

Exercices 2024

Table des matières

I) ENS MP 2024	XENS	1
1) Algèbre		1
2) Analyse		8
3) Géométrie		14
4) Probabilités		14
II) X - MP	XENS	16
1) Algèbre		16
2) Analyse		21
3) Géométrie		26
4) Probabilités		26
III) Autres X/ENS	XENS	27

I) ENS MP 2024 XENS

1) Algèbre

Exercice 1 [ENS MP 2024 # 1] Soit E un ensemble fini non vide. Pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in E^3$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, on note $\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$. Soit $E^{3*} = \{(x, y, z) \in E^3 ; x, y, z \text{ sont distincts}\}$. Soit $S \subset E^{3*}$ tel que

- $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_3$, si $\varepsilon(\sigma) = -1$ alors $\sigma \cdot (S) = \{\sigma \cdot x ; x \in S\} = E^{3*} \setminus S$,
- $\forall a, b, c, d \in E$, si $(a, b, c) \in S$ et $(a, c, d) \in S$, alors $(a, b, d) \in S$ et $(b, c, d) \in S$.

Montrer qu'il existe $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ injective telle que $\forall (a, b, c) \in E^3$, $g(a) < g(b) < g(c) \Rightarrow (a, b, c) \in S$.

Exercice 2 THÉORÈME D'OSTROWSKI [ENS MP 2024 # 2] Soit N une application de \mathbb{Q} vers \mathbb{R}^+ vérifiant :

- $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,
- pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
- il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N(n) > 1$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in]0, 1]$ tel que $N(x) = |x|^\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3 [ENS MP 2024 # 3] On étend de façon naturelle la valuation 2-adique v_2 à \mathbb{Q}^* . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Calculer $v_2(H_n)$.

Exercice 4 [ENS MP 2024 # 4] CONGRUENCES SUR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX Soit $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, avec p premier supérieur ou égal à 5, m et p premiers entre eux.

- Montrer que $\binom{np}{m} \equiv 0 [p]$.
- Montrer que $\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^p \binom{p(n-1)}{mp-k} \binom{p}{k}$.
- Montrer que $\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} [p^2]$.
- On veut montrer que $\binom{2p}{p} \equiv 2 [p^3]$.
 - ▷ Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1 [p]$.
 - ▷ Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k} \right)^2 \equiv 0 [p]$.
 - ▷ Conclure

Exercice 5 DÉTERMINATION DE $\left(\frac{2}{p}\right)$ [ENS MP 2024 # 5] Soit p un nombre premier impair.

- Déterminer $\text{Card}\{x^2, x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*\}$.
- Démontrer l'équivalence : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ si et seulement si a est un carré non nul modulo p .
- On pose $a = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (2k)$. Montrer que
 - ▷ Si $p \equiv 1 [4]$, alors $a \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! [p]$
 - ▷ Si $p \equiv -1 [4]$, alors $a \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! [p]$
- CNS pour que 2 soit un carré modulo p .

Exercice 6 [ENS MP 2024 # 6] On considère l'équation $2^a + 3^b = 5^c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$.

- Résoudre l'équation dans le cas $a = b = c$.
- Traiter le cas b impair.
- Traiter le cas c impair.
- Traiter le cas général.

Exercice 7 [ENS MP 2024 # 7] Soit p un nombre premier impair.

- Quel est le cardinal du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
- Montrer que l'équation $x^2 = 1$ possède exactement deux solutions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- En déduire $\text{Card}\{x^2, x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.
- Soit $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ telle que : $\chi(n) = 1$ si $n \wedge p = 1$ et si n est un carré modulo p ; $\chi(n) = -1$ si $n \wedge p = 1$ et si n n'est pas un carré modulo p ; $\chi(n) = 0$ si $p \mid n$.
 - ▷ Déterminer $\sum_{k=0}^{p-1} \chi(k)$.
 - ▷ — s Montrer que le produit d'un carré et d'un non carré est un non carré.
 - En utilisant le caractère bijectif de $x \mapsto ax$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.
 - ▷ Déduire de 7 une majoration de $\left| \sum_{k=0}^N \chi(k) \right|$ pour $N \in \mathbb{N}$.
 - ▷ On pose $\xi = e^{2i\pi/p}$. Montrer que

$$\chi(n) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{a=0}^{p-1} \chi(a) \xi^{k(a-n)}.$$

- Pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on note $S_k(N) = \sum_{n=0}^N \xi^{-kn}$.
 - ▷ Montrer que $\forall N \geq 0, |S_k(N)| \leq \frac{1}{|\sin(k\pi/p)|}$.
 - ▷ En déduire que, pour $k < p/2, |S_k(N)| \leq p/(2k)$.
 - ▷ Trouver une majoration similaire pour $k > p/2$.
- On pose $G_k = \sum_{a=0}^{p-1} \chi(a) \xi^{ka}$.
 - ▷ Montrer que, pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, |G_k| = \sqrt{p}$.
 - ▷ Montrer que G_k est réel ou imaginaire pur, et que cela ne dépend pas de k . (Non posé)
 - ▷ On suppose que G_1 est réel, montrer que $G_1 \geq 0$. (Non posé)?? Trouver des questions pour finir...

Ressemble à une preuve classique, mais je ne vois pas comment rester dans le monde des caractères. Il faut normalement

Exercice 8 ANNEAUX EUCLIDIENS [ENS MP 2024 # 8] On dit que A est un anneau euclidien si A est un anneau intègre (donc commutatif) et qu'il existe $t: A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant :

- pour tout $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0\})$, il existe $(q, r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ avec $r = 0$ ou $t(r) < t(b)$,
- $\forall (a, b) \in (A \setminus \{0\})^2, t(ab) \geq t(a)$.
- Les anneaux \mathbb{Z} et $\mathbb{R}[X]$ sont-ils euclidiens? Montrer qu'un corps est un anneau euclidien.
- Soient A un anneau euclidien et I un idéal de A . Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $I = xA$. Y a-t-il unicité de x ?
- Dans cette question, on se donne A un anneau euclidien tel que $t(1) = 1$. Soit $x \in A$. Montrer que x est inversible si et seulement si $t(x) = 1$.

Exercice 9 [ENS MP 2024 # 9] Soit A l'ensemble des fonctions de \mathbb{N}^* dans \mathbb{C} .

Pour $f, g \in A$, on pose $(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g(n/d)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif intègre.
- Caractériser les inversibles de l'anneau A .
- Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans l'anneau A avec a et $b^2 - 4ac$ inversibles.

Exercice 10 [ENS MP 2024 # 10] • Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont cycliques.

- Alice et Barbara jouent à un jeu. Elles choisissent à tour de rôle un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sans remise qu'elles ajoutent à un ensemble S . Le jeu s'arrête quand S engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et la joueuse ayant tiré le dernier numéro perd. Selon n , y a-t-il une stratégie gagnante pour la première joueuse?
- Même question si à chaque étape, on ne peut pas retirer un élément de $\langle S \rangle$.
- Reprendre 10 avec le groupe S_n .

Exercice 11 [ENS MP 2024 # 11] • Soient $\sigma \in S_n$ et $c_1 \circ \dots \circ c_r$ sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Calculer l'ordre de σ dans le groupe S_n .

- On note $g(n)$ l'ordre maximal d'une permutation de S_n . Montrer que g est croissante et $n \leq g(n) \leq n!$
- Trouver n minimal tel que $g(n) > n$.
- On note $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que :
 $n \geq \sum_{i=1}^r p_i^{\alpha_i} \implies g(n) \geq \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$.
- On suppose que $g(n) = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$. Montrer que : $n \geq \sum_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$.
- Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) \leq Ce^{\varepsilon n}$.

Exercice 12 [ENS MP 2024 # 12] Lorsque $\sigma \in S_n$, on note $n_k(\sigma)$ le nombre de k -cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints. Ainsi $n_1(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ . On note également $m(\sigma) = \sum_{k=1}^n n_k(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ .

- Soient $i, k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de i dans $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma, \tau \in S_n$. On dit que σ et τ sont conjuguées s'il existe $\varphi \in S_n$ tel que $\sigma = \varphi\tau\varphi^{-1}$.

Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, n_k(\sigma) = n_k(\tau)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\det(i \wedge j)_{1 \leq i, j \leq n^*}$.

Ind. Considérer les matrices $A = (\mathbb{1}_{i|j})$ et $B = (\varphi(j)\mathbb{1}_{j|i})$.

- Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, m(\sigma^i) = m(\tau^i)$.
- Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutation P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 13 [ENS MP 2024 # 13] Soient G un groupe, A une partie finie non vide de G . Montrer que $|A| = |AA|$ si et seulement si $A = xH$ avec $x \in G$ et H sous-groupe de G tel que $x^{-1}Hx = H$.

Exercice 14 [ENS MP 2024 # 14] Soient G un groupe et $A \subset G$ fini non vide tel que $|AA| < \frac{3}{2}|A|$. Montrer que $A^{-1}A$ est un sous-groupe de G .

Exercice 15 GROUPE DIHÉDRALE [ENS MP 2024 # 15] • Soient $n \geq 3$ et \mathcal{Q} un polygone régulier à n côtés. Montrer que l'ensemble des isométries affines du plan préservant \mathcal{Q} est un groupe à $2n$ éléments.

- s On note maintenant $n = q$, nombre premier impair, et D_{2q} le groupe précédent. Montrer que tout groupe de cardinal $2q$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ ou à D_{2q} .

Exercice 16 [ENS MP 2024 # 16] • Trouver tous les groupes d'ordre 8 dont l'ordre maximal des éléments est 4.

- Trouver tous les groupes d'ordre 8 à isomorphisme pres.

Exercice 17 [ENS MP 2024 # 17] • Donner des exemples de groupes d'ordre 12 commutatifs ainsi qu'un exemple non commutatif.

- Montrer que tout groupe d'ordre 12 admet un élément d'ordre 2.
- Trouver à isomorphisme prêt les groupes commutatifs d'ordre 12.
- Montrer que tout groupe d'ordre 12 admet un élément d'ordre 3.
- Trouver tous les groupes d'ordre 12 à isomorphisme pres.

Exercice 18 [ENS MP 2024 # 18] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F}_3)$. On admet que $A^{13} = -I_3$.

- Quels calculs auriez-vous fait pour justifier que $A^{13} = -I_3$?
- Montrer que $A \in \text{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ et que A est d'ordre 26 dans ce groupe.
- On note G le sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A , et on pose $V = G \cup \{0\}$. Montrer que $V = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$.
- On pose $W = \text{Vect}(I_3, A)$. Montrer que, pour tout $M \in G$, il existe $N, P \in W \setminus \{0\}$ telles que $M = P^{-1}N$.
- On note H le sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A^2 . Montrer que H est isomorphe à $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, puis que $|H \cap W| = 4$.

Exercice 19 [ENS MP 2024 # 19] • Montrer que toute rotation du plan complexe est composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites.

- Montrer que toute permutation d'un ensemble fini non vide X est produit de deux éléments d'ordre au plus 2 du groupe des permutations de X .
- Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si X est infini ?

Exercice 20 [ENS MP 2024 # 20] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P . Montrer que $|z| < 2$.

Exercice 21 [ENS MP 2024 # 21] Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

On pose $f(X, Y) = a_0X^m + a_1X^{m-1}Y + a_2X^{m-2}Y^2 + \dots + a_mY^m$ et on suppose que le polynôme $f(X, 1) \in \mathbb{R}[X]$ est scindé.

Montrer que, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, le polynôme $\frac{\partial^{n+p} f}{\partial X^n \partial Y^p}(X, 1)$ est nul ou scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 22 [ENS MP 2024 # 22] Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \in [1/C, C]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^n (X - x_{k,n})$, où l'on a noté $x_{k,n}$ les racines complexes de P_n .

- Montrer que $\{x_{k,n} ; n \in \mathbb{N}^*, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ est borné.
- Montrer que $\sum_{k=1}^n x_{k,n}^2 = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n}{a_n^2}$ pour tout $n \geq 2$.
- Montrer que, pour n suffisamment grand, P_n n'est pas scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 23 [ENS MP 2024 # 23] • Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ unitaire de degré $n \geq 2$ à coefficients dans \mathbb{C} , avec $a_{n-1} \in \mathbb{R}_+$.

Montrer, pour $M = \max(|a_0|, \dots, |a_{n-2}|)$, que toute racine z de P vérifie $\Re(z) \leq 0$ ou $|z| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4M}}{2}$.

- Soit p un nombre premier et $b \geq 3$ un entier. On écrit $p = \overline{c_n c_{n-1} \dots c_0}^b$ en base b . Montrer que $\sum_{k=0}^n c_k X^k$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 24 [ENS MP 2024 # 24] Soit P un polynôme à n indéterminées X_1, X_2, \dots, X_n . On dit que P est symétrique si, pour toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a $P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, X_2, \dots, X_n)$. On dit que P est homogène de degré $k \in \mathbb{N}$ s'il est somme de monômes de la forme $cX_1^{k_1}X_2^{k_2}\dots X_n^{k_n}$ avec $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$.

- Montrer qu'il existe une famille presque nulle $(e_i(X_1, X_2, \dots, X_n))_{i \geq 0}$ de polynômes à n indéterminées symétriques et homogènes tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(1 + tX_1)(1 + tX_2)\dots(1 + tX_n) = \sum_{i \geq 0} e_i(X_1, X_2, \dots, X_n)t^i$.
- Montrer qu'il existe une famille $(h_i(X_1, X_2, \dots, X_n))_{i \geq 0}$ de polynômes à n indéterminées symétriques et homogènes tels que, pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0,

$$\frac{1}{(1 - tx_1)(1 - tx_2)\dots(1 - tx_n)} = \sum_{i=0}^{+\infty} h_i(x_1, x_2, \dots, x_n)t^i.$$

On pose $\mathcal{P}_n = \{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \}$ et, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on pose $\Lambda(\alpha)$ le n -uplet obtenu en ordonnant les entiers de α par ordre décroissant, puis pour tout $\lambda \in \mathcal{P}_n$, $m_\lambda = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, \Lambda(\alpha) = \lambda} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}$.

- Calculer m_λ avec $\lambda = (2, 1, 0, 0)$ et λ le n -uplet contenant r fois 1 et $n - r$ fois 0.
- Pour $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$, on note $M_{\lambda, \mu}$ le nombre de matrices dont les coefficients valent 0 ou 1 et telles que la somme des coefficients de la i -ième ligne vaut toujours λ_i et celle des coefficients de la j -ième colonne vaut toujours μ_j . Montrer que $\prod_{i=1}^n e_{\lambda_i}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} M_{\lambda, \mu} m_\mu$.

Exercice 25 THÉORÈME DE LIOUVILLE [ENS MP 2024 # 25] Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ non tous constants et premiers entre eux deux à deux.

- On veut montrer que si $A + B = C$ alors $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) \leq M(ABC) - 1$ ou $M(P)$ est le nombre de racines distinctes du polynôme P .
Si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, on note $W_{P, Q} = PQ' - P'Q$.
▷ Montrer que $W_{A, B} = W_{C, B} = W_{A, C} \neq 0$.
▷ Montrer que $\deg(A \wedge A') + \deg(B \wedge B') + \deg(C \wedge C') \leq \deg(W_{A, B})$.
▷ Conclure.
- Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Donner un exemple de $(A, B, C) \in \mathbb{C}[X]^3$ avec $\deg(A) = d$ et pour lequel $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) = M(ABC) - 1$.
- Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux dans leur ensemble et tels que $A^n + B^n = C^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n \leq 2$. Montrer qu'il existe des solutions pour $n = 2$.

Exercice 26 [ENS MP 2024 # 26] Soit $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$ l'ensemble des fractions rationnelles dont le dénominateur est une puissance de X .

- Montrer que $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}(X)$. En est-ce un sous-corps ? Quels sont ses éléments inversibles ?
- Déterminer les automorphismes de l'anneau \mathbb{R} .
- Déterminer les automorphismes de la \mathbb{R} -algèbre $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$.
- Déterminer les automorphismes de l'anneau $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$.

Exercice 27 [ENS MP 2024 # 27] Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaires. On dit que P et Q sont entrelacés lorsqu'entre deux racines consécutives de l'un (en tenant compte des multiplicités) il y a exactement une racine de l'autre. On suppose que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$, que Q est scindé à racines simples sur \mathbb{R} , et que P et Q n'ont aucune racine commune. On pose enfin $F = \frac{P}{Q}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Montrer l'équivalence entre :

- P est scindé sur \mathbb{R} et P et Q sont entrelacés,
- $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$

Exercice 28 [ENS MP 2024 # 28] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ et $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Exprimer $\det(A + uv^T)$. Dans le cas où celui-ci est non-nul, exprimer $(A + uv^T)^{-1}$.

Exercice 29 [ENS MP 2024 # 29] Soit \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} .

- Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Que dire de f si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée ?
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{tr} A = 0$. Montrer que A est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

Exercice 30 [ENS MP 2024 # 30] • Calculer $\det(i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

- Soient a_1, \dots, a_n des réels distincts. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$P_i = \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_{i, k} X^{k-1}$$

Calculer $\det(\alpha_{i, k})_{1 \leq i, k \leq n}$.

Exercice 31 [ENS MP 2024 # 31] Soient $n, r, k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq r \leq n$ et $r + k \leq n$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou $A \in \operatorname{GL}_r(\mathbb{C})$. Montrer que M est de rang $r + k$ si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est de rang k .

Exercice 32 [ENS MP 2024 # 32] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, m un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que la réduction modulo m définit un morphisme de groupes de $\operatorname{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\operatorname{SL}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, puis que ce morphisme est surjectif.

Exercice 33 SOUS-ALGÈBRE TRANSITIVE [ENS MP 2024 # 33] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{M} une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\{Mv; M \in \mathcal{M}\} = \mathbb{C}^n$. Montrer que $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 34 [ENS MP 2024 # 34] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 + B^2 = AB$ et $AB - BA \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que n est divisible par 3.

Exercice 35 [ENS MP 2024 # 35] Soient $\chi: (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes non constant. Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices de la forme $(a + b\chi(r) + c\chi(s) + d\chi(r)\chi(s))_{r,s \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}$ avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}$.

- Montrer que \mathcal{A} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- Pour $\xi: (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes, calculer $\sum_{r \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} \xi(r)$.
- Montrer que \mathcal{A} est stable par produit matriciel et que la \mathbb{R} -algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (on exhibera un isomorphisme).

Exercice 36 [ENS MP 2024 # 36] On s'intéresse aux parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont des groupes pour le produit matriciel.

- Donner des exemples de tels groupes, dont certains ne soient pas des sous-groupes de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$, où B est inversible et N nilpotente.
- Caractériser ces groupes.

Exercice 37 [ENS MP 2024 # 37] Pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, soit $\text{Pf}(A) = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3}$.

- Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$.
- On admet que $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ et tout $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $\text{Pf}(BAB^T) = \det(B)\text{Pf}(A)$.
- Soit $R \in \text{SO}_4(\mathbb{R})$. On pose $A = R - R^T$. Montrer l'équivalence entre :
 - ▷ R n'a pas de valeur propre réelle,
 - ▷ $\text{Pf}(A) \neq 0$,
 - ▷ A est inversible.
- Soient $R_1, R_2 \in \text{SO}_4(\mathbb{R})$, $A_1 = R_1^T - R_1$ et $A_2 = R_2^T - R_2$. On suppose $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $\text{Pf}(A_1) = \text{Pf}(A_2) \neq 0$. Montrer qu'il existe $P \in \text{SO}_4(\mathbb{R})$ telle que $R_1 = PR_2P^T$.

Exercice 38 [ENS MP 2024 # 38] Déterminer l'image de $\varphi: M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M^{2n+1}$.

Exercice 39 [ENS MP 2024 # 39] À quelle condition sur la matrice A , la comatrice de A est-elle diagonalisable ?

Exercice 40 [ENS MP 2024 # 40] Pour $i \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $c_i(A)$ le coefficient numéro i du polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de la matrice A .

- Montrer que $c_i(AB) = c_i(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $i \in \mathbb{N}$.
- Le résultat reste-t-il valable pour des matrices à coefficients dans un corps \mathbb{K} quelconque ?

Exercice 41 [ENS MP 2024 # 41] Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\zeta = e^{2i\pi/n}$ et $S = \left(\zeta^{(r-1)(s-1)} \right)_{1 \leq r, s \leq n}$.

- Calculer S^2 .
- Donner une expression simple de $|\det(S)|$.
- On pose $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik^2\pi}{n}}$. Donner une expression simple de $|G_n|^2$ par un calcul direct.
- On suppose que n est impair. Déterminer le spectre de S et la multiplicité de chacune de ses valeurs propres.

Exercice 42 [ENS MP 2024 # 42] • Rappeler l'ordre d'un élément k de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- Montrer que deux permutations de \mathcal{S}_n sont conjuguées si et seulement si elles ont pour tout k , le même nombre de cycles de longueur k dans leurs décompositions en produit de cycles à supports disjoints.
- Soit c un cycle de longueur k . Déterminer le nombre de cycles dans la décomposition de c^i en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 43 [ENS MP 2024 # 43] Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $v, w \in \mathcal{L}(E)$. On note $u = vw - wv$. Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on note $F_u(\lambda) = \bigcup_{m \geq 1} \text{Ker}(u - \lambda \text{id})^m$.

- Montrer que $F_u(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel stable par u et qu'il admet un supplémentaire stable par u .
- On écrit $\pi_u = (X - \lambda)^p Q$ avec $(X - \lambda) \wedge Q = 1$. Montrer que $E = F_u(\lambda) \oplus \text{Ker } Q(u)$.
- On suppose de plus que u commute avec v . On note p_λ le projecteur sur $F_u(\lambda)$ parallèlement à $\text{Ker } Q(u)$.
- Montrer que p_λ commute avec v .
- Montrer que $\text{tr}(up_\lambda) = \lambda \text{rg}(p_\lambda) = 0$.
- En déduire que u est nilpotent.
- On suppose désormais que $vw^2 - w^2v = w$. Montrer qu'il existe un entier d impair tel que $\pi_w = X^d$.

Exercice 44 [ENS MP 2024 # 44] Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{tr}(M^k) = 0$.
- On suppose que $A(AB - BA) = 0$. Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.
- On suppose que $A(AB - BA) = (AB - BA)A$. Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.

Exercice 45 [ENS MP 2024 # 45] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_A = \prod_{i=1}^r \underbrace{(X - \lambda_i)^{\alpha_i}}_{=P_i}$.

- Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur $\text{Ker } P_i(A)$.
- Montrer qu'il existe D diagonalisable et N nilpotente telles que $A = D + N$ et $ND = DN$.
- Si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\text{Comm}_X : M \mapsto MX - XM$. On reprend les notations précédentes. Montrer que $\text{Comm}_A = \text{Comm}_D + \text{Comm}_N$, que Comm_D et Comm_N commutent et sont respectivement diagonalisable et nilpotente.

Exercice 46 [ENS MP 2024 # 46] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} . Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite toute puissante (TP \mathbb{K}) si, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = B^p$. - Trouver les matrices TP \mathbb{K} pour $n = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\chi_A = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ ou les λ_i sont distincts dans \mathbb{K} et les α_i sont des entiers naturels non nuls.
- Montrer qu'il existe N_1, \dots, N_k nilpotentes telles que A soit semblable à une matrice diagonale par blocs avec comme blocs diagonaux $\lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k$.
- Montrer que A est TP \mathbb{K} si et seulement si les $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ le sont. On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unipotente si $M - I_n$ est nilpotente et on note $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$, on pose $\ln(A) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} (A - I_n)^p$.

- Justifier la définition de $\ln(A)$ pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$. Montrer que \exp est une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur l'ensemble $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$.
- Montrer que les matrices unipotentes sont TP \mathbb{K} .
- Déterminer finalement les matrices toutes-puissantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 47 [ENS MP 2024 # 47] Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation $(E) : X - AXB = C$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ les spectres complexes de A et B .

- On suppose que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, $\alpha\beta \neq 1$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution.
- Que se passe-t-il dans le cas general ?

Exercice 48 [ENS MP 2024 # 48] Combien y a-t-il de classes de similitude de $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ constituées de matrices M telles que $M^3 = 0$?

Exercice 49 [ENS MP 2024 # 49] Déterminer les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que M soit semblable à $2M$.

Exercice 50 [ENS MP 2024 # 50] Déterminer les matrices $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $k \geq 2$, on dispose de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A = M^k$.

Exercice 51 [ENS MP 2024 # 51] Montrer que toute matrice de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ admet une racine carrée.

Exercice 52 [ENS MP 2024 # 52] • Montrer que toute $M \in \text{SL}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique UD ou $U \in \text{SL}_n(\mathbb{C})$ est de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente, $D \in \text{SL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable et $UD = DU$.

- Soit ρ un morphisme de groupes de $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ dans $\text{SL}_m(\mathbb{C})$ tel que les coefficients de $\rho(M)$ soient des fonctions polynomiales de ceux de M . Montrer que ρ respecte la décomposition de la question précédente.

Exercice 53 [ENS MP 2024 # 53] • Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. à quelle condition existe-t-il $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales ?

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A s'écrit de manière unique $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\pi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ son polynôme minimal et $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(A)$ est diagonalisable si et seulement si $P^{(j)}(\lambda_i) = 0$ pour tous $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, \beta_i - 1 \rrbracket$.

Exercice 54 [ENS MP 2024 # 54] • Soient u, v deux endomorphismes diagonalisables d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie, tels que $uv = vu$. Montrer que u et v sont codiagonalisables.

- Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que u admet au plus une décomposition de la forme $u = d + n$, ou $(d, n) \in \mathbb{K}[u]^2$, l'endomorphisme d est diagonalisable, l'endomorphisme n est nilpotent et $dn = nd$.

Exercice 55 [ENS MP 2024 # 55] Soient $n \in \mathbb{N}$ et w une fonction continue positive non identiquement nulle de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

- Soit $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que, pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $\int_0^1 f_k f_\ell w = \delta_{k, \ell}$. Montrer que $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.
- Montrer qu'il existe une unique suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $\int_0^1 p_k p_\ell w = \delta_{k, \ell}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k soit polynomiale de degré k à coefficient dominant positif.
- Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, p_n à n racines simples dans $]0, 1[$ que l'on note $x_{1, n} < \dots < x_{n, n}$.
- Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(\lambda_{1, n}, \dots, \lambda_{n, n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_0^1 pw = \sum_{k=1}^n \lambda_{k, n} p(x_{k, n})$.

Exercice 56 [ENS MP 2024 # 56] Soient e_1, \dots, e_n des vecteurs d'un espace euclidien E tels que $\langle e_i, e_j \rangle \leq 0$ pour tous i, j distincts dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que (e_1, \dots, e_n) est libre si et seulement s'il existe une forme linéaire f sur E telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) > 0$.

Exercice 57 [ENS MP 2024 # 57] Soient $n, m \geq 1$ des entiers. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n . Montrer qu'il existe un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ et une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ (non linéaire) tels que, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, x' \rangle^m = \langle f(x), f(x') \rangle_E$.

Exercice 58 PRODUIT DE SCHUR Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A \star B$ la matrice $(a_{ij}b_{ij})_{i, j \leq n}$. Soient A, B symétriques positives.

- sAV2 Montrer qu'il existe au plus n vecteurs $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ tels que $A \in \text{Vect } v_i v_i^T$.

- sAV2 On note $A \otimes B \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ la matrice définie par blocs $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}$. Montrer que $A \otimes B$ est symétrie positive.
- Montrer que $A \star B$ est symétrique positive.

Exercice 59 [ENS MP 2024 # 58] Trouver un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2}\right) = \langle f(x), f(y) \rangle$.

Exercice 60 [ENS MP 2024 # 59] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$. On munit \mathbb{R}^m de sa structure euclidienne canonique. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on considère r vecteurs de \mathbb{R}^m notés x_1, \dots, x_r .

- Montrer qu'il existe une matrice $U_0 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^r \|x_i - UU^T x_i\|_2^2$ parmi toutes les matrices $U \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telles que $U^T U = I_n$.
- Montrer que $\min_{U \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^r \|x_i - UU^T x_i\|_2^2 = \min_{U, V \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^r \|x_i - UV^T x_i\|_2^2$.

Exercice 61 [ENS MP 2024 # 60] Soient $(\lambda_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante vérifiant $\lambda_0 = 0$ et k dans $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$.

- Calculer $I_{n,k} = \inf_{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}} \int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=0}^n a_i t^{\lambda_i}\right)^2 dt$.

On admettra que le déterminant de la matrice de coefficient general $m_{i,j} = \frac{1}{1+x_i+y_j}$ vaut $\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (1+x_i+y_j)}$.

- En déduire une condition suffisante sur (λ_n) pour que $F = \text{Vect}(t \mapsto t^{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ soit dense dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ pour la norme $f \mapsto \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$.

Exercice 62 [ENS MP 2024 # 61] Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ deux produits scalaires tels que $\forall (x, y) \in V^2$, $\langle x, y \rangle_1 = 0 \iff \langle x, y \rangle_2 = 0$

- Soient $x, y \in V$. Montrer que si $\|x\|_1 = \|y\|_1$ alors $\|x\|_2 = \|y\|_2$.
- En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|x\|_1 = C\|x\|_2$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(V)$ qui préserve l'orthogonalité : si $\langle x, y \rangle = 0$ alors $\langle u(x), u(y) \rangle = 0$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $u \circ u^* = C \text{ id}$.

Exercice 63 [ENS MP 2024 # 62] Soient E un espace euclidien de dimension n et (e_1, \dots, e_n) une base de E . On pose $\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}^n \right\}$.

- Soit $r \in \mathcal{O}(E)$ tel que $r(\Lambda) \subset \Lambda$. Montrer que $r(\Lambda) = \Lambda$.
- Montrer que $G_\Lambda = \{r \in \mathcal{O}(E), r(\Lambda) = \Lambda\}$ est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(E)$.
- Ici $n = 3$. Montrer que tous les éléments de G_Λ ont un ordre qui divise 12.

Exercice 64 [ENS MP 2024 # 63] Soient E un espace euclidien de dimension n , G un groupe fini et ρ un morphisme injectif de G dans $\text{GL}(E)$ tel que, pour tout $g \in G$, $\rho(g) \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que les éléments de G sont d'ordre 1 ou 2, puis que $|G|$ divise 2^n .

Exercice 65 [ENS MP 2024 # 64] • Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ soit positive, puis définie positive.

- Soit $(a, b, c) \in [-1, 1]^3$. On suppose que $1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$.

Exercice 66 [ENS MP 2024 # 65] • s Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Montrer qu'il existe un vecteur propre de A dont tous les coefficients sont > 0 .

- Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients > 0 . Montrer que A possède un vecteur propre à coefficients > 0 .
- Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$, $M_i = \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $1 \leq i \leq n$. Montrer que $M_1 \times \dots \times M_n$ est à spectre inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 67 RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES NORMAUX [ENS MP 2024 # 66] • Rappeler la définition de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.

- Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u et u^* commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant soit de taille 1, soit de taille 2 et de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 68 [ENS MP 2024 # 67] Montrer que $\text{SO}_3(\mathbb{Q})$ est dense dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 69 [ENS MP 2024 # 68] On admet l'existence d'une \mathbb{R} -algèbre \mathbb{H} d'unité 1 admettant une base de la forme $(1, i, j, k)$ avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$. Montrer que le groupe des automorphismes de la \mathbb{R} -algèbre \mathbb{H} est isomorphe à $\text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 70 [ENS MP 2024 # 69] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf_{\|G\|=1} \|AG - GB\| = \min_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)} |\lambda_1 - \lambda_2|$.

Exercice 71 [ENS MP 2024 # 70] Soient X un ensemble et $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que, pour tous $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n \in X$, $(K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $x \in X$, on note $K_x: y \mapsto K(x, y)$. Soit E le sous-espace de \mathbb{R}^X engendré par les fonctions $(K_x)_{x \in X}$.

Soit $a, b \in E$. Par définition de E , il existe $(\lambda_x)_{x \in X}$ et $(\mu_x)_{x \in X}$ dans \mathbb{R}^X n'admettant qu'un nombre fini de coefficients non nuls tels que $a = \sum_{x \in X} \lambda_x K_x$ et $b = \sum_{x \in X} \mu_x K_x$ et on pose

$$\langle a, b \rangle = \sum_{x, y \in X} \lambda_x \mu_y K(x, y).$$

- Montrer que cela définit bien un produit scalaire sur E .
- Montrer qu'il existe $f: X \rightarrow E$ telle que $\forall x, y \in X, K(x, y) = \langle f(x), f(y) \rangle$.

Exercice 72 [ENS MP 2024 # 71] Soient $p \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

TODO

- Montrer que $\text{Tr}(I_p - A^{-1}B) \leq \ln\left(\frac{\det A}{\det B}\right)$.
- Soient $n \geq 1, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda > 0$. Pour $1 \leq m \leq n$, on pose $A_m = \sum_{k=1}^m u_k u_k^T$ et $B_m = \lambda I_p + A_m$. Montrer que, pour $1 \leq m \leq n$, B_m est symétrique définie positive.
- Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A_n . Montrer que $\sum_{m=1}^n \langle u_m, B_m^{-1} u_m \rangle \leq \sum_{i=1}^p \ln\left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)$.

Exercice 73 [ENS MP 2024 # 72] Si G est un groupe, on note $Z(G)$ son centre. On pose $U_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A^*A = I_n\}$ ou $A^* = \overline{A}^T$, l'ensemble des matrices unitaires.

- Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G et que $U_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne, c'est-à-dire telle que $A^* = A$. Démontrer qu'il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ telle que P^*AP soit diagonale.
- Démontrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit comme combinaison linéaire d'au plus quatre matrices unitaires.
- Déterminer $Z(U_n(\mathbb{C}))$.

2) Analyse

Exercice 74 [ENS MP 2024 # 73] Soit F l'application qui à une norme N sur \mathbb{R}^n associe la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour N .

- L'application F est-elle injective?
- Quelle est l'image de F ?

Exercice 75 [ENS MP 2024 # 74] Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application telle que

- pour tout $x \in E, \varphi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$.

On note $C = \{x \in E, \varphi(x) \leq 1\}$.

- Montrer que φ est une norme si et seulement si C est convexe.
- Soit K une partie de E convexe, compacte, d'intérieur non vide et symétrique par rapport à l'origine. Montrer que K est un voisinage de l'origine.
- Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Posons $I(x) = \{\lambda > 0; \exists k \in K, x = \lambda k\}$. Montrer que $I(x)$ est un convexe fermé, non vide.

Exercice 76 [ENS MP 2024 # 75] Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}^n, +)$ dans lequel 0 est un point isolé. Montrer qu'il existe une famille libre (u_1, \dots, u_p) dans \mathbb{R}^n telle que $G = \{\sum_{k=1}^p a_k u_k, (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p\}$.

Exercice 77 [ENS MP 2024 # 76] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E l'ensemble des pavés de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire des parties de la forme $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ avec $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$. Pour toute partie finie $G \subset \mathbb{R}^n$, on note $f(G) = \{F \cap G, F \in E\}$. Déterminer $\sup\{k \in \mathbb{N}; \exists G \subset \mathbb{R}^n, |G| = k, f(G) = \mathcal{P}(G)\}$.

Exercice 78 [ENS MP 2024 # 77] • Soient E un espace vectoriel normé et K un compact convexe non vide de E . Soit $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions affines, continues, qui commutent deux à deux et telles que $f_i(K) \subset K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que les fonctions f_i ont un point fixe commun.

- Le résultat précédent reste-t-il valable pour une famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions indexées par un ensemble non dénombrable?

Exercice 79 [ENS MP 2024 # 78] Soient H le groupe (pour la composition) des homéomorphismes de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , H^+ le sous-groupe des homéomorphismes croissants.

- Caractériser les groupes finis isomorphes à un sous-groupe de H .
- Montrer qu'on peut munir tout sous-groupe G de H^+ d'une relation d'ordre totale telle que $\forall f, g, h \in G, f \leq g \implies h \circ f \leq h \circ g$.
- Réciproquement, montrer que tout groupe dénombrable pouvant être muni d'un tel ordre est isomorphe à un sous groupe de H^+ .

Exercice 80 [ENS MP 2024 # 79] Soient m et n dans \mathbb{N}^* , F une partie finie de $\mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n \setminus F, f$ une application 1-lipschitzienne (pour les normes euclidiennes canoniques) de F dans \mathbb{R}^m .

1. sV2 On suppose que $\forall x \in F, \|f(x)\| > \|x\|$, montrer que 0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $f(F)$.
2. Montrer que l'on peut prolonger f en une application 1-lipschitzienne de $F \cup \{x\}$ dans \mathbb{R}^m .

Exercice 81 [ENS MP 2024 # 80] Soient $\gamma, \tau \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$D_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^d; \forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \|k\| \leq N \implies |\langle x, k \rangle| \geq \frac{\gamma}{\|k\|^\tau} \right\} \quad \text{et} \quad D = \bigcap_{N \geq 1} D_N.$$

Montrer que D est fermé et d'intérieur vide. Qu'en est-il de D_N ?

Exercice 82 [ENS MP 2024 # 81] Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f: E \rightarrow F$ telle que : $\forall r \in]0,1], \forall x \in E, B(f(x), \frac{r}{2}) \subset f(B(x, r)) \subset B(f(x), 2r)$.

- Montrer que f est continue et surjective.
- Que peut-on dire de l'image par f d'un ouvert ? D'un fermé ?
- Soit γ un chemin continu de $[0, 1]$ dans F . Montrer qu'il existe un chemin c continu de $[0, 1]$ dans E tel que $f \circ c = \gamma$.

Exercice 83 [ENS MP 2024 # 82] • Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non vide. Soit $f: X \rightarrow X$. On suppose qu'il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in X, \|f(x) - f(y)\| \leq \theta \|x - y\|$. Montrer que f possède un unique point fixe c et que, pour tout $x \in X, f^m(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} c$.

- Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un compact non vide. Soit $f: X \rightarrow X$. On suppose que $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.
 - ▷ Soient Y, Z deux compacts non vides tels que $f(Y) \subset Y$ et $f(Z) \subset Z$. Montrer que $Y \cap Z$ est non vide.
 - ▷ En déduire que f possède un unique point fixe.

Exercice 84 [ENS MP 2024 # 83] On se place dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m munis d'une norme.

- Montrer qu'il existe $C > 0$ et $R_0 \geq 0$ tels que, pour tout $r \geq R_0$, $\text{card}\{x \in \mathbb{Z}^n; \|x\| \leq r\} \leq Cr^n$.
- On appelle plongement grossier $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ une fonction qui vérifie :
 - ▷ $\forall a \geq 0, \exists b \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}^n, \|x - y\| \leq a \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq b$,
 - ▷ $\forall b \geq 0, \exists a \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}^n, \|f(x) - f(y)\| \leq b \Rightarrow \|x - y\| \leq a$.

Soit $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ un prolongement grossier.

- ▷ Montrer qu'il existe $\rho: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $\mu > 0$ tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = +\infty$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^n, \rho(\|x - y\|) \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \mu \|x - y\|.$$

- ▷ Montrer que $m \geq n$.

- Adapter pour $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Exercice 85 [ENS MP 2024 # 84] On munit \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne canonique. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme. Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on pose :

$$L_f(x, r) = \sup \{ \|f(x) - f(y)\| ; y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| \leq r \},$$

$$\ell_f(x, r) = \inf \{ \|f(x) - f(y)\| ; y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| \geq r \}.$$

- Montrer que : $L_f(x, r) = \sup \{ \|f(x) - f(y)\| ; y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| = r \}$,
 $\ell_f(x, r) = \inf \{ \|f(x) - f(y)\| ; y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| = r \}$.
- Pour x fixé, montrer que $r \mapsto L_f(x, r)$ et $r \mapsto \ell_f(x, r)$ sont croissantes.
- E On dit que f est quasi-conforme s'il existe $K_f > 0$ tel que : $\forall (x, r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*}, L_f(x, r) \leq K_f \ell_f(x, r)$.
- On suppose f quasi-conforme. Montrer qu'alors $L_f(x, 2r) \leq (1 + K_f)L_f(x, r)$.
- Montrer que f est quasi-conforme si et seulement si f^{-1} est quasi-conforme.

Exercice 86 [ENS MP 2024 # 85] Soient $n \geq 2$ et e_1 le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n . Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $a_{v,M} \in \mathbb{R}$, tel que la suite $(M^k v)_{k \geq 1}$ tende vers $a_{v,M} e_1$, avec de plus $v \mapsto a_{v,M}$ non identiquement nulle.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $f_v: M \in \mathcal{A} \mapsto a_{v,M}$ est continue.

Exercice 87 [ENS MP 2024 # 86] Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour $X \subset E$ et $x \in E$, on note $d(x, X) = \inf_{y \in X} \|y - x\|$ et $\Pi_X(x) = \{y \in X ; \forall z \in X, \|y - x\| \leq \|z - x\|\}$.

- Pour quels ensembles $Y \subset E$ existe-t-il $X \subset E$ et $x \in E$ tels que $Y = \Pi_X(x)$?
- Soient $X \subset E$ et $x \in E \setminus X$ tels que $d(x, X) = 0$. Montrer que $\Pi_X(x) = \emptyset$.
- Existe-t-il $X \subset E$ et $x \in E \setminus X$ tels que $d(x, X) > 0$ et $\Pi_X(x) = \emptyset$?
- On suppose qu'il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in E$, que E est de dimension finie et que $X \subset E$ est un ensemble convexe fermé et borné. Montrer que $\Pi_X(X)$ est un singleton.

Exercice 88 [ENS MP 2024 # 87] Soit $n \geq 1$ un entier, $L \in]0, 1[$, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application L -lipschitzienne pour $\|\cdot\|_\infty$, et $x_* \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x_*) = x_*$.

- Soit $(x_k)_{k \geq 1}$ définie par $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \geq 1, x_{k+1} = F(x_k)$. Montrer que $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x_*$.
- Pour $I \subset \{1, \dots, n\}$, on note $F^{|I|}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $1 \leq i \leq n$, par $F^{|I|}(x)_i = \begin{cases} F(x)_i & \text{si } i \in I \\ x_i & \text{si } i \notin I \end{cases}$.

Montrer que $F^{|I|}$ est 1-lipschitzienne pour $\|\cdot\|_\infty$.

- Soit $(I_k)_{k \geq 1}$ une suite de sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ telle que chaque indice $i \in \{1, \dots, n\}$ appartienne à une infinité de ces ensembles. Soient $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et, pour $k \geq 1, x_{k+1} = F^{|I_k|}(x_k)$. Montrer que cette suite converge vers x_* .

Exercice 89 [ENS MP 2024 # 88] On munit l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

- Soit (a_n) une suite réelle sommable. Montrer que l'application $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ définit une forme linéaire continue sur l'espace ℓ^∞ .
- On suppose l'existence d'une partie $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que : (i) pour tous $A, B \in F$, $A \cap B \in F$, (ii) pour $A \in F$, F contient toute partie B de \mathbb{N} qui contient A , (iii) F ne contient que des ensembles infinis, (iv) si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors $A \in F$ ou $\mathbb{N} \setminus A \in F$.
 - ▷ Soit $x \in \ell^\infty$.
Montrer qu'il existe un unique réel x^∞ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in F, \forall n \in A, |x_n - x^\infty| \leq \varepsilon$.
 - ▷ En déduire l'existence d'une forme linéaire continue sur ℓ^∞ qui n'est pas de la forme donnée en question -.
- On note c_0 le sous-espace de ℓ^∞ des suites réelles de limite nulle. Montrer que toute forme linéaire continue sur c_0 est de la forme donnée en question -.

Exercice 90 [ENS MP 2024 # 89] Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, E une partie de \mathbb{R}^2 couplant toute boule de rayon r (pour la norme euclidienne canonique), $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ s'annulant sur E . Montrer que $P = 0$.

Exercice 91 [ENS MP 2024 # 90] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$, C un convexe ouvert de E ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une droite vectorielle ne couplant pas C .

Exercice 92 [ENS MP 2024 # 91] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique.

Soit $\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^+)^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique point $\pi(x) \in \Delta$ tel que $\forall z \in \Delta, \langle z - \pi(x), x - \pi(x) \rangle \leq 0$.

- Soient $x, u \in \mathbb{R}^n$ et $x' = \pi(x + u)$.
Montrer que, pour tout $z \in \Delta, 2 \langle u, z - x \rangle \leq \|z - x\|_2^2 - \|z - x'\|_2^2 + \|u\|_2^2$.
- E Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $x_1, y_1 \in \Delta$ et $(\gamma_k)_{k \geq 1}$ une suite strictement positive. Pour $k \geq 2$, on définit par récurrence $x_{k+1} = \pi(x_k + \gamma_k A y_k)$ et $y_{k+1} = \pi(y_k - \gamma_k A^T x_k)$.
- Montrer qu'on peut choisir la suite $(\gamma_k)_{k \geq 1}$ de sorte que

$$\max_{x \in \Delta} \sum_{k=1}^N \langle x, A y_k \rangle - \min_{y \in \Delta} \sum_{k=1}^N \langle x_k, A y \rangle \leq o(N).$$

- En déduire que $\max_{x \in \Delta} \min_{y \in \Delta} \langle x, A y \rangle = \min_{y \in \Delta} \max_{x \in \Delta} \langle x, A y \rangle$.

Exercice 93 [ENS MP 2024 # 92] Soient E euclidien et $T: E \rightarrow E$. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \| \|T(x) - T(y)\| - \|x - y\| \| \leq C.$$

L'objectif est de montrer qu'il existe $h \in \mathbb{R}^+$ et un unique $u \in \mathcal{O}(E)$ tels que

$$\forall x \in E, \|T(x) - u(x)\| \leq h.$$

- Conclure dans le cas ou $C = 0$.
- Prouver l'unicité de u .
- Pour tout x de E , on pose $u_0(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T(2^n x)}{2^n}$. Montrer que u_0 est bien définie, linéaire et conserve la norme.
- Conclure.

Exercice 94 [ENS MP 2024 # 93] Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $F: E \rightarrow E$ et $G = \frac{1}{2}(\text{id} - F)$.

- Montrer que, F est 1-lipschitzienne pour $\| \cdot \|$ si et seulement si $\forall x, x' \in E, \langle G(x') - G(x), x' - x \rangle \geq \|G(x') - G(x)\|^2$.
- On suppose que F est 1-lipschitzienne pour $\| \cdot \|$ et qu'il existe $x_* \in E$ tel que $F(x_*) = x_*$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $x_1 \in E$ et, pour $n \geq 1, x_{n+1} = \frac{x_n + F(x_n)}{2}$. Montrer que, pour tout $n \geq 1, \|F(x_n) - x_n\| \leq \frac{2\|x_1 - x_*\|}{\sqrt{n}}$.
- En déduire que, si E est un espace euclidien, $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers un point fixe de F .

Exercice 95 [ENS MP 2024 # 94] Soient $n \geq 2$ et $I_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \exists \lambda \in \text{Sp}(A), \text{Im}(A) \subset E_\lambda(A)\}$, ou $E_\lambda(A)$ est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ .

- Montrer que $I_n(\mathbb{R})$ est stable par similitude.
- Soient $A, B \in I_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si $\text{rg } A = \text{rg } B$ et $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.
- On note $I_n^*(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \exists \lambda \in \text{Sp}(A), \text{Im}(A) = E_\lambda(A)\}$. Étudier la connexité par arcs de $I_n(\mathbb{R})$ et de $I_n^*(\mathbb{R})$.
- Déterminer les classes de similitude incluses dans $I_2(\mathbb{R})$.

Exercice 96 [ENS MP 2024 # 95] Soit G un sous-groupe compact de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe une norme stricte sur \mathbb{R}^n pour laquelle les éléments de G sont des isométries.
- On suppose que les éléments de G stabilisent un convexe compact non vide de \mathbb{R}^n note K . Montrer que les éléments de G ont un point fixe commun dans K .
- Montrer qu'il existe un produit scalaire sur \mathbb{R}^n pour lequel les éléments de G sont des isométries.

Exercice 97 [ENS MP 2024 # 96] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit G un sous-groupe compact de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour tous $g \in G$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $g \cdot A = g A g^T$.

- Donner un exemple de produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la norme N_0 euclidienne associée.
- Soit $N: A \mapsto \sup_{g \in G} N_0(g \cdot A)$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Soit $K = \{gg^T, g \in G\}$. Montrer qu'il existe un compact convexe C vérifiant : $K \subseteq C, \{g \cdot A, (g, A) \in G \times C\} \subseteq C$ et $C \subseteq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Montrer qu'il existe un produit scalaire G invariant pour \cdot .

Exercice 98 [ENS MP 2024 # 97] Déterminer les valeurs d'adhérence des suites $(\cos n)$ et $(\cos^n n)$.

Exercice 99 [ENS MP 2024 # 98] [PSLR] Soit S une partie de \mathbb{N}^* infinie et stable par produit. On range les éléments de S en une suite strictement croissante $(s_n)_{n \geq 1}$. Montrer que la suite $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n \geq 1}$ admet une limite dans $[1, +\infty[$.

Exercice 100 [ENS MP 2024 # 99] Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n e^{-i \operatorname{Im}(z_n)}$. Pour quelles valeurs de z_0 cette suite est-elle convergente ?

Exercice 101 [ENS MP 2024 # 100] Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 102 [ENS MP 2024 # 101] On fixe un entiers $n \geq 2$ et $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ une famille d'éléments de $]0, 1[$. Soit pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(x_k^i)_{k \geq 0}$ une suite réelle. On suppose que, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1}^i = (1 - t_i)x_k^i + t_i x_k^{i+1}$. Montrer que les n suites $(x_k^i)_{k \geq 0}$ pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ convergent vers une même limite.

Exercice 103 [ENS MP 2024 # 102] Soient $m \in \mathbb{N}^*, z_1, \dots, z_m \in \mathbb{U}$ distincts et $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum_{k=1}^m a_k z_k^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $a_1 = \dots = a_m = 0$.

Exercice 104 LEMME DE VAN DER CORPUT [ENS MP 2024 # 103] Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $\forall h \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \overline{a_{k+h}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 105 [ENS MP 2024 # 104] Pour $x_0 > 0$, on définit par récurrence $x_{n+1} = x_n + \int_{x_n}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Étudier la suite $(x_n)_{n \geq 0}$. Donner un équivalent de x_n puis un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 106 [ENS MP 2024 # 105] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe une unique suite $(n_i)_{i \geq 1} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $n_{i+1} \geq n_i^2$ et que $\alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)$.

Exercice 107 [ENS MP 2024 # 106] Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive.

On note, pour $\alpha \geq 0$, $\mathcal{R}_\alpha = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}, \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n a_n \leq \alpha\}$.

Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle positive sommable. Pour tout $\alpha > 0$, construire une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\alpha$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n b_n = \max_{(u_n) \in \mathcal{R}_\alpha} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n b_n \right\}$.

Exercice 108 [ENS MP 2024 # 107] Soient $p \in]1, +\infty[$ et $q \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ des suites d'éléments de \mathbb{R}^+ telles que $\sum a_n^p$ et $\sum b_n^q$ convergent. Montrer que $\sum a_n b_n$ converge.
- Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sum a_n$ converge et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$. Déterminer la nature de $\sum \frac{a_n}{R_n^\alpha}$.
- Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^+ . On suppose que, pour toute suite $(b_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathbb{R}^+ telle que $\sum b_n^q$ converge, $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $\sum a_n^p$ converge.

Exercice 109 [ENS MP 2024 # 108] On admet l'irrationalité de π . Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos(n)}$.

- Montrer que $\sum u_n$ converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\sum u_n$ converge.

Exercice 110 [ENS MP 2024 # 109] Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}_+^* .

- sAV2 Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $c_1, \dots, c_n > 0$, on a $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n \sqrt[n]{c_1 \dots c_n}} \sum_{i=1}^n a_i c_i$.
- sÀ Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$.
- Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} < e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
- Montrer que la constante e est optimale.

Exercice 111 [ENS MP 2024 # 110] Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_{0,n} = a_0 + \dots + a_n$ et, pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $H_{\alpha,n} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n H_{\alpha-1,k}$. Si $(H_{\alpha,n})_{n \geq 0}$ converge, on dit que (a_n) est H_α -sommable.

- Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Si $(a_n)_{n \geq 0}$ est H_α -sommable, montrer qu'elle est $H_{\alpha+1}$ sommable.
- On suppose $(H_{0,n})_{n \geq 0}$ périodique. Montrer que $(a_n)_{n \geq 0}$ est H_α -sommable pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
- Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que $\sum a_n$ diverge. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n \geq 0}$ n'est pas H_α -sommable.
- Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Si $(a_n)_{n \geq 0}$ est H_α -sommable, montrer que $a_n = o(n^\alpha)$.
- Donner un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 0}$ qui n'est pas H_α -sommable mais qui est $H_{\alpha+1}$ -sommable.

Exercice 112 [ENS MP 2024 # 111] • Montrer que : $\cos(k\theta)$, $\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin \theta}$, $\frac{\cos((k+1/2)\theta)}{\cos(\theta/2)}$ et $\frac{\sin((k+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}$ sont des polynômes en $\cos \theta$.

- Soient $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels.

On suppose que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, g(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)) \geq 0$. Montrer qu'il existe un polynôme complexe P tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, g(\theta) = |P(e^{i\theta})|^2$.

Exercice 113 [ENS MP 2024 # 112] • Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n, p, u_{n+p} \leq u_n + u_p + C$, ou C est une constante réelle. Montrer que $(\frac{u_n}{n})$ converge ou tend vers $-\infty$.

- Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue et croissante, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1$. On note f^n la composée itérée de f (n fois). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\frac{f^n(x)-x}{n})_{n \geq 1}$ converge vers une limite qui ne dépend pas de x .

Exercice 114 INÉGALITÉ DE MUIRHEAD [ENS MP 2024 # 113] Soient $(a_1 \geq \dots \geq a_n)$ et $(b_1 \geq \dots \geq b_n)$ dans $(\mathbb{R}^{+*})^n$.

On note $a \geq b$ si : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i$ et $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$. Montrer que $a \geq b$ si

et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n x_i^{a_{\sigma(i)}} \geq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n x_i^{b_{\sigma(i)}}$.

Exercice 115 [ENS MP 2024 # 114] • Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x \in [0, 2\pi]$ tel que $f(x) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$.

- Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Montrer qu'il existe une partie I de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $|\sum_{j \in I} z_j| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n |z_j|$.

Exercice 116 [ENS MP 2024 # 115] Soient $a < b$. Une dissection du segment $[a, b]$ est une suite finie $(t_k)_{0 \leq k \leq n}$ strictement croissante telle que $t_0 = a$ et $t_n = b$. Pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on définit la variation de f sur $[a, b]$ par $V(f, [a, b]) = \sup_{\substack{t \text{ dissection} \\ \text{def } [a, b]}} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$.

- Calculer $V(f, [a, b])$ dans le cas où f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.
- Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $V(f, [0, 1]) < +\infty$ si et seulement s'il existe g et h croissantes telles que $f = g - h$.

Exercice 117 [ENS MP 2024 # 116] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $S_- = \{x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0\}$.

- L'ensemble S_- peut-il être fini non vide ?
- On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts tels que $S_- \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell(I_n) \leq \varepsilon$ (où $\ell(I_n)$ désigne la longueur de I_n). Montrer que f est croissante (donc $S_- = \emptyset$).

Exercice 118 [ENS MP 2024 # 117] Soient E un espace vectoriel, $C \subset E$ un ensemble convexe non vide, $a < b$ deux réels, et F l'ensemble des fonctions $f : C \rightarrow [a, b]$ convexes. Soit $x, y \in C$ fixes. Déterminer $\sup_{f \in F} (f(y) - f(x))$. Déterminer les cas où la borne supérieure est atteinte.

Exercice 119 Soit $C = [c, d]$ et F l'ensemble des fonctions $f : C \rightarrow [a, b]$ convexes. Soient $x < y \in C$ fixés. Déterminer $\sup_{f \in F} (f(y) - f(x))$.

Exercice 120 [ENS MP 2024 # 118] Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on note $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq +\infty\}$. Si $\text{dom}(f) \neq \emptyset$, on définit $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par $f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xy - f(x)\}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $\text{dom}(f) \neq \emptyset$. Montrer que $\text{dom}(f^*)$ est un ensemble convexe et que f^* est convexe sur $\text{dom}(f^*)$.
- Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. On pose $E = \{(y, a) \in \mathbb{R}^2; \forall x \in \mathbb{R}, xy - a \leq g(x)\}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = \sup_{(y, a) \in E} (xy - a)$.
- En déduire que $(g^*)^* = g$.
- Étendre au cas où g n'est pas dérivable.

Exercice 121 [ENS MP 2024 # 119] Soient I un intervalle réel contenant 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 .

On suppose qu'il existe $A, C > 0$ telles que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq C|f(x)| + A$.

Montrer que $\forall x \in I, |f(x)| \leq |f(0)|e^{C|x|} + \frac{A}{C}(e^{C|x|} - 1)$.

Exercice 122 [ENS MP 2024 # 120] Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue et dont une primitive est bornée. On suppose que, pour tout $x > 0, |f(x)| \leq \frac{2}{x^2} \int_0^x (x-y)|f(y)|dy$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Quelles généralisations peut-on étudier ?

Exercice 123 [ENS MP 2024 # 121] On note $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} . Une application $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est appelée une jauge. Soit $D = ((a_i)_{0 \leq i \leq n}, (x_i)_{0 \leq i \leq n-1})$ une subdivision pointée de $[a, b]$, c'est-à-dire $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ et $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_i \in [a_i, a_{i+1}]$. On dit que D est δ -fine lorsque pour tout $i, |a_{i+1} - a_i| \leq \delta(x_i)$.

- Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ telles que $\forall x, y \in [a, b], y \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
- Si δ est une jauge, montrer qu'il existe une subdivision pointée δ -fine.
- Redémontrer le theoreme de Heine pour f continue.
- Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et I un réel. On dit que f est HK-intégrable, d'intégrale I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ telle que, pour toute subdivision pointée $((a_i)_{0 \leq i \leq n}, (x_i)_{0 \leq i \leq n-1})$ δ -fine, on a $|\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)f(x_i) - I| \leq \varepsilon$.

Montrer que I est unique. On la note $\int_{HK} f$.

- Montrer que, si f est dérivable, f' est HK-intégrable et $\int_{HK} f' = f(b) - f(a)$.

Exercice 124 [ENS MP 2024 # 122] Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $P(0) \neq 0$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$, z_1, \dots, z_p les racines de module strictement inférieur à r de P comptées avec multiplicité. Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|P(re^{it})|) dt = \ln(|P(0)|) + \sum_{k=1}^p \ln\left(\frac{r}{|z_k|}\right)$.

Exercice 125 [ENS MP 2024 # 123] Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On dit qu'un endomorphisme u de E est positif si, pour tout $f \in E$, $f \geq 0$ implique $u(f) \geq 0$. On pose, pour $i \in \mathbb{N}$, $e_i : x \in [0, 1] \mapsto x^i$.

- Soit u un endomorphisme positif de E . Montrer que pour tout $f \in E$, $|u(f)| \leq u(|f|)$.
- Soit $f \in E$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall x, y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_{\infty}}{\delta^2} (x - y)^2$.
- Soit $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite d'endomorphismes positifs de E . On suppose que, pour $i \in \{0, 1, 2\}$, la suite $(T_n(e_i))$ converge uniformément vers e_i sur $[0, 1]$. Montrer que, pour tout $f \in E$, la suite $(T_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
- Démontrer le theoreme de Weierstrass.

Exercice 126 [ENS MP 2024 # 124] Soit $s > 1$. On dit que $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est s -Gevrey s'il existe $R, C > 0$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(k)}(x)| \leq CR^k(k!)^s$.

- Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+in^s x}$. Justifier que f est bien définie et s -Gevrey.
- Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) e^{-1/x}$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^{∞} et 2-Gevrey.

Exercice 127 [ENS MP 2024 # 125] Pour $x > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on pose : $F_{\alpha, \beta}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^{\alpha} (1+t)^{\beta} dt$.

- Pour quels (α, β) l'intégrale $F_{\alpha, \beta}(x)$ converge-t-elle absolument ?
- Pour un tel couple (α, β) , étudier la régularité de $F_{\alpha, \beta}$.
- On pose $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $g : x \in]0, 1[\mapsto \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$. Exprimer f et g en fonction des $F_{\alpha, \beta}$.
- Déterminer un développement asymptotique de $F_{\alpha, \beta}$ en $+\infty$.

Exercice 128 [ENS MP 2024 # 126] Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \Gamma(1/2)$.
- Montrer que, pour $x, y > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$, $\Gamma((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \Gamma(x)^{1-\lambda} \Gamma(y)^{\lambda}$.
- En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n + 1/2)^2 \leq \Gamma(n) \Gamma(n + 1); \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n + 1)^2 \leq \Gamma(n + 1/2) \Gamma(n + 3/2).$$

- Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. Démontrer que la suite $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers Γ .

Exercice 129 [ENS MP 2024 # 127] Soient $x, y \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $x'(t) = \sin(y(t))$ et $y'(t) = \cos(x(t))$.

- Montrer que $f : t \mapsto \sin(x(t)) + \cos(y(t))$ est constante.
- Soit $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2} (x(t) + y(t) - \frac{\pi}{2})$. Montrer que les points $(\sin(\varphi(t)), \varphi'(t))$ sont situés sur un même cercle dont on déterminera le rayon.

Exercice 130 [ENS MP 2024 # 128] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, E l'espace des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , $x \in \mathbb{R}^n$. Pour $u \in E$, soit X_u l'unique application de classe \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que $X_u(0) = x$ et $\forall t \in [0, 1]$, $X'_u(t) = AX_u(t) + Bu(t)$. Montrer que $\{X_u(1) ; u \in E\} = \mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice $(A|AB| \dots |AB^{n-1})$ de $\mathcal{M}_{n,n^2}(\mathbb{R})$ est de rang n .

Exercice 131 [ENS MP 2024 # 129] • Que dire du spectre complexe d'une matrice symétrique réelle ? d'une matrice antisymétrique réelle ?

- Soient $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ vérifiant : $A' = AB - BA$. On suppose que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $A(t) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B(t) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $A(t) = P(t)^{-1} A(0) P(t)$.
- On se place dans le cas $n = 2$ avec : $A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ a_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}$ et $(S) : a'_1 = a_1(b_2 - b_1)$, $b'_1 = 2a'_1$, $b'_2 = -2a'_1$, $b_1(0) + b_2(0) = 0$ et $a_1(0), b_1(0) \geq 0$.
- Calculer $AB - BA$.
- Trouver une solution particulière de (S) au voisinage de 0.

Exercice 132 [ENS MP 2024 # 130] Pour $k \geq 3$, on note $G_k : z \mapsto \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m+nz)^k}$.

- Montrer que $G_k(z)$ est bien défini pour tout complexe z tel que $\text{Im } z > 0$ et que la fonction $(x, y) \mapsto G_k(x + iy)$ est de classe \mathcal{C}^{∞} sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer que $G_k(iy)$ admet une limite quand $y \rightarrow +\infty$.
- Étudier l'existence des limites suivantes :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m + in)^2} \text{ et } \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m + in)^2}, \text{ où dans les deux cas la somme}$$

exclut $(n, m) = (0, 0)$. Ces limites sont-elles égales ?

Exercice 133 [ENS MP 2024 # 131] Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3$. Démontrer que $(x + y + z)^3 + 9xyz \geq 4(x + y + z)(xy + yz + zx)$.

Exercice 134 [ENS MP 2024 # 132] Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ continue et décroissante par rapport à x .

Soient u et v appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ 1-périodiques par rapport à x .

- On suppose que $\frac{\partial u}{\partial t} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \leq 0 \leq \frac{\partial v}{\partial t} + F\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$.
Démontrer que $\sup_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}}(u - v) = \sup_{\{0\} \times \mathbb{R}}(u - v)$.
- On suppose que $\frac{\partial u}{\partial t} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$. Montrer que u est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Exercice 135 [ENS MP 2024 # 133] Soient $a > 0$, $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n > 0$. Calculer $\inf_{\substack{y_1, \dots, y_n > 0 \\ y_1 + \dots + y_n \leq a}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i}$.

Exercice 136 [ENS MP 2024 # 134] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique.

On considère $n+1$ vecteurs v_1, \dots, v_{n+1} engendrant positivement \mathbb{R}^n , c'est à dire tels que $\left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} \right\} = \mathbb{R}^n$.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue croissante telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\langle v_i, x \rangle)$.

- Montrer qu'il existe bien $n+1$ vecteurs v_1, \dots, v_{n+1} engendrant positivement \mathbb{R}^n .
- Montrer que g atteint son minimum sur \mathbb{R}^n .
- On suppose que f est intégrable en $-\infty$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} f(\langle v_i, x \rangle) v_i = 0$.

Exercice 137 [ENS MP 2024 # 135] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

- Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que vaut $d(A, \text{GL}_n(\mathbb{R}))$?
- On note $S = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $M_0 \in S$ telle que $d(A, S) = \|A - M_0\|$.
- Rappeler le résultat sur les extrema sous contrainte. Que peut-on en déduire sur la matrice M_0 définie ci-dessus?

3) Géométrie

Exercice 138 [ENS MP 2024 # 136] • Montrer que, si $n \geq 2$, le groupe des isométries vectorielles de \mathbb{R}^2 préservant les points dont les affixes sont les racines n -ièmes de l'unité est un groupe d'ordre $2n$ que l'on note \mathcal{D}_{2n} .

- Soient p un nombre premier, G un groupe fini d'ordre $2p$. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ou à \mathcal{D}_{2p} .

Exercice 139 [ENS MP 2024 # 137] • On note G le groupe (pour la composition) des déplacements du plan, i.e. des applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Montrer que, si H est un sous-groupe de G , H est discret si et seulement si l'orbite de tout $z \in \mathbb{C}$ sous l'action de H n'a pas de point d'accumulation.

- Le résultat subsiste-t-il si on remplace G par le groupes des similitudes directes du plan, i.e. des applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$?

4) Probabilités

Exercice 140 [ENS MP 2024 # 138] Soit E un espace vectoriel normé et soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. On considère des variables aléatoires $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ i.i.d telles que $\mathbf{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$. Si $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$, on pose $N(v_1, \dots, v_n) = \mathbf{E}(\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k\|)$. Démontrer que, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [-1, 1]^n$, $N(\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_n u_n) \leq N(u_1, \dots, u_n)$.

Exercice 141 [ENS MP 2024 # 139] On considère une pièce équilibrée et ε_n la valeur du n -ième lancer que l'on considère à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Soient $X_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ et $\tau = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 0\}$. Déterminer $\mathbf{P}(\tau = n)$ ainsi qu'un équivalent de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 142 [ENS MP 2024 # 140] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et Y la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$.

- Montrer que $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = k)$. On pose $A = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.
- Calculer $\mathbf{E}(\text{rg}(A))$.
- Calculer $\mathbf{P}(A \in \text{GL}_2(\mathbb{R}))$ puis $\mathbf{P}(A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}))$.
- Déterminer la probabilité pour que A soit diagonalisable sur \mathbb{R} .
- On pose $B = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ X-Y & Y \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{P}(B \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$.
- Soient Z une variable aléatoire réelle et $C = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ Z & Y \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{P}(C \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$.
- Soit M une matrice aléatoire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la famille des coefficients est i.i.d., chaque coefficient suivant la loi uniforme sur $\{0, -1, 1\}$. Déterminer $\mathbf{P}(M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 143 [ENS MP 2024 # 141] On note $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ et Δ la différence symétrique. Soit $p \in [0, 1]$ et X et Y deux variables aléatoires i.i.d de Ω dans $\mathcal{P}(E)$ telles que, pour tout $i \in E$, $\mathbf{P}(i \in X) = p$.

- Calculer $\mathbf{E}(\text{card}(X \Delta Y))$.
- On note $D(n)$ le cardinal maximal d'une partie \mathcal{A} de $\mathcal{P}(E)$ telle que, pour toutes parties A et B distinctes de \mathcal{A} , $|A \Delta B| \geq n/3$. Montrer qu'il existe $C > 0$; $D(n) \geq C\sqrt{n}$.

Exercice 144 [ENS MP 2024 # 142] Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Si N est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z} , on pose $X_{N+n}(\omega) = X_{N(\omega)+n}(\omega)$.

- Existe-t-il N tel que $\mathbf{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_{N+n} = 1) = 1/2$?
- Existe-t-il N tel que $\mathbf{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\mathbf{P}(X_{N+n} = 1) = 1/2$?

Exercice 145 [ENS MP 2024 # 143] Soient $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ telle que $\forall i \in E$, $\mathbf{P}(i \in X) = p$ et, pour $i \neq j \in E$, $(i \in X)$ et $(j \in X)$ sont indépendants.

Pour Y variable aléatoire de même loi que X et indépendante de X , calculer $\mathbf{E}(|X \Delta Y|)$.

Exercice 146 [ENS MP 2024 # 144] Soient G un groupe fini de cardinal N , et A une partie de G aléatoire, ou l'on prend chaque élément de G indépendamment avec probabilité $p > 0$.

On note $AA = \{xy, (x, y) \in A^2\}$.

- Montr per que $\mathbf{P}(1 \in AA)$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini.
- Montr per que $\mathbf{P}(AA = G)$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini.

Exercice 147 [ENS MP 2024 # 145] PALEY-SIGMUND, TROIS SÉRIES DE KOLMOGOROV • Soit X une variable aléatoire réelle positive L^2 . Montrer que, pour $\lambda \in]0, 1[$, $\mathbf{P}(X \geq \lambda \mathbf{E}(X)) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

- Soit (u_n) une suite de variables aléatoires positives indépendantes. Montrer que la série $\sum u_n$ converge presque sûrement si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}(\min(u_n, 1)) < +\infty$.
- Soit $\alpha > 0$. On suppose que $\mathbf{P}(X_n \geq r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} r^{-\alpha}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ pour que $\sum x_n X_n$ converge presque sûrement.

Exercice 148 [ENS MP 2024 # 146] Soient $\lambda > 0$ et N_λ une variable de Poisson de paramètre λ .

Pour $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, on pose $Tf: n \in \mathbb{N} \mapsto \lambda f(n+1) - nf(n)$.

- Montrer que $Tf(N_\lambda)$ est d'espérance finie, nulle.
- Pour μ et ν deux distributions de probabilités sur \mathbb{N} , et X et Y variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} de lois respectivement données par μ et ν , on note $d(\mu, \nu) = d(X, Y) = \frac{1}{2} \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \mathbf{E}(g(X) - g(Y))$.

Montrer l'existence de $C_\lambda > 0$ tel que, pour toute variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , $d(N, N_\lambda) \leq C_\lambda \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \mathbf{E}(Tf(N))$.

Exercice 149 [ENS MP 2024 # 147] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n\}$. L'entropie de X est définie par $\mathcal{H}(X) = -\sum_{k=1}^n p_i \ln(p_i)$ avec $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$.

- Montrer que $\mathcal{H}(X) \geq 0$ avec égalité si et seulement si X est constante.
- Soit $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite positive telle que $p_1 + \dots + p_n = 1$ et (q_i) une autre suite positive de somme 1.
 - ▷ Montrer que $\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \geq \sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i)$. Expliciter le cas d'égalité.
 - ▷ Montrer que $\mathcal{H}(X) \leq \ln(n)$ avec égalité si et seulement si X suit une loi uniforme.
- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n\}^2$.
 - On note $p_{i,j} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = x_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n$.
 - L'entropie de (X, Y) est $\mathcal{H}(X, Y) = -\sum_{i,j=1}^n p_{i,j} \ln(p_{i,j})$.
 - Montrer que $\mathcal{H}(X, Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$.

Exercice 150 [ENS MP 2024 # 148] Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soient $v_1, \dots, v_n \in E$ tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|v_i\| \leq 1$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [-1, 1]$ et $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Montrer qu'il existe des $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i$ satisfait $\|v - w\| \leq \sqrt{n}$.

Exercice 151 [ENS MP 2024 # 149] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d sur \mathbb{Z} à support fini suivant la loi μ . On pose $\nu(k) = \frac{e^{\lambda k} \mu(k)}{\mathbf{E}(e^{\lambda X_1})}$ et on considère une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ i.i.d suivant la loi ν . On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. On prend $\lambda \geq 0, a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, n \geq 1$.

- Montrer que $\mathbf{P}(na \leq T_n \leq (a + \varepsilon)n) \leq \frac{e^{\lambda n(a + \varepsilon)}}{(\mathbf{E}(e^{\lambda X}))^n} \mathbf{P}(S_n \geq na)$.
- On suppose $X \sim -X$ et $\exists k > a, (a > 0), \mu(k) > 0$.
Démontrer que $\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n \geq na) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_{s \geq 0} (-sa + \log \mathbf{E}(e^{sX}))$.

Exercice 152 [ENS MP 2024 # 150] Soient $\sigma > 0, n \geq 1$ un entier et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles discrètes telles que pour tout $1 \leq i \leq n$ et $s > 0$, $\mathbf{E}(\exp(sX_i)) \leq \exp(\sigma^2 s^2)$. Montrer que $\mathbf{E}(\max_{1 \leq i \leq n} X_i) \leq 2\sigma \sqrt{\ln n}$.

Exercice 153 [ENS MP 2024 # 151] Soient $n \geq 1, a > 0$, et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes, indépendantes, d'espérance nulle, et à valeurs dans $[-a, a]$.

- Montrer que, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $s > 0$, $\mathbf{E}[e^{sX_i}] \leq \exp\left(\frac{\mathbf{V}(X_i)}{a^2} (e^{as} - 1 - as)\right)$.
- On note $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i)$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| \geq t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma^2 + 2at/3}\right).$$

Exercice 154 [ENS MP 2024 # 152] Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$.

- Montrer que, pour tout $k \geq 1$ entier, $\Gamma(k) = (k-1)!$ et $\Gamma(k+1/2) \leq k!$.

- Soient $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans un ensemble discret, telle que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{P}(|X| > t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbf{E}(|X|^k) \leq (2\sigma^2)^{k/2} k\Gamma(k/2)$.
- On suppose de plus que $\mathbf{E}(X) = 0$. Montrer que $\forall s > 0$, $\mathbf{E}[\exp(sX)] \leq \exp(4\sigma^2 s^2)$.

Exercice 155 [ENS MP 2024 # 153] Soient $n \geq 3$ un entier. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, une suite alternante pour σ est une suite strictement croissante $(i_1)_{1 \leq m}$ d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que :

- soit pour tout $k \in \llbracket 2, \ell - 1 \rrbracket$, $\sigma(i_k) > \max\{\sigma(i_{k-1}), \sigma(i_{k+1})\}$;
- soit pour tout $k \in \llbracket 2, \ell - 1 \rrbracket$, $\sigma(i_k) < \max\{\sigma(i_{k-1}), \sigma(i_{k+1})\}$.

On note $\Delta(\sigma)$ la longueur maximale d'une suite alternante pour σ et on considère σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur \mathcal{S}_n . Calculer $\mathbf{E}(\Delta(\sigma_n))$.

Exercice 156 [ENS MP 2024 # 154] Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles i.i.d. Pour $n \geq 1$, on note $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$. Soit $\alpha > 0$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\exists (a_n)_{n \geq 1} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}^*}$, $\forall x \geq 0$, $\mathbf{P}\left(\frac{M_n}{a_n} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(-x^{-\alpha})$,
- (ii) $\forall x > 0$, $\frac{\mathbf{P}(X_1 > xt)}{\mathbf{P}(X_1 > t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x^{-\alpha}$ (et $\forall t > 0$, $\mathbf{P}(X_1 > t) > 0$).

Exercice 157 [ENS MP 2024 # 155] Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- Montrer que, pour une indexation de sous-suite $(\varphi(n))_{n \geq 1}$ bien choisie, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{k \geq N} \left(\left|\frac{S_{\varphi(k)}}{H_{\varphi(k)}} - 1\right| > \frac{1}{k}\right)\right) = 0$.
- Montrer que l'évènement $\left\langle \left(\frac{S_n}{\ln(n)}\right)_{n \geq 1} \text{ converge} \right\rangle$ est presque sûr.

Exercice 158 [ENS MP 2024 # 156] • Soient $n \in \mathbb{N}$, $(p_0, \dots, p_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$. Montrer que les racines de $\sum_{i=0}^n p_i X^i$ dans \mathbb{C} sont de module inférieur ou égal à 1.

- Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite réelle non identiquement nulle telle que $\sum a_k x^k$ ait pour rayon de convergence $R > 0$. Si $j \in \mathbb{N}$, on dit que la suite $(a_i)_{i \geq 0}$ change de signe en j s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_j a_{j+k} < 0$ et que $a_i = 0$ pour $i \in \llbracket j+1, j+k-1 \rrbracket$. Montrer que l'ensemble des $x \in]0, R[$ tels que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$ est fini de cardinal majoré par le nombre de changements de signes de $(a_i)_{i \geq 0}$.
- Soit $(A_k)_{k \geq 0}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $S_n = \sum_{k=0}^n A_k$ et N_n le nombre de $x \in]0, 1[$ tels que $\sum_{i=0}^n A_i x^i = 0$. Montrer que $N_n \leq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \mathbb{1}_{S_{2k+1}=0}$ et en déduire que $\mathbf{E}(N_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(\sqrt{n})$.

Exercice 159 [ENS MP 2024 # 157] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} telle que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = k) > 0$. Soit $N \in L^2$ une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , indépendante de $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$. On pose $X = X_N$. todo

- Montrer qu'il existe une unique fonction $f_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que l'on déterminera, telle que $\mathbf{E}((f_0(X) - N)^2) = \min_{g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}} \mathbf{E}((g(X) - N)^2)$.
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $R(g, n) = \mathbf{E}((g(X_n) - n)^2)$. Montrer que, si la suite $(R(f_0, n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à un certain R_0 , alors $R_0 = \min_{g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{n \in \mathbb{N}} R(g, n)$ et f_0 est l'unique fonction vérifiant cette condition.

Exercice 160 [ENS MP 2024 # 158] Soient $a \in]0, 1[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. à l'aide d'une interprétation probabiliste, calculer la borne supérieure, pour $(u_n)_{n \geq 1}$ parcourant l'ensemble des suites à valeurs dans $[0, 1]$, de

$$\sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_m} \prod_{\ell=1}^m u_{n_\ell} \prod_{n_{\ell-1} < k < n_\ell} (1 - au_k).$$

II) X - MP

XENS

1) Algèbre

Exercice 161 [X MP 2024 # 265] Pour toute partie finie non vide X de \mathbb{R} dont on note $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les éléments, on pose :

$$a^+(X) = \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i + 1) \quad \text{et} \quad a^-(X) = \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i - 1).$$

L'objectif est d'établir que : $\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) = a^+(A)$ pour n'importe quelle partie finie non vide A de \mathbb{R} .

On se donne donc $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ une partie finie non vide de \mathbb{R} , avec $a_1 < \dots < a_n$.

- On suppose le résultat acquis. Trouver une expression de : $\alpha(A) = \sum_{\substack{B \subset A \\ a_n \in B}} a^-(B)$.

- Établir le résultat cherché.
- On suppose $A = \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer : $\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset \\ B \cap (B+1) = \emptyset}} a^-(B)$.

Exercice 162 [X MP 2024 # 266] • Soit $n \geq 1$, premier avec 10. Montrer que n possède un multiple dont l'écriture en base 10 n'a que des 9.

• On remarque que $\frac{1}{7} = 0, \underline{142857}142857 \dots \underline{142857} \dots$ avec $142 + 857 = 999$.

$\frac{285+714}{7} = 0, \underline{285714}285714 \dots \underline{285714} \dots$ $076 + 923 = 999$

$\frac{1}{13} = 0, \underline{076923}076923 \dots \underline{076923} \dots$

Expliquer.

Exercice 163 [X MP 2024 # 267] Pour r un rationnel non nul s'écrivant $r = 2^k a/b$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et a, b deux entiers impairs, on définit la valuation dyadique de r par $v_2(r) = k$.

On admet que : $\forall x, y \in \mathbb{Q}^*$, $v_2(xy) = v_2(x) + v_2(y)$ et si $x + y \neq 0$, $v_2(x + y) \geq \min(v_2(x), v_2(y))$, avec égalité si $v_2(x) \neq v_2(y)$.

On note enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Montrer que pour tout $n > 1$, $H_n \notin \mathbb{Z}$.
- Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \leq n - 2$, on a $v_2(H_n - H_m) < 0$.
- Montrer les propriétés admises plus haut.
- La question - peut-elle s'adapter à la valuation 3-adique ?

Exercice 164 [X MP 2024 # 268] Quels sont les m de \mathbb{N}^* tels qu'il existe m éléments consécutifs de \mathbb{N}^* divisibles par des cubes d'éléments de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$?

Exercice 165 [X MP 2024 # 269] Montrer que tout $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^N \varepsilon_k (-2)^k$ avec $N \geq 0$ et les ε_k dans $\{0, 1\}$.

Exercice 166 [X MP 2024 # 270] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note \mathcal{F} l'ensemble des entiers naturels qui ne sont pas divisibles par le carré d'un entier supérieur ou égal à 2, et $q(n) = |\mathcal{F} \cap \llbracket 1, n \rrbracket|$. On note $\mathcal{E}(n, k) = \mathbb{R}^{+*} \cap \left\{ \sum_{i=1}^k \sqrt{a_i} - \sum_{i=1}^k \sqrt{b_i}, (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^{2k} \right\}$ et $\Delta(n, k) = \min \mathcal{E}(n, k)$.

- On admet que $(\sqrt{n})_{n \in \mathcal{F}}$ est libre dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} .

Montrer que $\Delta(n, k) \leq \frac{k(\sqrt{n}-1)}{\binom{q(n)+k-1}{k}-1}$.

- E On démontre à présent le résultat admis précédemment.
- Soit \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{R} , et x un élément de $\mathbb{K} \cap \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbb{K}[\sqrt{x}] = \mathbb{K} + \mathbb{K}\sqrt{x}$ est un sous-corps de \mathbb{R} , et que si $\sqrt{x} \notin \mathbb{K}$ alors il existe un unique automorphisme σ de l'anneau $\mathbb{K}[\sqrt{x}]$ différent de l'identité et fixant tous les éléments de \mathbb{K} .
- E Dans la suite, on fixe un entier $n \geq 1$ on suppose acquise, pour tout ensemble fini A constitué de n nombres premiers, la liberté de la famille des \sqrt{m} , où m parcourt l'ensemble des éléments de \mathcal{F} ayant tous leurs diviseurs premiers dans A . Soit A un ensemble forme de $n + 1$ nombres premiers p_1, \dots, p_{n+1} .
- E On construit par récurrence une suite $(\mathbb{K}_0, \dots, \mathbb{K}_n)$ de corps : $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1}[\sqrt{p_i}]$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- Montrer que \mathbb{K}_n est de dimension 2^n comme \mathbb{K}_0 -espace vectoriel, et en préciser une base. Montrer qu'il existe un automorphisme σ du corps \mathbb{K}_n qui fixe $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}}$ et envoie $\sqrt{p_n}$ sur $-\sqrt{p_n}$. Dans la suite, on raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{p_{n+1}} \in \mathbb{K}_n$.
- Montrer que $\sqrt{p_{n+1}} = \alpha + \beta\sqrt{p_n}$ pour un $\alpha \in \mathbb{K}_{n-1}$ et un $\beta \in \mathbb{K}_{n-1}$, puis montrer qu'en fait $\sqrt{p_{n+1}} = \beta\sqrt{p_n}$.
- Montrer que $\sqrt{p_{n+1}} = \lambda \prod_{k=1}^n \sqrt{p_k}$ pour un $\lambda \in \mathbb{Q}$, et conclure à une contradiction.
- Conclure.

Exercice 167 [X MP 2024 # 271] Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4. On note L l'ensemble des carrés de \mathbb{F}_p^* .

- Montrer que $|L| = \frac{p-1}{2}$.
- Montrer que si $x \in L$, alors $-x \notin L$.
- On fixe $x \in \mathbb{F}_p^*$ et l'on pose $A = \{(\ell_1, \ell_2) \in L^2 ; x = \ell_1 - \ell_2\}$. Calculer $\text{card } A$.

Exercice 168 [X MP 2024 # 272] Soit p un nombre premier impair.

- Dénombrer les $(x, y) \in (\mathbb{F}_p)^2$ tels que $x^2 + y^2 = 1$.
- Soit $z \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$. Dénombrer $\{(x, y) \in \mathbb{F}_p^2, x^2 + y^2 = z\}$.

Exercice 169 [X MP 2024 # 273] Soit p un nombre premier impair. On pose $q = 2p + 1$ et l'on suppose q premier. On considère l'équation : $(E) : x^p + y^p + z^p = 0$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ une solution de (E) telle que p ne divise aucun des entiers x, y et z et telle que x, y, z soient premiers entre eux deux à deux.

- Montrer que q divise x, y ou z .
- Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que : $y + z = a^p, x + y = b^p, x + z = c^p$.
- Factoriser $y^p + z^p$.
- Conclure à une contradiction.

Exercice 170 [X MP 2024 # 274] Soient p un nombre premier congru à 1 modulo 4 et S l'ensemble $S = \{x, y, z) \in \mathbb{N}^3 ; p = x^2 + 4yz\}$. Pour $(x, y, z) \in S$ on pose :

- si $x < y - z$, $f(x, y, z) = (x + 2z, z, -x + y - z)$;
- si $y - z < x < 2y$, $f(x, y, z) = (2y - x, y, x - y + z)$;
- si $x > 2y$, $f(x, y, z) = (x - 2y, x - y + z, y)$.

Montrer que f définit une involution de S . En déduire que p s'écrit $u^2 + v^2$ avec $(u, v) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 171 [X MP 2024 # 275] Soit $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. On considère l'équation $(*)$: $x^2 - dy^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

- Traiter les cas $d < 0$ et $d = k^2$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- Dans la suite, on suppose $d > 0$ et $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ solution de $(*)$.
- On pose $z = x_0 + \sqrt{d}y_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $z^{n+1} = x_n + \sqrt{d}y_n$.
- En déduire que, si l'ensemble des solutions de $(*)$ est non trivial, i.e. n'est pas réduit à $\{(\pm 1, 0)\}$, il en existe une infinité.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|p - qx| < \frac{1}{n}$.
- Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $|p - qx| < \frac{1}{q}$.
- Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ pour lequel il existe une infinité de couples d'entiers (p, q) tels que $|p^2 - dq^2| < K$.
- Conclure que $(*)$ possède des solutions non triviales.

Exercice 172 [X MP 2024 # 276] • Soit \mathbb{F} un corps fini. On admet que le groupe multiplicatif \mathbb{F}^\times est cyclique.

Soient $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{F}$. On note $\widehat{\mathbb{F}^\times}$ l'ensemble des morphismes de \mathbb{F}^\times dans \mathbb{C}^* prolongés par 0 en 0. On note $N(X^n = u)$ le nombre de zéros du polynôme $X^n - u$ dans \mathbb{F} . On note $\widehat{\mathbb{F}^\times}[n]$ l'ensemble des $\chi \in \widehat{\mathbb{F}^\times}$ tels que $\chi^n = 1$.

Montrer que $N(X^n = u) = 1 + \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[n], \chi \neq 1} \chi(u)$.

- On suppose $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \equiv 1 \pmod{3}$ et p impair.

Montrer que $N(X^3 + Y^3 = 1) = p + \sum_{\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[3] \setminus \{1\}} J(\chi_1, \chi_2) = p - 2 + 2 \operatorname{Re}(J(\omega, \omega))$ si $\omega \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[3] \setminus \{1\}$, où $J(\chi_1, \chi_2) = \sum_{a+b=1} \chi_1(a)\chi_2(b)$.

- On admet que $|J(\omega, \omega)| = \sqrt{p}$ et $pJ(\omega, \omega) = g_\omega^3$ ou $g_\omega = \sum_{x \in \mathbb{F}} \omega(x)\zeta_p^x$ avec $\zeta_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$.

Montrer que $N(X^3 + Y^3 = 1) = p - 2 - a_p$ avec $a_p^2 + 27b_p^2 = 4p$ ou $b_p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 173 [X MP 2024 # 277] Pour p premier impair, on note $\chi: \mathbb{F}_p \rightarrow \{1, -1, 0\}$ la fonction définie par $\chi(0) = 0$, $\chi(x) = 1$ pour tout élément x de \mathbb{F}_p^\times qui est un carre, et $\chi(x) = -1$ dans toute autre situation.

Pour $t \in \mathbb{N}$, on pose $g_p(t) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(tx) e^{\frac{2i\pi x}{p}}$.

- Soit p un nombre premier impair, et des entiers a et b tels que $0 < a < b < p$. Montrer que $g_p(1) \sum_{n=a}^{b-1} \chi(n) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(x) \sum_{t=a}^{b-1} e^{\frac{2i\pi tx}{p}}$.
On admettra dans la suite que $|g_p(1)| = \sqrt{p}$.
- Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, quels que soient p premier impair, et a, b entiers tels que $0 \leq a < b < p$, on ait $\operatorname{card}\{k \in \llbracket a, b-1 \rrbracket, k \text{ est un carre modulo } p\} = \frac{b-a}{2} + u_{p,a,b}$ ou $|u_{p,a,b}| \leq M \sqrt{p} \ln p$.

Exercice 174 [X MP 2024 # 278] Soit G un groupe fini de cardinal $2n$ ou n est impair.

- Montrer que G possède un élément d'ordre 2.
- Montrer que G possède un sous-groupe d'ordre n .

Ind : Considérer l'application Φ qui à $g \in G$ associe $\Phi(g): G \rightarrow G$ telle que, pour tout $x \in G$, $\Phi(g)(x) = gx$.

- s Trouver un contre-exemple si n est pair.

Exercice 175 [X MP 2024 # 279] Soit p un nombre premier. On dit qu'un groupe G est un p -groupe si, pour tout $g \in G$, l'ordre de g est une puissance de p . Si $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que G est k -divisible si, pour tout $g \in G$, il existe $x \in G$ tel que $x^k = g$.

- Montrer qu'un p -groupe non trivial et p -divisible est infini.
- Donner un exemple de tel groupe.
- Montrer que G est alors k -divisible pour tout k .

Exercice 176 [X MP 2024 # 280] Soit G un groupe d'ordre $n \geq 1$. Pour $g_1, \dots, g_k \in G$, on note $E(g_1, \dots, g_k) = \{g_{i_1} \cdots g_{i_s} ; s \in \mathbb{N}, 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k\}$ (avec la convention que l'élément neutre est le produit vide donc appartient à cet ensemble).

- Soient $g_1, \dots, g_k \in G$ tel que $G = E(g_1, \dots, g_k)$. Montrer que $k \geq \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
- Soit $A \subset G$. Montrer que $\sum_{x \in G} |A \cap Ax| = |A|^2$.
- Montrer qu'il existe $g_1, \dots, g_k \in G$ tels que $G = E(g_1, \dots, g_k)$ avec $k \leq \lfloor \log_2(2n \ln n) \rfloor$.

Exercice 177 [X MP 2024 # 281] On note $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ le groupe des permutations de \mathbb{C} . Soit G un sous-groupe cyclique de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ d'ordre 2^n , ou $n \geq 2$, contenant la conjugaison complexe.

- Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il existe $\tau \in G$ tel que $\tau(z) \neq \pm z$.
- Soit H un sous-groupe de G d'ordre 2^{n-1} . Montrer que H contient au moins deux applications \mathbb{R} -linéaires.
- sA On regarde \mathbb{C} comme \mathbb{R} -espace vectoriel. Est-il possible que G ne soit composé que d'applications linéaires?
- sA Montrer que G contient exactement deux applications \mathbb{R} -linéaires.

Exercice 178 [X MP 2024 # 282] Soit \mathcal{A} une \mathbb{C} -algèbre. On suppose que \mathcal{A} est munie d'une norme N vérifiant : $\forall a, b \in \mathcal{A}, N(ab) = N(a)N(b)$.

- Soit $x \in \mathcal{A}$. En posant $z = z \cdot 1_{\mathcal{A}}$, on identifie \mathbb{C} à une sous-algèbre de \mathcal{A} . Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, N(x - z_0) \leq N(x - z)$. On pose $a = x - z_0$.
- On suppose que $N(a) = 2$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{U}_n, N(a - z) \geq 2$. Montrer ensuite que $N(a - 1) = 2$ puis $N(a - 5) = 2$.
- Montrer que \mathcal{A} est isomorphe à \mathbb{C} , i.e. $\dim \mathcal{A} = 1$.

Exercice 179 [X MP 2024 # 283] • Soit f l'application qui à $z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$ associe le point d'intersection de \mathbb{R} et de la droite passant par z et i . Montrer que $f(z) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow z \in \mathbb{Q}(i)$.

- Montrer qu'il existe une infinité de triplets non proportionnels $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

Exercice 180 [X MP 2024 # 284] On appelle nombre de coefficients positifs du polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ le cardinal de l'ensemble $\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i \geq 0\}$.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. Montrer que P^2 a au moins trois coefficients positifs.
- Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que P^2 ait exactement trois coefficients positifs.

Exercice 181 [X MP 2024 # 285] Soient $n \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré majoré par n , Δ le pgcd de $P(0), P(1), \dots, P(n)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, Δ divise $P(k)$.

Exercice 182 [X MP 2024 # 286] Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 2$ dont on note z_0, \dots, z_{n-1} les racines. On note t_1, \dots, t_{n-1} les racines complexes de P' et l'on suppose que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, |z_k| \leq 1$.

- Montrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, |t_k| \leq 1$.
- On suppose que z_0 est racine simple de P . Calculer $\frac{P''(z_0)}{P'(z_0)}$ deux façons :
 - ▷ en fonction de z_0 et des t_k ;
 - ▷ en fonction de z_0 et des z_k .
- Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tel que $|z| \leq 1$. Montrer que $\Re\left(\frac{1}{1+z}\right) \geq \frac{1}{2}$.
- On suppose que $z_0 = 1$ et que z_0 est racine simple. Montrer qu'il existe $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $|1 - t_k| \leq 1$.
- On suppose que $|z_0| = 1$. Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $|z_0 - t_i| \leq 1$.
- Soient $Q \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On pose $P = Q^2 + \alpha^2$. Montrer qu'il existe une racine z de P et une racine t de P' telles que $|z - t| \leq |z|$.

Exercice 183 [X MP 2024 # 287] Pour $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = (\sum_{i=0}^n |a_i|^2)^{1/2}$.

- Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$, $\|(X - z)P\| = \|(1 - \bar{z}X)P\|$.
- On suppose P unitaire, et on note M_P le produit des modules des racines de P de module ≥ 1 . Montrer que $M_P \leq \|P\|$.
- Montrer, pour $1 \leq k \leq n-1$, que $|a_k| \leq \binom{n-1}{k} M_P + \binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 184 [X MP 2024 # 288] • Soient $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. On pose $r = \min\{|z|, z \in \mathbb{C}, P(z) = 0\}$, et on suppose $r > 0$. Si $a_k \neq 0$, montrer que $r^k \leq \binom{n}{k} \frac{|a_0|}{|a_k|}$.

- Soit $A_n = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg P = n, P(-1) = P(1) = 0\}$. Montrer que $\sup_{P \in A_n} \{\min\{|z|, P'(z) = 0\}\} < +\infty$.

Exercice 185 [X MP 2024 # 289] Soient $\omega, q \in \mathbb{C}^*$ tels que ω^2 n'est pas une puissance entière de q . On considère l'équation $(*) : \omega f(z)g(qz) = \omega^2 f(qz)g(z) + P(z)$, d'inconnues $(P, f, g) \in \mathbb{C}[X]^3$, avec g, P unitaires.

- Si (P, f, g) vérifie $(*)$, trouver une relation entre les degrés de P, f, g .
- On fixe P . Montrer l'existence de (f, g) tel que (P, f, g) vérifie $(*)$.
- On fixe (P, f) . Y a-t-il unicité de g tel que (P, f, g) vérifie $(*)$?

Exercice 186 [X MP 2024 # 290] Soit $\theta \in \mathbb{C}$ un nombre algébrique.

- Montrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de θ est l'ensemble des multiples d'un certain polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, déterminé de manière unique. On écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, avec $a_n = 1$, et on suppose P à coefficients entiers, θ irrationnel et $a_0 \geq 0$.
- Montrer que $n \geq 2, a_0 > 0$ et θ est racine simple de P .
- On pose $Q = X^n P(1/X)$ et $f : z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que si θ^{-1} n'est pas un pôle de f , alors $a_0 = 1$ et n est pair.
- Montrer qu'il existe $r > 0$ et une suite (b_n) d'entiers telle que pour tout $z \in D(0, r)$, on ait f définie en z et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Exercice 187 [X MP 2024 # 291] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si M est inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre non-inversible?
- Si M n'est pas inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre inversible?

Exercice 188 [X MP 2024 # 292] Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et $a, b \in \mathcal{L}(V)$. Pour $u, v \in \mathcal{L}(V)$, on pose $[u, v] = uv - vu$. On suppose que a est nilpotent et que $[a, [a, b]] = 0$. Montrer que $[a, b]$ et ab sont nilpotents.

Exercice 189 [X MP 2024 # 293] Soit V_0, \dots, V_n des espaces vectoriels, $(v_0^+, \dots, v_{n-1}^+) \in \mathcal{L}(V_0, V_1) \times \dots \times \mathcal{L}(V_{n-1}, V_n)$ et $(v_1^-, \dots, v_n^-) \in \mathcal{L}(V_1, V_0) \times \dots \times \mathcal{L}(V_n, V_{n-1})$. On suppose que $v_{i-1}^+ \circ v_i^- = -v_{i+1}^- \circ v_i^+$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et que $v_{n-1}^+ \circ v_n^- = 0$. Montrer que l'endomorphisme $v_1^- \circ v_0^+$ de V_0 est nilpotent. Déterminer l'indice de nilpotence maximal possible de $v_1^- \circ v_0^+$.

Exercice 190 [X MP 2024 # 294] Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de permutation associée et, pour tout $k, n_k(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

- Soit $\sigma \in S_n$. Calculer, pour tout k , $\text{tr}(P_\sigma^k)$ en fonction des $n_r(\sigma)$.
- En déduire que deux permutations $\sigma, \tau \in S_n$ sont conjuguées dans S_n si et seulement si les matrices P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 191 [X MP 2024 # 295] Soient $V = \mathbb{C}^n$ et $T = (\mathbb{C}^*)^n$. Pour tout $v \in V$ et toute partie $H \subset V$, on note $H \cdot v = \{(h_1 v_1, \dots, h_n v_n), h \in H\}$.

- Soit $v \in V$. Déterminer la nature topologique de $T \cdot v$. Préciser notamment son adhérence.
- Quels sont les sous-espaces $W \subset V$ tels que, pour tout $v \in T$, $W \cdot v = W$?
- Dénombrer les familles $(W_i)_{i \in [0, n]}$ de sous-espaces vectoriels satisfaisant la condition de la question précédente et les inclusions strictes $W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \dots \subsetneq W_n$.

Exercice 192 [X MP 2024 # 296] Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et φ un morphisme de groupes de \mathbb{U} dans $\text{GL}(V)$ tel que $\{0\}$ et V soient les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les $\varphi(g)$ pour $g \in \mathbb{U}$.

- Montrer que $\dim V = 1$.
- On suppose $f: \theta \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(e^{i\theta})$ dérivable en 0. Déterminer φ .

Exercice 193 [X MP 2024 # 297] Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que (V, A, B) est une réalisation de M si :

- V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension d ,
- $A = (a_1, \dots, a_n)$ est une famille libre de formes linéaires sur V ,
- $B = (b_1, \dots, b_n)$ est une famille libre de vecteurs de V ,
- pour tous i, j , $a_i(b_j) = m_{i,j}$.

On dit que d est la dimension de la réalisation.

- Montrer que si M est réalisée par un espace de dimension d , elle l'est aussi par un espace de dimension $d' > d$.
- Trouver une réalisation de la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Trouver la dimension minimale d'une réalisation de M_0 .

Exercice 194 FORMULE DE GLAUBER [X MP 2024 # 298] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant à $AB - BA$.

- sV2 Simplifier $e^{At} B e^{-At}$.
- Calculer $\exp(A + B)$.

Exercice 195 [X MP 2024 # 299] Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \chi_B$ et $AM = MB$.

- Montrer que, pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}((A - MX)^r) = \text{tr}((B - XM)^r)$.
- En déduire que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A - MX) = \det(B - XM)$.

Exercice 196 [X MP 2024 # 300] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ peut-elle s'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 197 [X MP 2024 # 301] Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $ab - ba = f \circ v$ avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

- Calculer $\det(ab - ba)$.
- Montrer que a et b sont cotrigonalisables.

Exercice 198 [X MP 2024 # 302] Soit \mathcal{A} un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par crochet de Lie : pour $M, N \in \mathcal{A}$, $[M, N] = MN - NM \in \mathcal{A}$. todo

- On suppose que, pour tout $M \in \mathcal{A}$, $N \mapsto [M, N]$ induit un endomorphisme diagonalisable de \mathcal{A} . Montrer que $\forall M, N \in \mathcal{A}$, $[M, N] = 0$.
- On suppose que $\dim \mathcal{A} \leq 3$ et que, pour tout $M \in \mathcal{A}$, $N \mapsto [M, N]$ induit un endomorphisme nilpotent de \mathcal{A} . On pose $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ et, pour $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_{j+1} = \{[M, N], (M, N) \in \mathcal{A}_j^2\}$. Montrer que $\mathcal{A}_3 = \{0\}$.

Exercice 199 [X MP 2024 # 303] Soit E un espace vectoriel de dimension n . Un drapeau de E est une famille de sous-espaces $(F_i)_{i \in [0, n]}$ telle que $F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n$.

- Soit $(F_i)_{i \in [0, n]}$ un drapeau de E . Déterminer $\dim F_k$ pour tout $k \in [0, n]$.
- On considère dorénavant deux drapeaux $(F_i)_{i \in [0, n]}$ et $(G_i)_{i \in [0, n]}$.
- Soient $i \in [1, n]$, $j_0 \in [0, n]$ tels que $F_{i-1} + G_{j_0} = F_i + G_{j_0}$. Montrer que, pour tout $j \geq j_0$, $F_{i-1} + G_j = F_i + G_j$.
- Soit $i \in [1, n]$. Montrer qu'il existe $j \in [1, n]$ tel que $F_{i-1} + G_j = F_i + G_j$.
- Montrer que l'application σ qui à i associe $\min\{j \in [1, n], F_{i-1} + G_j = F_i + G_j\}$ est une permutation de $[1, n]$.
- Montrer qu'il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que $\forall i \in [1, n]$, $e_i \in F_i \cap G_{\sigma(i)}$.
- Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique permutation $\tau \in S_n$ pour laquelle il existe deux matrices U et V triangulaires supérieures dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = U P_\tau V$ ou $P_\tau = (\delta_{i, \tau(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$, et montrer qu'on peut en outre imposer que 1 soit la seule valeur propre de U .

Exercice 200 [X MP 2024 # 304] On considère un groupe fini G et un \mathbb{C} -espace vectoriel V de dimension finie. Soit ρ un morphisme injectif de G dans $\text{GL}(V)$.

- Calculer $\text{tr}(\rho(e))$ où e est le neutre de G .
- Montrer que, pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable.

- Montrer que, si $\text{tr}(\rho(g)) = \text{tr}(\rho(e))$, alors $\rho(g) = \rho(e)$.
- Soit $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $a_m = \sum_{g \in G} f(g) (\text{tr}(\rho(g)))^m$. Démontrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m \neq 0$ lorsque $f(e) \neq 0$.
- Montrer que $\Phi: z \mapsto \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$ est une fonction rationnelle.
- On prend $G = \mathfrak{S}_3$ et $\rho: \mathfrak{S}_3 \rightarrow \text{GL}(V)$.

Montrer qu'il existe une décomposition de V sous la forme $\bigoplus_i E_i$ telle que :

- ▷ $\forall i, \forall g \in G, E_i$ est stable par $\rho(g)$
- ▷ $\forall i, \dim E_i \in \{1, 2\}$.

Exercice 201 [X MP 2024 # 305] Soit $d \geq 2$. On munit \mathbb{R}^d de sa structure euclidienne canonique. Soient $\delta_1, \delta_2 > 0$ avec $\delta_1 \neq \delta_2$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $\forall i \neq j, \|x_i - x_j\| \in \{\delta_1, \delta_2\}$. Montrer que $n \leq \frac{(d+1)(d+4)}{2}$.

Ind. Montrer que les $f_i: y \mapsto (\|y - x_i\|^2 - \delta_1^2)(\|y - x_i\|^2 - \delta_2^2)$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 202 [X MP 2024 # 306] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) \mid M^T M = nI_n\}$.

- Déterminer H_1, H_2 et H_3 .
- Soit $n \geq 4$ tel que $H_n \neq \emptyset$. Montrer que 4 divise n .
- À l'aide de $A \in H_n$, construire une matrice $B \in H_{2n}$.
- Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 3 \pmod{4}$. Montrer que H_{p+1} n'est pas vide.

Exercice 203 [X MP 2024 # 307] On munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne canonique. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ unitaire.

Soient $\sigma_u: x \mapsto x - 2\langle x, u \rangle u$ et $\Omega_u = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, \sigma_u(x) \rangle \leq 0\}$.

- Décrire et représenter Ω_u .
- Montrer que Ω_u est auto-dual, c'est-à-dire que $\Omega_u = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in \Omega_u, \langle x, y \rangle \geq 0\}$.
- On dit que $x \in \Omega_u$ est extrémal si : $\forall x_1, x_2 \in \Omega_u, x = x_1 + x_2 \Rightarrow x, x_1, x_2$ colinéaires. Quels sont les points extrémaux de Ω_u ?
- Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on dit que f est extrémal si $f(\Omega_u) \subset \Omega_u$ et, pour tous $g, h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $f = g + h, g(\Omega_u) \subset \Omega_u, h(\Omega_u) \subset \Omega_u$, on a f, g, h colinéaires.

Déterminer les endomorphismes extrémaux de rang 1.

Exercice 204 [X MP 2024 # 308] On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soient $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $r = \text{rg}(v_1, \dots, v_n)$. On cherche à quelle condition il existe une base orthonormée (f_1, \dots, f_n) de \mathbb{R}^n et un projecteur orthogonal p tels que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p(f_i) = v_i$.

- Traiter le cas $r = n$.
- On suppose dans cette question que $n = 2$ et $r = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante dans ce cas.

Exercice 205 [X MP 2024 # 309] Combien y a-t-il de matrices orthogonales de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans \mathbb{Z} ?

Exercice 206 [X MP 2024 # 310] Un produit scalaire hermitien Φ sur le \mathbb{C} -espace vectoriel E est une application $\Phi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que : $\forall y \in E, x \mapsto \Phi(x, y)$ est linéaire ; $\forall (x, y) \in E^2, \Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$; $\forall x \in E \setminus \{0\}, \Phi(x, x) > 0$. On note alors $\|x\| = \sqrt{\Phi(x, x)}$ pour $x \in E$.

- On munit \mathbb{C}^2 du produit scalaire hermitien tel que $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$. Soit T l'endomorphisme de \mathbb{C}^2 dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\{\langle Tx, x \rangle \mid x \in \mathbb{C}^2, \|x\|^2 = 1\}$.
- On munit l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ de carré sommable du produit scalaire défini par : $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$. Soit T l'endomorphisme de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui à $(u_n)_{n \geq 0}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n \geq 0}$. Déterminer $\{\langle Tu, u \rangle \mid u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|u\|^2 = 1\}$.

Exercice 207 [X MP 2024 # 311] Soient $n \in \mathbb{N}^*, a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq \dots \leq b_n$ des nombres réels, A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$ et $\chi_B = \prod_{k=1}^n (X - b_k)$. Montrer que $\text{tr}(AB) \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

Exercice 208 [X MP 2024 # 312] On munit l'espace $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E . On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u . Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle u(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$.

Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base de vecteurs propres de u .

2) Analyse

Exercice 209 [X MP 2024 # 313] Soit E un espace vectoriel normé. Que dire d'une partie A de E à la fois ouverte et fermée ?

Exercice 210 [X MP 2024 # 314] Trouver une partie A de \mathbb{R} telle que $A, A^\circ, \overline{A}, \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\overline{\overset{\circ}{A}}$ soient toutes distinctes.

Exercice 211 [X MP 2024 # 315] Soit N une norme sur \mathbb{R}^d (ou $d \geq 1$).

- Montrer que la boule unité fermée pour N est fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0.
- Soit C une partie non vide de E , fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0. Montrer qu'il existe une norme sur \mathbb{R}^d dont C est la boule unité fermée.

Exercice 212 [X MP 2024 # 316] Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Montrer que si f est continue alors le graphe de f noté Γ_f est fermé dans \mathbb{R}^2 . La réciproque est-elle vraie ?
- Montrer que si Γ_f est compact alors f est continue.

Exercice 213 [X MP 2024 # 317] Soient E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes non nuls de E .

- Trouver des propriétés de base sur A (stabilité ou symétrie).
- Montrer que, pour tout $a \in A$, $|a| < 2$.
- Montrer que $\bar{A} = [-2, -1/2] \cup \{0\} \cup [1/2, 2]$.

Exercice 214 [X MP 2024 # 318] Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

- Soit $h_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_1(f) = \sum_{\substack{p/q \in [0, 1] \\ p \wedge q = 1}} f\left(\frac{p}{q}\right) \frac{1}{q^3}$. Montrer que h_1 est bien définie et continue.
- Soient $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et $h_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_2(f) = \sup_{t \in [0, 1]} g(f(t))$. Déterminer les points de continuité de h_2 .

Exercice 215 [X MP 2024 # 319] Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f \circ f = \exp$?

Exercice 216 [X MP 2024 # 320] • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer la norme subordonnée de A relative à la norme infinie, puis à la norme 1.

- Montrer que si $\|A\|_{\text{op}, \infty} \leq 1$ et $\|A\|_{\text{op}, 1} \leq 1$, alors $\|A\|_{\text{op}, 2} \leq 1$.
- Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\inf_{B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})} \|B - A\|_{\text{op}, 2} = \sqrt{\lambda_1}$, où λ_1 est la plus petite valeur propre de AA^T .

Exercice 217 [X MP 2024 # 321] Soit (u_n) une suite réelle majorée telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$. Montrer que (u_n) est constante.

Exercice 218 [X MP 2024 # 322] On définit la suite (z_n) par $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{1}{z_n} \right)$.

- Lorsque $z_0 \in \mathbb{R}^*$, étudier l'existence de la suite (z_n) et sa convergence.
- Même question lorsque $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 219 [X MP 2024 # 323] • Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$ admet une unique solution dans \mathbb{R}_+ que l'on note a_n .

- Montrer que $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite ℓ à déterminer. Donner un équivalent de $a_n - \ell$.

Exercice 220 [X MP 2024 # 324] Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement décroissante à termes dans $]0, 1[$. Soient $\alpha > 0$ et (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(u_n^\alpha + a_n)$. Montrer qu'il existe un unique $u_0 \geq 0$ tel que la suite (u_n) converge vers un réel > 0 . Déterminer alors cette limite.

Exercice 221 [X MP 2024 # 325] • Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ avec $a \wedge b = 1$. Montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $n = au + bv$.

- Soit $(s_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose que l'ensemble $S = \{s_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est stable par produit.

Montrer que $\frac{s_{n+1}}{s_n} \rightarrow 1$ si et seulement s'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\ln(s_p)}{\ln(s_q)} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 222 [X MP 2024 # 326] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-périodique.

On définit : $\forall S \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(f, S) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(S_k)$.

- Montrer que la suite $(M_n(f, S))$ converge pour toute suite S si et seulement si f est constante.
- On dit qu'une suite réelle (u_n) est équirépartie modulo 1 lorsque pour toute fonction continue 1-périodique, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f$. Montrer que la suite (\sqrt{n}) est équirépartie modulo 1.

Exercice 223 [X MP 2024 # 327] Calculer la somme de la série de terme général $n^2 2^{-(n+1)}$.

Exercice 224 [X MP 2024 # 328] Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ injective. Nature de $\sum \frac{\varphi(n)}{n^2}$?

Exercice 225 [X MP 2024 # 329] Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Exercice 226 [X MP 2024 # 330] Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série $\sum u_n$ converge.

Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$ diverge.

Exercice 227 [X MP 2024 # 331] • Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$. On suppose que $\frac{S_n}{n u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a > 0$. Déterminer la nature de (S_n) . Donner un équivalent de $\frac{1}{u_n} \sum_{k=0}^n k u_k$.

- Soient $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $T_n = v_0 + \dots + v_n$. On suppose que $\frac{S_n}{n u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{T_n}{n v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \in \mathbb{R}_+^*$. Donner un équivalent de $\frac{1}{u_n v_n} \sum_{k=0}^n u_k v_k$. TODO

Exercice 228 [X MP 2024 # 332] Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = f(x + yf(x))$.

Exercice 229 [X MP 2024 # 333] Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(mn) = f(m) + f(n)$ pour tous $m, n \geq 1$.

- On suppose f croissante. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = c \ln n$.
- On suppose que $f(n+1) - f(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = c \ln n$.

Exercice 230 [X MP 2024 # 334] Soit E l'ensemble des $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

Si $f \in E$, on pose $\Delta(f) : x \mapsto f(x+1) - f(x)$.

- Montrer que Δ est un endomorphisme de E . Est-ce un automorphisme?!! (surjectivité? Sous la forme d'une série?)
- Soient $f \in E$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe $x_n \in]x, x+n[$ tel que $\Delta^n(f)(x) = f^{(n)}(x_n)$.

Ind. Étudier $y \mapsto f(x+y)$ et $y \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{y(y-1)\cdots(y-k+1)}{k!} \Delta^k(f)(x)$.

Exercice 231 [X MP 2024 # 335] Déterminer les $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in [0, 1], f(x) = 2(f(x/2) + f(1-x/2))$.

Exercice 232 [X MP 2024 # 336] Soient N et d deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On pose $D = \llbracket -N, N \rrbracket^d$ et on note (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{R}^d . TODO

On note $\partial D = \left\{ \sum_{i=1}^d x_i e_i ; (x_1, \dots, x_d) \in D, \exists i \in \llbracket 1, d \rrbracket, |x_i| = N \right\}$ et $\overset{\circ}{D} = D \setminus \partial D$.

Pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, on pose $\forall x \in \overset{\circ}{D}, \Delta_i u(x) = 2u(x) - u(x + e_i) - u(x - e_i)$.

On pose, pour $x \in \overset{\circ}{D}, Mu(x) = \prod_{i=1}^d \Delta_i u(x)$.

- Construire une fonction $u : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ concave, i.e. vérifiant $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \Delta_i u \geq 0$, telle que $\forall x \in \overset{\circ}{D}, Mu(x) > 0$ et $u|_{\partial D} = 0$.
Pour $f : \overset{\circ}{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fixée, on note A l'ensemble des $h : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ concaves, nulles sur ∂D et telles que $Mh \geq f$. Soit $u : x \mapsto \inf_{h \in A} h(x)$.
- Montrer que A est non vide.
- Montrer que $u \in A$ et que $Mu = f$.

Exercice 233 [X MP 2024 # 337] Si f est une fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , on note $V(f)$ la borne supérieure, dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble $\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)| ; n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq 1 \right\}$. On note VB l'ensemble des fonctions f de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telles que $V(f) < +\infty$.

- Montrer que VB est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions f de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} contenant les fonctions monotones et les fonctions lipschitziennes.
- Donner un exemple de fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} n'appartenant pas à VB .
- Montrer qu'une fonction f de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} est dans VB si et seulement si elle est différence deux fonctions croissantes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .
- Soit $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
▷ $\forall g \in [0, 1]^{[0,1]}, V(g) < +\infty \implies V(f \circ g) < +\infty$;
▷ f est lipschitzienne.

Exercice 234 [X MP 2024 # 338] 1. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

- Montrer qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$; déterminer les valeurs possibles de ℓ .
- Si $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) - \ell x$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $+\infty$ et déterminer les limites possibles.

2. Soient f, g convexes et continues sur $[0, 1]$ vérifiant $\max(f, g) \geq 0$.

Montrer qu'il existe α, β positifs et non tous nuls tels que $\alpha f + \beta g \geq 0$.

3. Soient $f_1, \dots, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convexes et continues vérifiant $\max(f_1, \dots, f_n) \geq 0$.

Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ positifs et non tous nuls vérifiant $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \geq 0$.

Exercice 235 [X MP 2024 # 339] Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer l'équivalence entre :

- f n'est pas polynomiale,
- $\text{Vect}(\{x \mapsto f(\alpha x + \beta) ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Exercice 236 [X MP 2024 # 340] Soient F un fermé de $\mathbb{R}, O = \mathbb{R} \setminus F$.

- Montrer que O est réunion dénombrable d'intervalles ouverts bornés.
- Montrer qu'il existe une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 237 [X MP 2024 # 341] On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Pour $f \in E$, soit $T(f) : t \in [0, 1] \mapsto \sup_{[0,t]}(f) - f(t)$. Soit $f \in E$.

- Montrer que $T(f)$ est continue, que $T(f) \geq 0$ et que $T(f)(0) = 0$.
- Montrer que la suite $(\|T^n(f)\|)_{n \geq 0}$ est décroissante.
- Si f est K -lipschitzienne, montrer que $T(f)$ est lipschitzienne.
- Soit $f \in E$ lipschitzienne. Montrer que $(T^n f)$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 238 [X MP 2024 # 342] Soit $f : [0, 1] \rightarrow [-a, b]$ continue, ou a et b sont dans \mathbb{R}^+ . On suppose que $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

Montrer que $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq ab$.

Exercice 239 [X MP 2024 # 343] Pour $r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $D_n(r) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos(rx) dx$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe P_n et Q_n des polynômes à coefficients entiers de degré au plus n tels que, pour tout $r \in \mathbb{R}, D_n(r) = \frac{n!}{r^{2n+1}} (P_n(r) \cos(r) + Q_n(r) \sin(r))$.
- En déduire que π est irrationnel.

Exercice 240 [X MP 2024 # 344] Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 à support compact et E l'ensemble des fonctions φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 bornées par 1. Déterminer $\sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi' ; \varphi \in E \right\}$.

Exercice 241 [X MP 2024 # 345] Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{-x} + e^{2x} |\sin x|} dx$?

Exercice 242 [X MP 2024 # 346] Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et lipschitzienne. Peut-il exister un réel x non nul tel que la série de terme general $f(nx)$ diverge ?

Exercice 243 [X MP 2024 # 347] Soit (f_n) une suite de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ convergeant uniformément vers une fonction f sur $[0, 1]$. On suppose que, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $\int_0^1 f'_n g \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Que dire de f ?

Exercice 244 [X MP 2024 # 347] Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

Exercice 245 [X MP 2024 # 348] Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - (1 - e^{-n})^x) \sim \ln(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 246 [X MP 2024 # 349] Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$. Soit m, M deux réels vérifiant : $0 < m < M$ et $m \leq |a| \leq M$. On suppose également que $m > 2$ ou $M < \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ continue et bornée vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = 1 + \frac{F(qt)}{a(t)}$.

Exercice 247 [X MP 2024 # 350] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence appartient à $]0, +\infty[$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^{n^2}$.

Exercice 248 [X MP 2024 # 351] Soit $x > 0$.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} < e^{-x} < \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} < \arctan x < \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.
- s Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k (k!)^2} < \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt < \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k (k!)^2}$.

Exercice 249 [X MP 2024 # 352] Montrer que, pour tous $r \in]0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\ln |1 - re^{i\theta}| = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(n\theta)$.

Exercice 250 [X MP 2024 # 353] Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) \geq 0$.

- On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \leq 0, f(x) = 0$.
- On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x) \leq \frac{x}{n} f'(x)$. Que peut-on en déduire ?
- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 251 [X MP 2024 # 354] Soit $(L_n)_{n \geq 0}$ définie par $L_0 = L_1 = 1$ et, si $n \geq 1, L_{n+1} = (n+1)L_n - \binom{n}{2} L_{n-2}$, avec $L_{-1} = 0$. On pose $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n}{n!} x^n$.

- Montrer que le rayon de convergence de f est strictement positif.
- Montrer que $\frac{L_n}{n!} \rightarrow 0$.
- Déterminer f . Ind. Trouver une équation différentielle vérifiée par f .
- En déduire un équivalent de $\frac{L_n}{n!}$.

Exercice 252 [X MP 2024 # 355] Une série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est dite primitive lorsqu'elle est à termes entiers et il n'existe pas d'entier $d > 1$ divisant tous les a_n .

- Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries primitives. Montrer que leur produit de Cauchy est une série primitive.
- Soit $F(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$, ou $c_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n , telle qu'il existe P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ avec $P \wedge Q = 1$ et $Q(0) = 1$, tels que, pour z voisin de 0, on ait $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que $(P, Q) \in \mathbb{Q}[X]^2$.
- s À Compléter.

Exercice 253 [X MP 2024 # 356] Soit $n \geq 2$. On pose $g_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{4k}} \binom{2k}{k}^2$. Soit K_n l'élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = K_n(x) + o(x^n)$.

- Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = g_n$.
- Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, de somme $f(z)$. On suppose que, pour $|z| < 1, |f(z)| \leq 1$. Montrer que $|\sum_{k=0}^n a_k| \leq g_n$.

Exercice 254 [X MP 2024 # 357] Déterminer la limite de la suite de terme general $u_n = n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt$.

Exercice 255 [X MP 2024 # 358] Soit $r \in]0, \pi[$. Déterminer la limite de la suite de terme general $u_n = \int_{-r}^r \frac{\sin(nt)}{\sin t} dt$.

Exercice 256 [X MP 2024 # 359] Déterminer un équivalent en 1^- de $x \mapsto \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}} dt$.

Exercice 257 [X MP 2024 # 360] Calculer $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt$.

Exercice 258 [X MP 2024 # 361] Soit $t > 0$. Our $p \in \mathbb{R}$, on pose $F_c(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos(px^2) dx$,

$F_s(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin(px^2) dx$ et $Z = F_c + iF_s$.

- Montrer que Z est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- Déterminer une équation différentielle du premier ordre satisfaite par Z .
- En déduire F_c et F_s .

Exercice 259 [X MP 2024 # 362] Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $\frac{xf'(x)}{f(x)} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

- Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $x \mapsto \frac{f(mx)}{f(x)}$ admet une limite en $+\infty$; la calculer.
- Soit $I: t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx$.
 - ▷ Montrer que I est définie sur \mathbb{R}_+^* .
 - ▷ Montrer que I admet une limite finie en $+\infty$.
 - ▷ Supposons $a < -1$. Déterminer la limite de I en 0^+ .

Exercice 260 [X MP 2024 # 363] • Soient I et J deux segments de \mathbb{R} , et $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer l'existence et l'égalité des deux quantités $\int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx$ et $\int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy$.

- Pour $\alpha \in]0, 1[$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que f^2 et f'^2 sont intégrables sur \mathbb{R} , on note $\|f\|_\alpha^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dy \right) dx$. Montrer que $\|\cdot\|_\alpha$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), (f, f') \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2\}$.

Exercice 261 [X MP 2024 # 364] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des éléments de \mathbb{R}^{+*} , f_1, \dots, f_n des fonctions dérivables de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} tendant vers 0 en $+\infty$ telles que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f'_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} f_j$. Montrer que la famille (f_1, \dots, f_n) est liée.

Exercice 262 [X MP 2024 # 365] • Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Montrer que $\int_0^\pi f^2 \leq \frac{\pi^2}{8} \int_0^\pi (f')^2$.

- Soit $f, q \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $q(x) < \frac{8}{\pi^2}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $y \in \mathcal{C}^2([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $y'' + qy = f$, $y(0) = a$, $y(\pi) = b$.

Exercice 263 [X MP 2024 # 366] Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $H(f): x \mapsto x^2 f(x) - f''(x)$, $A_-(f): x \mapsto -f'(x) + xf(x)$ et $A_+(f): x \mapsto f'(x) + xf(x)$.

- Déterminer $A_- \circ A_+$ et $A_+ \circ A_-$.
- Montrer qu'il existe une unique $\varphi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de carré intégrable, telle que $H(\varphi_0) = \varphi_0$ et $\varphi_0(0) = 1$.
- E On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = A_-^n(\varphi_0)$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(\varphi_n) = (2n + 1)\varphi_n$.
- Montrer que φ_n s'écrit sous la forme $P_n \times \varphi_0$ avec P_n polynomiale.

Exercice 264 [X MP 2024 # 367] • Soit f une fonction croissante de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que f possède un point fixe.

- On s'intéresse à l'équation différentielle $(E): x'(t) = \cos(x(t)) + \cos(t)$. On admet que, pour tout $a \in [0, \pi]$, il existe une unique solution φ_a définie sur \mathbb{R} telle que $\varphi_a(0) = a$, et de plus que s'il existe t tel que $\varphi_a(t) = \varphi_b(t)$ alors $a = b$.

Montrer qu'il existe une unique solution φ_a de (E) qui est 2π -périodique.

Exercice 265 [X MP 2024 # 368] • Soit x de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $+\infty$. On suppose qu'il existe $\tau > 0$ et $\lambda > 0$ tels qu'on ait $x'(t) + \lambda x(t - \tau) \leq 0$ et $x(t) \geq 0$ au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que $x(t - \tau) \leq \frac{4}{(\lambda\tau)^2} x(t)$ au voisinage de $+\infty$.

- Soient x de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , m et n dans \mathbb{N}^* , $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$ des réels, τ_1, \dots, τ_n , des réels strictement positifs, $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ des réels positifs.

On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i x'(t - \tau_i) + \sum_{i=1}^m \mu_i x(t - \sigma_i) = 0$.

Démontrer qu'il existe c et K réels tels que, pour t au voisinage de $+\infty$, $|x'(t)| \leq K e^{ct}$.

Exercice 266 [X MP 2024 # 369] • Soient $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et K un réel strictement positif. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leq g(t) + K \int_0^t f(u) du$.

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leq g(t) + K \int_0^t e^{K(t-u)} g(u) du$.

- Soient $A, B: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des fonctions continues, et $M, N: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $M'(t) = A(t)M(t)$, $N'(t) = B(t)N(t)$ et que $M(0) = N(0) = I_n$.

On suppose de plus que $\|A(t)\| \leq K$ et $\|A(t) - B(t)\| \leq \eta$ pour tout $t \in [0, T]$, ou K, η, T sont des réels strictement positifs, et $\|\cdot\|$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, $\|M(t) - N(t)\| \leq e^{Kt} (e^{\eta t} - 1)$.

Exercice 267 [X MP 2024 # 370] On munit \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne canonique. Soit $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale à valeurs positives.

- La fonction polynomiale P atteint-elle nécessairement un minimum?
- On suppose que $P(x, y) \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} +\infty$. La fonction polynomiale P atteint-elle nécessairement un minimum?
- On garde l'hypothèse précédente. On note $S(0, 1)$ le cercle unité. Montrer que : $\forall (x, y) \in S(0, 1), \exists C(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(tx, ty)}{t^2} = C(x, y)$.
- Montrer que C est à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} ou qu'il n'existe qu'un nombre fini de couples (x, y) tels que $C(x, y) < +\infty$.

Exercice 268 [X MP 2024 # 371] Soient $u_0, u_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer les fonctions $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telles que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$, avec $u(t = 0, \cdot) = u_0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, \cdot) = u_1$.

Ind. On utilisera la fonction $U = f \circ u$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convenable.

Exercice 269 [X MP 2024 # 372] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, \mathcal{P} l'ensemble des projecteurs orthogonaux de \mathbb{R}^n sur un sous-espace de dimension r et $p \in \mathcal{P}$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à \mathcal{P} en p .

3) Géométrie

Exercice 270 [X MP 2024 # 373] Soit P un polynôme réel de degré 6. Une droite D est tangente à la courbe C_P en trois points A, B, C d'abscisses $a < b < c$.

- On suppose que $AB = BC$. Montrer que les aires délimitées par $[BC]$ et C_P d'une part, et par $[AB]$ et C_P d'autre part, sont égales.
- On pose : $q = \frac{BC}{AB}$ et $Q = \frac{A_1}{A_2}$ avec A_1 et A_2 les aires susmentionnées. Montrer que : $\frac{2}{7}q^5 \leq Q \leq \frac{7}{2}q^5$.

Exercice 271 [X MP 2024 # 374] On se place dans le plan \mathbb{R}^2 . Soient $e_0 = (1, 0)$, $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (-1, 0)$, $e_3 = (0, -1)$ et, pour $k \geq 4$, $e_k = e_{k \bmod 4}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On écrit $P = c_0 X^n - c_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n$. On pose $M_{-1}(P) = (0, 0)$, et pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $M_k(P) = M_{k-1}(P) + c_k e_k$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit D_k la droite passant par $M_k(P)$ dirigée par e_k . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $\Delta_1(\lambda)$ la droite passant par $(0, 0)$ de pente λ , $\Delta_0(\lambda)$ la perpendiculaire à $\Delta_1(\lambda)$ et passant par $(0, 0)$ et, pour $k \geq 2$, $\Delta_k(\lambda) = \Delta_{(k \bmod 2)}(\lambda)$.

On pose $\mu_0 = (0, 0)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, μ_k est l'intersection de D_k et de la parallèle à $\Delta_k(\lambda)$ passant par μ_{k-1} .

- On suppose dans cette question que $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.
- Déterminer les racines de P .
- Pour chaque racine λ de P , construire M_3 et μ_3 .
- Que peut-on conjecturer ?
- En notant δ_k la distance algébrique selon e_k de M_k à μ_k , montrer que $M_n = \mu_n$ si et seulement si $P(\lambda) = 0$.

4) Probabilités

Exercice 272 [X MP 2024 # 375] Soient v_1, \dots, v_n des vecteurs unitaires d'un espace euclidien. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i\| \leq \sqrt{n}$.

Exercice 273 [X MP 2024 # 376] Soit E un ensemble fini. Dénombrer les triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \subset B \subset C$.

Exercice 274 [X MP 2024 # 377] Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de façon d'apparier les entiers de 1 à $2r$?

Exercice 275 [X MP 2024 # 378] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \dots + n_r$ ou $r \geq 1$ est arbitraire, et n_1, \dots, n_r sont des entiers naturels non nuls.
- On fixe $r \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \dots + n_r$ ou n_1, \dots, n_r sont des entiers naturels non nuls.

Exercice 276 [X MP 2024 # 379] Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les fonctions $f: \llbracket 0, 2N \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, 2N \rrbracket$ telles que $f(0) = f(2N) = 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, 2N-1 \rrbracket$, $|f(k+1) - f(k)| = 1$.

Exercice 277 [X MP 2024 # 380] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on note $N: \omega \mapsto \text{Card}\{n \in \mathbb{N}^*, S_n(\omega) = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- Montrer que $\mathbf{E}(N) = +\infty$.
- Exprimer $\mathbf{P}(N \geq 2)$ en fonction de $\mathbf{P}(N \geq 1)$.
- Montrer que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$.

Exercice 278 [X MP 2024 # 381] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 279 [X MP 2024 # 382] On munit \mathcal{S}_n de la loi uniforme et on considère X_n la variable aléatoire qui associe à une permutation le nombre d'orbites de cette permutation.

- Calculer $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$.
- Déterminer la fonction génératrice de X_n .
- En déduire des équivalents de $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{V}(X_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- Comment peut-on déterminer la loi de X_n ?

Exercice 280 [X MP 2024 # 383] • Déterminer le nombre de listes de k entiers non consécutifs dans l'intervalle d'entiers $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- On place aléatoirement des couples (A_i, B_i) , ou $i \in \{1, \dots, n\}$, autour d'une table ronde à $2n$ places, de sorte qu'aucun des A_i ne soit assis à côté d'un autre A_j . On cherche la probabilité p_n que A_i et B_i ne soient pas à côté. Montrer que, si la configuration des A_i est fixée, la probabilité que A_i et B_i ne soient pas à cote est inchangée. En déduire une expression sommatoire de p_n .

Exercice 281 [X MP 2024 # 384] Soit s un réel > 1 . On munit \mathbb{N}^* de la probabilité \mathbf{P}_s définie par $\mathbf{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{n^s \zeta(s)}$ pour tout $n \geq 1$. On note par ailleurs \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $p \in \mathcal{P}$ on note X_p la variable aléatoire définie sur \mathbb{N}^* telle que $X_p(n) = 1$ si p divise n , et 0 sinon.

- Montrer que les variables aléatoires X_p sont mutuellement indépendantes.
- En déduire que $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$.
- Pour $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(n)$ la plus grande puissance de p qui divise n . Déterminer la loi de v_p et étudier l'indépendance mutuelle des variables aléatoires v_p .

Exercice 282 [X MP 2024 # 385] On joue à pile ou face avec probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir pile. On découpe la succession des lancers en séquences maximales de résultats identiques. Déterminer l'espérance de la longueur de la deuxième séquence.

Exercice 283 [X MP 2024 # 386] Une grille $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t = 0$ une goutte d'eau au point $(2, n)$. à chaque instant, si elle se trouve au milieu (i.e. en un point $(2, k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se déplace à droite (resp. gauche) avec probabilité $\frac{1}{4}$; si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\frac{1}{2}$.

- Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à un instant t .
- Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

Exercice 284 [X MP 2024 # 387] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur les entiers pairs entre 2 et $2n$. Déterminer $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 1)$ et $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 2)$.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{Z} , indépendantes et identiquement distribuées. Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_m(n) = |\{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2; |X_i - X_j| \leq m\}|.$$

Montrer que $\mathbf{E}(S_m(n)) = n + n(n-1)\mathbf{P}(|X_1 - X_2| \leq m)$.

- Soit $(x_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, on pose : $s_m(n) = |\{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2; |x_i - x_j| \leq m\}|$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_2(n) \leq 3s_1(n)$.

- En déduire que, si X, Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{Z} , indépendantes et de même loi, alors $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 2) \leq 3\mathbf{P}(|X - Y| \leq 1)$.

Exercice 285 [X MP 2024 # 388] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On considère les événements : A_n : « $\sqrt{X_n}$ admet 1 pour 1er chiffre après la virgule», B_n : « $(\sqrt{X_n})$ admet 1 pour 1er chiffre», et C_n : « 2^{X_n} admet 1 pour 1er chiffre».

- Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(A_n))$.
- Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(B_n))$.
- Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(C_n))$.

Exercice 286 [X MP 2024 # 389] On dit qu'une variable aléatoire Y est k -divisible lorsqu'elle a la même loi que la somme de k variables indépendantes et identiquement distribuées.

- On suppose que $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$. Pour quels entiers $k > 0$ la variable Y est-elle k -divisible ?
- Construire une variable aléatoire Y non constante infiniment divisible.
- Soit Y une variable aléatoire bornée infiniment divisible. Montrer que Y est constante presque sûrement.

Exercice 287 [X MP 2024 # 390] Soient $\alpha > 0$ et $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $\mathbf{P}(B_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(B_i = 0) = \frac{1}{i^\alpha}$. Soit $S = \{n \in \mathbb{N}^*, B_n = 1\}$.

- Donner une condition sur α pour que S soit infini presque sûrement, puis pour que S soit fini presque sûrement.
- On suppose $\alpha < 1$. On pose $\beta > 0$ et $N = \max\{n \in \mathbb{N}^*, S \cap \llbracket n, n + n^\beta \rrbracket = \emptyset\}$. Donner des conditions sur β pour que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$ et pour que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 0$.
- Montrer que, presque sûrement, il existe un rationnel γ tel que $\lfloor \gamma^{2^n} \rfloor \notin S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 288 [X MP 2024 # 391] Soient $N \geq 1$, μ une distribution de probabilité sur $\llbracket 1, N \rrbracket$ telle que $\mu(1) > 0$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi μ . On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Soit $E = \{S_m, m \in \mathbb{N}\}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{P}(n \in E) = \sum_{k=1}^N \mu(k) \mathbf{P}(n - k \in E)$.
On pose $F: z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(n \in E) z^n$ et $G: z \mapsto \sum_{k=1}^N \mu(k) z^k$.
- On pose $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{D}, F(z) = \frac{1}{1-G(z)}$.
- Montrer que 1 est un pôle simple de F et tous les autres pôles de F ont un module strictement supérieur à 1.
- Montrer que $\mathbf{P}(n \in E) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mathbf{E}(X_1)}$.
- Et si μ n'est pas à support fini ?

III) Autres X/ENS

XENS

Exercice 289 [LY 2024 # CHRISTOPHE] Soit E un espace euclidien. Soient $X \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ et $x \in E$. On pose

TODO

$$\Pi_X(x) = \{y \in X, \forall z \in X, \|z - x\| \geq \|z - y\|\}$$

Donner une CNS sur x et X pour que $\Pi_X(x) \neq \emptyset$.

Exercice 290 [LYON 2024 # CHRISTOPHE] Soit A un ensemble quelconque. Montrer que toutes les bijections de A dans lui-même sont des produits (composees) de deux involutions.

Exercice 291 [ULSR 2024] 1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z^2}{1 - z^2}$.

2. On définit (F_n) par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $\forall n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n!}$ est-il algébrique ? Indication : écrire les sommes partielles comme des rationnels dont on majorera le dénominateur, estimer le reste et raisonner par l'absurde.

Exercice 292 [X 2024] On pose pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $H_f(x) = -f''(x) + x^2 f(x)$.

1. Montrer qu'il existe, à scalaire multiplicatif près, une unique fonction φ_0 de carré intégrable telle que $H_{\varphi_0} = \varphi_0$.
2. Construire φ_n tel que $H_{\varphi_n} = (2n+1)\varphi_n$ et $\varphi_n = P_n \varphi_0$ avec P_n polynôme de degré n .

Exercice 293 [ENS 2024] 1. Pour $a \in \mathbb{N}^*$ pair, on pose $W : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(a^k x)}{a^k}$. Montrer que W est continue.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, montrer l'inégalité $\left| \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} - \cos x \right| \leq \frac{h}{2}$.

3. En considérant les suites $(h_n = \frac{2\pi}{a^n})$ et $(h'_n = \frac{\pi}{a^n})$, ainsi que les quantités

$$\Delta_n = \frac{W(x+h_n) - W(x)}{h_n} \quad \text{et} \quad \Delta'_n = \frac{W(x+h'_n) - W(x)}{h_n},$$

montrer que pour a assez grand, la fonction W n'est dérivable en aucun point.

Exercice 294 [X 2024] Soit $N \geq 1$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes de même loi μ sur $\llbracket 1, N \rrbracket$ telle que $\mu(1) > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et $E = \{S_i, i \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1, P(n \in E) = \sum_{k=1}^N \mu(k)P(n-k \in E)$.
2. Soit $F(z) = \sum_{n \geq 0} P(n \in E)z^n$ et $G(z) = \sum_{k=1}^N \mu(k)z^k$. Montrer que $F(z) = \frac{1}{1-G(z)}$.
3. Montrer que F admet un pôle simple en 1 et que les autres pôles sont en module strictement plus grand que 1.
4. Montrer que ce résultat reste vrai si l'on remplace « $\mu(1) > 0$ » par « $\text{pgcd}\{k \mid \mu(k) > 0\} = 1$ ».
5. On décompose F en éléments simples sous la forme $F(z) = \frac{a}{1-z} + \dots$. Déterminer a .
6. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n \in E)$.

Exercice 295 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $v = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ et $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \in]0, 1[^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$. On définit $(v^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} = (v_i^{(k)})_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})^{\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} v_i^{(0)} = v_i \\ v_i^{(k+1)} = (1-t_i)v_i^{(k)} + t_i v_{i+1}^{(k)} \end{cases}.$$

Montrer que les $(v_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 296 Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ($b \neq a$) on pose pour $x \in [a, b]$ $\tau_{a,b,f}(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$ on dit que f est ε -linéaire si $|f(x) - \tau_{a,b,f}(x)| \leq \varepsilon|b-a|$ pour tout $x \in [a, b]$. Soit f 1-lipschitzienne sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c, d \in [a, b]$ tels que f est ε -linéaire sur $[c, d]$ avec $d-c > \alpha_\varepsilon(b-a)$ où α_ε une constante à déterminer.

Exercice 297 Soit $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall v \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha_v \in \mathbb{R} \text{ t.q. } A^k v \rightarrow \alpha_v e_1\}$. On pose $\varphi_v : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad A \mapsto \alpha_v$. Montrer que φ_v est continue, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 298 [ENS 2024] Soit $a > 0$ et $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Déterminer $\inf \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i^a}, y_i > 0 \text{ et } \sum y_i \leq 1 \right\}$.