude.
2. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ admettent-elles une racine carrée, avec $c = \cos(2\pi/3)$ et $s = \sin(2\pi/3)$?
3. Déterminer l'image de $A \in GL_2(\mathbb{R}) \mapsto A^2$.

Exercice 948 [Mines-Ponts PC 2026 # 948] Soient $0 < a_0 < \cdots < a_n$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_n & a_0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \end{pmatrix}.$$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda \notin \{-a_1, \ldots, -a_n\}$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 949 [Mines-Ponts PC 2026 # 949] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. On pose $\psi : M \mapsto MB - BM$.

1. Montrer que ψ est un endomorphisme.
2. Montrer que $\psi(A^k) = kA^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et préciser $\mathrm{tr}(A)$.
3. Montrer que si A n'est pas nilpotente alors ψ admet une infinité de valeurs propres. Conclure.

Exercice 950 [Mines-Ponts PC 2026 # 950]

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ pour tout i. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que toutes les valeurs propres de A appartiennent à $\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|\}$.
3. Soit $B = (b_{i,j})$ définie par $b_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$ et 0 sinon. Déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres.

Exercice 951 [Mines-Ponts PC 2026 # 951] Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u)$.
2. Pour chaque i, donner $P_i \in K_{n-1}[X]$ tel que $P_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$. Caractériser $P_i(u)$.
3. Si F est stable par u, montrer que $F = \bigoplus_{i=1}^{n} (F \cap E_{\lambda_i}(u))$.
4. Combien E possède-t-il de sous-espaces stables par u ?

Exercice 952 [Mines-Ponts PC 2026 # 952] Soient $M \in M_n(\mathbb{C})$, $N = \begin{pmatrix} M & M^2 \\ 0 & M \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{C}$ et $T = \begin{pmatrix} m & m^2 \\ 0 & m \end{pmatrix}$.

1. La matrice T est-elle diagonalisable ?
2. Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $Q(N)$ à l'aide de Q, M, M^2.
3. Montrer que N est diagonalisable si et seulement si $M = 0$.

Exercice 953 [Mines-Ponts PC 2026 # 953] Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $T : M \mapsto AM$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Donner le spectre de T en fonction de celui de A.
2. Exprimer χ_T en fonction de χ_A.
3. Montrer que T est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 954 [Mines-Ponts PC 2026 # 954] Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(M - \lambda I_{2n}) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda^2 I_n)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 955 [Mines-Ponts PC 2026 # 955] Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 956 [Mines-Ponts PC 2026 # 956]

1. Montrer que $M = (1_{i-j \equiv 1 \pmod n})_{1 \leq i,j \leq n}$ est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.
2. Exprimer $A = (a_{i-j \pmod n})_{1 \leq i,j \leq n}$ en fonction de M et $(a_0, \ldots, a_{n-1})$.
3. En déduire $\det(A)$.

Exercice 957 [Mines-Ponts PC 2026 # 957]

1. Soient $U, V \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si elles sont semblables sur $\mathbb{C}$, elles le sont sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. a) Montrer que n est pair. b) Avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que A est semblable à la matrice diagonale par blocs ayant $n/2$ blocs J.

Exercice 958 [Mines-Ponts PC 2026 # 958]

1. Soient E de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables et commutant. Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que $M \mapsto AM - MA$ sur $M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

Exercice 959 [Mines-Ponts PC 2026 # 959] Soient $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\varphi_P : M \mapsto PMP^{-1}$.

1. Si M est vecteur propre de φ_P associé à λ, montrer que $\lambda \neq 0$ et que soit M est nilpotente, soit λ est une racine q-ième de l'unité pour un $1 \leq q \leq n$.
2. Pour une racine q-ième de l'unité λ, exhiber P tel que λ soit valeur propre de φ_P.

Exercice 960 [Mines-Ponts PC 2026 # 960] Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à coefficients dans $\{-1, 1\}$ telle que $A + D$ soit inversible.

Exercice 961 [Mines-Ponts PC 2026 # 961] Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^{2026} = A^{10}$ et $\operatorname{Tr}(A) = n$.

Exercice 962 [Mines-Ponts PC 2026 # 962] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $A(AB - BA) = 0$.

1. Montrer que $(AB)^k = A^k B^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit $C \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $\operatorname{tr}(C^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$. Montrer que C est nilpotente.
3. Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.

Exercice 963 [Mines-Ponts PC 2026 # 963] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA^2$. On suppose que toutes les valeurs propres de A ont un module différent de 1. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

Exercice 964 [Mines-Ponts PC 2026 # 964] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

Exercice 965 [Mines-Ponts PC 2026 # 965] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension n. Montrer que f est diagonalisable si et seulement s'il existe n hyperplans $H_1, \ldots, H_n$ stables par f tels que $H_1 \cap \cdots \cap H_n = \{0\}$.

Exercice 966 [Mines-Ponts PC 2026 # 966] Soit $n \geq 2$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|e_k - f_k\| < 1/\sqrt{n}$ pour tout k. Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 967 [Mines-Ponts PC 2026 # 967] Poser

$$I = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - a - bt)^2 dt.$$

Justifier l'existence de I et le calculer.

Exercice 968 [Mines-Ponts PC 2026 # 968] Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $f = \mathrm{id}$ si et seulement si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée.

Exercice 969 [Mines-Ponts PC 2026 # 969]

1. Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$. À l'aide de $x \mapsto e^{-x^2}P(x)$, montrer que $P' - 2XP$ est scindé.
2. Pour $\varphi(x) = e^{-x^2}$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi^{(n)}(x) = H_n(x)\varphi(x)$. Préciser son degré et son coefficient dominant.
3. Que dire de la position relative des racines de H_n et H_{n+1} ?
4. Montrer que $(P, Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Montrer que $(((-1/2)^n H_n))_{n\geq 0}$ est une famille orthogonale de polynômes unitaires pour ce produit scalaire.

Exercice 970 [Mines-Ponts PC 2026 # 970] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + x_1 t + \cdots + x_n t^n)^2 dt$, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
2. Poser $u = (1, x_1, \ldots, x_n)^T$ et $M = ((i + j)!)_{0\leq i,j\leq n}$. Montrer que $u^T M u = f(x)$.

Exercice 971 [Mines-Ponts PC 2026 # 971] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une forme bilinéaire $B : E^2 \to \mathbb{R}$ est dite positive si $B(u, u) \geq 0$ pour tout u, négative si $B(u, u) \leq 0$, et symétrique si $B(x, y) = B(y, x)$. On pose $C_B = \{u : B(u, u) = 0\}$ et $K_B = \{u : \forall x,\ B(u, x) = 0\}$.

1. Sur $\mathbb{R}^3$, pour $B((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$, déterminer C_B, K_B.
2. Pour B symétrique, montrer l'équivalence entre $K_B = C_B$, C_B sous-espace vectoriel, et B positive ou négative.

Exercice 972 [Mines-Ponts PC 2026 # 972] Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Montrer que deux produits scalaires sur E ayant le même groupe orthogonal sont proportionnels.

Exercice 973 [Mines-Ponts PC 2026 # 973] Pour $A \subset \mathbb{N}$, noter 1_A sa fonction indicatrice. Soient $a \geq 1$, $n, m \geq 1$ et $U_1, \ldots, U_m$ des parties distinctes non vides de $\{1, \ldots, n\}$ telles que $|U_i \cap U_j| = a$ pour $i \neq j$. Poser $M = (1_{U_j}(i))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$.

1. Calculer $M^T M$.
2. Montrer que $\{j : [M^T M]_{j,j} = a\}$ a au plus un élément.
3. Pour $X \in M_{m,1}(\mathbb{R})$, calculer $X^T M^T M X$.
4. Donner $\dim \mathrm{Ker}(M)$.
5. Montrer que $m \leq n$.

Exercice 974 [Mines-Ponts PC 2026 # 974] Soit E un espace euclidien.

1. Pour F, G sous-espaces, montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Soient p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer que pqp est autoadjoint.
3. Montrer que $x \mapsto pq(x)$ est diagonalisable sur $\mathrm{Im}(p)$.
4. Montrer que pq est diagonalisable.

Exercice 975 [Mines-Ponts PC 2026 # 975] Soit p un projecteur d'un espace euclidien E.

1. Montrer que p est orthogonal si et seulement si p est autoadjoint.
2. Montrer que p est orthogonal si et seulement si $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.
3. Si p, q sont orthogonaux, montrer que $p \circ q$ est un projecteur si et seulement si p et q commutent.

Exercice 976 [Mines-Ponts PC 2026 # 976] Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $k \geq 2$ tels que $A^k = A^T$. Montrer que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux et que A^{k+1} est la matrice d'un projecteur orthogonal.

Exercice 977 [Mines-Ponts PC 2026 # 977] Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^3$ et $A^T A = AA^T$. Montrer que $A^2 = A$.

Exercice 978 [Mines-Ponts PC 2026 # 978] Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$ et poser $M = A^T A$.

1. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. On dit que M, N sont orthosemblables s'il existe $P \in O_2(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}MP = N$. Montrer que A est orthosemblable à l'une des matrices 0, I_2, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 979 [Mines-Ponts PC 2026 # 979] Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $PA = B$.

Exercice 980 [Mines-Ponts PC 2026 # 980] Soient n impair et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tels que $AB = 0$. Montrer qu'au moins l'une des matrices $A + A^T$ et $B + B^T$ n'est pas inversible.

Exercice 981 [Mines-Ponts PC 2026 # 981] Soient E un espace préhilbertien réel et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$ si et seulement si $\langle p(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 982 [Mines-Ponts PC 2026 # 982] Soit E euclidien et $u \in O(E)$. Si λ est une valeur propre de u, montrer que $\dim E_\lambda(u)$ est égale à sa multiplicité.

Exercice 983 [Mines-Ponts PC 2026 # 983] Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Pour $P \in E$, poser $u(P)(x) = \int_0^1 (x + t)^n P(t)dt$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle u est diagonale.
3. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(x) P_i(y),$$

où λ_i sont les valeurs propres de u et (P_i) une base orthonormée de vecteurs propres associée.

Exercice 984 [Mines-Ponts PC 2026 # 984] Soit $H_n = (1/(i+j+1))_{0\le i,j\le n-1}$ et $X = (x_0,\dots,x_{n-1})^T$. Poser $P_X(t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1}$.

1. Montrer que $X^T H_n X = \int_0^1 P_X(t)^2 dt$. En déduire que H_n est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit β_n sa plus grande valeur propre. Montrer que $X^T H_n X \le \beta_n \|X\|^2$.

Exercice 985 [Mines-Ponts PC 2026 # 985]

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $n \ge 1$ et $x_1,\dots,x_n \in I$. Montrer que
$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k).$$
2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $(\mathrm{Tr}(S)/n)^n \ge \det(S)$ et préciser le cas d'égalité.

Exercice 986 [Mines-Ponts PC 2026 # 986] On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}(A^TB)$.

1. Comparer $\mathrm{Tr}(A^2)$ et $\mathrm{Tr}(A^TA)$.
2. Montrer que A^TA est diagonalisable à valeurs propres positives.
3. Comparer $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^TA)$, puis leurs rangs.
4. Montrer que A^TA et AA^T ont mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.

Exercice 987 [Mines-Ponts PC 2026 # 987]

1. Rappeler les définitions de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit $H = (1/(i+j-1))_{1\le i,j\le n}$. Montrer que $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B = R^2$. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que AB est diagonalisable.

Exercice 988 [Mines-Ponts PC 2026 # 988] On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M,N\rangle = \mathrm{Tr}(M^TN)$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S = B^2$.
2. Montrer qu'il existe $(U,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = US$.
3. Pour $V \in O_n(\mathbb{R})$, établir $\|A-V\|^2 = \|D-W\|^2$, où $W \in O_n(\mathbb{R})$ et D est une matrice diagonale semblable à A.
4. Montrer que la distance de A à $O_n(\mathbb{R})$ est atteinte.
5. Montrer que $A \mapsto d(A, O_n(\mathbb{R}))$ est lipschitzienne.

2) Analyse

Exercice 989 [Mines-Ponts PC 2026 # 989] Soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum |u_n| \text{ converge}\}$ et $\alpha = (\alpha_n)_{n\ge0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour $u \in E$, poser $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n|$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que N soit une norme sur E.

Exercice 990 [Mines-Ponts PC 2026 # 990] Soient $p,q>1$ tels que $1/p+1/q=1$.

1. Pour $u,v \ge 0$, montrer que $uv \le u^p/p + v^q/q$.
2. En déduire l'inégalité de Hölder pour deux suites finies positives.
3. Que reconnaît-on pour $p=2$?
4. Montrer l'inégalité triangulaire pour la norme ℓ^p sur les vecteurs à coordonnées positives.
5. Montrer que l'ensemble ℓ^p des suites réelles telles que $\sum |u_n|^p$ converge est un espace vectoriel et que $u \mapsto (\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p)^{1/p}$ est une norme.

Exercice 991 [Mines-Ponts PC 2026 # 991] Pour $A \subset \mathbb{N}$, poser $x_A = \sum_{k\in A}(9/10)^k$.

1. Justifier la définition de x_A.
2. Soit $E = \{x_A : A \subset \mathbb{N}\}$. Montrer que E admet une symétrie.
3. Montrer que E est fermé.

Exercice 992 [Mines-Ponts PC 2026 # 992]

1. Soit $z = re^{i\theta} = x+iy \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ avec $\theta \in]-\pi,\pi[$. Montrer que $\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+|z|}\right)$.
2. En déduire qu'il existe une fonction continue $L_0 : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ telle que $z = \exp(L_0(z))$.
3. Déterminer toutes les fonctions continues L sur ce domaine telles que $z = \exp(L(z))$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $z = \exp(L(z))$ pour tout z.

Exercice 993 [Mines-Ponts PC 2026 # 993] Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe $c>0$ tel que $\|AB\| \le c\|A\|\|B\|$.
2. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que $(\|A^k\|^{1/k})_{k\ge1}$ converge.

Exercice 994 [Mines-Ponts PC 2026 # 994] Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$.

1. Soit A de rang 1 et de trace nulle. Montrer que $A \in \mathcal{N}$.
2. $\mathcal{N}$ est-il ouvert ou fermé ?
3. Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{N}$ commutant. Montrer que $\det(A+B) = \det(A)$.

Exercice 995 [Mines-Ponts PC 2026 # 995]

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^2)$, et $\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.
2. L'ensemble des matrices vérifiant la première propriété est-il convexe, fermé ou ouvert ?

Exercice 996 [Mines-Ponts PC 2026 # 996] Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$ et $\mathrm{Im}(a) > 0$. On définit $z_0 = a$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$. Déterminer la limite de (z_n).

Exercice 997 [Mines-Ponts PC 2026 # 997] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{nu_n}$ pour $n \geq 1$.

1. Étudier la convergence de (u_n).
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 998 [Mines-Ponts PC 2026 # 998] Étudier la nature et déterminer la limite éventuelle de

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n}\right).$$

Exercice 999 [Mines-Ponts PC 2026 # 999] Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On veut montrer que $\left(1 + \frac{\ell}{n}\right)^n \to e^\ell$.

1. Traiter le cas $\ell \in \mathbb{R}$.
2. Pour $\ell \in \mathbb{C}$, montrer que
$$\left|e^\ell - \left(1 + \frac{\ell}{n}\right)^n\right| \leq e^{|\ell|} - \left(1 + \frac{|\ell|}{n}\right)^n$$
et conclure.
3. Soit (u_n) complexe de limite ℓ. Montrer que $(1 + u_n/n)^n \to e^\ell$.

Exercice 1000 [Mines-Ponts PC 2026 # 1000] Pour $n \geq 1$, poser $P_n = -1 + \sum_{k=1}^{n} X^k$.

1. Montrer que P_n admet une unique racine u_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
3. Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 1001 [Mines-Ponts PC 2026 # 1001] Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, poser $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k/k - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que (x_n) est strictement décroissante et converge.
3. Expliciter $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
4. Déterminer $\ell = \lim x_n$.
5. Justifier qu'il existe $c_n \in]\ell, x_n[$ tel que $-f_n(\ell) = f_n'(c_n)(x_n - \ell)$ et en déduire un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 1002 [Mines-Ponts PC 2026 # 1002] Soit $k \geq 1$. Étudier la convergence et calculer la somme de $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i(i+k)}$.

Exercice 1003 [Mines-Ponts PC 2026 # 1003] Pour $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+1}.$$

1. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1004 [Mines-Ponts PC 2026 # 1004] Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k}}.$$

Exercice 1005 [Mines-Ponts PC 2026 # 1005] Étudier la nature de $\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 1006 [Mines-Ponts PC 2026 # 1006] Soit $a > 0$. Pour n assez grand, poser

$$u_n = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) - \frac{\pi}{6}.$$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 1007 [Mines-Ponts PC 2026 # 1007] Pour $n \geq 1$, poser $a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\sqrt{k}$. Montrer que

$$a_n + \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{2}$$

admet une limite $\ell > 0$, puis étudier $\sum 1/a_n$.

Exercice 1008 [Mines-Ponts PC 2026 # 1008]

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique $a_n \geq 0$ tel que $e^{a_n} + na_n = 2$.
2. Étudier la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum (-1)^n a_n$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n(1 - na_n)$.

Exercice 1009 [Mines-Ponts PC 2026 # 1009] Soit (u_n) définie par $u_0 = \pi/2$ et $u_{n+1} = (-1)^n \arctan(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) converge.

2. Montrer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 1010 [Mines-Ponts PC 2026 # 1010] Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ réelle et $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$.

1. Si $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement, montrer que $\sum v_n$ ne diverge pas grossièrement.
2. Si $\sum u_n$ converge, peut-on conclure pour $\sum v_n$?
3. On suppose $\sum u_n^2$ convergente. Montrer que

$$v_n^2 - 2u_n v_n \leq (n-1)v_{n-1}^2 - nv_n^2,$$

puis que $\sum v_n^2$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$.

Exercice 1011 [Mines-Ponts PC 2026 # 1011] Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 1/(2+u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ à préciser, et déterminer la nature de $\sum(u_n - \ell)$.

Exercice 1012 [Mines-Ponts PC 2026 # 1012] Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(1/x)$.

1. Montrer que $f(f(x)) \geq 1$ pour tout $x \neq 0$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe ℓ.
3. Pour $u_0 \neq 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, montrer que (u_n) est bien définie et converge vers ℓ.
4. Déterminer la nature de $\sum(\ell - u_n)$.

Exercice 1013 [Mines-Ponts PC 2026 # 1013] Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$.

1. Si $f'(x)/f(x) \to -\infty$, montrer que $f(x+1)/f(x) \to 0$ et en déduire que $\sum f(n)$ converge.
2. Si $f'(x)/f(x) \to \alpha < 0$, déterminer la limite de $f(x+1)/f(x)$ et, selon $\beta \in \mathbb{R}$, la nature de $\sum n^\beta f(n)$.

Exercice 1014 [Mines-Ponts PC 2026 # 1014] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum |u_n|$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = 0$ pour tout $k \geq 1$. Montrer que (u_n) est la suite nulle.

Exercice 1015 [Mines-Ponts PC 2026 # 1015] Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers au moins égaux à 2.

1. Si (q_n) est stationnaire, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}(q_1 q_2 \cdots q_n)^{-1} \in \mathbb{Q}$.
2. En admettant la réciproque, montrer que e et $\mathrm{ch}(1)$ sont irrationnels.
3. Montrer la réciproque de la première question.

Exercice 1016 [Mines-Ponts PC 2026 # 1016] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ strictement positive et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Si $S_n \to +\infty$, montrer que $\sum u_n/S_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Si $S_n \to S > 0$, poser $R_n = S - S_n$. Montrer que $\sum u_n/R_{n-1}^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 1017 [Mines-Ponts PC 2026 # 1017] Étudier la fonction $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}\arctan(x)$: domaine, graphe, limites et asymptotes.

Exercice 1018 [Mines-Ponts PC 2026 # 1018]

1. Résoudre $\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 5 - 6\sqrt{x-4}} = 1$.
2. Soient $x_1 < \cdots < x_n$. Montrer que $x \mapsto \sum_{k=1}^n |x - x_k|$ est continue et admet un minimum.
3. Pour $f_k(x) = |x - x_k|$, montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice 1019 [Mines-Ponts PC 2026 # 1019] Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$. Comparer $\sum_{k=1}^n \arccos(\alpha_k)$ et $\arccos(\prod_{k=1}^n \alpha_k)$.

Exercice 1020 [Mines-Ponts PC 2026 # 1020] Pour $x > 0$, poser $f(x) = x^{x^{1/x}}$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x+1)/f(x)$ et un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 1021 [Mines-Ponts PC 2026 # 1021] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f'(x) = f(\lambda x)$ pour $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, puis $|\lambda| < 1$.

Exercice 1022 [Mines-Ponts PC 2026 # 1022] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Pour $y \in \mathbb{R}$, montrer que y admet une infinité d'antécédents. Une fonction polynomiale de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle être surjective ?

Exercice 1023 [Mines-Ponts PC 2026 # 1023] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et telle que

$$\frac{f(4x) - f(x)}{x} \longrightarrow \ell \quad (x \to 0).$$

Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

Exercice 1024 [Mines-Ponts PC 2026 # 1024] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable, non identiquement nulle, et telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant $|f'(x)| \leq M|f(x)|$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que f ne s'annule pas.

Exercice 1025 [Mines-Ponts PC 2026 # 1025] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

1. Pour $n \geq 1$, montrer qu'il existe un unique $(a_{n,0}, \ldots, a_{n,n}) \in [0,1]^{n+1}$ avec $0 = a_{n,0} < \cdots < a_{n,n} = 1$ et

$$\int_{a_{n,k-1}}^{a_{n,k}} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dt.$$

2. Déterminer la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n a_{n,k}$.

Exercice 1026 [Mines-Ponts PC 2026 # 1026] Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 - 2a\cos\theta + a^2)d\theta$.

1. Montrer que $I(a)$ est bien définie.

2. Calculer $I(a)$ à l'aide de sommes de Riemann. Indication : factoriser $X^{2n}-1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1027 [Mines-Ponts PC 2026 # 1027] Pour $x \neq \pm 1$, calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{x-e^{it}}$$

à l'aide de la décomposition en éléments simples de $x \mapsto \frac{nx^{n-1}}{x^n-1}$.

Exercice 1028 [Mines-Ponts PC 2026 # 1028] Soient $f(t)=\sqrt{1-t^2}$ sur $[0,1]$ et $g(t)=1/\sqrt{1-t^2}$ sur $[0,1[$. Pour $n \geq 1$, poser

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n), \qquad T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g(k/n).$$

1. Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que (T_n) converge.
3. Poser $\Delta_n = I_n - \ell$. Pour $\alpha < 1$, montrer que $n^\alpha \Delta_n \to 0$.

Exercice 1029 [Mines-Ponts PC 2026 # 1029] Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que, pour toute fonction 2π-périodique $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\sup_{\mathbb{R}} |f| \leq A\int_0^{2\pi} |f(t)|dt + B\int_0^{2\pi} |f'(t)|dt.$$

Exercice 1030 [Mines-Ponts PC 2026 # 1030] Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \quad (x>0).$$

Déterminer $\lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}g(x)$, puis montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1031 [Mines-Ponts PC 2026 # 1031]

1. Pour quels $z \in \mathbb{C}$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-z}dt$ converge ? On rappelle $t^z = \exp(z\ln t)$.
2. Montrer que $\sum(1/n^z - \int_n^{n+1} t^{-z}dt)$ converge pour $\mathrm{Re}(z)>0$.
3. Étudier la convergence de $\sum 1/n^z$.

Exercice 1032 [Mines-Ponts PC 2026 # 1032] Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, poser $f_n(x) = (1+x/n)^{-n}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction g.
2. Montrer que $f_n \geq g$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha_n > 0$ tel que $\|f_n - g\|_\infty = (f_n-g)(\alpha_n)$.
4. Montrer que (f_n) converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1033 [Mines-Ponts PC 2026 # 1033] Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, poser $S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{x+k}$.

1. Montrer la convergence simple de (S_N) vers S et que S est impaire et 1-périodique.
2. Montrer que S est continue.
3. On admet $S(x/2)+S((x+1)/2) = 2S(x)$. Poser $f(x) = \pi\cot(\pi x) - S(x)$. Montrer que f est continue, impaire et 1-périodique.
4. Montrer que f se prolonge continûment en 0 puis sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que f est majorée et atteint un maximum M en $a \in \mathbb{R}$.
6. Montrer que $f(a/2) = M$ et en déduire que $f=0$.

Exercice 1034 [Mines-Ponts PC 2026 # 1034] Soit (a_n) décroissante et positive, et $f_n(x) = a_n x^n(1-x)$ sur $[0,1]$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement si et seulement si $\sum a_n/n$ converge.
3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si $a_n \to 0$.

Exercice 1035 [Mines-Ponts PC 2026 # 1035] Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{x+n}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de S.
2. Déterminer les limites de S en 0 et en $+\infty$.
3. Montrer que, pour $x>0$,

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}dt.$$

Exercice 1036 [Mines-Ponts PC 2026 # 1036] Pour $n \geq 1$, poser $u_n(x) = \arctan(nx)/n^2$.

1. Déterminer le domaine de définition de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et étudier sa continuité.
2. Donner un équivalent de $S(x)$ quand $x \to 0$.

Exercice 1037 [Mines-Ponts PC 2026 # 1037] Soit $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1-x^n}$.

1. Préciser son domaine de définition D.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur D.

3. Pour $\psi(u) = e^{-u}/(1-e^{-u})$, trouver un équivalent de $\sum_{n\geq 1}\psi(nu)$ quand $u \to 0^+$.
4. En déduire un équivalent de f en 1^-.

Exercice 1038 [Mines-Ponts PC 2026 # 1038] Pour $n \geq 1$, poser $f_n(x) = x/(x^2+n^2)$ et $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de F. Est-elle de classe C^1 ?
2. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
3. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur son domaine ?

Exercice 1039 [Mines-Ponts PC 2026 # 1039] Pour $n \geq 1$, poser $f_n(x) = \frac{nx}{n^4+x^2}$ pour $x \geq 0$ et $S = \sum_{n\geq 1} f_n$.

1. Montrer que la série converge simplement.
2. Montrer que S est continue.
3. Montrer que $n^4 + x^2 \geq \frac{1}{2}(n^2+x)^2$ et en déduire $S(x) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{x}}{n^2+x}$.
4. Montrer que S est bornée.
5. Montrer que $S(x)$ ne tend pas vers 0 quand $x \to +\infty$.

Exercice 1040 [Mines-Ponts PC 2026 # 1040] Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x}$.

1. Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
2. Déterminer ses variations (sans les limites) et étudier sa convexité.
3. Déterminer sa limite en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent de ζ en 1.
5. $\ln(\zeta)$ est-elle convexe ?

Exercice 1041 [Mines-Ponts PC 2026 # 1041] Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f^{(n)}/n!$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}/n!$.

Exercice 1042 [Mines-Ponts PC 2026 # 1042] Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

1. Donner son domaine de définition.
2. Poser $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(1+1/n) - 1/n)x^n$. Déterminer le domaine de définition de g.
3. Donner la limite et un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 1043 [Mines-Ponts PC 2026 # 1043] Soit (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n/(n+2)$.

1. Déterminer la limite de (u_n).
2. Poser $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Montrer que son rayon de convergence est strictement positif, calculer S sur son domaine, puis déterminer explicitement u_n et un équivalent.

Exercice 1044 [Mines-Ponts PC 2026 # 1044] Soit (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$ et déterminer son rayon de convergence.

Exercice 1045 [Mines-Ponts PC 2026 # 1045] Pour $n \in \mathbb{N}$, poser $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$ et $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Si R est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, donner celui de $\sum a_n^3 x^n$.
2. Étudier (a_n).
3. Que peut-on dire de R ?
4. Calculer $h(x)$.
5. Établir une relation entre a_{n+2} et a_n.

Exercice 1046 [Mines-Ponts PC 2026 # 1046] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2.

1. Montrer que $e^{P(x)}$ est développable en série entière $\sum a_n x^n$ et préciser son rayon de convergence.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'indice n tel que $a_{n+1} = a_n = 0$.

Exercice 1047 [Mines-Ponts PC 2026 # 1047] Pour $n \geq 1$, poser $a_n = (-1)^n \ln(n)$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de S.
2. Montrer, en utilisant $(1+x)S(x)$, que la série converge en $x = 1$.

Exercice 1048 [Mines-Ponts PC 2026 # 1048] Soit $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1+1/k)x^k$ et R son rayon.

1. Calculer $f(-R)$.
2. Déterminer la limite et un équivalent de $f(x)$ quand $x \to R^-$.
3. Calculer $\int_0^1 (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor} x\,dx$.

Exercice 1049 [Mines-Ponts PC 2026 # 1049] Soit (a_n) une suite réelle non nulle telle que $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ pour $n \geq 2$. Déterminer une fonction de classe C^∞ définie au voisinage de 0 telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1050 [Mines-Ponts PC 2026 # 1050] Soit (a_n) positive telle que $\sum a_n$ converge et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence 1. Montrer que $f(x) \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ quand $x \to 1^-$. Que dire si $\sum a_n$ diverge ?

Exercice 1051 [Mines-Ponts PC 2026 # 1051] Soit (a_n) sommable dans $\mathbb{C}$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n/n!$.

1. Montrer que g est définie et continue.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t} g(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. Supposons seulement que $\sum a_n$ converge. Poser $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $A_{-1} = 0$ et $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_{n-1} x^n/n!$. Montrer que F est définie, de classe C^1, que $\int_0^x e^{-t} g(t)dt = e^{-x}F(x)$, et que l'égalité précédente reste vraie.

Exercice 1052 [Mines-Ponts PC 2026 # 1052] Soit $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de tout $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 1053 [Mines-Ponts PC 2026 # 1053] Soient $r > 0$ et E_r l'ensemble des fonctions développables en série entière sur $]-r, r[$. Pour $f \in E_r$, poser $\Phi(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t+x} dt$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_r.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 1054 [Mines-Ponts PC 2026 # 1054] Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n!}$.

1. Justifier la définition de f et préciser sa régularité.
2. La fonction f est-elle développable en série entière ?

Exercice 1055 [Mines-Ponts PC 2026 # 1055] Pour $n \in \mathbb{N}$, poser $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t^2} dt$.

1. Montrer que I_n existe.
2. Exprimer I_n à l'aide d'une série.
3. Donner un équivalent de I_n.

Exercice 1056 [Mines-Ponts PC 2026 # 1056] Pour $n \geq 1$, poser

$$I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^4)^n}, \qquad J_n = \frac{1}{4\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}.$$

1. Montrer que I_n, J_n sont définies.
2. Montrer que (I_n) est monotone, puis déterminer sa limite.
3. Montrer que $0 \leq I_n \leq J_n$.
4. Montrer que $\ln(1+\alpha) \geq \alpha/(1+\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.
5. Poser $K_n = \int_0^n t^{-3/4}(1+t/n)^{-n} dt$. Montrer que (K_n) converge et calculer sa limite.
6. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 1057 [Mines-Ponts PC 2026 # 1057] Pour $n \geq 1$, poser $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{1+n^5t^3} dt$.

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Déterminer sa limite puis un équivalent de I_n.

Exercice 1058 [Mines-Ponts PC 2026 # 1058] Pour $n \geq 1$, poser $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+\cdots+t^{n-1}}$.

1. Montrer que u_n est bien définie et que $\sum 1/k^2$ converge.
2. Déterminer la limite de (u_n). Poser $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(nk+1)(nk+2)}$.
3. Montrer que $u_n = \ell + S(n)/n^2$ pour un réel ℓ.
4. Montrer que $(S(n))$ admet une limite finie et en déduire un équivalent de $u_n - \ell$.
5. Déterminer un développement asymptotique de $u_n - \ell$ à $o(1/n^3)$.

Exercice 1059 [Mines-Ponts PC 2026 # 1059] Pour $x > -1$, poser

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^x dt, \qquad g(x) = (x+1)f(x)f(x+1).$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $]-1, +\infty[$.
2. Établir des relations entre $f(x+2), f(x)$ puis entre $g(x+1), g(x)$.
3. Montrer que $f(x+1) \sim f(x)$ quand $x \to +\infty$.
4. Étudier les variations de $x \mapsto g(x)/(x+1)$.
5. Calculer $g(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que g est constante et donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 1060 [Mines-Ponts PC 2026 # 1060] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\ln(2+t)}{x+t} dt$.

1. Déterminer son intervalle de définition I.
2. Étudier la continuité de f sur I.
3. Donner ses limites aux bornes de I.
4. Donner un équivalent de f aux bornes de I.

Exercice 1061 [Mines-Ponts PC 2026 # 1061] Soient

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(at)}{e^t - 1} dt, \qquad G(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}.$$

1. Montrer que F est continue sur un domaine D à déterminer.
2. F est-elle de classe C^∞ sur D ?
3. Montrer que G est continue sur son domaine de définition.
4. Montrer que $F(a) = aG(a)$ pour $a \in D$.

Exercice 1062 [Mines-Ponts PC 2026 # 1062]

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.
2. Pour $x \geq 0$, poser
$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt, \qquad G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$
Montrer que $(F+G)/2$ est constante, déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, puis en déduire I.

Exercice 1063 [Mines-Ponts PC 2026 # 1063] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} e^{-xt} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Montrer que f est de classe C^∞.
3. Donner ses limites aux deux bornes.
4. Donner un équivalent aux deux bornes.

Exercice 1064 [Mines-Ponts PC 2026 # 1064] Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, poser $I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx) dt$.

1. Montrer que I_n est de classe C^∞ et exprimer I_n' en fonction de I_{n+1}.
2. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n+1}(0)$ et $I_n(0)$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n (-1)^k/((2k+1)(n-k)!)$.

Exercice 1065 [Mines-Ponts PC 2026 # 1065] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$ pour $x > 0$ et en déduire $f(x)$.
3. Étudier la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} (\arctan(x)/x)^2 dx$.

Exercice 1066 [Mines-Ponts PC 2026 # 1066] Soit E l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, poser
$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx) f(t)}{1+t^2} dt,$$
et $N(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $\Phi(f)$ est de classe C^1.
3. Pour $f_0(x) = 1$ et $g = \Phi(f_0)$, calculer g' et $g(1)$.

Exercice 1067 [Mines-Ponts PC 2026 # 1067] Soient $a, b > 0$ et
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt.$$

1. Montrer que F est bien définie.
2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$F(x) = C + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right).$$
3. Poser $\psi(t) = (e^{-at} - e^{-bt})/t$. Montrer que ψ se prolonge en une fonction C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que ψ' est intégrable. Calculer C.

Exercice 1068 [Mines-Ponts PC 2026 # 1068] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.
4. La série de fonctions $\sum x/(x^2+n^2)$ converge-t-elle uniformément ?

Exercice 1069 [Mines-Ponts PC 2026 # 1069] Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\ln(x+t)}{x+t} dt$.

1. Déterminer son domaine D.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. Déterminer ses limites aux bornes de D.
4. Donner des équivalents simples aux bornes de D.

Exercice 1070 [Mines-Ponts PC 2026 # 1070] Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt^2)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Montrer que
$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\ln t}{t-1} dt.$$

Exercice 1071 [Mines-Ponts PC 2026 # 1071] Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Montrer que F est de classe C^∞ sur son domaine.
3. Montrer que F est développable en série entière en 0 et préciser son développement.

Exercice 1072 [Mines-Ponts PC 2026 # 1072] Pour $x \in \mathbb{R}$, poser $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2-x^2/t^2}dt$.

1. Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
3. Déterminer G.

Exercice 1073 [Mines-Ponts PC 2026 # 1073] Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, lorsque cela a un sens, poser $I_\alpha = \int_1^{+\infty} |\sin(t)/t^\alpha|dt$.

1. Déterminer l'ensemble D des α pour lesquels I_α converge.
2. Montrer que $F : \alpha \mapsto I_\alpha$ est continue sur D.
3. Déterminer la limite et un équivalent de $F(\alpha)$ au bord inférieur de D.

Exercice 1074 [Mines-Ponts PC 2026 # 1074] On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée et, pour $n \geq 1$,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)e^{-n(x-y)^2}dy.$$

1. Montrer que ψ_n est bien définie et de classe C^1.
2. Montrer que (ψ_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1075 [Mines-Ponts PC 2026 # 1075] Soit $f \in C^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, poser $g(x) = f(x)/x$.

1. Montrer que $g(x) = \int_0^1 f'(xt)dt$.
2. Pour $0 \leq k \leq n$, déterminer $\lim_{x\to 0^+} g^{(k)}(x)$ et montrer que g est de classe C^n.

Exercice 1076 [Mines-Ponts PC 2026 # 1076] Soient $a < b$, $c < d$ et $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Justifier l'existence de $g(t) = \int_a^b (\int_c^t f(x,y)dy)dx$ et montrer que g est C^1.
2. Justifier l'existence des intégrales et montrer

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Exercice 1077 [Mines-Ponts PC 2026 # 1077] Pour $x > 0$, poser $f(x) = \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^x)dt$. Montrer que f est définie et l'exprimer comme somme d'une série.

Exercice 1078 [Mines-Ponts PC 2026 # 1078] Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$ pour $x \in]0,1[$. Montrer que $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Exercice 1079 [Mines-Ponts PC 2026 # 1079] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer que $y' - y = f(x)$ admet une unique solution bornée.

Exercice 1080 [Mines-Ponts PC 2026 # 1080] On considère $2xy'(x) + y(x) = \frac{1}{1-x}$.

1. Résoudre l'équation sur les intervalles pertinents.
2. Montrer que sur $]-\infty,1[$ elle possède une unique solution de classe C^∞.

Exercice 1081 [Mines-Ponts PC 2026 # 1081] Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

1. Déterminer le rayon R et montrer que S vérifie $x(x-4)y' + (x+2)y = 2$ sur $]-R,R[$.
2. En déduire une expression de $S(x)$ pour $x \in]0,4[$, puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/\binom{2n}{n}$.

Exercice 1082 [Mines-Ponts PC 2026 # 1082] On considère $(1-x)y' - xy = 0$, avec $y(0) = 1$.

1. Déterminer la solution sur $]-\infty,1[$.
2. Montrer que y est développable en série entière et donner une récurrence pour ses coefficients.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit D_n le nombre de permutations de $\{1,\dots,n\}$ sans point fixe. Montrer que $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$.
4. À l'aide des deux premières questions, donner une expression de D_n.

Exercice 1083 [Mines-Ponts PC 2026 # 1083] On considère $4xf''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$. Déterminer les solutions développables en série entière en 0. Avec le changement de variable $t = \sqrt{x}$, déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 1084 [Mines-Ponts PC 2026 # 1084] On considère $t^2y'' + ty' - (t^2+t+1)y = 0$.

1. Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0.
2. Trouver des solutions de la forme $t \mapsto t^r e^{\alpha t}$.
3. Donner toutes les solutions.

Exercice 1085 [Mines-Ponts PC 2026 # 1085] Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\frac{\partial f}{\partial x} - xy\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. On pourra poser $(u,v) = (x, ye^{x^2/2})$.

Exercice 1086 [Mines-Ponts PC 2026 # 1086] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$. Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, poser $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Montrer que g est de classe C^2 et établir l'équation polaire vérifiée par g sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
2. Montrer que $F(r) = \int_0^{2\pi} g(r,\theta)d\theta$ est constante.

Exercice 1087 [Mines-Ponts PC 2026 # 1087] Soit $f : (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto \frac{1}{xy} + x + y$. Déterminer ses extrema.

Exercice 1088 [Mines-Ponts PC 2026 # 1088] Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ et $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 3y$. Déterminer $\sup f$ et $\inf f$.

Exercice 1089 [Mines-Ponts PC 2026 # 1089] Soit $U = \{(x,y) \in]-\pi/2, \pi/2[^2 : x < 0,\ y - x > \pi/2\}$ et $f(x,y) = \tan(y) - \tan(x) + \tan(x-y)$.

1. Montrer que f admet un minimum sur U et le déterminer.
2. Pour un cercle C du plan affine euclidien, déterminer les triangles pleins contenant C d'aire minimale.

Exercice 1090 [Mines-Ponts PC 2026 # 1090] Soit $T = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ et $f(x,y) = 3x^2+2y^2+4xy-4x-3y+1$. Déterminer les extrema de f.

Exercice 1091 [Mines-Ponts PC 2026 # 1091] Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad f(X) = (1 + X^T A X)e^{-\|X\|^2}, \quad X \in \mathbb{R}^3.$$

Déterminer les extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1092 [Mines-Ponts PC 2026 # 1092] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\mathrm{Sp}(H_f(x)) \subset [1, +\infty[$ pour tout x.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, poser $\varphi(t) = f(tx)$. Montrer que φ est C^2 et expliciter φ', φ''.
2. Pour $x, h \in \mathbb{R}^n$, comparer $h^T H_f(x) h$ et $\|h\|^2$.
3. Poser $\psi(t) = f(tx) - \langle \nabla f(0), tx \rangle - t^2\|x\|^2/2$. Montrer que ψ est convexe.
4. Montrer que f admet un minimum global.

3) Probabilités

Exercice 1093 [Mines-Ponts PC 2026 # 1093] On considère N personnes se présentant à un examen qu'elles peuvent repasser. Chaque tentative réussit avec probabilité $p \in]0,1[$, et chacun s'arrête au premier succès. Soit X_k le nombre de tentatives de la personne k, X le nombre total de candidatures et Y le nombre de sessions. Les X_k sont indépendantes. Déterminer les lois, espérances et variances de X_k, X et Y.

Exercice 1094 [Mines-Ponts PC 2026 # 1094] Deux groupes D_1, D_2 ont chacun n équipes. On forme aléatoirement des matchs par paires parmi les $2n$ équipes. Soit A_n l'événement que chaque match oppose une équipe de chaque groupe.

1. Calculer $\mathbf{P}(A_n)$ et donner un équivalent quand $n \to +\infty$.
2. Soit X_n le nombre de matchs intergroupes. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$.
3. Pour n pair, calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$ et déterminer la loi de X_n.

Exercice 1095 [Mines-Ponts PC 2026 # 1095] On répartit au hasard n boules dans n boîtes, chaque boule choisissant uniformément une boîte. Soit X_n le nombre de boîtes vides.

1. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $V(X_n)$.
2. Déterminer les limites de $\mathbf{E}(X_n/n)$ et $V(X_n/n)$.
3. Pour $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbf{P}(|X_n/n - e^{-1}| \geq \varepsilon) \to 0$.

Exercice 1096 [Mines-Ponts PC 2026 # 1096] Soient $r \geq 2$ et (X_n) i.i.d. uniformes sur $\{1, \ldots, r\}$. Soit A_n l'événement que, parmi $X_1, \ldots, X_{nr}$, chaque valeur $k \in \{1, \ldots, r\}$ apparaisse exactement n fois. Calculer $\mathbf{P}(A_n)$, puis $\mathbf{P}(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{p \geq n} A_p)$.

Exercice 1097 [Mines-Ponts PC 2026 # 1097] On lance une pièce jusqu'à obtenir deux piles. Soit X le nombre de faces.

1. Déterminer la loi de X.
2. X est-elle d'espérance finie ? La calculer si oui.

On tire ensuite une boule parmi $X+1$ boules numérotées de 0 à X et on note Y son numéro.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Y est-elle d'espérance finie ? La calculer si oui.

Exercice 1098 [Mines-Ponts PC 2026 # 1098] Soit $N \sim \mathcal{G}(p)$. On réalise N lancers d'une pièce équilibrée et note X le nombre de faces.

1. Montrer que X est une variable aléatoire discrète.
2. Déterminer la loi de X sachant $N = n$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner le rayon et la somme de $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$.
4. Déterminer la loi de X.

Exercice 1099 [Mines-Ponts PC 2026 # 1099] Soient $r \in \mathbb{N}$ et $Z_1, \ldots, Z_r$ indépendantes telles que $Z_1 = 1$ et $Z_i \sim \mathcal{G}((r-i+1)/r)$ pour $2 \leq i \leq r$. Poser $C_r = Z_1 + \cdots + Z_r$. Déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 1100 [Mines-Ponts PC 2026 # 1100] Pour $s > 1$, poser $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ et définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ par $\mathbf{P}(\{n\}) = 1/(\zeta(s)n^s)$.

1. Pour $k \geq 1$, poser $M_k = k\mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbf{P}(M_k) = k^{-s}$.
2. Montrer que les événements $M_{p_1}, \ldots, M_{p_k}$ sont indépendants si p_i sont des nombres premiers distincts.
3. Montrer que $\mathbf{P}(\bigcap_i M_{p_i}^c) = \prod_i (1 - p_i^{-s})$.

Exercice 1101 [Mines-Ponts PC 2026 # 1101] Soient X, Y indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 1102 [Mines-Ponts PC 2026 # 1102] Soit E un ensemble de cardinal n. Soient X, Y indépendantes et uniformes sur l'ensemble des parties de E. Déterminer la loi de $Z = |X \cap Y|$.

Exercice 1103 [Mines-Ponts PC 2026 # 1103] Soit Z uniforme sur l'ensemble U_n des racines n-ièmes de l'unité. Poser $X = \mathrm{Re}(Z)$ et $Y = \mathrm{Im}(Z)$. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. X, Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1104 [Mines-Ponts PC 2026 # 1104] Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, $Z = (X_1, \ldots, X_n)^T$ et $M = ZZ^T$.

1. Déterminer les lois de $\mathrm{rg}(M)$ et $\mathrm{Tr}(M)$.
2. Déterminer la probabilité que M soit une projection.

Exercice 1105 [Mines-Ponts PC 2026 # 1105] Soient $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ i.i.d. uniformes sur $\{-1, 1\}$. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n} + \varepsilon_k\right) - \ell\right| \geq \varepsilon\right) \longrightarrow 0.$$

Exercice 1106 [Mines-Ponts PC 2026 # 1106] Soit $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$ sur $[0, 1]$ et (ε_n) i.i.d. uniformes sur $\{-1, 1\}$. Poser

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n), \qquad X_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)(1 - \varepsilon_k).$$

1. Montrer que (I_n) converge et calculer sa limite ℓ.
2. Pour $\varepsilon > 0$, déterminer la limite de $\mathbf{P}(|X_n - \ell| \geq \varepsilon)$.

Exercice 1107 [Mines-Ponts PC 2026 # 1107] Soit $n \geq 2$. On tire sans remise les boules numérotées de 1 à n et X_k est le résultat du k-ième tirage. Soit T_k l'indicatrice de $X_k > \max(X_1, \ldots, X_{k-1})$ et $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$.

1. Calculer $\mathbf{P}(S_n = 1)$ et $\mathbf{P}(S_n = n)$.
2. Donner la loi de T_k et l'espérance de S_n.

Exercice 1108 [Mines-Ponts PC 2026 # 1108]

1. Calculer $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.
2. On choisit uniformément une urne U_i parmi p urnes, l'urne U_i contenant i boules blanches et $p - i$ noires. On tire avec remise $2n$ boules et $A_{n,p}$ est l'événement d'obtenir n blanches et n noires. Écrire $\mathbf{P}(A_{n,p})$ comme somme, puis calculer ses limites quand $n \to +\infty$ et quand $p \to +\infty$.

Exercice 1109 [Mines-Ponts PC 2026 # 1109] Soit (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ avec $X \leq Y$, $\mathbf{P}(X = n) > 0$ et la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ uniforme sur $\{0, \ldots, n\}$.

1. Exprimer la loi de Y en fonction de celle de X et montrer que Y et $X - Y$ suivent la même loi.
2. Si $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p, déterminer la loi de X et montrer que Y et $X - Y$ sont indépendantes.
3. Réciproquement, montrer que leur indépendance entraîne que $Y + 1$ est géométrique.

Exercice 1110 [Mines-Ponts PC 2026 # 1110] Pour $k = 1, \ldots, n$, l'urne k contient une boule noire et k boules blanches. On tire une boule de chaque urne indépendamment. Soit X_n le nombre de boules noires tirées et A_k l'événement que le tirage de l'urne k donne une boule noire.

1. Montrer que $X_n = \sum_{k=1}^n 1_{A_k}$ et calculer $\mathbf{E}(X_n)$.
2. Calculer $V(X_n)$ et montrer $V(X_n) \leq \mathbf{E}(X_n)$.
3. Pour $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbf{P}(|X_n - \mathbf{E}(X_n)| > \varepsilon \mathbf{E}(X_n)) \leq 1/(\varepsilon^2 \mathbf{E}(X_n))$.
4. Montrer $\ln(n + 2) - 1 \leq \mathbf{E}(X_n) \leq \ln(n + 1)$.
5. En déduire que $X_n/\mathbf{E}(X_n) \to 1$ en probabilité.

Exercice 1111 [Mines-Ponts PC 2026 # 1111] Une puce se déplace sur $\{0, \ldots, n-1\}$, modulo n, depuis k vers $k+1$ ou $k-1$ avec probabilité $1/2$. On note X_k sa position à l'instant k et $U_k = (\mathbf{P}(X_k = 0), \ldots, \mathbf{P}(X_k = n-1))^T$.

1. Donner $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $U_{k+1} = AU_k$.
2. A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses sous-espaces propres.
3. Pour chaque i, déterminer $\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(X_k = i)$.

Exercice 1112 [Mines-Ponts PC 2026 # 1112] Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1/2)$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $u_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \ln(k)$. Poser $f(0) = 0$ et $f(x) = \ln x$ pour $x \in]0, 1]$.

1. Montrer que $\mathbf{P}(S_n/n \leq 1/4) = O(1/n)$.
2. Exprimer $\mathbf{E}(f(S_n/n))$ en fonction de u_n.
3. Montrer que $|f(S_n/n) - f(1/2)| \leq \ln n + \ln 2$.
4. Montrer que f est lipschitzienne sur $[1/4, 1]$.
5. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 1113 [Mines-Ponts PC 2026 # 1113] Soit T à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec $\mathbf{P}(T \geq n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $t_n = \mathbf{P}(T = n \mid T \geq n)$.

1. Exprimer $\mathbf{P}(T \geq n+1 \mid T \geq n)$ à l'aide des t_k.
2. Exprimer $\mathbf{P}(T \geq n)$ et $\mathbf{P}(T = n)$ à l'aide des t_k.
3. Montrer que $t_n \in [0,1[$ et que $\sum t_n$ diverge.
4. Réciproquement, pour $(t_n) \in [0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum t_n$ diverge, construire T telle que $\mathbf{P}(T = n \mid T \geq n) = t_n$.

Exercice 1114 [Mines-Ponts PC 2026 # 1114] On dit que X est presque sûrement bornée s'il existe $c \geq 0$ avec $\mathbf{P}(|X| \leq c) = 1$; X admet un moment d'ordre k si $\mathbf{E}(|X|^k) < +\infty$.

1. Existe-t-il des variables ayant des moments à tout ordre sans être presque sûrement bornées ?
2. Soient X, Y ayant des moments à tout ordre, Y presque sûrement bornée et $\mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que X est presque sûrement bornée et que X, Y ont même loi.

Exercice 1115 [Mines-Ponts PC 2026 # 1115] Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,1[$ telle que $\sum p_n$ converge. Soient (X_n) indépendantes avec $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. Poser $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ et $S = \lim S_n$.

1. Exprimer $(S \geq m)$ en fonction des événements $(S_n \geq m)$ et en déduire que S est une variable aléatoire.
2. Montrer que S est finie presque sûrement.
3. Montrer que S est d'espérance finie et la calculer.
4. Donner la loi de S.

Exercice 1116 [Mines-Ponts PC 2026 # 1116] Soient X, Y réelles et $(X_n), (Y_n)$ définies sur le même espace probabilisé, avec $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$ en probabilité.

1. Si $|x+y| \geq \varepsilon$, montrer que $|x| \geq \varepsilon/2$ ou $|y| \geq \varepsilon/2$.
2. Montrer que $X_n + Y_n \to X + Y$ en probabilité.
3. Pour (U_n) i.i.d. de Bernoulli(p), poser $V_k = U_k + U_{k+1}$. Montrer que $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} V_i \to 2p$ en probabilité.
4. Montrer que $\mathbf{P}(|X| > M) \to 0$ quand $M \to +\infty$.
5. Montrer que $X_n Y_n \to XY$ en probabilité.

Exercice 1117 [Mines-Ponts PC 2026 # 1117] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0,1[$. Poser $P_k = \prod_{i=1}^{k} X_i$, $R_n = \sum_{k=1}^{n} P_k$ et $R = \sum_{k\geq 1} P_k$.

1. Donner loi, espérance et variance de P_k.
2. Montrer que R est discrète et donner sa loi.
3. Montrer que R_n, R sont d'espérance finie et que $\mathbf{E}(|R_n - R|) \to 0$.
4. Montrer que $(R_n \to R)$ est un événement.
5. Montrer que $\mathbf{P}(R_n \to R) = 1$.

Exercice 1118 [Mines-Ponts PC 2026 # 1118] Soient X, Y indépendantes et $A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 2 & Y \end{pmatrix}$.

1. Pour $n \geq 2$, avec $X \sim \mathcal{B}(n, 1/4)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n, 3/4)$, calculer les probabilités que A soit inversible, diagonalisable.
2. Même question avec $X \sim \mathcal{G}(p_1)$, $Y \sim \mathcal{G}(p_2)$, $p_1, p_2 \in]0,1[$.

Exercice 1119 [Mines-Ponts PC 2026 # 1119] Soient $p \in]0,1[$ et $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$. Soit $r(n)$ le reste modulo 3 et $X_{n+1} = r(X_n + 2 - \varepsilon_n)$, avec $X_0 \in \{0,1,2\}$. Poser $V_n = (a_n, b_n, c_n)^T = (\mathbf{P}(X_n = 0), \mathbf{P}(X_n = 1), \mathbf{P}(X_n = 2))$.

1. Justifier $a_n + b_n + c_n = 1$.
2. Pour $Q = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$, montrer $V_{n+1} = QV_n$.
3. Montrer que Q est diagonalisable. La suite (V_n) converge-t-elle ?

Exercice 1120 [Mines-Ponts PC 2026 # 1120] Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ i.i.d. et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Si X_1 est uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$, calculer $\mathbf{P}(M_n < N)$ et montrer $\mathbf{E}(|M_n - N|^p) \to 0$ pour tout $p \geq 1$.
2. Si X_1 prend ses valeurs dans $0 < x_1 < \cdots < x_N$ et $\mathbf{P}(X_1 = x_N) > 0$, montrer $\mathbf{E}(|M_n - x_N|^p) \to 0$ pour tout $p \geq 1$.

Exercice 1121 [Mines-Ponts PC 2026 # 1121] Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. uniformes sur $\{1, \ldots, N\}$. Poser $S_n = \sum X_k$, $m = \mathbf{E}(X_1)$, $V_n = (S_n - nm)/(\sqrt{n}\,\sigma(X_1))$ et $M_n(t) = \mathbf{E}(e^{tV_n})$. Montrer $M_n(t) \to e^{t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1122 [Mines-Ponts PC 2026 # 1122] Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. uniformes sur $\{-1, 1\}$. Poser $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + X_n$ et $A_n = |S_n|$.

1. Déterminer la loi de $(S_n + n)/2$, puis $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.
2. Déterminer $A_n(\Omega)$.
3. Montrer $\mathbf{E}(A_{n+1}) = \mathbf{E}(A_n) + \mathbf{P}(S_n = 0)$. Indication : $|x+y| = |x| + \operatorname{sgn}(x)y$ pour $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \{-1, 1\}$.

Exercice 1123 [Mines-Ponts PC 2026 # 1123] Soient $(\varepsilon_n)_{n\geq 2}$ i.i.d. uniformes sur $\{-1, 1\}$. Poser $X_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k+\varepsilon_k}$ et $I_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

1. Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|X_n - I_n| \leq M$.

2. Donner un équivalent simple de I_n.
3. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|2X_n/\ln^2 n - 1| \geq \varepsilon) \to 0$.

Exercice 1124 [Mines-Ponts PC 2026 # 1124] Pour $n \geq 1$, soient X_n, Y_n indépendantes uniformes sur $\{1, \dots, n\}$ et $Z_n = |X_n - Y_n|$.

1. Calculer $\mathbf{E}(Z_n)$ et $\mathbf{V}(Z_n)$.
2. Déterminer le comportement asymptotique de ces suites.

Exercice 1125 [Mines-Ponts PC 2026 # 1125] Pour X réelle à image finie, poser $L_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$. Montrer que L_X caractérise la loi de X.

Exercice 1126 [Mines-Ponts PC 2026 # 1126] Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(2/3)$. Pour $k \geq 1$, poser $A_k = (X_{2k-1}X_{2k} = 0)$ et $T = \min\{k \geq 1 : X_{k-1} = X_k = 0\}$.

1. Montrer $\mathbf{P}(\bigcap_{k\geq 1} A_k) = 1$ et en déduire $\mathbf{P}(T \in \mathbb{N}^*) = 1$.
2. Donner une récurrence d'ordre 2 sur $\mathbf{P}(T = n)$.
3. Déterminer $\mathbf{E}(T)$, éventuellement à l'aide d'une fonction génératrice.

Exercice 1127 [Mines-Ponts PC 2026 # 1127] On lance indéfiniment une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. Soit X le rang du premier pile. Sachant que le premier pile est au k-ième lancer, choisir Z uniformément entre 1 et k.

1. Donner la loi de X.
2. Poser $Y = 1/(X(X+1))$. Montrer que Y est d'espérance finie et la calculer.
3. Donner la loi de Z.
4. Calculer $\mathbf{E}(Z)$.

Exercice 1128 [Mines-Ponts PC 2026 # 1128]
1. Soit $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $G_X(t) = (2-t)^{-\alpha}$ pour tout $t \in [-1, 1]$.
2. Donner un équivalent de $\mathbf{P}(X = n)$.

Exercice 1129 [Mines-Ponts PC 2026 # 1129] Poser $g(t) = \frac{e^t}{1+e-t}$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X telle que $g = G_X$ sur $[-1, 1]$.
2. La variance de X est-elle définie ?

Exercice 1130 [Mines-Ponts PC 2026 # 1130] Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendant des X_n. Poser $W = \sum_{i=1}^{Y} X_i$.

1. Relation entre les fonctions génératrices de X_1 et $X_1 + \cdots + X_n$.
2. Pour $s \geq 0$, calculer $\mathbf{E}(s^W \mathbf{1}_{Y=n})$ et en déduire $G_W = G_Y \circ G_{X_1}$.
3. Calculer $\mathbf{E}(W)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_1), \mathbf{E}(Y)$.
4. Si X_1, Y admettent des variances, calculer $\mathbf{V}(W)$.
5. Si $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$, donner la loi de W pour $Y \sim \mathcal{G}(q)$, puis pour $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 1131 [Mines-Ponts PC 2026 # 1131] Soient $N \geq 2$, $b \in \{0, \dots, N\}$. Une urne contient initialement b boules bleues et $N - b$ rouges. À chaque tour, tirer une boule et la remplacer par une boule de l'autre couleur. Soit X_n le nombre de boules bleues après n tours.

1. Exprimer $\mathbf{P}(X_{n+1} = i)$ en fonction de la loi de X_n.
2. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et sa limite.
3. Pour $G_n(s) = \mathbf{E}(s^{X_n})$, trouver une relation entre G_{n+1}, G_n, G_n'.
4. En déduire une récurrence sur $\mathbf{V}(X_n)$.

X) Centrale MP-MPI 2026

1) Algèbre

Exercice 1132 [Centrale MP-MPI 2026 # 1132] Soient $a = 2^{1/3}$ et $L = \mathbb{Q}[a]$.

1. Définir un polynôme irréductible dans $K[X]$ et énoncer Bézout. Montrer que $X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que L est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et un corps. En donner la dimension et une base.
3. Poser $B = 1 + a + a^2$. Montrer que $f : x \mapsto Bx$ est un automorphisme de L. Donner ses polynômes caractéristique et minimal.

Exercice 1133 [Centrale MP-MPI 2026 # 1133]
1. Montrer que tout idéal non nul de $K[X]$, pour $K \subset \mathbb{C}$ un sous-corps, possède un unique générateur unitaire.
2. Pour un nombre algébrique α, montrer qu'il existe un unique polynôme minimal unitaire $\mu_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0 \iff \mu_\alpha \mid P$ pour tout $P \in \mathbb{Q}[X]$.
3. Quels rationnels sont algébriques ? Donner leur polynôme minimal.
4. $\sqrt{2}$ est-il algébrique ? Donner son polynôme minimal.
5. Soient α, β algébriques de degrés m, n. Ordonner les $(\alpha^i\beta^j)_{0\leq i<m, 0\leq j<n}$ en un vecteur V et montrer qu'il existe $A, B \in M_{mn}(\mathbb{Q})$ tels que $AV = \alpha V$, $BV = \beta V$. En déduire que $\alpha - \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques.

Exercice 1134 [Centrale MP-MPI 2026 # 1134]
1. Soient G un groupe et $x \in G$ d'ordre fini. Rappeler $o(x)$ et montrer $x^k = 1_G \iff o(x) \mid k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

2. Si $n \geq 3$ et a impair, montrer $a^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^n}$. Le groupe $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?
3. En admettant que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique pour p impair premier, montrer que $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique pour $n \geq 2$.

Exercice 1135 [Centrale MP-MPI 2026 # 1135] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples, de degré $n \geq 2$.

1. Énoncer et démontrer Rolle dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que P' est scindé à racines simples.
3. Montrer que P n'a pas deux coefficients successifs nuls.
4. Montrer qu'aucun coefficient nul de P n'est encadré par deux coefficients de même signe.

Exercice 1136 [Centrale MP-MPI 2026 # 1136] Déterminer les racines de $X^2 + X - 6$ dans $\mathbb{R}$, de $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

Exercice 1137 [Centrale MP-MPI 2026 # 1137]
1. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est non inversible, montrer qu'il existe $B \neq 0$ telle que $AB = BA = 0$.
2. Montrer que $A \in M_n(\mathbb{C})$ n'est pas inversible ssi il existe $B \neq 0$ telle que $(A+B)^k = A^k + B^k$ pour tout entier $k \neq 0$.

Exercice 1138 [Centrale MP-MPI 2026 # 1138]
1. Énoncer et démontrer le petit théorème de Fermat.
2. Soit Ω l'ensemble des premiers p tels qu'il existe $A \in M_2(\mathbb{Z})$, $A \neq I_2$, vérifiant $\sum_{k=1}^{p} A^k = pI_2$. Montrer $\{2,3\} \subset \Omega$.
3. Si $p \in \Omega \setminus \{2,3\}$, montrer que $\det(A) \equiv 0$ ou $1 \pmod{p}$.
4. Déterminer Ω.

Exercice 1139 [Centrale MP-MPI 2026 # 1139] On note $T_n^+(\mathbb{C}), T_n^-(\mathbb{C})$ les matrices triangulaires supérieures, inférieures inversibles. Les mineurs principaux de A sont les déterminants des sous-matrices extraites sur les k premières lignes et colonnes. Poser (P1) : $A = LU$ avec $L \in T_n^-(\mathbb{C}), U \in T_n^+(\mathbb{C})$; (P2) : tous les mineurs principaux sont non nuls.

1. Rappeler la caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.
2. Montrer que toute matrice vérifiant (P1) ou (P2) est inversible.
3. Montrer que l'ensemble des matrices vérifiant (P2) est ouvert dans $M_n(\mathbb{C})$.
4. Montrer que (P1) et (P2) sont équivalentes.

Exercice 1140 [Centrale MP-MPI 2026 # 1140] Soit V complexe de dimension $n \geq 2$ et $A \subset \mathcal{L}(V)$ un sous-espace stable par composition, transitif : $V = \{a(x) : a \in A\}$ pour tout $x \neq 0$.

1. Énoncer et démontrer le théorème du rang.
2. Montrer $\dim A \geq 2$.
3. Pour $b \in A \setminus \{0\}$, poser $W = b(V)$ et $B = \{(b \circ u)|_W : u \in A\}$. Montrer que B est stable par composition et transitif sur W.
4. Montrer que A contient un élément non nul non inversible.
5. Montrer que A contient un élément de rang 1.
6. Montrer $A = \mathcal{L}(V)$.

Exercice 1141 [Centrale MP-MPI 2026 # 1141] Soit E réel de dimension finie $n \geq 2$, $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ non nulle, $a \neq 0$, $f(x) = x + \varphi(x)a$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 1142 [Centrale MP-MPI 2026 # 1142] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que f^2 soit diagonalisable avec p valeurs propres distinctes.

1. Si $\det(f^2) \neq 0$, trouver un polynôme annulateur de f et montrer que f est diagonalisable.
2. Si $\det(f^2) = 0$ et $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker} f$, montrer que f est diagonalisable.

Exercice 1143 [Centrale MP-MPI 2026 # 1143] Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, poser $\rho(M) = \max_{\lambda \in (M)} |\lambda|$.

1. Montrer que $\rho(M)$ est bien défini.
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k$. Pour une norme sous-multiplicative, montrer $\|X_{k+1} - A^{-1}\| \leq \|A\| \|X_k - A^{-1}\|^2$.
3. Montrer que si $X_k \to A^{-1}$, alors $\rho(AX_0 - I_n) < 1$.

Exercice 1144 [Centrale MP-MPI 2026 # 1144]
1. Montrer qu'une matrice est diagonalisable ssi elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Soit $D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Si D est diagonalisable, montrer que A, B le sont.
2. Montrer qu'il existe $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}$ inversible tel que $P^{-1}DP$ soit diagonale. En déduire qu'il existe M telle que $C = MB - AM$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, B, C pour que D soit diagonalisable.

Exercice 1145 [Centrale MP-MPI 2026 # 1145] Soit $N \in M_n(K)$ nilpotente.

1. Que dire de (N) et χ_N ?
2. Si $P(0) = 0$, montrer $P(N)$ nilpotente.
3. Si $P(0) \neq 0$, montrer $P(N)$ inversible.

4. Si $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, montrer que pour tout $k \geq 2$, il existe $U_k, V_k \in K^{k-2}[X]$ vérifiant $U_k(0) = V_k(0) = 0$ et $X^k \mid U_k \circ P(X) - X$, $X^k \mid P \circ V_k(X) - X$. En déduire qu'il existe une unique matrice nilpotente A telle que $P(A) = N$.
5. Pour $P_k = (1 + X/k)^k - 1$, soit N_k l'unique matrice nilpotente telle que $P_k(N_k) = N$. La suite (N_k) converge-t-elle ?

Exercice 1146 [Centrale MP-MPI 2026 # 1146] 1. Rappeler le lemme de décomposition des noyaux et en déduire $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in (M)} \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)^{m(\lambda)}$, en précisant $m(\lambda)$.
2. Si $M \in M_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable, montrer qu'il existe $B \in M_3(\mathbb{R})$ tel que $M = B^3$.
3. Faire de même si M possède une valeur propre non réelle.
4. Décrire les matrices réelles 3×3 qui sont des cubes de matrices réelles.

Exercice 1147 [Centrale MP-MPI 2026 # 1147] Soit E de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un p-cycle pour a si $(f^i(a))_{0 \leq i < p}$ est génératrice.

1. Montrer que les valeurs propres de f sont les racines de π_f.
2. Si f est un p-cycle, montrer $p \geq n$ et $\mathrm{rg}(f) \geq n - 1$.
3. Montrer $\pi_f = \chi_f$.
4. Montrer que f est cyclique ssi $\pi_f = \chi_f$.

Exercice 1148 [Centrale MP-MPI 2026 # 1148] Soient E complexe de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que les racines de π_u sont ses valeurs propres.
2. Si f est circulaire d'ordre p, montrer $p \geq n$, $\mathrm{rg}(f) = n$ et $\chi_f = \pi_f$.
3. Pour $f \in GL(E)$, montrer que f est circulaire ssi χ_f divise $X^p - 1$ pour un certain $p \geq 1$.

Exercice 1149 [Centrale MP-MPI 2026 # 1149] Montrer que le produit de deux fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ est intégrable et que ces fonctions forment un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions intégrables. On munit E du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)e^{-x^2}\,dx$. Poser $\psi_0(x) = e^{-x^2/2}$ et $L(\psi) = -\psi' + x\psi$ pour $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que L est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Pour tout n, montrer qu'il existe un unique polynôme P_n de degré n tel que $L^n(\psi_0) = P_n\psi_0$, puis un réel λ_n tel que $-(L^n(\psi_0))'' + x^2 L^n(\psi_0) = \lambda_n L^n(\psi_0)$.
3. Montrer que (P_n) est orthogonale.

Exercice 1150 [Centrale MP-MPI 2026 # 1150] Pour $u = (u_n)_{n \geq 0}$, poser $D(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0}$ et $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \geq 0} u_n^2 < +\infty\}$. Pour $u, v \in F$, poser $\langle u, v \rangle = \sum_{n \geq 0} u_n v_n$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel et que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. D est-elle injective ? surjective ? Déterminer ses valeurs propres et espaces propres.
3. Déterminer $\{\langle D(u), u \rangle / \langle u, u \rangle : u \in F \setminus \{0\}\}$.

Exercice 1151 [Centrale MP-MPI 2026 # 1151] 1. Définir la somme directe et démontrer la caractérisation pour deux sous-espaces.

Soient E de dimension m, $B : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique et une base (e_i) telle que $B(e_i, e_i) = 1$. Poser $b_{ij} = B(e_i, e_j)$, $\sigma_i(v) = v - 2B(v, e_i)e_i$, $\varepsilon_1 = e_1$ et $\varepsilon_i = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{i-1}(e_i)$.

1. Montrer que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ est une base.
2. En déduire la matrice de $\tau = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_m$ dans la base (e_i) (indication : utiliser la matrice C définie par $c_{ij} = 2b_{ij}$ si $i < j$, 0 sinon).

Exercice 1152 [Centrale MP-MPI 2026 # 1152] 1. Rappeler la définition d'un produit scalaire euclidien.

Soient $a < b$, $\omega \in C^0(]a, b[, \mathbb{R}_+^*)$ et $L^2(]a, b[) = \{f \in C^0(]a, b[, \mathbb{R}) : \int_a^b f(x)^2 \omega(x)\,dx < +\infty\}$, avec $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\,dx$.

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
2. Montrer que pour tout n, il existe un unique polynôme unitaire p_n de degré n orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Montrer que p_n est scindé à racines simples dans $]a, b[$.
4. Montrer l'existence et l'unicité d'une formule de quadrature à $n + 1$ points exacte pour les polynômes de degré au plus $2n + 1$ mais pas pour tous ceux de degré $2n + 2$.

Exercice 1153 [Centrale MP-MPI 2026 # 1153] Soit E euclidien.

1. Si p est un projecteur, montrer $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et donner $\mathrm{tr}(p)$.
2. Pour des projecteurs orthogonaux $p_1, \ldots, p_k$, poser $m = (p_1 + \cdots + p_k)/k$. Montrer que m est projecteur ssi tous les p_i sont égaux.
3. Si $H = \{A_1, \ldots, A_k\} \subset GL_n(\mathbb{R})$ est finie et stable par produit, montrer que $\mathrm{tr}(A_1 + \cdots + A_k)$ est un multiple entier de k.

Exercice 1154 [Centrale MP-MPI 2026 # 1154] Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver r_n, θ_n tels que $A_n = r_n R(\theta_n)$.
2. Calculer $\lim_{n \to +\infty} A_n^n$.

Exercice 1155 [Centrale MP-MPI 2026 # 1155] Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi(M) = \mathrm{tr}(M)A - M^T$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que Φ est un automorphisme.

2. Montrer que Φ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et sous-espaces propres.

Exercice 1156 [Centrale MP-MPI 2026 # 1156] 1. Si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et n est impair, montrer que 0 est la seule valeur propre réelle de M.
2. Montrer que χ_M et n ont même parité.
3. Déterminer $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$ pour $n = 2$ puis $n = 3$.

Exercice 1157 [Centrale MP-MPI 2026 # 1157] Poser $\widetilde{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) : -1 \notin (M)\}$ et $\varphi(M) = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$.
1. Rappeler la réduction des isométries.
2. Déterminer l'adhérence de $\widetilde{O}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que φ est une bijection de $\widetilde{O}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 1158 [Centrale MP-MPI 2026 # 1158] 1. Pour E euclidien, montrer l'équivalence entre f isométrie, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous x, y, et l'image d'une base orthonormée par f est une base orthonormée.
2. Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer $\mathrm{tr}(\Omega A) \leq \mathrm{tr}(A)$ pour tout $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$.
3. Réciproquement, sous cette inégalité, poser $\varphi(t) = \mathrm{tr}(Ae^{tV})$ avec $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et montrer que φ a un extremum local en 0.
4. En déduire $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
5. Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$, montrer $G = O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1159 [Centrale MP-MPI 2026 # 1159] 1. Montrer $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. Soit $q : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ invariante par similitude et associée à une forme bilinéaire symétrique β, avec $q(M) = \beta(M, M)$. Vérifier que $\mathrm{tr}(M^2)$ et $\mathrm{tr}(M)^2$ vérifient ces hypothèses et montrer l'unicité de β.
3. Pour $A = A_1 + iA_2$ avec parties réelles A_1, A_2, prolonger q par $\widetilde{q}(A) = q(A_1) - q(A_2) + 2i\beta(A_1, A_2)$. Montrer qu'elle est associée à une forme bilinéaire symétrique complexe et invariante par similitude.

2) Analyse

Exercice 1160 [Centrale MP-MPI 2026 # 1160] 1. Rappeler la définition de la densité et montrer $GL_n(\mathbb{R})$ dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $N : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $N(A) \geq 0$, $N(\lambda A) \leq |\lambda| N(A)$, $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$. Montrer que N est lipschitzienne.
3. Déterminer les N vérifiant ces propriétés et invariantes par similitude.

Exercice 1161 [Centrale MP-MPI 2026 # 1161] Soit H l'ensemble des parties $X \subset \mathbb{R}$ telles que toute fonction continue $X \to \mathbb{R}$ soit uniformément continue. X est espacée s'il existe $\delta > 0$ tel que $(x - \delta, x + \delta) \cap X = \{x\}$ pour tout $x \in X$.
1. Démontrer Heine.
2. Donner un exemple explicite montrant $]0, 1] \notin H$.
3. Montrer que toute partie espacée appartient à H.
4. Construire $X \in H$ et $f : X \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(X) \notin H$.
5. Montrer que tout élément de H est fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1162 [Centrale MP-MPI 2026 # 1162] Soit $(E, \|\cdot\|)$ normé.
1. Rappeler les définitions de segment, ensemble convexe, frontière, et montrer que $\mathrm{conv}(A)$ (intersection des convexes contenant A) est convexe et contient A.
2. Si $K \subset E$ est convexe compact et $x \in K \setminus \partial K$, $x \neq 0$, poser $D = \mathrm{Vect}(x)$. Montrer $D \cap K = [y, z]$ pour $y, z \in \partial K$.
3. Si K est compact convexe d'intérieur non vide, montrer $K = \mathrm{conv}(\partial K)$.

Exercice 1163 [Centrale MP-MPI 2026 # 1163] 1. Définir la convexité d'une fonction et la caractériser par f' lorsqu'elle est dérivable.
2. Pour $\ell^p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum |x_n|^p < +\infty\}$, montrer que c'est un espace vectoriel normé pour $\|x\|_p = (\sum_{n\geq 0} |x_n|^p)^{1/p}$.
3. Trouver une suite (x_k) dont le sous-espace engendré est dense dans ℓ^p, puis une partie dénombrable dense.

Exercice 1164 [Centrale MP-MPI 2026 # 1164] Soient E normé, X compact et $f : E \to E$ continue. Que peut-on dire de $f(X)$? On suppose ensuite $f(X) \subset X$ et $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$ sur X.
1. Pour $a \in X$, poser $u_0 = a$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer qu'une sous-suite converge vers a.
2. Montrer $\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\|$ pour tous $a, b \in X$, puis que f est bijective.

Exercice 1165 [Centrale MP-MPI 2026 # 1165] Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munir K^n de la norme euclidienne et noter $|||M|||_K = \sup_{\|x\|_K = 1} \|Mx\|_K$.
1. Montrer que c'est une norme sur $M_n(K)$.
2. Pour $x \in \mathbb{C}^n$, montrer $\|x\|_{\mathbb{C}}^2 = \|\mathrm{Re}\, x\|_{\mathbb{R}}^2 + \|\mathrm{Im}\, x\|_{\mathbb{R}}^2$, puis que les normes subordonnées réelle et complexe coïncident pour $M \in M_n(\mathbb{R})$.
3. Si $|||N - I_n|||_{\mathbb{R}} < 1$, montrer que les valeurs propres λ vérifient $|\lambda - 1| < 1$, puis que N est inversible.
4. Montrer $\sum_{k\geq 0}(I_n - N)^k = N^{-1}$ et la borne correspondante. Montrer ensuite $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, donc $\det N > 0$.

Exercice 1166 [Centrale MP-MPI 2026 # 1166] Munir $\mathbb{C}^n$ d'une norme et considérer sa norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$.
1. La définir, montrer que c'est une norme sous-multiplicative.
2. Pour A inversible, $A + \widetilde{A}$ inversible, $Ax_0 = b$ et $(A + \widetilde{A})x_p = b$, établir

$$\frac{\|x_0 - x_p\|}{\|x_p\|} \le \kappa(A)\frac{|||\widetilde{A}|||}{|||A|||}, \qquad \kappa(A) = |||A|||\,|||A^{-1}|||.$$

1. Si $|||\widetilde{A}||| < 1/|||A^{-1}|||$, $b \neq 0$ et $(A+\widetilde{A})x_p = b + \widetilde{b}$, établir la borne d'erreur avec $\widetilde{A}, \widetilde{b}$. Montrer qu'il peut y avoir égalité pour des choix optimaux.

Exercice 1167 [Centrale MP-MPI 2026 # 1167] 1. Définir un polynôme simplement scindé, en donner et démontrer une caractérisation. Dans la suite $P = X^3 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b pour que P soit simplement scindé.
3. Si $a, b \in \mathbb{R}$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = P(x)\}$ soit connexe par arcs.

Exercice 1168 [Centrale MP-MPI 2026 # 1168] 1. Énoncer et démontrer l'égalité des accroissements finis.

2. Pour $f(x) = \sin(x)/x$ sur $\mathbb{R}^*$, montrer que son prolongement en 0 est C^∞ et que toutes ses dérivées sont bornées.
3. Soient $T > 0$, $N \ge 1$, $h = T/N$, $(\varepsilon_k)_{0\le k<N} \subset \mathbb{R}$, $y_0 = z_0$ et $y_{k+1} = y_k + hf(y_k)$, $z_{k+1} = z_k + hf(z_k) + \varepsilon_k$. Montrer $|z_k - y_k| \le e^{Tk}\sum_{i=0}^{k-1}|\varepsilon_i|$.

Exercice 1169 [Centrale MP-MPI 2026 # 1169] Montrer l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx$.

Exercice 1170 [Centrale MP-MPI 2026 # 1170] 1. Définir les convergences simple et uniforme, puis montrer que la limite uniforme de fonctions continues sur $[0,1]$ est continue.

2. Si $f_n \in C([0,1])$ converge simplement vers une fonction continue et si $(f_n(x))_n$ est croissante pour tout x, montrer que la convergence est uniforme.
3. Poser $P_0 = 0$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - P_n(x))^2/2$. Montrer que (P_n) converge uniformément vers $\sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

Exercice 1171 [Centrale MP-MPI 2026 # 1171] Pour $n \ge 1$, poser $u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$ et $S = \sum_{n\ge1} u_n$.

1. Déterminer le domaine de définition D de S.
2. Montrer que S est continue sur D.
3. Montrer que $\sum u_n'$ converge sur D.
4. Montrer que S est de classe C^1 sur D.

Exercice 1172 [Centrale MP-MPI 2026 # 1172] Pour $n \ge 1$, soit φ_n nulle hors de $[1/(n+1), 1/n]$, affine sur chaque moitié de cet intervalle et de valeur $1/n$ au milieu. Fixer une bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

1. Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.
2. Montrer que $u_n(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_n(t - f(k))2^{-k}$ est continue.
3. Pour $m_n(t) = \min\{k \in \mathbb{N} : f(k) + 1/(n+1) \le t \le f(k) + 1/n\}$, montrer $\sum_{n\ge1} 2^{-m_n(t)} \le 2$.
4. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que cette série ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1173 [Centrale MP-MPI 2026 # 1173] Soit (a_n) telle que $a_n > -1$ et $\sum a_n^2$ converge. Poser $p_n = \prod_{k=1}^n (1+a_k)$.

1. Rappeler le théorème de convergence radiale d'Abel.
2. Montrer que (p_n) converge vers une limite strictement positive si et seulement si $\sum a_n$ converge.
3. Construire (b_n) avec $b_n = O(a_n^2)$ telle que, pour $x \in [0,1]$,
$$\left|\ln(1+a_nx^n) - \ln(1+a_n) + \frac{a_n}{1+a_n}(1-x^n)\right| \le b_n(1-x^n).$$

1. Si $\sum a_n$ converge, montrer $\prod_{n\ge0}(1+a_nx^n) \to \prod_{n\ge0}(1+a_n)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 1174 [Centrale MP-MPI 2026 # 1174] Pour $k \in \mathbb{N}$, poser $f_k(x) = \sin((k!)^2x)/k!$ et $W = \sum_{k\ge0} f_k$.

1. Montrer que W est définie sur $\mathbb{R}$ et continue. Poser $W_n = \sum_{k=0}^n f_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$; montrer $|R_n(t)| \le 2/(n+1)!$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, poser $I_n =]x + \pi/(n!)^2, x + 3\pi/(n!)^2[$. Montrer que, pour $y \in I_n$, $|W_{n-1}(x) - W_{n-1}(y)| \le 4\pi/(n\,n!)$.
3. Montrer qu'il existe $x_n \in I_n$ tel que $|f_n(x) - f_n(x_n)| = 1/n!$.
4. En déduire que W n'est dérivable en aucun point.

Exercice 1175 [Centrale MP-MPI 2026 # 1175] Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n\ge0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercice 1176 [Centrale MP-MPI 2026 # 1176] 1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

2. Pour $r \in \mathbb{N}$, déterminer le rayon de convergence de $\sum_{k\ge0} \frac{k^r}{k!}x^k$.
3. Si α_n est le nombre de partitions de $\{1,\dots,n\}$ et $\alpha_0 = 1$, calculer $\alpha_1, \dots, \alpha_4$.
4. Montrer $\alpha_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}\alpha_i$.
5. Calculer le rayon de convergence de $\sum \alpha_i x^i$.
6. Calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{i\ge0} \frac{\alpha_i}{i!}x^i$.

Exercice 1177 [Centrale MP-MPI 2026 # 1177] 1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux avec $f = o(g)$ à $+\infty$. Donner et démontrer des conditions suffisantes pour que $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = o(\int_x^{+\infty} g(t)\,dt)$.

2. Pour $H(x) = e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, montrer que H est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.
3. Étudier les variations, la convexité et les limites de H en $\pm\infty$.

Exercice 1178 [Centrale MP-MPI 2026 # 1178] 1. Montrer qu'une série entière de rayon R converge normalement sur tout disque fermé de rayon $r < R$.

On suppose ensuite $a_n = O(1/n)$ et $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \to 0$ quand $x \to 1^-$, et on pose $g = \mathbf{1}_{[1/2,1]}$, $N(x) = \lfloor -\ln 2/\ln x \rfloor$.

1. Montrer $\sum_{n\geq 0} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N(x)} a_n$ pour $x \in [0,1[$.
2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(0) = 0$, montrer que $\sum a_n P(x^n)$ converge et tend vers 0 quand $x \to 1^-$.
3. Pour $P_1 \leq g \leq P_2$ sur $[0,1]$, avec $P_1(0) = P_2(0) = 0$, établir l'inégalité de comparaison donnée par $\sum |a_n|(P_2(x^n) - P_1(x^n))$ et vérifier que le majorant est fini.
4. Montrer qu'on peut choisir $P_i = X + X(1-X)Q_i$ avec $\int_0^1 (Q_2 - Q_1) \leq \varepsilon$.
5. En déduire que $\sum a_n$ converge.

Exercice 1179 [Centrale MP-MPI 2026 # 1179] 1. Énoncer le théorème du produit de Cauchy pour les séries entières.

2. Si A, B partitionnent $\mathbb{N}$, poser $A(x) = \sum_{a\in A} x^a$, $B(x) = \sum_{b\in B} x^b$. Montrer qu'elles sont définies sur $]-1,1[$ et calculer $A(x) + B(x)$.
3. Poser $r_A(n) = \mathrm{card}\{(p,q) \in A^2 : p + q = n,\ p \neq q\}$. Montrer $\sum r_A(n) x^n = A(x)^2 - A(x^2)$.
4. Si $r_A(n) = r_B(n)$ pour tout n, montrer $A(x) - B(x) = (1-x)(A(x^2) - B(x^2))$.
5. Poser $D = A - B$ et supposer $0 \in A$. Montrer $D(x) = D(x^{2^N}) \prod_{k=0}^{N-1} (1 - x^{2^k})$.
6. En déduire que A est l'ensemble des entiers dont l'écriture binaire comporte un nombre pair de 1.

Exercice 1180 [Centrale MP-MPI 2026 # 1180] Soit d_n le nombre de dérangements de $\{1,\dots,n\}$.

1. Montrer $|\mathfrak{S}_n| = n!$.
2. Pour $D(z) = \sum_{n\geq 0} d_n z^n/n!$, montrer $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Montrer que son rayon de convergence est au moins 1, puis calculer $D(t)e^t$.
4. En déduire $d_n = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k/k!$.

Pour $S_p(n)$ le nombre de surjections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$, poser $S(x,y) = \sum_{n,p\geq 0} S_p(n) x^n y^p/(n!p!)$.

1. Montrer que, pour $y \in]-1,1[$, cette série en x a un rayon strictement supérieur à $1/e$.
2. Montrer $p^n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} S_k(n)$.
3. Montrer $S(x,y) = \exp(y(e^x - 1))$ pour $(x,y) \in]-1/e, 1/e[\times]-1,1[$.
4. En déduire $S_p(n) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

Exercice 1181 [Centrale MP-MPI 2026 # 1181] Soient $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, avec $a_n/b_n \to \ell \in \mathbb{C}$. Poser $f(z) = \sum a_n z^n$, $g(z) = \sum b_n z^n$ et noter R, R' leurs rayons de convergence.

1. Rappeler la définition du rayon de convergence.
2. On suppose $R' = 1$ et $\sum b_n$ diverge. Montrer $R \geq R'$, donner une condition suffisante sur ℓ pour $R = R'$, puis montrer $g(x) \to +\infty$ et $f(x)/g(x) \to \ell$ lorsque $x \to 1^-$.

Exercice 1182 [Centrale MP-MPI 2026 # 1182] 1. Démontrer l'interversion limite-intégrale dans le cas de convergence uniforme.

2. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon infini. Pour $r > 0$, calculer $\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt}\, dt$. En déduire que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, elle est constante.
3. S'il existe une suite $(z_k) \to 0$ avec $f(z_k) = 0$ pour tout k, montrer que f est nulle.

Exercice 1183 [Centrale MP-MPI 2026 # 1183] Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\, dt$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Donner un équivalent simple quand $n \to +\infty$.

Exercice 1184 [Centrale MP-MPI 2026 # 1184] 1. Rappeler le développement en série entière de $\arctan$ et son rayon de convergence.

2. Poser $I = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{\sqrt{t}}\, dt$. Exprimer I sous forme de somme.
3. Calculer $J = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4k+3}$ et en déduire I.

Exercice 1185 [Centrale MP-MPI 2026 # 1185] Considérer $(E) : y'' + y = c$, où $c \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est 2π-périodique.

1. Énoncer Cauchy-Lipschitz linéaire et exprimer une solution particulière sous forme intégrale.
2. Si $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie $f'' + f \geq 0$, montrer $f(t) + f(t+\pi) \geq 0$.
3. Sur les fonctions continues 2π-périodiques, utiliser $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$ pour montrer l'équivalence : $c \in \mathrm{Vect}(\cos,\sin)^\perp$; toute solution est 2π-périodique ; (E) admet une solution 2π-périodique.

Exercice 1186 [Centrale MP-MPI 2026 # 1186] 1. Énoncer Cauchy linéaire.

2. Étudier son application à $(E) : xy'' + y' + y = 0$, après mise sous forme normalisée, notamment en $x = 0$.
3. Chercher une solution développable en série entière et déterminer son rayon de convergence. Préciser son domaine et vérifier l'équation.
4. Justifier que les solutions sur $]0,+\infty[$ forment un espace vectoriel de dimension 2. Cauchy s'applique-t-il en $x_0 = 0$?

5. Existe-t-il une seconde solution non proportionnelle à f ? On pourra chercher $g = f\ln x + h$ avec h en série entière et comparer les comportements en 0^+.

Exercice 1187 [Centrale MP-MPI 2026 # 1187] Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.

1. Rappeler la formule d'intégration le long d'un arc.
2. Soit $A \neq \varnothing$, $f : A \to A$ k-lipschitzienne avec $k \in [0,1[$. Pour $x_0 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$, montrer la convergence vers l'unique point fixe.
3. Soit Ω ouvert contenant 0 et $f : \Omega \to E$ de classe C^1, avec $f(0) = 0$, $df(0) = \mathrm{id}$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $r \in]0,\alpha]$, $(f - \mathrm{id})(B_r) \subset B_{r/2}$ et $f - \mathrm{id}$ est $1/2$-lipschitzienne sur B_r.
4. En déduire $B_{r/2} \subset f(B_r)$.

3) Probabilités

Exercice 1188 [Centrale MP-MPI 2026 # 1188] Soient $n, p, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 < k \leq p \leq nk$.

1. Expliciter la fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$.
2. Montrer $\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{r\geq 0} \binom{r+k-1}{k-1} x^r$ pour $x \in]-1,1[$.
3. On lance k fois un dé équilibré à n faces numérotées de 1 à n. Calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à p.

Exercice 1189 [Centrale MP-MPI 2026 # 1189] n personnes passent sous un échafaudage ; chacune est touchée par une goutte avec probabilité $p \in]0,1[$. Soient X et Y les nombres de personnes touchées et non touchées.

1. Donner leurs lois et dire si elles sont indépendantes.
2. Si le nombre N de personnes suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, donner les lois de X, Y, puis $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
3. Montrer que X, Y sont indépendantes.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, N)$. X, N sont-elles indépendantes ?

Exercice 1190 [Centrale MP-MPI 2026 # 1190] Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\{1,\dots,n\}$ et T l'ensemble des transpositions.

1. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par T.

Pour $p \geq 1$, choisir uniformément $2p$ entiers dans $\{1,\dots,n\}$, notés $X_1, Y_1, \dots, X_p, Y_p$, et poser $S = (X_1Y_1) \circ \cdots \circ (X_pY_p)$.

1. Décrire l'espace probabilisé.
2. La variable aléatoire S peut-elle suivre une loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 1191 [Centrale MP-MPI 2026 # 1191] Une plateforme mobile part de 0 sur $\mathbb{Z}$ et à chaque étape avance de $+1$ avec probabilité p, de -1 avec $q = 1 - p$. Soit X_n sa position à l'étape n.

1. Calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$.
2. Déterminer la loi de X_n.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X_n, X_k)$ pour $k \leq n$.

Exercice 1192 [Centrale MP-MPI 2026 # 1192] 1. Énoncer et démontrer la loi faible des grands nombres.

2. Soit $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que A est un anneau et déterminer ses inversibles, puis montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1193 [Centrale MP-MPI 2026 # 1193] 1. Rappeler la définition d'une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}$.

2. Soit (u_n) réelle avec $u_0 = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(u_n - u_{n+1})$ soit une distribution. Soit alors X de loi $\mathbf{P}(X = n) = u_n - u_{n+1}$.
3. Étudier les liens logiques entre $\mathbf{E}(X) < +\infty$ et l'existence de $\rho \in]0,1[$ tel que $u_n = O(\rho^n)$.

Exercice 1194 [Centrale MP-MPI 2026 # 1194] 1. Rappeler la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et donner son espérance et sa variance.

2. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathcal{P}(1)$, donner la loi de leur somme S_n.
3. Pour $a < b$, poser $x_{n,k} = (k-n)/\sqrt{n}$ et $I_n = \{k \in \mathbb{N} : x_{n,k} \in [a,b]\}$. a. Montrer que $\min I_n = i_n$ et $\max I_n = j_n$ existent pour n assez grand et que $[a,b] \subset \bigcup_{k=i_n}^{j_n - 1} [x_{n,k}, x_{n,k+1}[$. b. On admet que les fonctions en escalier construites à partir de $\sqrt{n}\,\mathbf{P}(S_n = k)$ convergent uniformément sur $[a,b]$ vers $\eta(t) = e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$. En déduire $\mathbf{P}((S_n - n)/\sqrt{n} \in [a,b]) \to \int_a^b \eta(t)\,dt$. c. Démontrer le résultat admis en utilisant Stirling.

Exercice 1195 [Centrale MP-MPI 2026 # 1195] Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

1. Montrer que X est intégrable et calculer son espérance.
2. Calculer $\varphi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX})$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(k(e^{it} - 1 - it))\,dt = 2\pi k^k e^{-k}/k!$.
4. En admettant $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi}$, retrouver Stirling.

Exercice 1196 [Centrale MP-MPI 2026 # 1196] 1. Rappeler l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ et son cas d'égalité.

2. Si $X \geq 0$ est d'espérance nulle, que peut-on dire de X ? Le démontrer.
3. Si X est de variance finie et $\mathbf{V}(X) = 0$, que peut-on dire ? Le démontrer.

Soit X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et à support fini, (X_i) i.i.d. de même loi, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $g_n(t) = \mathbf{E}(e^{itS_n})$ et $f(t) = \mathbf{E}(e^{itX})$.

1. Montrer que f, g_n sont bien définies et continues, et préciser le lien entre elles.
2. Montrer $\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^n e^{-ikt}\,dt$.

3. Si $\mathbf{P}(X=0), \mathbf{P}(X=1) > 0$, montrer $|f(t)| < 1$ pour $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, donner un DL à l'ordre 2 de $|f(t)|^2$ en 0 et établir $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}(S_n = k) \leq c/\sqrt{n}$.

Exercice 1197 [Centrale MP-MPI 2026 # 1197] Soit σ_n uniforme sur le groupe $\mathfrak{S}_n$. Les orbites de x sont $O(x,\sigma) = \{\sigma^k(x) : k \in \mathbb{Z}\}$.

1. Rappeler la définition d'une partition et montrer que les orbites partitionnent $\{1,\dots,n\}$.
2. Noter C_n le nombre d'orbites, $N_{k,n}$ le nombre d'orbites de taille k et L_i la taille de l'orbite de i. Déterminer la loi de L_1, calculer $\mathbf{E}(C_n)$ et en donner un équivalent.
3. Calculer $\mathbf{V}(C_n)$ et son équivalent, montrer $C_n/\ln n \to 1$ en probabilité, puis montrer $N_{k,n}$ converge en loi vers $\mathcal{P}(1/k)$ pour tout $k \geq 1$.

Exercice 1198 [Centrale MP-MPI 2026 # 1198] Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres ordonnées $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, et une base orthonormée de vecteurs propres (e_i). Soit $X = \sum x_i e_i$ de norme 1.

1. Énoncer et démontrer Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien.
2. Pour $\lambda_i > 0$, montrer $(\sum x_i^2)^2 \leq (\sum \lambda_i x_i^2)(\sum x_i^2/\lambda_i)$.
3. Construire U telle que $\mathbf{P}(U = \lambda_i) = x_i^2$.
4. Montrer $\mathbf{E}(1/U) \leq (\lambda_1 + \lambda_n - \mathbf{E}(U))/(\lambda_1\lambda_n)$.
5. En déduire $1 \leq (X^TAX)(X^TA^{-1}X) \leq (\lambda_1+\lambda_n)^2/(4\lambda_1\lambda_n)$.

XI) Centrale PSI 2026

1) Algèbre

Exercice 1199 [Centrale PSI 2026 # 1199] Soient $n \geq 2$ et $E = M_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $E_{i,j}E_{p,\ell}$.
2. Pour $K, L \in E$, poser $u_{K,L}(M) = KM - ML$. Calculer $\operatorname{tr}(u_{K,L})$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $u_{K,L} = 0$.

Exercice 1200 [Centrale PSI 2026 # 1200]

1. Pour $M_0 = (m_{ij})$ et $M_x = (m_{ij} + x)$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\det(M_x) = \alpha x + \det(M_0)$.
2. Pour $A_{a,b,c} = (a_{ij})$ définie par $a_{ii} = a$, $a_{ij} = b$ si $i < j$ et $a_{ij} = c$ si $i > j$, calculer son déterminant si $b \neq c$, puis si $b = c$.

Exercice 1201 [Centrale PSI 2026 # 1201] Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure de diagonale $(1,2,\dots,n)$. Étudier les solutions de $M^2 = A$.

1. Résoudre pour $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Pour $n = 2$ et A quelconque satisfaisant les hypothèses, donner le nombre de solutions.
3. Pour n quelconque, donner le nombre de solutions et dire si elles sont toutes triangulaires supérieures.

Exercice 1202 [Centrale PSI 2026 # 1202]

1. Dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$, soit p le projecteur sur $\operatorname{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(e_1+e_2)$. Donner sa matrice A et déterminer les B telles que $AB - BA = B$.
2. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, poser $\psi_f(g) = f\circ g - g \circ f$. Si $\psi_f(g) = g$ pour un $g \neq 0$, montrer $\psi_f(g^k) = kg^k$ pour $k \geq 1$, puis en déduire qu'une puissance de g est nulle.

Exercice 1203 [Centrale PSI 2026 # 1203] Dans la base canonique ε de $\mathbb{R}^3$, poser $e_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $e_2 = -\varepsilon_1/4 + \varepsilon_2/4$, $e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, et soit f représenté par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base et déterminer la matrice de f dans cette base.
2. f est-il diagonalisable ? Montrer $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f^2) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{id})$ et donner des bases de ces noyaux.
3. Si $g^2 = f$, que dire de la matrice de g dans la base e ?

Exercice 1204 [Centrale PSI 2026 # 1204] Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que S est semblable à une matrice diagonale et la préciser.
2. Montrer qu'elle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. À l'aide de $\Phi(M) = \operatorname{diag}(1,2)M - M\operatorname{diag}(1,2)$, trouver A, B telles que $S = AB - BA$.

Exercice 1205 [Centrale PSI 2026 # 1205] Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente.

1. Montrer $M^n = 0$.
2. Soient $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $n = m_1 + m_2$, avec $m_i \geq 1$. Poser $A = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{m_1} + N_1, \lambda_2 I_{m_2} + N_2)$, où N_1, N_2 sont nilpotentes. Exprimer χ_A avec χ_{N_1}, χ_{N_2} et donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 1206 [Centrale PSI 2026 # 1206] Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

1. Définir le polynôme minimal π_A et exprimer $\pi_{A^{-1}}$ en fonction de π_A.
2. Pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, poser $P^* = \sum_{k=0}^d a_{d-k}X^k$. Pour $n = 2$, donner une condition nécessaire et suffisante sur π_A, π_A^* pour que A soit semblable à A^{-1}.

3. Pour $n \geq 3$ et A diagonalisable, montrer que cette condition n'est plus suffisante, puis donner une condition nécessaire et suffisante.

Exercice 1207 [Centrale PSI 2026 # 1207] Munir $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Vérifier que c'est un produit scalaire.
2. Montrer que la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est atteinte en un unique $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Écrire $P_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ et $f(t) = 1/(t+n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j/(t+j+1)$.
3. Calculer $f(k)$ pour $k = 0, \dots, n-1$.
4. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q(t) = \prod_{j=0}^{n}(t+j+1)f(t)$ sur $\mathbb{R}_+$.
5. En déduire la distance cherchée.

Exercice 1208 [Centrale PSI 2026 # 1208] Soient E, F euclidiens et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Pour $y \in F$, montrer qu'il existe un unique $(x, z) \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \times (\operatorname{Im} f)^\perp$ tel que $y = f(x) + z$.
2. Associer à y le x de cette décomposition. Montrer que l'application obtenue est linéaire et déterminer son noyau et son image.
3. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des projecteurs et les caractériser.

Exercice 1209 [Centrale PSI 2026 # 1209]

1. Montrer que $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $M_3(\mathbb{R})$.
2. Soit F l'espace des matrices dont la troisième ligne est nulle. Calculer $d(M, F)$.
3. Si $A \in SO_3(\mathbb{R})$, calculer $d(A, F)$ puis $d(SO_3(\mathbb{R}), F)$.

Exercice 1210 [Centrale PSI 2026 # 1210]

1. Décrire $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$ et montrer que tout élément de SO_2 est produit de deux éléments de $O_2 \setminus SO_2$.
2. Soit E euclidien de dimension 4 et u une isométrie sans vecteur propre. En étudiant $M + M^T$, montrer qu'il existe un plan stable par u, puis une base orthonormée où u a une forme bloc-diagonale $\operatorname{diag}(R_1, R_2)$ avec des rotations planes.

Exercice 1211 [Centrale PSI 2026 # 1211] Soient E euclidien et p, q des projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que p est autoadjoint et 1-lipschitzien.
2. Montrer que χ_{p+q} est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et $(p+q) \subset [0, 2]$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p + q$ soit un projecteur.

Exercice 1212 [Centrale PSI 2026 # 1212] Sur $\mathbb{R}_n[X]$, poser $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} P(t)Q(t)\,dt$ et $\varphi(P) = (1-X^2)P'' + (2X-1)P'$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que φ est un endomorphisme autoadjoint et en déduire une unique base propre $(P_0, \dots, P_n)$ avec P_k unitaire de degré k.
3. Expliciter les P_k.

Exercice 1213 [Centrale PSI 2026 # 1213] Soient E euclidien, e une base orthonormée et u un endomorphisme dont la matrice M commute avec M^T.

1. Montrer que la matrice N de u dans toute autre base orthonormée vérifie $N^T N = N N^T$.
2. Montrer que si F est stable par u, alors $F^\perp$ l'est aussi.
3. Si u est trigonalisable, montrer qu'il est diagonalisable et autoadjoint.

Exercice 1214 [Centrale PSI 2026 # 1214]

1. Si u est autoadjoint sur un espace euclidien et λ_1 sa plus petite valeur propre, montrer $\lambda_1 = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$.
2. Soient $D = \operatorname{diag}(0, 1, \dots, p-1)$, J la matrice de tous les 1 et $M = D + \frac{1}{n}J$. Montrer pour $x = (x_1, \dots, x_p)^T$ que $\langle u(x), x\rangle = s^2/n + \sum_{k=1}^{p-1} k x_{k+1}^2$, où $s = \sum x_i$, puis encadrer λ_1 dans $[0, p-1]$.

Exercice 1215 [Centrale PSI 2026 # 1215] Soient E euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormée.
2. Montrer l'équivalence entre $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$ pour tous x, y et l'existence d'une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est antisymétrique.
3. Montrer que le rang de f est pair.

Exercice 1216 [Centrale PSI 2026 # 1216]

1. Si $A = PDQ$ avec P, Q orthogonales et D diagonale à coefficients positifs, montrer que les valeurs propres de $A^T A$ sont les coefficients diagonaux de D^2.
2. Pour toute matrice réelle A, montrer $(A^T A) \subset \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $\operatorname{rg}(A)$ est le nombre de valeurs propres non nulles de $A^T A$, comptées avec multiplicité.

Exercice 1217 [Centrale PSI 2026 # 1217] Une contraction d'un espace euclidien est un endomorphisme f tel que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x.

1. Si f est autoadjoint, montrer l'équivalence entre être une contraction et $|\lambda| \leq 1$ pour tout $\lambda \in (f)$.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer $\|P(f)(x)\| \leq \sup_{\lambda \in (f)} |P(\lambda)|\,\|x\|$.
3. Si f est un automorphisme de matrice M, montrer qu'il existe S symétrique définie positive telle que $M^T M = S^2$.

Exercice 1218 [Centrale PSI 2026 # 1218] Poser $B_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})\}$.

1. Montrer que $B_n(\mathbb{R})$ est non vide.

2. Si A est symétrique de valeurs propres α_i, montrer $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_i \alpha_i^2$ et déterminer $B_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer $B_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Si V est un sous-espace de matrices inclus dans $B_n(\mathbb{R})$, déterminer sa dimension maximale.

2) Analyse

Exercice 1219 [Centrale PSI 2026 # 1219] Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, poser $N(A) = \sum_{i,j} |a_{ij}|$ et $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$.

1. Montrer que N est une norme et que $\|Ax\|_1 \leq N(A)\|x\|_1$.
2. Pour $0 < \alpha < 1$, poser $K_\alpha = \{A : N(A - I_n) \leq \alpha\}$ et $\psi(A) = \det(A^{-1})$. Vérifier que ψ est bien définie, bornée sur K_α et y atteint ses bornes.

Exercice 1220 [Centrale PSI 2026 # 1220] Soit $n \geq 2$.

1. Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, rappeler la formule du déterminant et montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert.
2. Montrer dense l'ensemble $D = \{M : |(M)| = n\}$.
3. Pour M, poser $C(M) = \{Q : QM = MQ\}$. Déterminer $\dim C(D)$ pour $D \in D$.
4. Pour $a = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, soit $F(a) \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice dont la dernière colonne est $(a_0, \ldots, a_{n-1})^T$, la sous-diagonale est formée de 1 et les autres coefficients sont nuls. Montrer que $F = \{PF(a)P^{-1} : a \in \mathbb{C}^n,\ P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$ contenant D.

Exercice 1221 [Centrale PSI 2026 # 1221]

1. Pour la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$, montrer que la norme d'opérateur associée est une norme matricielle.
2. Pour $x \in \mathbb{C}^n$, montrer $\|x\|_{\mathbb{C}}^2 = \|\operatorname{Re} x\|_{\mathbb{R}}^2 + \|\operatorname{Im} x\|_{\mathbb{R}}^2$.
3. En déduire que les normes d'opérateur réelle et complexe coïncident sur $M_n(\mathbb{R})$.
4. Si $B = \{M : \|M - I_n\|_R < 1\}$, montrer que $|\lambda - 1| < 1$ pour toute valeur propre de $M \in B$.
5. Si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ inclus dans B, montrer $(A) = \{1\}$ pour tout $A \in G$, puis que $G = \{I_n\}$.

Exercice 1222 [Centrale PSI 2026 # 1222]

1. Rappeler les définitions d'un segment, d'une partie convexe et de la frontière.
2. Pour $A \subset E$, poser $\operatorname{Conv}(A)$ égal à l'intersection des convexes contenant A. Montrer que $\operatorname{Conv}(A)$ est convexe et contient A.

Exercice 1223 [Centrale PSI 2026 # 1223] Pour $n \geq 2$, poser $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}$.

1. Par comparaison série-intégrale, donner un équivalent de u_n.
2. Montrer que $v_n = u_n - \frac{1}{2}\ln^2 n$ converge.

Exercice 1224 [Centrale PSI 2026 # 1224] Soient $u_n \geq 0$, $u_0 > 0$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, et supposons $\sum u_n$ divergente.

1. Si $\alpha \leq 1$, étudier $\sum \ln(1 - u_n/S_n)$, puis en déduire la nature de $\sum u_n/S_n$ et de $\sum u_n/S_n^\alpha$.
2. Si $\alpha > 1$, en utilisant $u_n = S_n - S_{n-1}$, montrer que $\sum u_n/S_n^\alpha$ converge.

Exercice 1225 [Centrale PSI 2026 # 1225]

1. Définir la sommabilité d'une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$.
2. Étudier la sommabilité pour $a_{i,j} = 1/(i^2 + j^2 + 1)$.
3. Pour $x, y > 0$, poser $F(x,y) = \sum a_{i,j} x^i y^j$, et $D = \{(x,y) : F(x,y) < +\infty\}$, $L = \{(\ln x, \ln y) : (x,y) \in D\}$. Représenter D, L pour les cas $a_{i,j} = 1$, $a_{i,j} = 2^i \delta_{i,j}$ et $a_{i,j} = \binom{i+j}{i}$.

Exercice 1226 [Centrale PSI 2026 # 1226] Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $S = \{\varphi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \varphi'' = |\varphi + f|\}$.

1. Montrer $e^t \geq 1 + t$.
2. Pour $f = \exp$, montrer qu'il existe une unique solution $\varphi \in S$ telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = -1$.
3. Si f n'est pas constante, existe-t-il une solution périodique ? bornée ?

Exercice 1227 [Centrale PSI 2026 # 1227] Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $f'' > 0$.

1. Montrer que f n'est pas majorée. Peut-elle être minorée ?
2. Montrer que f admet un minimum ssi $f'(a) = 0$ pour un certain a.
3. Si $f(x)/|x| \to +\infty$ quand $x \to \pm\infty$, montrer que f' est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1228 [Centrale PSI 2026 # 1228] Soit $F = C^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $E = \{f \in F : f(0) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} f^{(m)}(x) \in \mathbb{R}\ \forall m \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Poser $\Phi(f)(x) = f'(x) - f'(0)$. Montrer que Φ est un endomorphisme injectif.
3. Pour $g(x) = (x+1)\sin(\pi\sqrt{x+1}) - \pi x/2$, montrer que, pour $m \geq 2$, $g^{(m)}(x) = P_m(1/\sqrt{x+1})\sin(\pi\sqrt{x+1}) + Q_m(1/\sqrt{x+1})\cos(\pi$ avec $P_m, Q_m \in \mathbb{R}[X]$. Résoudre $\Phi(f) = g'$ dans E et déterminer si Φ est surjectif.

Exercice 1229 [Centrale PSI 2026 # 1229] Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ T-périodique et $\int_0^T f(t)\,dt = 0$.

1. Poser $g(x) = \int_x^{+\infty} f(t)/t^2\,dt$ pour $x > 0$. Montrer que g est bien définie, C^1, et calculer g'.
2. Montrer que toute primitive de f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
3. Trouver a tel que $g(x) = a/x + O(\ln x)$ quand $x \to 0^+$.
4. g est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 1230 [Centrale PSI 2026 # 1230] Soit $A = \{f \in C^1([0,1]) : f'(x) = x^2 + f(x)^2,\ f(0) = 0\}$.

1. Montrer qu'un $f \in C^0([0,1])$ appartient à A ssi $f(x) = x^3/3 + \int_0^x f(t)^2 dt$. Poser $f_0(x) = x^3/3$ et itérer cette relation pour définir f_n.

2. Montrer $f_n(x) \leq (2/5)x^3$ et $0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq f_{n+1}(1) - f_n(1)$.
3. Étudier (f_n) et en déduire que A est non vide.

Exercice 1231 [Centrale PSI 2026 # 1231] Poser $u_0(x) = x$ et $u_{n+1}(x) = 2\sqrt{u_n(x)/(1+u_n(x))}$ pour $x > 0$.

1. Montrer que (u_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$.
2. Poser $U_n(x) = (1+u_n(x))/(2\sqrt{u_n(x)})$. Montrer $|U_{n+1}(x) - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n(x) - 1|$.
3. Montrer la convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.
4. Est-elle uniforme sur tout $]0, +\infty[$?

Exercice 1232 [Centrale PSI 2026 # 1232] Soit $\varphi(x) = \sum_{n\geq 1} 1/(n(n+x))$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer que φ est bien définie, continue et décroissante.
2. Calculer sa limite en $+\infty$.
3. Montrer $\varphi(x) = O(1/\sqrt{x})$.
4. Avec $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k = \ln n + \gamma + o(1)$, exprimer $\varphi(n)$ et en déduire un équivalent.

Exercice 1233 [Centrale PSI 2026 # 1233] Soit E l'espace des fonctions lipschitziennes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F = \{f \in E : f(0) = 0\}$. Pour $t \in [0, 1[$, poser $\Phi(f)(x) = f(x) - f(tx)$.

1. Montrer que E est un sous-espace de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que F en est un sous-espace et donner un supplémentaire.
2. Montrer que Φ est un endomorphisme injectif de F.
3. Si $g = \Phi(f)$, montrer $f(x) = \sum_{k\geq 0} g(t^k x)$. Qu'en déduire sur Φ ?

Exercice 1234 [Centrale PSI 2026 # 1234] Pour $n \geq 1$, poser $f_n(x) = 1/(n^2 + n^4x^2)$ et $S = \sum_{n\geq 1} f_n$.

1. Montrer que S est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
2. S est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 1235 [Centrale PSI 2026 # 1235] Soit $f(x) = \sum_{n\geq 1} 1/(x^{\sqrt{n}} n^{3/2})$.

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Montrer que f est continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$.
3. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 1236 [Centrale PSI 2026 # 1236] Soit $f(x) = \sum_{n\geq 1} \ln(1 + 1/(n^2x^2))$.

1. Déterminer son domaine et ses variations.
2. Étudier sa continuité.
3. Donner un équivalent lorsque x tend vers la borne supérieure du domaine.

Exercice 1237 [Centrale PSI 2026 # 1237] Soit $f(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n/(1+n^2x^2)$.

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Montrer que f est continue sur son domaine.
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \sim a/x^2$ quand $x \to +\infty$.
4. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer son intégrale.

Exercice 1238 [Centrale PSI 2026 # 1238] Poser $f_k(x) = \sin((k!)^2 x)/k!$, $W_n = \sum_{k=0}^n f_k$, $R_n = \sum_{k=n+1}^\infty f_k$ et $W = \sum_{k=0}^\infty f_k$.

1. Énoncer et démontrer le théorème de continuité des séries de fonctions.
2. Montrer que W, R_n sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, puis que $|R_n| \leq 2/(n+1)!$.
3. Montrer $|W_n'(x)| \leq 2n!$.
4. À l'aide d'une suite convenable, montrer que W n'est dérivable en aucun point.

Exercice 1239 [Centrale PSI 2026 # 1239] Sur $]-\pi/2, \pi/2[$, poser $f(x) = (1+\sin x)/\cos x$.

1. Montrer que f satisfait une équation différentielle d'ordre 1.
2. Poser $P_0 = 1 + X$. Montrer qu'il existe des polynômes unitaires $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n tels que $f^{(n)}(x) = P_n(\sin x)/\cos^{n+1} x$.
3. Pour $a_n = P_n(0)$, relier a_1 à a_0 puis exprimer a_{n+1} à l'aide de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.
4. Pour $A(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n/n!$, trouver une équation différentielle et en déduire les a_n.

Exercice 1240 [Centrale PSI 2026 # 1240] Soient $a_n > 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

1. Si (a_n) est majorée, poser $f(x) = \sum_{n\geq 1} S_n x^n$, $g(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Déterminer leurs rayons de convergence, établir une relation entre f, g, puis expliciter f si $a_n = 1/n$.
2. Si $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 1/S_n$, calculer le rayon de convergence de $\sum S_n x^n$.

Exercice 1241 [Centrale PSI 2026 # 1241] Soient $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < 1$, et $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}) : f' = \alpha f + f(\lambda x)\}$.

1. Montrer $F \subset C^\infty(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les fonctions non nulles de F développables en série entière.
3. Si $f \in F$ et $f(0) = 0$, montrer $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n, puis en déduire une propriété de f.

Exercice 1242 [Centrale PSI 2026 # 1242] Pour $a > -1/2$, poser $I_a(x) = \int_0^1 (1-t^2)^{a-1/2} \cos(xt)\, dt$.

1. Montrer que l'intégrande pondérateur est intégrable.

2. Montrer que I_a est C^2 et relier I_a'', I_a, I_{a+1}.
3. Montrer que I_a est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1243 [Centrale PSI 2026 # 1243] Soient $u_0 = a > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

1. Étudier la limite de (u_n).
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.
3. Poser $v_n = 1/u_{n+1} - 1/u_n$. La série converge-t-elle en $x=1$ et $x=-1$?

Exercice 1244 [Centrale PSI 2026 # 1244] Pour $n, k \in \mathbb{N}$, poser $u_{n,k} = k^n/k!$ et noter $A_n = \sum_{k\geq 0} u_{n,k}$.

1. Montrer la convergence et exprimer A_{n+1} en fonction des A_i.
2. Montrer $0 \leq A_n/n! \leq e$.
3. Trouver une équation différentielle satisfaite par $f(x) = \sum_{n\geq 0} A_n x^n/n!$.

Exercice 1245 [Centrale PSI 2026 # 1245] Soit $\varphi : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ continue décroissante telle que $\sum_{n\geq n_0} \varphi(n)$ diverge.

1. Pour $\alpha \geq 0$, déterminer la nature de $\sum_{n\geq 2} 1/(n(\ln n)^{1-\alpha})$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq n_0} \varphi(n) x^n$.
3. Montrer que cette somme tend vers $+\infty$ quand $x \to 1^-$ et qu'elle est équivalente à $\int_{n_0}^{+\infty} \varphi(t) x^t \, dt$.

Exercice 1246 [Centrale PSI 2026 # 1246] Poser $N_0 = 1$, $N_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$, $F_P(x) = \sum_{k\geq 0} P(k)x^k/k!$ et $P_j = j!N_j$.

1. Pour P_j, déterminer le rayon de convergence de F_{P_j} et sa somme.
2. Pour $P \neq 0$, déterminer le rayon de convergence de F_P et montrer qu'il existe un unique Q_P, de même degré que P, tel que $F_P(x) = Q_P(x)e^x$.
3. Poser $I_k = \int_0^1 N_k(t)\,dt$. Pour $k \geq 2$, montrer $1/(6k^2) \leq |I_k| \leq 1/(6k)$ et déterminer le rayon de convergence de $\sum I_k x^k$.

Exercice 1247 [Centrale PSI 2026 # 1247] Poser $I_n = \int_0^n (1-t/n)^n \ln(t)\,dt$ et $J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u)\,du$.

1. Montrer que I_n converge et tend vers $\int_0^\infty e^{-t}\ln(t)\,dt$.
2. Montrer que J_n converge et vaut $-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} 1/k$.
3. En déduire $\int_0^\infty e^{-t}\ln(t)\,dt = -\gamma$.

Exercice 1248 [Centrale PSI 2026 # 1248] Poser $I_n = \int_0^\infty (1+t^3)^{-n}\,dt$, $u_n = \sum_{k=1}^n 1/k - \ln n$, $v_n = \sum_{k=1}^n 1/k - \ln(n+1)$.

1. Montrer que u_n, v_n convergent vers une même limite γ.
2. Montrer $I_{n+1}/I_n = 1 - 1/(3n)$.
3. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $I_n \sim C/n^{1/3}$.

Exercice 1249 [Centrale PSI 2026 # 1249] Soit $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,dt$.

1. Déterminer son domaine, de la forme $]a, +\infty[$.
2. Sur $J =]a+1, +\infty[$, poser $\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$. Montrer $\varphi(x+1) = \varphi(x)$ et que $\varphi(x)/x$ est décroissante.
3. Calculer $\varphi(n)$ et montrer que φ est constante.

Exercice 1250 [Centrale PSI 2026 # 1250] Définir $f(x) = \sin(x^2)/x^2$ pour $x > 0$ et $f(0) = 1$. Poser $S(x) = \int_0^\infty f(\lfloor t/x \rfloor x)\,dt$.

1. Montrer que $S(x)$ converge pour tout $x > 0$.
2. Si $x_n \to 0^+$, montrer $S(x_n) \to \int_0^\infty f(t)\,dt$.
3. Pour $G(x) = \sum_{n\geq 1} \sin(n^2x)/n^2$, exprimer $G(x)$ à l'aide de $S(\sqrt{x})$ et déterminer un équivalent en 0^+.

Exercice 1251 [Centrale PSI 2026 # 1251] Poser $f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,dt$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et que $|f(x)| \leq 1/x$ pour $x > 0$.
2. Montrer que f est C^1 sur $]0, +\infty[$, puis calculer f' et f.
3. Montrer la continuité en 0 et en déduire $\int_0^\infty \sin(t)/t\,dt$.

Exercice 1252 [Centrale PSI 2026 # 1252] Poser $f(x) = \int_0^\infty \arctan(tx)e^{-t}\,dt$.

1. Montrer que $f \in C^3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $f(x)$ a le signe de x et $|f(x)| \leq |x|$.
3. Pour $x_{n+1} = f(x_n)$, montrer $x_n \to 0$. Trouver α tel que $x_{n+1}^\alpha - x_n^\alpha$ ait une limite non nulle pour $x_0 > 0$, puis en déduire un équivalent de x_n si $x_0 \neq 0$.

Exercice 1253 [Centrale PSI 2026 # 1253] Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

1. Montrer que f est définie et continue, calculer $f(0)$.
2. Montrer $f(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin u)\,du$ et que $f \in C^2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que f admet un développement en série entière en 0 et l'expliciter.

Exercice 1254 [Centrale PSI 2026 # 1254] Pour $p \in \mathbb{N}$, poser $I_p(x) = \int_0^\infty e^{-(2p+1)t}\cos(xt)\,dt$.

1. Montrer que $\int_0^\infty \cos(xt)/\cosh(t)\,dt$ est définie et poser $G(x) = \int_0^\infty \cos(xt)/\sinh(t)\,dt$.
2. Calculer I_p.

3. Exprimer $G(x)$ à l'aide des $I_p(x)$.
4. Montrer que G est développable en série entière en zéro.

Exercice 1255 [Centrale PSI 2026 # 1255] Soient $\varphi(x) = \int_x^\infty \sin(t)/t\,dt$ et $\psi(x) = \int_x^\infty \cos(t)/t\,dt$ pour $x > 0$, avec $\psi'(x) = -\cos(x)/x$ admis.

1. Montrer φ est C^1 et $\varphi'(x) = -\sin(x)/x$.
2. Montrer que $f(x) = \varphi(x)\cos x - \psi(x)\sin x$ résout $y'' + y = 1/x$.
3. Montrer que $g(x) = \int_0^\infty e^{-tx}/(1+t^2)\,dt$ résout aussi cette équation.
4. En déduire $\int_0^\infty \sin(t)/t\,dt$.

Exercice 1256 [Centrale PSI 2026 # 1256] Pour $\alpha > 0$, poser $I(\alpha) = \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^\alpha)\,dt$.

1. Rappeler que la limite uniforme de fonctions continues est continue.
2. Montrer que $I(\alpha)$ est bien définie.
3. Écrire $I(\alpha)$ comme somme d'une série.

Exercice 1257 [Centrale PSI 2026 # 1257] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $u_n = \int_0^1 f(x)^n\,dx$.

1. Si $f(1) > 1$, montrer qu'il existe $c > 1$ et $a < 1$ tels que $f(t) \geq c$ pour $t \in [a, 1]$.
2. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $f(1) = 0$.
3. Si $f \in C^1([0,1])$, montrer que $\sum u_n$ converge ssi $f(1) = 0$, puis calculer $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 1258 [Centrale PSI 2026 # 1258] Soit E l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ pour lesquelles $x^\alpha f(x) \to 0$ pour un certain $\alpha \geq 0$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
2. Pour $f \in E$, poser $\varphi_f(x) = e^x \int_x^\infty e^{-t} f(t)\,dt$. Montrer que c'est l'unique solution dans E de $y' - y + f = 0$.

Exercice 1259 [Centrale PSI 2026 # 1259] Soit $f(x,y) = (x - xy)\sqrt{y} - yx^2$, $K = [-1,1] \times [0,1]$, $O =]-1,1[\times]0,1[$.

1. Montrer que f atteint un maximum et un minimum sur K.
2. Déterminer ses extrema locaux sur O.
3. Déterminer maximum et minimum sur K.

Exercice 1260 [Centrale PSI 2026 # 1260] Soit $F(x,y) = \sin(x)\cosh(y) - \sin(y)\cosh(x)$ et $\Delta = \{(x,x) : x > 0\}$.

1. Montrer $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que le gradient s'annule sur Δ en des points (x_n, x_n) avec $x_n \in [n\pi + \pi/4, n\pi + \pi/2]$.
3. F possède-t-elle des extrema sur Δ ? sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 1261 [Centrale PSI 2026 # 1261] Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - xy$.

1. Déterminer le plan tangent au graphe en $(0,0,f(0,0))$ et préciser sa position locale.
2. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, et déterminer sa valeur et ses points d'atteinte.

3) Probabilités

Exercice 1262 [Centrale PSI 2026 # 1262] Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ fini et F l'espace des fonctions $\Omega \to \mathbb{R}$. Poser $\Phi(X,Y) = \mathbf{E}(XY)$. Montrer que Φ est un produit scalaire ssi $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Exercice 1263 [Centrale PSI 2026 # 1263] Deux joueurs A, B jouent à tour de rôle. À son tour, A gagne avec probabilité p, B avec probabilité q ; en cas de victoire, l'autre joue au tour suivant, en cas de défaite le même joueur rejoue. Soit X_n l'identité du joueur au tour n, et $U_1 = (1/3, 2/3)^T$.

1. Déterminer A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Diagonaliser A et en déduire la loi de X_n.

Exercice 1264 [Centrale PSI 2026 # 1264] Soient A, B, C indépendantes de loi $\mathcal{B}(n,p)$ et $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$.

1. Calculer les probabilités que M soit inversible, nilpotente ou matrice d'un projecteur.
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance du nombre de valeurs propres de M, puis la probabilité que M soit diagonalisable.

Exercice 1265 [Centrale PSI 2026 # 1265] Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. géométriques de paramètre $p \in]0,1[$. Poser $I_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que I_n est géométrique.
2. Calculer $\mathbf{E}(I_n)$ et $\mathbf{V}(I_n)$.
3. Montrer que l'événement où (I_n) est constante à partir d'un certain rang est de probabilité 1.
4. Montrer que M_n admet une espérance.
5. Déterminer la limite de $\mathbf{E}(M_n)$.

Exercice 1266 [Centrale PSI 2026 # 1266]

1. Résoudre $U_0 = U_1 = 1$, $U_{n+2} = U_{n+1} + \frac{1}{2}U_n$.
2. Soient (X_n) i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1/2)$ et $U_0 = U_1 = 1$, $U_{n+2} = U_{n+1} + X_n U_n$. a. Montrer que, pour tout ω, $(U_n(\omega))$ admet une limite dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. b. Pour $A = \{\omega : (U_n(\omega)) \text{ admet une limite finie}\}$, montrer $\mathbf{P}(A) = 0$. c. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(U_n)$.

XII) Centrale PC 2026

1) Algèbre

Exercice 1267 [Centrale PC 2026 # 1267] 1. Montrer $2^n n! \leq (2n)!$ et $\cosh(t) \leq e^{t^2/2}$.

2. Pour X uniforme sur $\{-1,1\}$, montrer $\mathbf{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$.
3. Pour $x \in [-1,1]$, montrer $e^{tx} \leq \frac{1+x}{2}e^t + \frac{1-x}{2}e^{-t}$.
4. Si $X \in [-1,1]$ et $\mathbf{E}(X) = 0$, montrer $\mathbf{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$, puis $\mathbf{P}(|X| \geq \lambda) \leq 2e^{-\lambda^2/2}$.

Exercice 1268 [Centrale PC 2026 # 1268] 1. Montrer que $E = \{(a_n) : \sum a_n^2 < +\infty\}$ est un espace préhilbertien pour $\langle a, b\rangle = \sum a_n b_n$.

2. Pour $X \in \mathbb{N}$ de loi (u_k), dire que $(\star)$ signifie $u_k > 0$, $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$ et $\sum_{k\geq 0}(u_k - u_{k-1})^2/u_k < +\infty$, avec $u_{-1} = 0$. a. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, montrer $(\star)$ et calculer $S(X)\mathbf{V}(X)$, où $S(X)$ est la série ci-dessus. b. Pour X vérifiant $(\star)$, montrer que $\sum_n (u_n - u_{n-1})(n - \mathbf{E}(X))$ converge et que $S(X)\mathbf{V}(X) \geq 1$.

Exercice 1269 [Centrale PC 2026 # 1269] Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

1. Énoncer et démontrer Cauchy-Schwarz.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, montrer $(\sum x_k^2)^2 \leq (\sum \lambda_k x_k^2)(\sum x_k^2/\lambda_k)$.
3. Si $\sum x_i^2 = 1$, construire I à valeurs dans $\{1,\ldots,n\}$ avec $\mathbf{P}(I = i) = x_i^2$ et poser $U = \lambda_I$. Montrer $\mathbf{E}(1/U) \leq (\lambda_1 + \lambda_n - \mathbf{E}(U))/(\lambda_1\lambda_n)$.
4. En déduire $\|X\|^4 \leq \langle AX, X\rangle\langle A^{-1}X, X\rangle \leq \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|X\|^4$.

Exercice 1270 [Centrale PC 2026 # 1270] Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X+1) = P(X^2+X+1)$.

Exercice 1271 [Centrale PC 2026 # 1271] Poser $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. Résoudre $z^n = 1$, puis $z^n = \omega^n$.
2. Trouver degré et coefficient dominant de P_n.
3. Calculer $\sum_{k=1}^n \cot(k\pi/n)$.
4. Calculer $\prod_{k=1}^n \cot(k\pi/(2n+1))$ à l'aide de P_{2n+1}, puis en déduire $\sum_{k=1}^n \cot^2(k\pi/n)$.

Exercice 1272 [Centrale PC 2026 # 1272] Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et $Q = \sum_{k=0}^n a_{n-k}X^k$ son symétrique.

1. Quel est le degré de Q ?
2. Déterminer les P tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Indication : considérer $f(z) = Q(1/z)z^q$.

Exercice 1273 [Centrale PC 2026 # 1273] Pour $n \geq 2$, montrer (H_n) : pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ de degrés $n, n-1$, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P - aQ$ ait une racine multiple.

1. Vérifier (H_2) et supposer les résultats établis jusqu'à n.
2. Si P, Q ont une racine commune, montrer (H_{n+1}).
3. Sinon, poser $R = P'Q - PQ'$. Si α est racine de multiplicité m de $P - aQ$, montrer que sa multiplicité dans R vaut $m-1$, puis conclure.

Exercice 1274 [Centrale PC 2026 # 1274] Soit $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer $\det(\cos((j-1)\alpha_i))_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 1275 [Centrale PC 2026 # 1275] 1. Pour $n \geq 2$, déterminer le sous-espace de $M_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices nilpotentes.

2. En déduire que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$ contient une matrice inversible.

Exercice 1276 [Centrale PC 2026 # 1276] Soit $\mathcal{N} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : M^p = 0 \text{ pour un } p\}$ et $(E_{i,j})$ la base canonique.

1. Montrer que si $M \in \mathcal{N}$, alors $M^n = 0$.
2. Calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$.
3. Si $i \neq j$, montrer que $I_n - E_{i,j}$ est inversible et calculer son inverse.
4. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$.
5. Montrer $\operatorname{Ker}\operatorname{tr} = \operatorname{Vect}(\mathcal{N})$.

Exercice 1277 [Centrale PC 2026 # 1277] Soient E réel et $p_1,\ldots,p_n \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $p_i \circ p_j = \delta_{i,j}p_i$. Poser $F_i = \operatorname{Im} p_i$ et supposer les F_i de dimension finie.

1. Montrer que les F_i sont en somme directe ssi $\dim(\sum_i F_i) = \sum_i \dim F_i$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}^n$, poser $u_a = \sum_i a_i p_i$. Calculer u_a^k et caractériser quand u_a est un projecteur.
3. Si $\sum_i p_i = \mathrm{id}$, montrer $E = \bigoplus_i F_i$.
4. Exprimer $\operatorname{Ker} p_i$ à l'aide des F_j.

Exercice 1278 [Centrale PC 2026 # 1278] 1. Montrer que, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \geq 0$, $\det(A^2 + \lambda I_n) \geq 0$.

2. Si n est impair et B inversible, montrer $A^2 + B^2 \neq -I_n$.
3. Si n est pair, donner A, B telles que $A^2 + B^2 = -I_n$.

Exercice 1279 [Centrale PC 2026 # 1279] Pour $n \geq 2$ et $M \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que M n'est pas inversible ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $P + zM$ soit inversible pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1280 [Centrale PC 2026 # 1280] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{rg}(B) = 1$ et $A^3 = B$.

1. Donner une relation entre $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(B)$.
2. Si $\mathrm{tr}(B) = 0$, montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 1281 [Centrale PC 2026 # 1281] Soient E complexe de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Poser $\mathbb{C}[u] = \{P(u) : P \in \mathbb{C}[X]\}$ et $S_u = \{f \in \mathbb{C}[u] : f \text{ est une symétrie}\}$. Si u est diagonalisable avec p valeurs propres distinctes, calculer $\dim \mathbb{C}[u]$ et $\mathrm{card}(S_u)$.

Exercice 1282 [Centrale PC 2026 # 1282] Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varphi_A(B) = AB$.

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, montrer φ_A diagonalisable et $\chi_{\varphi_A} = \chi_A^2$.
2. Si D est diagonale, montrer φ_D diagonalisable et $\chi_{\varphi_D} = \chi_D^n$.
3. Étendre à A diagonalisable, puis à toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 1283 [Centrale PC 2026 # 1283] Soient $n \geq 1$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ssi A l'est sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1284 [Centrale PC 2026 # 1284] Soit $A = (a_{ij})$ une matrice stochastique : $a_{ij} \geq 0$ et chaque ligne somme à 1.

1. Montrer que 1 est valeur propre et que toute valeur propre λ vérifie $|\lambda| \leq 1$.
2. Montrer que A^p est stochastique et étudier la convergence de (A^p).
3. Pour $\lambda \in]-1, 1]$ et N nilpotente, montrer que $((\lambda I_n + N)^p)_p$ converge.

Exercice 1285 [Centrale PC 2026 # 1285] Soient $U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. On suppose A diagonalisable et U, V semblables.

1. Montrer qu'il existe un polynôme π scindé à racines simples tel que $A\pi'(A) = 0$.
2. Montrer $A = 0$.
3. Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse de diagonalisabilité de A ?

Exercice 1286 [Centrale PC 2026 # 1286] Soient E complexe de dimension n et $\mathcal{A} \subset GL(E)$ tel que, pour $u \neq v$ dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = -v \circ u$.

1. Si n est impair, montrer que $\mathcal{A}$ a au plus un élément.
2. Si $\mathcal{A}$ a au moins deux éléments, montrer que pour $u \in \mathcal{A}$, toute valeur propre λ entraîne la valeur propre $-\lambda$ de même multiplicité.
3. Si $n = 2$, trouver une base où la matrice de u est $\mathrm{diag}(\lambda, -\lambda)$.
4. Montrer que $\mathcal{A}$ a au plus trois éléments.

Exercice 1287 [Centrale PC 2026 # 1287]

1. Montrer que $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$ est un produit scalaire sur $E = \{f \in C^0(]0, 1], \mathbb{R}) : f^2 \text{ est intégrable}\}$.
2. Pour $F(x, y) = \int_0^1 (\ln t - tx - y)^2 dt$, calculer $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} F(x, y)$.

Exercice 1288 [Centrale PC 2026 # 1288] Soient E euclidien de dimension 3, H un plan, $u \neq 0$ normal à H, f une isométrie et s la réflexion orthogonale par rapport à H. Poser $h = f \circ s \circ f^{-1}$. Montrer que h est une réflexion et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 1289 [Centrale PC 2026 # 1289]

1. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que si 0 est valeur propre de AB, alors c'est une valeur propre de BA.
2. Même question pour une valeur propre non nulle.
3. Comparer les spectres et dimensions des espaces propres de AA^T et A^TA.

Exercice 1290 [Centrale PC 2026 # 1290] Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $U \in M_n(\mathbb{R})$ tels que $AU = U^TA$. Poser $\langle X, Y\rangle = X^TAY$.

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $P^TAP = I_n$ et $P^{-1}UP = D$.

Exercice 1291 [Centrale PC 2026 # 1291] Soient $x_0, \ldots, x_{n-1} > 0$, $A = \frac{1}{n}\sum x_k$ et $G = (\prod x_k)^{1/n}$.

1. Montrer $\exp(t/A - 1) \geq t/A$ pour $t > 0$, puis $A \geq G$. L'inégalité vaut-elle pour des $x_k \geq 0$?
2. Si $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer $\det(S)^{1/n} \leq \mathrm{tr}(S)/n$.
3. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer $\det(A)^2 \leq (\frac{1}{n}\sum_{i,j} a_{ij}^2)^n$.

Exercice 1292 [Centrale PC 2026 # 1292] Soit $F = \{A \in S_n^+(\mathbb{R}) : a_{ij} < 0 \text{ si } i \neq j\}$.

1. Pour $a_{ii} = a$ et $a_{ij} = -b$ hors diagonale, caractériser l'appartenance à F.
2. Si $A \in F$ et $X^TAX = 0$, montrer $X \in \mathrm{Ker}(A)$.
3. En déduire $a_{ii} > 0$ pour tout i.

Exercice 1293 [Centrale PC 2026 # 1293] Dire que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est de type m si $A^m = A^T$.

1. Déterminer les matrices de type m pour $m = 0, 1$.
2. Si A est de type m, poser $B = A^{m+1}$. Montrer $B^m = B$ et B symétrique, puis que B est un projecteur orthogonal.
3. Si A est inversible et de type m, montrer $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1294 [Centrale PC 2026 # 1294]

1. Pour $\omega \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer $\omega\omega^T \in S_n^+(\mathbb{R})$ et est de rang 0 ou 1.
2. Pour $B \in S_n(\mathbb{R})$ de spectre $(x_1, \ldots, x_n)$, construire une base (f_k) telle que $Bf_k = x_kf_k$, $\sum f_kf_k^T = I_n$ et $B = \sum x_kf_kf_k^T$.
3. Si $B \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe Ω telle que $B = \Omega\Omega^T$.

Exercice 1295 [Centrale PC 2026 # 1295]
1. Montrer que $S \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive ssi $S = P^T P$ pour un P inversible.
2. Montrer que A est diagonalisable ssi il existe S symétrique définie positive tel que $A^T = S^{-1}AS$.
3. L'assertion reste-t-elle vraie si l'on remplace S par un P inversible quelconque ?

Exercice 1296 [Centrale PC 2026 # 1296] Poser $\|M\| = \sqrt{\mathrm{tr}(M^T M)}$.
1. Montrer que c'est une norme et qu'elle est invariante par multiplication à gauche et à droite par des matrices orthogonales.

Soient A, B symétriques, de valeurs propres ordonnées $\lambda_i(A), \lambda_i(B)$, et D_A, D_B les diagonales correspondantes.
1. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $\|A-B\| = \|D_A P - P D_B\|$, puis que $\|A-B\|^2 = \sum_{i,j} p_{ij}^2 (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$.
2. Pour $f_{A,B}(M) = \sum_{i,j} m_{ij}(\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$, montrer qu'elle est bornée sur les matrices bistochastiques.
3. Par une transformation élémentaire, montrer que $f(M) \geq f(I_n)$ pour toute matrice bistochastique.
4. En déduire $\sum_i (\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 \leq \|A-B\|^2$.

Exercice 1297 [Centrale PC 2026 # 1297] Soit u autoadjoint sur un espace euclidien, de spectre ordonné $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$.
1. Montrer que $\lambda_1 = \min_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$ et $\lambda_n = \max_{\|x\|=1} \langle u(x), x\rangle$.
2. Si v est autoadjoint de spectre $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$, montrer $(u+v) \subset [\lambda_1 + \mu_1, \lambda_n + \mu_n]$.
3. Montrer $|\lambda_1 - \mu_1| \leq \sup_{\|x\|=1} \|u(x) - v(x)\|$.

Exercice 1298 [Centrale PC 2026 # 1298]
1. Si $\mu_1 < \cdots < \mu_n$, $x_i \neq 0$, $D = \mathrm{diag}(\mu_i)$ et $M = \begin{pmatrix} D & X \\ X^T & \alpha \end{pmatrix}$, montrer l'entrelacement strict des valeurs propres de M et D.
2. Pour S symétrique de valeurs propres μ_i et $N = \begin{pmatrix} S & X \\ X^T & \alpha \end{pmatrix}$, montrer l'entrelacement large.
3. Pour des variables R_i à moment d'ordre 2, avec matrice de covariance Σ_n et $U = (u_i)^T$, montrer $\mathbf{V}(\sum_i u_i R_i) = U^T \Sigma_n U$.

2) Analyse

Exercice 1299 [Centrale PC 2026 # 1299] Pour C convexe fermé d'un espace vectoriel réel de dimension finie, x est extrémal si $x = (y+z)/2$ avec $y, z \in C$ entraîne $x = y = z$.
1. Déterminer les points extrémaux de $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum |x_k| \leq 1\}$.
2. Déterminer ceux de la boule unité d'un espace euclidien.
3. Montrer que tout convexe fermé borné non vide en dimension finie possède un point extrémal.

Exercice 1300 [Centrale PC 2026 # 1300] Soit E l'espace des fonctions continues bornées $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. Pour $|a| < 1$, poser $T(f)(x) = f(x) - af(\ell x)$. Montrer que T est un automorphisme continu de E et que T^{-1} est continue.

Exercice 1301 [Centrale PC 2026 # 1301] Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et $T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, muni de la norme uniforme.
1. Montrer que T est un endomorphisme continu.
2. Calculer $\|T\|$.
3. Montrer $|T^n(f)(x)| \leq x^n \|f\|_\infty / n!$.
4. En déduire une borne pour $\|T^n\|$ et la déterminer.

Exercice 1302 [Centrale PC 2026 # 1302] Poser $A_n = \min\{p \geq 1 : \sum_{k=1}^p 1/k \geq n\}$. Montrer que A_n est bien défini et donner la limite et un équivalent de (A_n).

Exercice 1303 [Centrale PC 2026 # 1303] Soit $u_0 = 1$, $u_{n+1} e^{u_{n+1}} = u_n/2$.
1. Montrer que (u_n) est bien définie et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge.
3. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $u_n \sim c/2^n$.

Exercice 1304 [Centrale PC 2026 # 1304] Pour $n \geq 1$, considérer $x = 1 + \ln(n+x)$.
1. Montrer qu'il existe une unique solution $x_n \geq 0$.
2. Montrer $x_n \to +\infty$ et donner un équivalent.
3. Déterminer la limite de $x_n - \ln n$.

Exercice 1305 [Centrale PC 2026 # 1305] Soient $u_0 = \alpha > 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.
1. Montrer $u_n \to +\infty$.
2. Poser $v_n = 2^{-n} \ln u_n$. Montrer que (v_n) converge vers β.
3. Montrer $|v_n - \beta| = o(2^{-n})$.

Exercice 1306 [Centrale PC 2026 # 1306] Soit $\theta \in]0, \pi/2[$, $x_0 = \cos\theta$, $y_0 = \sin\theta$, et

$$x_{n+1} = \frac{2 + 2y_n + x_n}{3 + 2x_n + 2y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{2 + 2x_n + y_n}{3 + 2x_n + y_n}.$$

1. Montrer que (x_n, y_n) est bien définie et reste sur le quart de cercle unité.
2. Montrer sa convergence et déterminer sa limite.

Exercice 1307 [Centrale PC 2026 # 1307] Étudier la convergence de $\sum \sin\left(\frac{\pi n!}{\sum_{k=0}^{n} k!}\right)$ et de $\sum \sin(\pi n! e)$.

Exercice 1308 [Centrale PC 2026 # 1308] Soient $\ell \in \mathbb{N}$ et $f \in C^1([\ell, +\infty[, \mathbb{R})$.

1. Montrer $\sum_{k=\ell+1}^{n} f(k) = \int_\ell^n f(t)\,dt + \int_\ell^n (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)\,dt$.
2. Si f' est intégrable sur $[\ell, +\infty[$, comparer la nature de $\sum_{k \geq \ell} f(k)$ et de $\int_\ell^\infty f$.
3. Déterminer la nature de $\sum \cos(\ln n)/n$.

Exercice 1309 [Centrale PC 2026 # 1309] Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites croissantes à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour $u \in \mathcal{C}$, poser $v_n = \sum_{k=0}^{n} 1/(u_0 \cdots u_k)$.

1. Étudier la limite de v_n si u est constante, $u_n = n + 2$, puis $u_n = 2n + 2$.
2. Montrer pour tout u que v_n converge avec limite dans $]0, 1]$.
3. Montrer que $u \mapsto \lim v_n$ est injective.

Exercice 1310 [Centrale PC 2026 # 1310] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a_1 = 1$ et, pour $n \geq 2$, $a_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k^\alpha = n^{-\beta}$.

1. Montrer $a_n > 0$.
2. Si $\sum a_n^\alpha$ diverge, montrer $a_n^\alpha = o(n^{-\alpha\beta})$.
3. En déduire que si $\alpha\beta > 1$, cette série converge.
4. Montrer que si $\alpha\beta \leq 1$, alors $a_n = o(n^{-\beta})$.

Exercice 1311 [Centrale PC 2026 # 1311]

1. Pour $\lambda \geq 0$, montrer $\int_0^\pi \frac{dx}{1+\lambda \sin^2 x} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\lambda \sin^2 x}$.
2. Calculer cette intégrale.
3. Pour $\alpha \geq 0$, étudier $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha \sin^2 x}$.

Exercice 1312 [Centrale PC 2026 # 1312] Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ décroissante vers 0 et $g(u) = f(u)\sin u$.

1. Montrer que $\int_0^\infty g(u)\,du$ converge.
2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ssi g l'est.

Exercice 1313 [Centrale PC 2026 # 1313] Soient f, g continues et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que fg est intégrable.

Exercice 1314 [Centrale PC 2026 # 1314] Étudier et représenter le graphe de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos^n(x)\sin(nx)}{n}$.

Exercice 1315 [Centrale PC 2026 # 1315]

1. Donner un équivalent simple de $u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)$.
2. Pour $n \geq 1$, poser $f_n(x) = x(1-x)^n/\ln(n+1)$. Déterminer le domaine de $F = \sum f_n$ et étudier la convergence uniforme et normale.

Exercice 1316 [Centrale PC 2026 # 1316] Soient $a > 0$ et $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ décroissante avec $f(x) \sim a \ln x$. Déterminer le domaine de $u(x) = \sum_{n \geq 0} f(n)e^{-nx}$ et les limites aux bornes.

Exercice 1317 [Centrale PC 2026 # 1317] Soit $f(x) = \sum_{n \geq 1} \ln(n) x^n$.

1. Donner le rayon de convergence.
2. Pour $0 < x < 1$, montrer $-x\ln(1-x) - 1 \leq (1-x)f(x) \leq -x\ln(1-x)$ et trouver un équivalent en 1^-.
3. Montrer que f admet une limite en -1^+.

Exercice 1318 [Centrale PC 2026 # 1318] Soit $(a_n) \subset \mathbb{C}$ telle que $na_n \to 0$.

1. Si $u_n \to 0$, montrer $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \to 0$.
2. Montrer que $\sum a_n z^n$ converge pour $|z| < 1$.
3. Si $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $f(x) \to \ell$ quand $x \to 1^-$, montrer que $\sum a_n$ converge et vaut ℓ.

Exercice 1319 [Centrale PC 2026 # 1319] Poser $I_0 = 1$, et I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$.

1. Montrer $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.
2. Montrer que $\sum I_n x^n/n!$ converge pour $|x| < 1$.
3. Pour $F(x) = \sum I_n x^n/n!$, trouver une équation différentielle et en déduire une expression de I_n.

Exercice 1320 [Centrale PC 2026 # 1320] Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n$.

1. Donner son rayon et son domaine de définition.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et calculer $f(-1/4)$.

Exercice 1321 [Centrale PC 2026 # 1321] Soient $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$ et $S_{n,k}$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k parties.

1. Montrer $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.
2. Pour $k \geq 1$, déterminer le rayon de convergence de $A_k(x) = \sum_{n \geq k} S_{n,k} x^n/n!$.
3. Exprimer A'_{k+1} à l'aide de k, A_k, A_{k+1}.
4. Montrer $A_k(x) = (e^x - 1)^k/k!$.

Exercice 1322 [Centrale PC 2026 # 1322] Soit $f(x) = e^{-x^2}$ et $I = \int_0^\infty f(x)\,dx$.

1. Justifier la convergence de I et, pour $|x| < 1$, celle de $\sum x^{n^2}$. Poser $g(x) = \sum_{n \geq 0} x^{n^2}$.
2. Donner un équivalent de $g(x)$ en 1 faisant intervenir I.

3. Soit $h \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante avec convergente non nulle intégrale sur $\mathbb{R}_+$. Pour $\theta \geq 0$, étudier $\sum_{n\geq 1} h(n\theta)$, puis donner son équivalent quand $\theta \to 0$.

Exercice 1323 [Centrale PC 2026 # 1323] Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon $R > 0$, et $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

1. Calculer $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\theta$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. Pour $0 < r < R$, calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_n(re^{i\theta})|^2\, d\theta$.
3. Étudier la convergence de $\sum |a_k|^2 r^{2k}$ et calculer sa somme si elle converge.

Exercice 1324 [Centrale PC 2026 # 1324]

1. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, poser $Q(X) = X^n \chi_A(1/X)$ et $R = \sup_{\lambda\in(A)} 1/|\lambda|$. Montrer, pour $|z| < R$, $\frac{Q'(z)}{Q(z)} = -\sum_{k\geq 0} \operatorname{tr}(A^{k+1}) z^k$.
2. Déterminer les matrices A telles que $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Exercice 1325 [Centrale PC 2026 # 1325] Pour $n \geq 1$, poser $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^n t^n e^{-t}\, dt$. Montrer que (I_n) possède une limite ℓ et que $\ell \in [0, 1/2]$.

Exercice 1326 [Centrale PC 2026 # 1326] Pour $n \geq 1$, $\alpha > 1$, poser $I_n(\alpha) = \int_0^\infty (1 + t^\alpha)^{-n}\, dt$.

1. Montrer que $I_n(\alpha)$ est définie.
2. Relier $I_{n+1}(\alpha)$ à $I_n(\alpha)$ et en déduire une expression.
3. Déterminer la limite de $I_n(\alpha)$.
4. Montrer qu'il existe $K(\alpha) > 0$ tel que $I_n(\alpha) \sim K(\alpha) n^{-1/\alpha}$.

Exercice 1327 [Centrale PC 2026 # 1327] Pour $n \geq 1$, poser $u_n = \int_0^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+n)}\, dt$.

1. Montrer l'existence et établir $u_n = \ln(1 + 1/n) + \sum_{k=1}^{\infty} \big((n+k)\ln(1 + 1/(n+k)) - k\ln(1 + 1/k)\big)$.
2. Montrer $1 - \frac{1}{2n} \leq n\ln(1 + 1/n) \leq 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}$.
3. Montrer $\sum_{k\geq 1}(1/k - 1/(k+n)) \sim \ln n$.
4. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1328 [Centrale PC 2026 # 1328] Soient $F = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0, f(1) = 1\}$, $g \in F$ croissante, $g'(1) = 0$. Pour $n \geq 1$, poser $f_n(x) = g(nx)e^{1-x}$ si $x \in [0, 1/n]$, et 0 sinon.

1. Montrer $f_n \in F$.
2. Poser $I_n = \int_0^1 |f_n - f_n'|$. Calculer $\ell = \lim I_n$ et donner un équivalent de $I_n - \ell$.

Exercice 1329 [Centrale PC 2026 # 1329] Poser $F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(x\tan\theta)}{\tan\theta}\, d\theta$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1.
2. Calculer $F(x)$.
3. Après justification de convergence, calculer $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\, d\theta$.

Exercice 1330 [Centrale PC 2026 # 1330] Poser $f(x) = \int_0^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+x)}\, dt$.

1. Déterminer son domaine, ses variations et ses limites aux bornes.
2. Calculer $f(1)$.

Exercice 1331 [Centrale PC 2026 # 1331] Poser $f(x) = \int_1^\infty \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer son domaine.
2. Montrer que f est C^∞ et donner $f^{(n)}$.
3. Donner des équivalents en 0 et en $+\infty$.

Exercice 1332 [Centrale PC 2026 # 1332] Pour $x \in [0, \pi/2]$, poser $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+2t\cos x+t^2)}{t}\, dt$.

1. Montrer que f est de classe C^1.
2. Donner une expression simple de f.

Exercice 1333 [Centrale PC 2026 # 1333] Étudier $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1-x\cos t+t^2)}{t}\, dt$.

Exercice 1334 [Centrale PC 2026 # 1334] Poser $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{it}}{x^2+t^2}\, dt$.

1. Montrer que f est définie pour $x > 0$.
2. Montrer $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixu}}{u^2+1}\, du$ et en déduire sa limite en 0.
3. Calculer le laplacien de $G(x,t) = x/(x^2+t^2)$.
4. Montrer que $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*)$ et résout une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
5. Donner une expression simple de f.

Exercice 1335 [Centrale PC 2026 # 1335] Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{R}_+^*)$. Pour $x > 0$, poser $F(x) = \int_0^1 f(t)^x\, dt$ et $G(x) = F(x)^{1/x}$.

1. Montrer $G \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$.
2. Déterminer les limites de G en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 1336 [Centrale PC 2026 # 1336] Soit $f(x,y) = x^2y^2 + \frac{1}{2}(x+y)^2 + xy + \frac{3}{4}$.

1. Déterminer les points critiques et leur nature.

2. f admet-elle des extrema globaux ?

Exercice 1337 [Centrale PC 2026 # 1337] 1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, Q de degré 2 à racines distinctes r_1, r_2. Montrer que P/Q est développable en série entière et préciser le rayon.

2. Sur $U = (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times]0, \pi/2[$, poser $f(x,t) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\tan t\right)$. Étudier ses extrema.
3. Pour t fixé, montrer que $x \mapsto f(x,t)$ est développable en série entière en 0.

Exercice 1338 [Centrale PC 2026 # 1338] Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, avec $\Delta = \{(x,x)\}$, poser $f(x,y) = (h(x) - h(y))/(x-y)$.

1. Si $h \in C^1$, montrer que f se prolonge continûment à $\mathbb{R}^2$.
2. Si $h \in C^2$, montrer que ce prolongement est C^1.

Exercice 1339 [Centrale PC 2026 # 1339] Soit $n \geq 1$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Dire que f vérifie H_n si $f(tx, ty) = t^n f(x,y)$ pour tous x, y et $t \geq 0$.

1. Montrer que H_n équivaut à $x\partial_x f + y\partial_y f = nf$.
2. Si $n \geq 2$, montrer $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$.
3. Montrer que f ne s'annule qu'en $(0,0)$ ssi $|f(x,y)| \to +\infty$ lorsque $\|(x,y)\| \to +\infty$.

Exercice 1340 [Centrale PC 2026 # 1340] Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ radiale : $f(x) = \varphi(\|x\|)$ pour $x \neq 0$.

1. Montrer $\Delta f(x) = \varphi''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|}\varphi'(\|x\|)$.
2. Déterminer les fonctions radiales harmoniques de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1341 [Centrale PC 2026 # 1341] Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que le spectre de sa hessienne soit inclus dans $[1, +\infty[$ en tout point.

1. Montrer $y^T H_f(x) y \geq \|y\|^2$.
2. En déduire $f(x) \geq f(0) + \nabla f(0)^T x + \|x\|^2/2$.
3. Montrer que f admet un minimum, puis qu'il est unique.

3) Probabilités

Exercice 1342 [Centrale PC 2026 # 1342] Soit $n \geq 3$. Placer successivement n billes, uniformément et indépendamment, dans trois boîtes initialement vides. Soit N le nombre de boîtes vides.

1. Calculer $\mathbf{E}(N)$.
2. Donner la loi de N.
3. En déduire le nombre de surjections de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1,2,3\}$.

Exercice 1343 [Centrale PC 2026 # 1343] Une urne contient une boule blanche et une noire. À chaque tirage, remettre la boule tirée en ajoutant deux boules : une de sa couleur et une noire. Soit T_n le nombre de boules blanches après n tirages. Préciser $X_n = T_n - T_{n-1}$ et sa loi, calculer $\mathbf{E}(T_n)$ et donner un équivalent en $+\infty$.

Exercice 1344 [Centrale PC 2026 # 1344] Soient $n = 2q+1$, A_k les racines n-ièmes de l'unité d'arguments $2k\pi/n$, et B_k l'intersection de (A_0A_k) avec la droite $x = -1$. Si W_n est uniforme sur $\{1, \dots, n-1\}$, poser $Z_n = 2\cot(\pi W_n/n)$.

1. Montrer que l'ordonnée de B_k vaut $2\cot(k\pi/n)$.
2. Calculer $\mathbf{E}(Z_n)$.
3. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(|Z_n|)$.

Exercice 1345 [Centrale PC 2026 # 1345] Soit $n \geq 2$ et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$.

1. Si A est uniforme sur $\mathcal{P}_n$, donner la loi de $|A|$.
2. Pour A, B uniformes indépendantes, calculer $\mathbf{P}(A \cap B = \varnothing)$.
3. Pour n parties uniformes indépendantes $A_1, \dots, A_n$, poser $Z = |\bigcap_i A_i|$. Donner $\mathbf{E}(Z)$ et la loi de Z.

Exercice 1346 [Centrale PC 2026 # 1346] On lance indéfiniment une pièce équilibrée et numérote les séries de lancers identiques consécutifs. Soit N_n le numéro de la série contenant le lancer n.

1. Donner $N_n(\Omega)$, $\mathbf{P}(N_n = 1)$ et $\mathbf{P}(N_n = n)$.
2. Relier $\mathbf{P}(N_n = k)$ aux probabilités $\mathbf{P}(N_{n-1} = i)$.
3. Donner la fonction génératrice de N_n et son espérance.
4. Calculer $\mathbf{V}(N_n)$.

Exercice 1347 [Centrale PC 2026 # 1347] Soit $X \geq 0$ à support fini et $k \geq 1$. Montrer $\mathbf{E}(X^k) = \int_0^\infty kt^{k-1}\mathbf{P}(X > t)\,dt$.

Exercice 1348 [Centrale PC 2026 # 1348] Soit $\mathfrak{S}_n$ uniforme, $n \geq 2$, et $X_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$, 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i. Les X_i sont-elles indépendantes ?
2. Pour Y le nombre de points fixes, calculer espérance et variance.

Exercice 1349 [Centrale PC 2026 # 1349] Soit $f \in C^1([0,1])$ et $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k/n) x^k (1-x)^{n-k}$.

1. Montrer que f est lipschitzienne.
2. Réécrire $B_n(x) - f(x)$ comme somme pondérée des écarts.
3. Pour X_i i.i.d. Bernoulli(x), poser $X_n = (\sum X_i)/n$. Donner loi, espérance, variance et montrer $\mathbf{V}(X_n) \leq 1/(4n)$.

4. Montrer $\mathbf{E}(f(X_n)) = B_n(x)$.
5. Pour $\varepsilon > 0$, majorer la contribution des indices avec $|x - k/n| \geq \varepsilon/M$ par $2\|f\|_\infty \mathbf{P}(|X_n - x| \geq \varepsilon/M)$.
6. En déduire $B_n \to f$ uniformément.

Exercice 1350 [Centrale PC 2026 # 1350] Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et (X_n) i.i.d. de même loi. Pour $n \geq 2$, poser $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Dire que X est implosive si $\mathbf{E}(X) = +\infty$ et $\mathbf{E}(Y_n) < +\infty$ pour un certain n.

1. Si $\mathbf{P}(X = k) = 1/\sqrt{k+1} - 1/\sqrt{k+2}$, montrer que X est implosive et donner son indice d'implosion.
2. Poser $u_n = a/(n \ln^2 n)$ pour $n \geq 2$. Choisir a pour que (u_n) soit une loi et montrer que la variable associée n'est pas implosive.

Exercice 1351 [Centrale PC 2026 # 1351] Soient (X_n) i.i.d. avec $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_n = -1) = q = 1 - p$, et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Étudier $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)$.
2. Pour $t > 0$, montrer $\mathbf{P}(S_n > a) \leq e^{-ta}(qe^{-t} + pe^t)^n$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que $\sum \mathbf{P}(S_n \in A)$ converge pour toute partie bornée $A \subset \mathbb{R}$.

Exercice 1352 [Centrale PC 2026 # 1352] Soit $M_n = (X_{ij})$ avec coefficients i.i.d. uniformes sur $\{-1, 1\}$ et $\Delta_n = \det M_n$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\Delta_n)$.
2. Montrer $\mathbf{V}(\Delta_n) = n!$.
3. Donner une condition suffisante sur $(a_n) \subset \mathbb{R}_+$ pour que $\mathbf{P}(\Delta_n \geq a_n) \to 0$.
4. Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{tr}(M_n^k))$.

Exercice 1353 [Centrale PC 2026 # 1353]

1. Pour des variables bornées $(X_1, \ldots, X_n)$, montrer que leur matrice de covariance est dans $S_n^+(\mathbb{R})$.
2. Réciproquement, toute matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$ est-elle matrice de covariance d'un n-uplet de variables réelles bornées ?

Exercice 1354 [Centrale PC 2026 # 1354] Soient (X_n) indépendantes, de même espérance m et variance σ^2, et $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée.

1. Montrer $\mathbf{P}(|f(\overline{X}_n) - f(m)| > \varepsilon) \to 0$.
2. Montrer $\mathbf{E}(f(\overline{X}_n)) \to f(m)$.

Exercice 1355 [Centrale PC 2026 # 1355] Soit $Y_n \sim \mathcal{G}(1/n)$.

1. Pour $x > 0$, déterminer si elle existe la limite de $\mathbf{P}(Y_n/n \leq x)$.
2. Pour f continue bornée sur $\mathbb{R}_+$, déterminer si elle existe la limite de $\mathbf{E}(f(Y_n/n))$.

Exercice 1356 [Centrale PC 2026 # 1356] Soient $(X_i)_{i \geq 1}$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, $E_k = \bigcup_{i=1}^n (X_i = k)$ et $Y_n = |\{X_1, \ldots, X_n\}|$.

1. Montrer $Y_n = \sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{E_k}$.
2. Pour $m \in \mathbb{N}$, poser $R_m = \sum_{k=m+1}^\infty \mathbf{1}_{E_k}$. Montrer $\mathbf{E}(R_m) \leq n\mathbf{P}(X_1 \geq m+1)$.

Exercice 1357 [Centrale PC 2026 # 1357]

1. Pour $n \geq 2$, montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est de rang 1 ssi elle s'écrit $A = UV^T$ avec $U, V \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.
2. Pour (X, Y) à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}^2$, poser $A = (\mathbf{P}(X = i, Y = j))$. a. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1$ ssi X, Y sont indépendantes. b. Montrer que l'indépendance équivaut à $\mathbf{E}(e^{sX+tY}) = \mathbf{E}(e^{sX})\mathbf{E}(e^{tY})$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1358 [Centrale PC 2026 # 1358] Soient $(X_i)_{i \geq 1}$ i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}$ indépendante de chaque famille finie $(X_1, \ldots, X_n)$; poser $S_T = \sum_{i=1}^T X_i$. Supposer X_1, T intégrables.

1. Exprimer $G_{X_1+\cdots+X_n}$ en fonction de G_{X_1}.
2. Montrer $G_{S_T}(s) = G_T(G_{X_1}(s))$ pour $s \in [0, 1]$.
3. Montrer $\mathbf{E}(S_T) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(T)$.
4. Application : des poules pondent un nombre d'œufs de loi de Poisson ; chaque œuf éclot avec probabilité p.

XIII) Autres Écoles MP-MPI 2026

1) Algèbre

Exercice 1359 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1359] [IMT] $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m+1) > f(f(m))$. Montrer par récurrence $m \geq p \Rightarrow f(m) \geq p$, puis $f(m) \geq m$, que f est croissante et conclure $f = \mathrm{id}$.

Exercice 1360 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1360] [IMT] Factoriser $X^n - 1$ et $1 + X + \cdots + X^{n-1}$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \sin(2k\pi/n)$ et $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n)$.

Exercice 1361 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1361] [IMT] Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, calculer la trace de $\varphi : M \mapsto AMB$.

Exercice 1362 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1362] [IMT] Montrer que $A^2 = A$ ssi $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{rg}(I_n - A) \leq \mathrm{tr}(I_n - A)$.

Exercice 1363 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1363] [IMT] Soient P_1, P_2 deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$ et S l'espace des endomorphismes les laissant stables. Montrer que S est un sous-espace, étudier si les plans sont supplémentaires et montrer qu'ils ont un vecteur propre commun à tout $u \in S$. Trouver une base où les matrices de S sont de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

Exercice 1364 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1364] Diagonaliser la matrice A de taille 4 dont tous les coefficients valent 1, ainsi que B à diagonale 16 et hors-diagonale 1. Déterminer π_B.

Exercice 1365 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1365] [CCINP] Pour $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$. Calculer MM^T, en déduire $\det M$, son rang selon $a^2+b^2+c^2+d^2$, puis son spectre et discuter la diagonalisabilité si $b^2+c^2+d^2=0$.

Exercice 1366 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1366] [CCINP] Soient $a,b \in \mathbb{R}$, A la matrice de taille n à diagonale b et hors-diagonale a, et J la matrice de tous les 1. Montrer que A, J sont diagonalisables, déterminer les éléments propres de J, donner une condition d'inversibilité de A et exprimer A^{-1}.

Exercice 1367 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1367] [IMT] Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. Montrer $\mathrm{rg}(AB) \leq 2$, discuter l'inversibilité. Si $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer les x possibles et discuter la diagonalisabilité de BA.

Exercice 1368 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1368] [CCINP] Pour $n \geq 2$, $f(P) = (X^2+X)P(1) + (X^2-X)P'(1)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer noyau, image, valeurs propres, espaces propres et diagonalisabilité.

Exercice 1369 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1369] [IMT] Pour des endomorphismes u, v d'un espace de dimension finie, montrer que toute valeur propre de $u \circ v$ est valeur propre de $v \circ u$.

Exercice 1370 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1370] [IMT] Si $A^2 + A + I_n = 0$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer n pair et calculer $\det A, \mathrm{tr}\, A$.

Exercice 1371 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1371] [IMT] Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec n valeurs propres distinctes. Si A est diagonale, montrer $\mathbb{R}[A]$ égale les matrices diagonales. En général, construire M_i tels que $A^p = \sum_i \lambda_i^p M_i$.

Exercice 1372 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1372] [IMT] Soit M à diagonale nulle et coefficients hors diagonale égaux à 1. Déterminer son spectre puis montrer qu'aucune forme linéaire φ ne donne une valeur propre de A pour toute matrice A.

Exercice 1373 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1373] [IMT] Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$, déterminer $\dim\{g : f \circ g = g \circ f = 0\}$.

Exercice 1374 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1374] [IMT] Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, montrer que $M \mapsto \mathrm{tr}(M)A - \mathrm{tr}(A)M$ est diagonalisable et déterminer ses espaces propres.

Exercice 1375 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1375] [IMT] Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$, $\det M = 0$, $M^T = M^2$. Montrer $M^4 = M$, que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $b \in \{0,1\}$, puis discuter $b=0$, l'idempotence, diagonalisabilité et trigonalisabilité.

Exercice 1376 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1376] [CCINP] Pour E réel de dimension 4 et $\pi_f = (X^2+1)(X^2+4)$, décomposer les noyaux, trouver x, y tels que $f^2(x) = -x$, $f^2(y) = -4y$, montrer $(x, f(x), y, f(y))$ base et écrire la matrice.

Exercice 1377 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1377] [CCINP] Soit A stochastique. Montrer $1 \in (A)$ et $|\lambda| \leq 1$. Si la diagonale est strictement positive, montrer $|\lambda - w| \leq 1 - w$ pour un $w \in]0,1]$, puis situer le spectre dans un disque fermé de rayon < 1 tangent au cercle unité en 1.

Exercice 1378 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1378] [IMT] Sur $C^1([0,1])$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 xfg$. Montrer que c'est un produit scalaire et calculer le projeté de 1 sur $\mathrm{Vect}(x, x^2)$.

Exercice 1379 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1379] [CCINP] Sur $\mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$ pour a_i distincts. Montrer que c'est un produit scalaire. Pour $H = \{P : \sum \alpha_i P(a_i) = 0\}$, $\alpha \neq 0$, donner $\dim H$ et calculer $d(Q, H)$ pour le générateur unitaire Q de $H^\perp$.

Exercice 1380 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1380] [CCINP] Soient u isométrique et $v = \mathrm{id} - u$. Montrer $\mathrm{Im}\, v \perp \mathrm{Ker}\, v$. Pour $f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$, établir la décomposition puis la convergence simple vers le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}\, v$.

Exercice 1381 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1381] [CCINP] Montrer successivement que toute matrice positive admet une racine carrée positive, que M^TM est positive, que toute matrice positive est de la forme M^TM, et que A est diagonalisable réelle ssi $A^T = SAS^{-1}$ pour un S symétrique définie positive.

Exercice 1382 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1382] [IMT] Si f est autoadjoint sur un espace euclidien, montrer que $\langle f(x), x\rangle = 0$ pour tout x entraîne $f = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour $\|f(x)\|^2 = \langle x, f(x)\rangle$ pour tout x.

2) Analyse

Exercice 1383 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1383] [IMT] Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue entre espaces normés, montrer $\mathrm{Ker}\, f$ fermé. La réciproque est-elle vraie ? Montrer qu'elle l'est pour $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1384 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1384] [IMT] Sur $C^1([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, poser $A = \{f : f(0) = 0, \int_0^1 f \geq 1\}$. Montrer que A est fermé non vide, que $\|f\|_\infty > 1$ sur A, et calculer $d(0, A)$.

Exercice 1385 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1385] [IMT] Pour $n \notin \{0,1\}$, montrer qu'il existe un unique $x_n > 0$ tel que $x_n + e^{x_n} = n$, avec $\frac{1}{2}\ln n < x_n < \ln n$. Donner un équivalent et un développement à deux termes.

Exercice 1386 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1386] [IMT] Étudier les séries de termes généraux $1/(n\ln n)^2$, $(\ln n/n)^2$, et la queue alternée $\sum_{k>n}(-1)^k/(k\ln k)^2$.

Exercice 1387 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1387] [CCINP] Soit $u_0 > 0$, $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$. Étudier (u_n) et les séries $\sum(-1)^n u_n$, $\sum u_n^2$, $\sum$

Exercice 1388 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1388] [IMT] Pour $x > 0$, poser $I(x) = \int_x^{7x}(1-e^{-t})/t^2\, dt$. Déterminer les limites en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 1389 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1389] [IMT] Pour $f(t) = \ln(t)/(1-t)$, montrer que $\int_0^1 f$ et $\int_0^1 1/f$ convergent puis que leur produit est au moins 1.

Exercice 1390 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1390] [IMT] Montrer que $\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt$ existe et est strictement positive.

Exercice 1391 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1391] [CCINP] Poser $f(x) = \int_x^1 e^t/t\,dt$.

1. Montrer $f(x) \geq -\ln x$ et sa limite en 0^+.
2. Pour tout $n \geq 1$, montrer qu'il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que $f(u_n) = n$ et déterminer sa limite.
3. Montrer $I = \int_0^1 (e^t - 1)/t\,dt$ converge et $u_n \sim e^{I-n}$.

Exercice 1392 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1392] [CCINP] Pour $|x| < 1$, $f_x(\theta) = \sum_{n\geq 1} x^n \cos(n\theta)/n$. Étudier convergence et régularité, calculer $f_x(0)$, $f_x(\pi)$, montrer $f_x' = -x\sin\theta/(1-2x\cos\theta+x^2)$, en déduire f_x et calculer $\int_0^\pi \ln(1-2x\cos\theta+x^2)d\theta$.

Exercice 1393 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1393] [CCINP] Poser $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(nx)/n$. Montrer $\sum f_n$ converge simplement, que sa somme est C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ et de dérivée -1, puis l'expliciter.

Exercice 1394 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1394] [IMT] Pour $f(x) = \sum_{n\geq 0} n^3 x^n/n!$, déterminer le rayon et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 1395 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1395] Soit $a_1 = a_0 > 0$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}/n$.

1. Montrer que (a_n) croît, que $a_n = a_1 + 2\sum_{k=2}^n a_{k-2}/k$, et qu'elle diverge ; établir $a_n \leq n^2 a_1$.
2. Pour $f(x) = \sum a_n x^n$, trouver le rayon et vérifier $(1-x)y' = (1+2x)y$.
3. Résoudre l'équation et en déduire a_n.

Exercice 1396 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1396] [IMT] Poser $a_n = \int_0^\infty (\cosh t)^{-n} dt$. Montrer l'existence, étudier (a_n), la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ et le rayon de $\sum a_n x^n$.

Exercice 1397 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1397] [IMT] Poser $a_n = \int_0^1 t^n/\sqrt{1-t^3}\,dt$. Montrer l'existence, calculer la limite et le rayon de $\sum a_n x^n$.

Exercice 1398 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1398] [CCINP] Poser $I_n = \int_0^\infty (1+x^3)^{-n} dx$. Montrer l'existence et la limite, puis calculer la somme de $\sum_{k\geq 1}(-1)^k I_k$.

Exercice 1399 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1399] [IMT] Poser $\psi(x) = \int_0^\infty \sin(xt)e^{-t}/t\,dt$. Montrer $\int_0^\infty \cos(xt)e^{-t}dt = 1/(1+x^2)$, puis que ψ est C^1 et calculer ψ', ψ.

Exercice 1400 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1400] [CCINP] Pour $f(x) = \int_0^\infty e^{-t}e^{ixt}/\sqrt{t}\,dt$, déterminer son domaine, montrer C^1, calculer $f(0)$, établir une équation différentielle et en déduire une expression.

Exercice 1401 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1401] [IMT] Poser $f(x) = e^{-x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Montrer C^∞, trouver une équation différentielle et le développement en série entière.

Exercice 1402 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1402] [IMT] Soit f continue et $f(x) = 1 - \int_0^x (x+t)f(x-t)dt$. Poser $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer $f \in C^1$, $F'' + xF' + 2F = 0$, $F(0) = 0, F'(0) = 1$, puis expliciter f.

Exercice 1403 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1403] [IMT] Soient $q \leq 0$ continue et $y'' + qy = 0$. Montrer y^2 convexe, qu'une solution ayant deux zéros distincts est nulle, que toute solution bornée est nulle et, si $y(0) = y_0 > 0, y'(0) = 0$, que $y \geq y_0$ et est convexe.

Exercice 1404 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1404] [IMT] Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ $x^2y'' + y = 0$, d'abord avec $y = x^\alpha$.

Exercice 1405 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1405] [CCINP] Soit $y \in C^3(\mathbb{R})$ vérifiant $(E) : y^{(3)} - 5y'' + 7y' - 3y = 0$.

1. Montrer que y vérifie (E) si et seulement si $Y' = AY$, où $Y = (y, y', y'')^T$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, trouver $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Poser $Z = P^{-1}Y$, établir l'équation vérifiée par Z, la résoudre puis en déduire les solutions de (E).

Exercice 1406 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1406] [CCINP] Pour $A(-1,1), B(0,1), C(0,-1), D(-1,-1)$ et $f(x,y) = -2x^3 + x^2 - y^2 + 5$, montrer que f est bornée sur le rectangle et déterminer ses extrema.

3) Probabilités

Exercice 1407 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1407] [IMT] Un lion chasse un jour sur deux : après avoir mangé, il ne chasse pas le lendemain ; sinon il chasse et mange avec probabilité $1/2$. La veille du jour 1 il n'a pas mangé.

1. Probabilité qu'il ne mange pas durant les n premiers jours.
2. Probabilité de son premier repas le jour n.
3. Si p_i est la probabilité qu'il mange le jour i, établir une récurrence et l'expliciter.

Exercice 1408 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1408] [CCINP] Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ depuis 0, vers la gauche avec probabilité p, vers la droite avec $q = 1-p$. Noter r_n la probabilité d'être en 0 au temps n, et s_n celle du premier retour à 0 au temps n.

1. Calculer r_n.

2. Pour $F(x)=\sum_{n\geq 0} r_n x^n$, $G(x)=\sum_{n\geq 1} s_n x^n$, étudier les domaines et continuité.
3. Montrer $F(t)G(t)=F(t)-1$ sur $[0,1[$.

Exercice 1409 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1409] [CCINP] Deux urnes contiennent respectivement $(2\,blanches, 3\,noires)$ et $(4\,blanches, 3\,noires)$. À chaque tirage, choisir une urne au hasard, tirer avec remise, puis tirer au tour suivant dans U_1 si la boule était blanche, U_2 sinon. Pour $p_n=\mathbf{P}(B_n)$, calculer p_1, établir $p_{n+1}=-6p_n/35+4/7$ et résoudre.

Exercice 1410 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1410] [IMT] Soient $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$ et Y indépendantes avec $\mathbf{P}(Y=n)=p(1-p)^n$.

1. Calculer $\mathbf{E}(Y), \mathbf{V}(Y), \mathbf{P}(X\neq 0, Y\neq 0)$.
2. Pour $M_{a,b}=\begin{pmatrix}-a & a & 0\\ 2a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$, déterminer le spectre.
3. Calculer $\mathbf{P}(M_{X,Y}$ inversible).

Exercice 1411 [Autres écoles MP-MPI 2026 # 1411] [IMT] Soient $X,Y\sim\mathcal{G}(p)$ et $Z\sim\mathcal{P}(\lambda)$ indépendantes. Soit $M_n\in M_n(\mathbb{R})$ la matrice symétrique dont les coefficients $(1,1)$ et (n,n) valent X, les coefficients $(1,n)$ et $(n,1)$ valent Y, les autres coefficients diagonaux valent Z, et les autres coefficients sont nuls. Calculer $\mathbf{P}(M_n\in S_n^{++}(\mathbb{R}))$ puis $\mathbf{E}(M_n)$.

XIV) Autres Écoles PSI 2026

1) Algèbre

Exercice 1412 [Autres écoles PSI 2026 # 1412] [Navale] Pour $n\geq 2$, montrer qu'un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$ ne contenant aucune matrice inversible contient toutes les nilpotentes, puis en déduire que tout hyperplan contient une matrice inversible.

Exercice 1413 [Autres écoles PSI 2026 # 1413] [CCINP] Soient $p,q\in\mathcal{L}(E)$ avec $p+q=\mathrm{id}$ et $\mathrm{rg}(p)+\mathrm{rg}(q)\leq\dim E$. Rappeler la définition d'un projecteur et montrer que p,q sont des projecteurs.

Exercice 1414 [Autres écoles PSI 2026 # 1414] [IMT] Pour $A\in M_n(\mathbb{R})$, poser $\varphi(X)=X+\mathrm{tr}(X)A$. Montrer que φ est un endomorphisme, bijectif si $\mathrm{tr}(A)\neq -1$, puis déterminer rang et image lorsque $\mathrm{tr}(A)=-1$.

Exercice 1415 [Autres écoles PSI 2026 # 1415] [ENSEA] Pour $T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, déterminer rang, valeurs propres sans calculer χ_T, et diagonalisabilité.

Exercice 1416 [Autres écoles PSI 2026 # 1416] [IMT] Sur $E=\mathbb{C}^3$, définir $f_a(e_1)=f_a(e_3)=ae_1+e_2-ae_3$, $f_a(e_2)=0$.

1. Déterminer image et noyau, puis sa matrice.
2. Calculer A^2 et en déduire des propriétés de f_a.
3. A est-elle inversible ou diagonalisable ?

Exercice 1417 [Autres écoles PSI 2026 # 1417] [ENSEA] Pour $a\neq b$, décomposer $\frac{nx+\lambda}{(x-a)(x-b)}$ en éléments simples. Montrer ensuite que $\Phi(P)=(X-a)(X-b)P'-nXP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 1418 [Autres écoles PSI 2026 # 1418] [ENSEA] Poser $\Phi(P)=P(X+1)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$. Vérifier que c'est un endomorphisme, étudier sa diagonalisabilité et ses éléments propres, donner sa matrice, calculer ses puissances et discuter son inversibilité.

Exercice 1419 [Autres écoles PSI 2026 # 1419] [CCINP] Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ avec $u^3+u=0$.

1. Montrer $\mathrm{Im}(u^2+\mathrm{id})\subset\mathrm{Ker}\,u$ et que $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}\,u$ sont en somme directe.
2. Montrer que 0 est sa seule valeur propre réelle.
3. En déduire que les deux noyaux sont non nuls et qu'il existe une base où u a la matrice $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Exercice 1420 [Autres écoles PSI 2026 # 1420] [IMT] Si $A\in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, montrer $(\mathrm{tr}\,A)^2\leq\mathrm{rg}(A)\,\mathrm{tr}(A^2)$.

Exercice 1421 [Autres écoles PSI 2026 # 1421] [CCINP] Si $f^3+f=0$, montrer $\mathrm{Ker}\,f$ et $\mathrm{Im}\,f$ supplémentaires et, en dimension finie, que $\mathrm{rg}\,f$ est pair.

Exercice 1422 [Autres écoles PSI 2026 # 1422] [IMT] Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ distincts.

1. Construire les polynômes de Lagrange L_i avec $L_i(\lambda_j)=\delta_{ij}$.
2. Pour $A\in\mathbb{C}[X]$, $B=\prod_{k=0}^n(X-\lambda_k)$, montrer que $\Phi(P)$ égale le reste de AP modulo B définit un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
3. Montrer que les L_i forment une base propre et donner les valeurs propres.

Exercice 1423 [Autres écoles PSI 2026 # 1423] [IMT] Pour $A\in M_n(\mathbb{R})$, poser $B=\begin{pmatrix}0&A\\A&I_n\end{pmatrix}$.

1. Exprimer $\det B$ en fonction de $\det A$.
2. Déterminer χ_B et relier les spectres.
3. Rappeler deux critères de diagonalisabilité et montrer B diagonalisable ssi A l'est.

Exercice 1424 [Autres écoles PSI 2026 # 1424] [IMT] Pour $u,v\in\mathcal{L}(E)$, montrer qu'une valeur propre non nulle de $u\circ v$ est valeur propre de $v\circ u$. En dimension finie, montrer l'égalité des spectres. Donner un contre-exemple sur $\mathbb{R}[X]$ avec $u(P)=XP$, $v(P)=P'$.

Exercice 1425 [Autres écoles PSI 2026 # 1425] [IMT] Déterminer les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{tr}(M) = 3$ et $M^5 = M^2$.

Exercice 1426 [Autres écoles PSI 2026 # 1426] [CCINP] Soit u en dimension n ayant n valeurs propres distinctes, et $Z(u) = \{v : uv = vu\}$.

1. Montrer que $Z(u)$ est un espace vectoriel et que les sous-espaces propres de u sont stables par $v \in Z(u)$.
2. Déterminer leurs dimensions et montrer qu'une base propre de u existe.
3. Montrer que $v \in Z(u)$ ssi sa matrice dans cette base est diagonale, déterminer $\dim Z(u)$ et en donner une base parmi $\mathrm{id}, u, \dots, u^{n-1}$.

Exercice 1427 [Autres écoles PSI 2026 # 1427] [CCINP] Pour $A = B^2$.

1. Combien I_n a-t-elle de racines carrées diagonales réelles ?
2. Montrer que $-I_{2n+1}$ a des racines carrées complexes mais aucune réelle.
3. La matrice nulle a-t-elle des racines carrées non nulles ?

Exercice 1428 [Autres écoles PSI 2026 # 1428] [CCINP] Déterminer les $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 = 4M$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Exercice 1429 [Autres écoles PSI 2026 # 1429] [IMT] Dans une base orthonormée directe d'un espace euclidien de dimension 3, déterminer la matrice de la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe dirigé par $(e_1 - e_2 + e_3)/\sqrt{3}$.

Exercice 1430 [Autres écoles PSI 2026 # 1430] [CCINP] Soient $(e_1, \dots, e_n)$ unitaires dans un espace préhilbertien réel, avec $\|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i\rangle^2$ pour tout x.

1. Montrer que la famille est orthonormale.
2. Montrer que l'espace est de dimension n.

Exercice 1431 [Autres écoles PSI 2026 # 1431] [CCINP] Si u est orthogonal sur un espace euclidien et $v = \mathrm{id} - u$, montrer $\mathrm{Ker}\, v = (\mathrm{Im}\, v)^\perp$.

Exercice 1432 [Autres écoles PSI 2026 # 1432] [IMT] Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$, poser $A = M^T M$.

1. Montrer $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et qu'il existe $S \in S_n^{++}$ tel que $A = S^2$.
2. En déduire une décomposition $M = OS$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive.

2) Analyse

Exercice 1433 [Autres écoles PSI 2026 # 1433] [IMT] Soit F_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n. Montrer $\inf_{P\in F_n} \int_0^1 |P(t)|dt > 0$.

Exercice 1434 [Autres écoles PSI 2026 # 1434] [IMT] Pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$. Montrer $u_n \to 0$.

Exercice 1435 [Autres écoles PSI 2026 # 1435] [IMT] Pour $n \geq 2$, $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in (0, 1)$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Étudier la monotonie et la limite de u_n.
3. Donner un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 1436 [Autres écoles PSI 2026 # 1436] [IMT] Soit $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = (u_n + u_n^2)/2$. Étudier (u_n) et la série $\sum u_n$.

Exercice 1437 [Autres écoles PSI 2026 # 1437] [IMT] Pour $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\sin(nt)\,dt$.

1. Établir la convergence de (u_n).
2. Montrer $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1) - u_{n+1}$.
3. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 1438 [Autres écoles PSI 2026 # 1438] [ENSEA] Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) - \int_0^1 f(t)dt = 1$ pour tout x.

Exercice 1439 [Autres écoles PSI 2026 # 1439] [CCINP] Sur $E = C^0([0, 1])$, poser $\Phi(f)(0) = f(0)$ et $\Phi(f)(x) = x^{-1}\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme.
2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre et déterminer l'espace propre associé à 1.
3. Déterminer toutes les valeurs propres et leurs espaces propres.

Exercice 1440 [Autres écoles PSI 2026 # 1440] [CCINP] Poser $f_n(x) = x^2/(x^2 + n^2 + \sin x)$.

1. Montrer la convergence simple sur $\mathbb{R}$ et donner la limite.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[-a, a]$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1441 [Autres écoles PSI 2026 # 1441] [CCINP] Poser $f(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{1+t^n}$. Déterminer son domaine, sa continuité et un équivalent lorsque $t \to 1$.

Exercice 1442 [Autres écoles PSI 2026 # 1442] [Navale] Poser $u_n(x) = e^{-xn}$.

1. Étudier la convergence de la série en fonction de x.
2. Montrer que sa somme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer sa limite à $+\infty$ et un équivalent en 0^+.

Exercice 1443 [Autres écoles PSI 2026 # 1443] [CCINP] Si $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$ et $|\varphi(x)| \leq C/(1+x^2)$, poser $f(x) = \varphi(x) + \sum_{n\geq 1}(\varphi(x+n) + \varphi(x-n))$.

1. Montrer que f est définie, continue et 1-périodique.
2. Pour g continue 1-périodique, montrer φg intégrable et $\int_{\mathbb{R}} \varphi g = \int_0^1 fg$.

Exercice 1444 [Autres écoles PSI 2026 # 1444] [IMT]

1. Montrer que la convergence uniforme de $\sum g_n$ implique $g_n \to 0$ uniformément.
2. Pour $f_n(x) = nx^2 e^{-\sqrt{nx}}$ sur $\mathbb{R}_+$, déterminer la limite simple et étudier la convergence uniforme de (f_n), puis de $\sum f_n$.

Exercice 1445 [Autres écoles PSI 2026 # 1445] [CCINP]

1. Décomposer $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ et en déduire une primitive sur $]-1,1[$.
2. Déterminer le rayon de $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{3n+1}/(3n+1)$, sa somme, puis $\sum_{n\geq 0}(-1)^n/(3n+1)$.

Exercice 1446 [Autres écoles PSI 2026 # 1446] [ENSEA] Poser $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx$.

1. Déterminer rayon et somme de $\sum_{n\geq 0} x^{n+1}/(n+1)$.
2. Montrer $0 \leq I_n \leq \pi/4$ et en déduire une minoration du rayon de $\sum I_n x^n$.
3. Montrer $I_n + I_{n+2} = 1/(n+1)$ et en déduire le rayon.
4. Montrer $\sum I_n$ diverge et $\sum (-1)^n I_n$ converge.

Exercice 1447 [Autres écoles PSI 2026 # 1447] [CCINP] Poser $I_{k,n} = \int_0^\infty t^k e^{-nt} dt$ et $a_n = n!/n^{n+1}$.

1. Calculer $\lim(1-1/n)^n$ et $I_{k,n}$.
2. Déterminer le rayon de $\sum a_n x^n$ et étudier $\sum a_n e^n, \sum a_n(-e)^n$.
3. Pour x dans l'intervalle de convergence, montrer $\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \int_0^\infty \frac{xt}{e^t - xt}\,dt$.

Exercice 1448 [Autres écoles PSI 2026 # 1448] [CCINP] Poser $I_n = \int_0^\infty \frac{e^{nx}}{(1+2e^x)^{n+1}} dx$.

1. Justifier la convergence.
2. Montrer pour $n \geq 2$ que $I_n = \dfrac{1}{2n3^n} + \dfrac{n-1}{2n} I_{n-1}$.
3. Étudier la convergence et la limite de (I_n).
4. Exprimer $n2^n I_n$, puis déterminer rayon et somme de $\sum I_n x^n$.

Exercice 1449 [Autres écoles PSI 2026 # 1449] [CCINP] Poser $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$, $S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$.

1. Rappeler le rayon de convergence et le déterminer.
2. Trouver a, b, c tels que $\frac{1}{(1+t^2)(1-xt)} = \frac{ax+b}{1+t^2} + \frac{c}{1-xt}$.
3. Calculer $S(x)$ pour $|x| < R$, puis montrer la continuité en -1 et calculer $S(-1)$.

Exercice 1450 [Autres écoles PSI 2026 # 1450] [ENSEA] Pour $F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$, montrer que F est définie et C^1, calculer F' et en déduire F.

Exercice 1451 [Autres écoles PSI 2026 # 1451] [IMT] Pour $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \sinh(t)/t\,dt$, déterminer son domaine, montrer C^1, calculer f' et sa limite en $+\infty$.

Exercice 1452 [Autres écoles PSI 2026 # 1452] [IMT] Pour $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$, déterminer son domaine, montrer la continuité et, en considérant $xf(x)$, donner des équivalents aux bords.

Exercice 1453 [Autres écoles PSI 2026 # 1453] [CCINP] Poser $f(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) = xf(x-1)$ pour $x \geq 1$.
2. Poser $V_n = \int_n^{n+1} \ln(f(u))du$, $\Phi(x) = \int_x^{x+1} \ln(f(u))du$. Montrer $\Phi'(x) = \ln x$, déterminer sa limite et conclure sur la série $\sum (-1)^n V_n$.

Exercice 1454 [Autres écoles PSI 2026 # 1454] [CCINP] Pour $g(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \sin^2(t)/t\,dt$, $x > 0$:

1. Montrer l'existence et calculer la limite en $+\infty$.
2. Montrer $g \in C^1$, calculer g' puis g.

Exercice 1455 [Autres écoles PSI 2026 # 1455] [IMT] Justifier l'existence puis calculer $\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1} dt$. Indication : $\sum_{n\geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$.

Exercice 1456 [Autres écoles PSI 2026 # 1456] [CCINP] Soit $I = \int_0^\infty \sin(t)/\sinh(t)\,dt$.

1. Établir la convergence et développer $\sin t/\sinh t$ en série exponentielle.
2. En déduire $I = \sum_{n\geq 0} 2/((2n+1)^2+1)$ et montrer $\pi/4 \leq I \leq \pi/4 + 1$.

Exercice 1457 [Autres écoles PSI 2026 # 1457] [CCINP] Justifier l'existence de $I = \int_0^\infty x^2/(e^x - 1)\,dx$ et montrer $I = \sum_{n\geq 1} 2/n^3$.

Exercice 1458 [Autres écoles PSI 2026 # 1458] [CCINP] Pour $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$, montrer que l'intégrale converge puis que $I = \sum_{n\geq 0} 1/(2n+1)^2$.

Exercice 1459 [Autres écoles PSI 2026 # 1459] [IMT]

1. Selon $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre de solutions de $xe^{-x} = \lambda$.
2. Pour $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y \leq 1\}$ et $f(x,y) = xy(1-x-y)$, montrer sans calcul que f atteint un maximum et le déterminer.

Exercice 1460 [Autres écoles PSI 2026 # 1460] [IMT] Soient $n \geq 3$, $h = 1/n$, $D_1 = (d_{ij})$ définie par $d_{11} = 1$, $d_{k,k} = 1$ et $d_{k,k-1} = -1$ pour $2 \leq k \leq n$, les autres coefficients étant nuls, et D_2 la matrice symétrique tridiagonale de diagonale $(2, \ldots, 2, 1)$ et de coefficients sous- et sur-diagonaux -1. Sur $\mathbb{R}^n$, poser $\langle X, Y\rangle_h = h\sum_{k=1}^n x_k y_k$ et $f(X) = \|D_1 X\|_h^2 - \langle X, V\rangle_h$.

1. Calculer $D_1^T D_1$.
2. Montrer $f \in C^1$ et calculer son gradient.
3. Montrer D_2 inversible, déterminer l'unique point critique X_c en fonction de D_2, V, puis exprimer $f(X_c)$ en fonction de $\langle X_c, V\rangle_h$.

3) Probabilités

Exercice 1461 [Autres écoles PSI 2026 # 1461] [CCINP] Tirages indépendants avec remise, probabilité p d'obtenir une verte.

1. Pour X_1 rang de la première verte, donner loi et espérance.
2. Pour X_2 rang de la deuxième verte, donner loi et espérance.

Exercice 1462 [Autres écoles PSI 2026 # 1462] [CCINP] Deux dés donnent X_1, X_2, fonctions génératrices G_1, G_2. Poser $P(X) = \sum_{k=0}^{10} X^k$.

1. Expliciter G_1.
2. Montrer que si $X_1 + X_2$ était uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$, alors $G_1(t)G_2(t) = t^2 P(t)/12$.
3. Trouver les racines de P et conclure.

Exercice 1463 [Autres écoles PSI 2026 # 1463] [CCINP] La probabilité qu'une famille ait $n \geq 1$ enfants vaut $\alpha\lambda^n$, avec $0 < \lambda < 1$, $(1+\alpha)\lambda < 1$. Chaque enfant est garçon avec probabilité $q = 1 - p$.

1. Calculer la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant.
2. Montrer $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^n = x^k/(1-x)^{k+1}$.
3. Calculer la probabilité d'avoir exactement k garçons puis celle d'en avoir au moins deux sachant qu'il y en a au moins un.

Exercice 1464 [Autres écoles PSI 2026 # 1464] [CCINP] Pour $(X, Y) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X = k, Y = n) = \binom{n}{k} p(1-p)^{n/2-n}$ si $k \leq n$, et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^{n-k} = (1-x)^{-k-1}$.
3. Déterminer la loi de X et étudier l'indépendance.

Exercice 1465 [Autres écoles PSI 2026 # 1465] [IMT] Si $X_\lambda \sim \mathcal{P}(\lambda)$:

1. Pour λ fixé, déterminer le n maximisant $\mathbf{P}(X = n)$.
2. Pour n fixé, déterminer le λ maximisant $\mathbf{P}(X = n)$.

Exercice 1466 [Autres écoles PSI 2026 # 1466] [ENSEA] Pour $p \in]0, 1[$, $\mathbf{P}(X = n) = p^2 n(1-p)^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

1. Vérifier qu'il s'agit d'une loi.
2. Calculer $\mathbf{E}(X - 1)$ et $\mathbf{E}((X-2)(X-1))$.
3. En déduire espérance et variance.

Exercice 1467 [Autres écoles PSI 2026 # 1467] [CCINP] Soient X_1, X_2 indépendantes de loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

1. En développant $(1+X)^{2n}$ de deux façons, montrer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. En déduire la probabilité que $\begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 1468 [Autres écoles PSI 2026 # 1468] [CCINP] Pour $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 2b \end{pmatrix}$, montrer $\chi_M = (X-b)^2 + a^2 - b^2$ et caractériser sa diagonalisabilité réelle. Pour $X \sim \mathcal{G}(p)$, calculer $\mathbf{P}(X \geq n)$. Si X, Y géométriques indépendantes de paramètres p_1, p_2, déterminer la probabilité que $\begin{pmatrix} 0 & -X \\ X & 2Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable, puis calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.

XV) Autres Écoles PC 2026

1) Algèbre

Exercice 1469 [Autres écoles PC 2026 # 1469] [CCINP] Si E est réel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$, montrer $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f \circ g)$.

Exercice 1470 [Autres écoles PC 2026 # 1470] [IMT] Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, poser $E_A = \{M : AMA = 0\}$. Montrer que E_A est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

Exercice 1471 [Autres écoles PC 2026 # 1471] [CCINP] Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^3 + 9A = 0$.

1. Montrer A diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $(A) \subset \{0, \pm 3i\}$, puis que $\det A = 0$.
2. Par conjugaison, établir $(A) = \{0, \pm 3i\}$.
3. Construire une base réelle où $A = P \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exercice 1472 [Autres écoles PC 2026 # 1472] [IMT] Pour A à diagonale 3 et coefficients hors diagonale 1, déterminer les éléments propres.

Exercice 1473 [Autres écoles PC 2026 # 1473] [IMT] Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, discuter la diagonalisabilité et déterminer ses éléments propres.

Exercice 1474 [Autres écoles PC 2026 # 1474] [CCINP] Poser $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Écrire $M(a,b,c)$ avec $J = M(0,1,0)$ et J^2 ; montrer que ces matrices forment une algèbre stable par produit.
2. Diagonaliser J sur $\mathbb{C}$ et en déduire les valeurs propres de $M(a,b,c)$.
3. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ssi $b = c$.
4. Déterminer les triplets donnant un projecteur autre que $0, I_3$ et préciser noyau et image.

Exercice 1475 [Autres écoles PC 2026 # 1475] [IMT] Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ complexes et $fg - gf = \beta f$.

1. Montrer $fg^n - g^n f = n\beta g^n$.
2. En déduire que $g^n = 0$ à partir d'un certain rang.
3. Montrer que f, g ont un vecteur propre commun.

Exercice 1476 [Autres écoles PC 2026 # 1476] [CCINP] Soient $\varphi : E \to \mathbb{C}$ non nulle, $a \in \operatorname{Ker}\varphi \setminus \{0\}$ et $t(x) = x - \varphi(x)a$.

1. Rappeler qu'une symétrie est diagonalisable, avec quelles valeurs propres.
2. Montrer qu'une forme linéaire non nulle est surjective ; construire $b \neq 0$ avec $t(b) = b$.
3. Déterminer $\operatorname{Im}(t - \mathrm{id})$, $\operatorname{Ker}(t - \mathrm{id})$, le spectre et la diagonalisabilité de t.

Exercice 1477 [Autres écoles PC 2026 # 1477] [CCINP] Soit $M = (m_{jk}) \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $m_{jj} = 0$, $m_{jk} = i$ si $j < k$ et $m_{jk} = -i$ si $j > k$, et soit B la matrice dont tous les coefficients valent 1. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, poser $A(\lambda) = \lambda I_n - M$ et $P(z) = \det(A(\lambda) + zB)$.

1. Pour $\alpha = e^{i\pi/n}$, calculer α^n et résoudre $z^n = -1$.
2. Montrer $(X - i, X + i)$ est une base de $\mathbb{C}_1[X]$.
3. Trouver a, b dépendant de λ tels que $P(z) = a(z - i) + b(z + i)$.
4. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 1478 [Autres écoles PC 2026 # 1478] [CCINP] Sur $E = C^0(\mathbb{R})$, poser $\varphi(f)(x) = x^{-1}\int_0^x f(t)dt$ si $x \neq 0$ et $\varphi(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que φ est linéaire et envoie E dans E.
2. Étudier la stabilité de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$, l'injectivité et la surjectivité des applications induites.
3. Résoudre $\lambda xy' + (1 - \lambda)y = 0$ avec continuité en 0, selon $\lambda \neq 0$.
4. Déterminer les valeurs propres de φ et des restrictions.

Exercice 1479 [Autres écoles PC 2026 # 1479] [CCINP] Si f est de rang 1 sur un espace complexe de dimension $n \geq 2$, montrer $\chi_f(X) = X^{n-1}(X - \operatorname{tr} f)$ et que f est diagonalisable ssi $\operatorname{tr} f \neq 0$.

Exercice 1480 [Autres écoles PC 2026 # 1480] [CCINP] Soit E réel de dimension impaire et $f + f^3 = 0$. Préciser le spectre, discuter l'automorphisme, et montrer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ supplémentaires.

Exercice 1481 [Autres écoles PC 2026 # 1481] [CCINP] Soient $A \in M_{20,5}(\mathbb{R})$ et $B = A^T A$. Montrer B diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que 0 est valeur propre, et donner une borne sur la dimension du noyau.

Exercice 1482 [Autres écoles PC 2026 # 1482] [CCINP]

1. Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que l'endomorphisme associé est autoadjoint, trouver ses valeurs propres et une base propre orthonormée.
2. Pour u autoadjoint de spectre ordonné $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, montrer $\langle u(x), x\rangle = \sum \lambda_k x_k^2$ dans une base propre orthonormée et $\lambda_n = \max_{\|x\|=1}\langle u(x), x\rangle$.

2) Analyse

Exercice 1483 [Autres écoles PC 2026 # 1483] [CCINP] Une suite (u_n) est adaptée à f si $u_n f(nx) = \sum_{j=0}^{n-1} f(x + j/n)$.

1. Montrer que les fonctions 1 et $x - 1/2$ appartiennent à E avec suites adaptées respectives $u_n = n$ et $u_n = 1$.
2. Si $f \neq 0$ admet une suite adaptée, montrer son unicité. Si $f \in C^p$ et $f^{(p)} \neq 0$, montrer que les dérivées $f^{(k)}$ sont dans E et relier les suites adaptées.
3. Définir les polynômes $B_0 = 1$, $B_p' = pB_{p-1}$, $\int_0^1 B_p = 0$. Calculer B_1, B_2, leurs degrés et montrer $B_p \in E$ avec sa suite adaptée.

Exercice 1484 [Autres écoles PC 2026 # 1484] [IMT] Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}) : f(2x) = 1 + \int_0^x (x - t)f(2t)dt\}$.

1. Montrer que $f \in E$ implique f dérivable et exprimer f'.
2. En déduire une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

3. Déterminer E.

Exercice 1485 [Autres écoles PC 2026 # 1485] [CCINP] Poser $f(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n/(x+n)$.

1. Déterminer son domaine et montrer la continuité sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer $\sum_{n\geq 0}(-1)^n/(x+n) \sim 1/x$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 1486 [Autres écoles PC 2026 # 1486] [CCINP] Pour $f_n(x) = x/[n(1+n^2x^2)]$:

1. Dresser son tableau de variations.
2. Pour $f = \sum_{n\geq 1} f_n$, déterminer le domaine et étudier la continuité.
3. Étudier $\sum f_n'$ et la régularité de f sur $\mathbb{R}^*$.
4. Pour $x > 0$, montrer $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \geq \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{2u(1+u^2)}$ et étudier la dérivabilité en 0^+.

Exercice 1487 [Autres écoles PC 2026 # 1487] [IMT] Développer en série entière $x \mapsto \int_0^1 \arctan(xt)\,dt$ et préciser le rayon.

Exercice 1488 [Autres écoles PC 2026 # 1488] [CCINP] Pour $f(x) = \ln(1+x)/x$, préciser le domaine, prolonger en 0, puis montrer par série entière que $f \in C^\infty$.

Exercice 1489 [Autres écoles PC 2026 # 1489] [IMT] Soit $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$. Trouver u_n en étudiant $f(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ et $xf(x)$.

Exercice 1490 [Autres écoles PC 2026 # 1490] [CCINP] Poser $I_n = \int_0^1 x^n/(1+x)\,dx$.

1. Étudier la convergence de (I_n) et calculer la limite.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}/k$.

Exercice 1491 [Autres écoles PC 2026 # 1491] [IMT] Soit $f \in C^1([0,1],\mathbb{R}_+)$ et $I_n = \int_0^1 \sin(f(t)/n)dt$.

1. Déterminer la limite de I_n.
2. Donner un équivalent puis un développement à deux termes.

Exercice 1492 [Autres écoles PC 2026 # 1492] [CCINP] Poser $I_n = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2+t^n}$. Justifier l'existence et déterminer la limite.

Exercice 1493 [Autres écoles PC 2026 # 1493] [Actuariat] Poser $f(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$.

1. Montrer que f est définie pour $x > 0$.
2. Montrer sa convexité directement par définition, puis par la dérivée seconde.

Exercice 1494 [Autres écoles PC 2026 # 1494] [CCINP] Rappeler $\arctan t \leq t$ pour $t \geq 0$. Pour $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\arctan(t)dt$, déterminer le domaine et la limite en $+\infty$, puis établir $xf(x) = \int_0^\infty e^{-xt}/(1+t^2)dt$ et calculer la limite de $xf(x)$ en 0.

Exercice 1495 [Autres écoles PC 2026 # 1495] [CCINP] Pour $F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}e^{-tx}dt$, montrer $|\sin t| \leq |t|$, justifier l'existence et étudier la continuité sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1496 [Autres écoles PC 2026 # 1496] [CCINP] Montrer la convergence et calculer $\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

Exercice 1497 [Autres écoles PC 2026 # 1497] [CCINP] Pour $f(x,y) = x^2+y^2$, étudier les points critiques et extrema, déterminer les équipotentielles et représenter $z = f(x,y)$.

3) Probabilités

Exercice 1498 [Autres écoles PC 2026 # 1498] [IMT]

1. Déterminer $a > 0$ pour que $(a/(i!j!))_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ soit une loi.
2. Pour $\mathbf{P}(X=i, Y=j) = a/(i!j!)$, déterminer les lois marginales et l'indépendance.

Exercice 1499 [Autres écoles PC 2026 # 1499] [IMT] Soit X intégrable avec $\mathbf{E}(X) \neq 0$. Pour A, poser $\mathbf{P}_X(A) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A X)/\mathbf{E}(X)$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A)$.
2. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $A = 2\mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}_X(A)$.

Exercice 1500 [Autres écoles PC 2026 # 1500] [IMT] Deux urnes contiennent respectivement $(2\,blanches, 3\,noires)$ et $(4\,blanches, 3\,noire$
Choisir une urne, tirer avec remise, puis tirer au tour suivant dans U_1 après une blanche et U_2 après une noire. Pour $p_n = \mathbf{P}(B_n)$, calculer p_1, établir une récurrence et expliciter p_n.

Exercice 1501 [Autres écoles PC 2026 # 1501] [CCINP] Soit U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, X uniforme sur U_n.

1. Montrer $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.
2. Calculer $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(\overline{X}), \mathbf{E}(|X|^2)$.
3. Pour (X_i) i.i.d. de même loi, calculer $\mathbf{E}(|S_p|^2)$ où $S_p = \sum_{k=1}^p X_k$, puis illustrer Markov.
4. Pour $T_p = \prod_{k=1}^p X_k$, montrer que T_p a la loi de X.

Exercice 1502 [Autres écoles PC 2026 # 1502] [CCINP] Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de numéro k ; si $k = 1$, on s'arrête, sinon on retire les boules numérotées de k à n et on recommence. Soient I_n le premier numéro tiré et X_n le nombre de tirages jusqu'à obtenir la boule 1.

1. Donner la loi et l'espérance de I_n.
2. Déterminer les valeurs prises par X_n.

3. Donner la loi et l'espérance de X_2.
4. Calculer $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et montrer $\mathbf{P}(X_n = n) = 1/n!$.
5. Pour $2 \leq j \leq n$, montrer $\mathbf{P}(X_n = j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_k = j-1)$.
6. Montrer $\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X_{n-1}) + 1/n$ et en déduire $\mathbf{E}(X_n)$.

Exercice 1503 [Autres écoles PC 2026 # 1503] Soient X, Y indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$.

XVI) De Christophe XENS

Exercice 1504 [ENS SR 2026] On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme $\|\cdot\|$. On note $B = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$ et

$$\Delta_3(B) = \sup_{x,y,z\in B} \min(\|x-y\|, \|y-z\|, \|x-z\|)$$

1. Montrer que $\Delta_3(B)$ est atteint.
2. Montrer que $\Delta_3(B) \leq 2$.
3. Calculer $\Delta_3(B)$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 1505 [ENS SR 2026] Soit $a > 0$. On considère l'équation différentielle

$$y_a''(t) = \frac{1}{2y_a(t)^{1+a}}, y_a(0) = 1, y_a'(0) = 0$$

On suppose qu'il existe T_a et $y_a \in C^2([0, T_a[, \mathbb{R}^+)$ solution telle que $T_a = +\infty$ ou $y_a(t) + \frac{1}{y_a(t)} \xrightarrow[t\to T_a]{} +\infty$.

1. Trouver une relation entre $(y_a')^2$ et y_a.
2. Montrer que le cas $\frac{1}{y_a(t)} \xrightarrow[t\to T_a]{} +\infty$ est impossible pour T_a fini.
3. Montrer que le cas $y_a(t) \xrightarrow[t\to T_a]{} +\infty$ est impossible pour T_a fini.
4. Montrer que y_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et de limite $+\infty$ en $+\infty$.
5. Donner un équivalent de y_a en $+\infty$.
6. Question bonus : lemme de Gronwall

Exercice 1506 [ENS U 2026]
1. On considère un sous-groupe G de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un morphisme de groupe. Montrer qu'il existe un morphisme $\psi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\forall x \in G, \psi(x) = \varphi(x)$.
2. Soit $(G, +)$ un groupe fini, commutatif. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in G, n.x = 0$ et n minimal pour la division. Montrer qu'il existe un sous-groupe H de G tel que $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus H$.
3. Montrer que tout groupe fini commutatif est isomorphe à un unique groupe de la forme $\prod \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$, où $\forall i,\ d_i \mid d_{i+1}$. TODO

Exercice 1507 [ENS PSLR 2026]
1. Soit $(c_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$\prod_{i=0}^{n-1}(1-c_i) \leq e^{-\sum_{i=0}^{n-1} c_i}$$

2. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ et $m \geq \alpha$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, H_f(x) - \alpha I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } mI_n - H_f(x) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

Montrer que $\exists! x^* \in \mathbb{R}^2, \nabla f(x^*) = 0$.
3. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $s > 0$. On définit $\forall n \geq 0, x_{n+1} = x_n - s\nabla f(x_n)$ Montrer que

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \max((1-\alpha s)^2, (1-ms)^2)\|x_n - x^*\|^2$$

Exercice 1508 [ENS 2026 L] Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$, et soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p_k.

Montrer que, pour toute distribution de probabilité $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$, il existe une suite de fonctions $f_n\colon \{0,1\}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite de variables aléatoires $(f_n(X_1, \ldots, X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X de loi (q_i) si et seulement si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k(1-p_k)$ diverge.

Exercice 1509 [ENS U 2026] Soient m et N dans $\mathbb{N}^*$. On considère $X_1, \ldots, X_m$ variables aléatoires mutuellement indépendantes, respectivement à valeurs dans $E_1, \ldots, E_m$ qui sont des parties de $\mathbb{R}$. On suppose que $X_1 + \cdots + X_m$ suit une loi uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$. Les X_i suivent-ils une loi uniforme ?

Exercice 1510 [X 2026] Soit $(A, +, \times)$ un anneau qui n'est pas un corps et vérifiant

$$\forall x \in A \setminus A^\times, \exists n_x \in \mathbb{N}^*, x = \sum_{k=2}^{2^{n_x}} x^k$$

1. Montrer que $\forall x \in A \setminus A^\times, x + x = 0_A$. On pourra considérer $y_x = \sum_{k=1}^{2^{n_x}-1} x^k$.
2. Montrer que $1_A + 1_A = 0_A$.
3. Montrer que $\forall x \in A \setminus A^\times, x = x^2$. On pourra d'abord montrer que $x = x^{2^{n_x}+1}$.

Exercice 1511 [X 2026] On pose $E = \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tous r, s de $\mathbb{N}$,

$$\varphi_1(X^r, X^s) = (-X^{r+2}, X^s + X^{r+1}) \text{ et } \varphi_2(X^r, X^s) = (X^{s+1} + X^r, -X^{s+2})$$

1. Déterminer les spectres de φ_1 et φ_2.
2. φ_1 et φ_2 sont-ils des automorphismes de E ?
3. Mêmes questions avec $E = \mathbb{C}(X) \oplus \mathbb{C}(X)$.
4. On pose $B_n = \{\varphi_{i_1} \circ \cdots \circ \varphi_{i_n}, i_1, \ldots, i_n \in \{1, 2\}\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le cardinal de B_1, B_2, B_3.

Exercice 1512 [X 2026] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\det(M^{2024} + I_2) = \det(M^{2024} - I_2) \text{ et } \det(M^{2026} + I_2) = \det(M^{2026} - I_2)$$

Montrer que $\forall n \geq 1, \det(M^n + I_2) = \det(M^n - I_2)$.

Exercice 1513 [ENS SR 2026] On note $\mathbb{H}$ l'algèbre des quaternions sur $\mathbb{R}$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base canonique $(1, i, j, k)$ dont la multiplication est régie par : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ Pour tout quaternion $z = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, on définit son conjugué par $\bar{z} = a - bi - cj - dk$. On admet que $\overline{wz} = \bar{z}\bar{w}$.

1. Inversibilité dans $\mathbb{H}$. Montrer que tout élément non nul $z \in \mathbb{H}$ admet un inverse pour la loi de multiplication, et exprimer explicitement z^{-1} en fonction de $\bar{z}$ et $N(z)$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif.
2. Anneaux de Lipschitz et de Hurwitz. On note $\mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$. On pose $\delta = \frac{1+i+j+k}{2}$ et on définit $A = \mathbb{H}(\mathbb{Z}) + \mathbb{Z}\delta$. Montrer que $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ et A sont des sous-anneaux de $\mathbb{H}$.
3. Lien avec la somme de quatre carrés. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que n s'écrit comme la somme de quatre carrés d'entiers si et seulement s'il existe un quaternion de Hurwitz $z \in A$ tel que $n = N(z)$.
4. Structure euclidienne et application au théorème de Lagrange.
   a) Démontrer que l'anneau A est euclidien (à droite) pour la norme N.
   b) Soit p un nombre premier impair. On admet qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Montrer que p n'est pas irréductible dans A, puis qu'il existe $z \in A$ tel que $p = N(z)$.
   c) En déduire le théorème des quatre carrés de Lagrange.
   d) Démontrer la propriété admise.

Exercice 1514 [X 2026] Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que u_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$ ($N \in \mathbb{N}^*$ fixé) et pour $n \geq 1$, u_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, u_n]\!]$. On pose $E_N = \{u_i, i \geq 1\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(1 \in E_N) = 1$.
2. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on pose $p_{N,k} = \mathbb{P}(k \in E_N)$. Calculer $p_{N,k}$.

Exercice 1515 [ENS SR 2026] Soit $T > 0$ et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $u : [a, b] \times [0, T] \to \mathbb{R}$ de classe C^4 solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \text{pour } (x,t) \in]a,b[\times]0,T[\\ u(a,t) = 0 \text{ et } u(b,t) = 0 & \text{pour tout } t \in [0,T] \end{cases}$$

où $\nu > 0$. On définit un maillage régulier : $\Delta x = \frac{b-a}{M+1}$ et $\Delta t = \frac{T}{N}$. On note u_j^n l'approximation de $u(x_j, t_n)$ par le schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

1. En définissant $U^n = (u_1^n, \ldots, u_M^n)^\top \in \mathbb{R}^M$, montrer que $U^{n+1} = AU^n$.
2. On définit l'erreur de troncature ε_j^n. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que $\max |\varepsilon_j^n| \leq C(\Delta t + (\Delta x)^2)$.

Exercice 1516 [X 2026] Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $|a| > \sqrt{3}$ et $b \neq 0$ et $n \geq 3$ un entier. On note $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ et pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $A_k = \text{diag}(I_{k-1}, B, I_{n-k-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soient $k, k' \in [\![1, n-1]\!]$. Donner l'ordre du sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ engendré par A_k et $A_{k'}$.
2. Trouver un vecteur propre commun à tous les A_k.

Exercice 1517 [ENS PLSR 2026] Soit $n \geq 1$ un entier. On considère $G_n = \{\frac{j}{2^n} \mid j \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}\}$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de variables indépendantes uniformes sur $G_1, \ldots, G_n$. Pour $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on définit $\hat{\varphi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi(X_i)$. Soit $\mathcal{L}_1$ l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sup_{\varphi\in\mathcal{L}_1} |\hat{\varphi}_n - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x| \geq \frac{1}{2^{n+2}}$.
2. Soit $M \geq 1$. Montrer que $\sup_{\varphi\in\mathcal{L}_1} |\hat{\varphi}_n - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x| \leq \frac{2}{M} + \sum_{m=1}^M |\frac{1}{n}\text{Card}\{i \mid X_i \in B_m\} - \frac{1}{M}|$.

Exercice 1518 [X 2026] Soient $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2f(x) + f(x^2)$.

1. On suppose g continue en 0 et f bornée au voisinage de 0. Montrer que f est continue en 0.

2. Donner un exemple où g est continue en 0 et f discontinue en 0.

Exercice 1519 [X 2026] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 0 \implies \mathrm{Im}(z) > 0$. On écrit $P = A + iB$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que A et B sont scindés sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1520 [ENS L 2026] Soit $f : x \mapsto x(1 + \ln|1 - |x||)$. TODO

1. Étudier f.
2. Soit (x_n) définie par $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Trouver les x_0 tels que (x_n) soit 3-périodique.

Exercice 1521 [ENS PLSR 2026] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{C}, f(x) = \lambda x$. Que dire de f ?
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice M de f vérifie $\forall i, M_{i,i+1} \neq 0$.

Exercice 1522 [ENS PLSR 2026] Soit V un espace euclidien. Pour $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V, on note $L = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}}(e_1, \dots, e_n)$. TODO

1. Montrer que $L = \{\sum_{i=1}^n m_i e_i, m_i \in \mathbb{Z}\}$.
2. Soit B' une autre base. Montrer qu'elle engendre L ssi la matrice de passage est dans $GL_n(\mathbb{Z})$ avec un déterminant ± 1.
3. Justifier que $\lambda_1(L) = \min\{\|x\|, x \in L \setminus \{0\}\}$ est bien défini.
4. Montrer qu'il existe une base (b_1, b_2) de $\mathbb{R}^2$ qui engendre L avec $\|b_1\| = \lambda_1(L)$ et $\frac{|(b_1|b_2)|}{\|b_1\|^2} \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 1523 [X 2026] Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $J_n(x) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{i(n\theta + x\cos\theta)} \,\mathrm{d}t\theta$. TODO

1. Montrer que $J_n(x) \in \mathbb{R}$ et relier J_n et J_{-n}.
2. DSE et équation différentielle vérifiée par J_0.

Exercice 1524 [X 2026] Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même lois telle que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et T_n le nombre minimal d'expériences pour avoir n échecs. TODO

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!], (S_n \geq k) = (T_{n+1-k} \geq n + 1)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq k) = \binom{n}{n-k} p^k q^{n-k+1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(n+1)\dots(n+\ell)}{(k+1)\dots(k+\ell)} p^\ell$.
3. Soit $j \geq 3$. On suppose $p = 1/2$. Montrer que $\mathbb{P}(S_{nj} \leq n) \sim 2^{-jn} \binom{jn}{n} \frac{j-1}{j-2}$.