Exercices 2025

Table des matières

I) ENS MP **XENS**

1) Algèbre

Exercice 1 [ENS L 2025 # 1] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un chemin auto-évitant de longueur n de $\mathbb{Z}^2$ est une suite injective de points $a_0, \ldots, a_n$ de $\mathbb{Z}^2$ telle que $a_0 = (0,0)$ et, pour tout i, $\|a_{i+1}a_i\| = 1$ pour la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$. On note A_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n.

1. Montrer que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A_{m+n} \leqslant A_m A_n$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour n assez grand, $(2+\varepsilon)^n \leqslant A_n \leqslant (3-\varepsilon)^n$.
3. Montrer que $\left(\sqrt[n]{A_n}\right)$ converge.

Exercice 2 [ENS SR 2025 # 2] Un sous-ensemble non vide S de $\mathbb{Z}$ est dit direct si, pour $x, y, s, t \in S$, la condition $x + y = s + t$ implique que $\{x, y\} = \{s, t\}$.

1. Les ensembles $\{1, 3, 6\}$ et $\{1, 3, 6, 10, 15\}$ sont-ils directs ?
2. Trouvez un ensemble infini direct.
3. Montrer qu'il existe $B > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout ensemble direct S inclus dans $[\![0, n]\!]$, on ait $|S| \leq Bn^{1/2}$,
4. Montrer qu'il existe $A > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un ensemble direct S inclus dans $[\![0, n]\!]$ tel que $An^{1/3} \leq |S|$.
   Indication : On pourra rajouter des éléments un à un à un ensemble de $[\![0, n]\!]$.
5. Existe-t-il un ensemble S direct inclus dans $\mathbb{N}$ tel que $S + S = \mathbb{N}$?
6. Existe-t-il un ensemble S direct inclus dans $\mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{N}$ soit inclus dans S+S ?
7. Existe-t-il un ensemble S direct inclus dans $\mathbb{Z}$ tel que $S + S = \mathbb{Z}$?

Exercice 3 [ENS L 2025 # 3] Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$, $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = u_n + u_{n+1}$. Montrer que, pour tout nombre premier p, p divise u_p.

Exercice 4 [ENS SR 2025 # 4] On considère la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Exprimer F_n en fonction de n.
2. Montrer que $F_{p+q} = F_p F_{q+1} + F_{p-1} F_q$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
3. Calculer $F_m \wedge F_n$ pour tous $m, n \geq 0$.

Exercice 5 [ENS L 2025 # 5] On note d_n le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $d_n = O(n^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 6 [ENS PLSR 2025 # 6] 1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 3$ [4].

2. Soient p un nombre premier et $n \geq 2$. Soit $k = \frac{(np)^p - 1}{np - 1}$.
   a) Montrer que $k \equiv 1[p]$.
   b) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si d divise k alors $d \equiv 1[p]$.
3. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo p.

Exercice 7 [ENS SR 2025 # 7] 1. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

2. Soit $n \geq 3$. On considère sa décomposition en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ où les p_i sont premiers distincts et supérieurs à 3, les α_i dans $\mathbb{N}^*$.
   On admet que, pour tout i, $(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.
   Montrer que la proportion d'éléments d'ordre pair dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est supérieure ou égale à $1 - \frac{1}{2r}$.
3. Déterminer le nombre de solutions de $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4. Caractériser les éléments $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ d'ordre $r = 2\ell$ pair tel que $x^\ell \neq -1$.

Exercice 8 [ENS PLSR 2025 # 8] Soient p un nombre premier impair, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $q = p^\alpha$ et $f : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ une fonction. Une partie D de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est dite f-génératrice si : $\forall y \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \exists n \geq 2, \exists d_1, \ldots, d_n \in D, y = f(\ldots f(f(d_1, d_2), d_3), \ldots d_n)$.

1. On considère le cas où $f : (x, y) \mapsto x - y$. Déterminer les parties f-génératrices de cardinal minimal et calculer leur nombre.

2. E Dans la suite de l'exercice, on considère le cas où $f : (x, y) \mapsto xy$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de partie f-génératrice de cardinal 1.
4. On admet que le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. Montrer qu'il existe une partie f-génératrice de cardinal 2.
5. Caractériser les parties f-génératrices de cardinal 2.

Exercice 9 [ENS L 2025 # 9] Dénombrer les morphismes de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ dans le groupe des automorphismes de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 10 [ENS P 2025 # 10] Soit A un anneau tel que tout élément de $a \in A$ est nilpotent ou idempotent, c'est-à-dire tel que $a^2 = a$.

1. Montrer que tout élément de A est idempotent.
2. Montrer que A est commutatif.
3. On suppose que A est fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Exercice 11 [ENS PLSR 2025 # 11] On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \left\{a + ib\sqrt{2}; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Rappeler la démonstration du fait que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ dont les idéaux sont principaux.
3. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
4. Trouver les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 + 2 = y^3$.

Exercice 12 [ENS PLSR 2025 # 12] Soit $(A, +)$ un groupe abélien. On dit qu'il est sans torsion lorsque $n \cdot x \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout \$x ∈ $A \setminus$ \0\$. Un ordre de groupe sur $(A, +)$ est une relation d'ordre totale $\leq$ sur l'ensemble A telle que $\forall (x, y, z) \in A^3,\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

1. Montrer que si $(A, +)$ possède un ordre de groupe alors il est sans torsion.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}^n, +)$ possède un ordre de groupe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^m$ pour un $m \in [0, n]$.

Exercice 13 [ENS PLSR 2025 # 13] Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $r \geq 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique suite presque nulle $(a_{k,r}(n))_{k\geq 0}$ telle que $n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,r}(n) r^k$ avec, $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{k,r}(n) \in [\![0, r-1]\!]$.
2. Montrer que $(a_{k,r}(n))_{n\geq 1}$ est périodique et trouver sa période.
3. Montrer que $(a_{k,r}(n^n))_{n\geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 14 [ENS PLSR 2025 # 14] On pose $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3} : x \leq y \leq z, x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.

1. Déterminer les éléments de S vérifiant $x = y$ ou $y = z$.
2. Montrer qu'une infinité d'éléments de S vérifient $x = 1$.
3. On pose $f\colon (x, y, z) \mapsto (y, z, 3yz - x)$ et $g\colon (x, y, z) \mapsto (x, z, 3xz - y)$.
   Montrer S est l'ensemble des images de $(1, 1, 1)$ par toutes les composées de f et g.

Exercice 15 [ENS PLSR 2025 # 15] 1. Soit A un anneau commutatif. Rappeler la définition d'un idéal de A.

2. Un idéal I de A dit maximal si A est le seul idéal J de A tel que $I \subsetneq J \subset A$.
   Montrer qu'un idéal maximal de A ne contient pas d'élément inversible.
3. On pose $U = \mathcal{F}(\{0, 1\}, \mathbb{R})$. Donner les idéaux maximaux de U.
4. On pose $V = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Donner les idéaux maximaux de V.

Exercice 16 [ENS PLSR 2025 # 16] Soit A un anneau commutatif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Sigma_n(A) = \{c_1^2 + \cdots + c_n^2, (c_1, \ldots, c_n) \in A^n\}$.

1. Montrer que $\Sigma_2(A)$ est stable par multiplication.
2. Est-ce que $\Sigma_3(A)$ est stable par multiplication quel que soit l'anneau A envisagé ?
3. On suppose que A est un corps de caractéristique différente de 2 et que n est une puissance de 2. Soient $c_1, \ldots, c_n$ dans A et $s = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(A)$ dont la première ligne est $(c_1 \cdots c_n)$ et qui vérifie $MM^T = M^T M = sI_n$.
4. En déduire que $\Sigma_{2^n}(A)$ est stable par multiplication.

Exercice 17 [ENS SR 2025 # 17] Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre (donc commutatif). On suppose que A est euclidien, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $t\colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\forall (a, b) \in A \times (A \setminus \{0\}), \exists (q, r) \in A^2,\ a = bq + r$ et $(r = 0$ ou $t(r) < t(b))$.
- $\forall (a, b) \in A \setminus (A \setminus \{0\})^2, t(ab) \geq t(a)$.
- Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont euclidiens, tout comme n'importe quel corps $\mathbb{K}$.
- Montrer que tout idéal de A est principal.
- On suppose que $t(1_A) = 0$. Montrer que les éléments inversibles de A sont les $u \in A \setminus \{0\}$ tels que t(u)=0.
- E On suppose dans toute la suite de l'exercice que dans l'hypothèse (i) il y a en plus unicité du couple (q,r) solution.
- Montrer que $t(a + b) \leq \max(t(a), t(b))$ quels que soient $a \in A \setminus \{0\}$ et $b \in A \setminus \{0\}$ tels que $a + b \neq 0$.
- Montrer que $A^\times \cup \{0\}$ est un sous-corps de A.
- Montrer que A est un corps ou est isomorphe à $\mathbb{K}[X]$ pour un corps $\mathbb{K}$.

Exercice 18 [ENS PLSR 2025 # 18] Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n appartienne à l'anneau $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et que x_n soit l'image de x_{n+1} par l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée font de $\mathbb{Z}_p$ un anneau contenant un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est intègre.
3. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}_p$.
4. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que p divise $P(x)$ et que p ne divise pas $P'(x)$. Montrer que P admet une racine y dans $\mathbb{Z}_p$ telle que $y_1 = \bar{x}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 19 [ENS P 2025 # 19] On considère $P = X^n - a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n \in \mathbb{R}[X]$, scindé sur $\mathbb{R}$ et de racines réelles $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\left|x_k - \frac{a_1}{n}\right| \leqslant \frac{n-1}{n}\sqrt{a_1^2 - \frac{2n}{n-1}a_2}$.

Exercice 20 [ENS 2025 # 20] Soient $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $f(\mathbb{Q}) = g(\mathbb{Q})$. Montrer que $\deg f = \deg g$.

Exercice 21 [ENS 2025 # 21] Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $m < n$. Soit $\mathcal{P}_{n,m}$ l'ensemble des polynômes complexes de degré n dont 0 est racine d'ordre m et dont les autres racines sont de module ≥ 1. Déterminer $\inf\{|z| \ ; \ z \in \mathbb{C}^*, \ \exists P \in \mathcal{P}_{n,m}, \ P'(z) = 0\}$.

Exercice 22 [ENS SR 2025 # 22] Soit $I = \{P \in \mathbb{C}[X] : \forall n \in \mathbb{Z}, \ P(n) \in \mathbb{Z}\}$. On pose $H_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ et $D_n(P) = \Delta^n(P)(0)$.

1. Montrer que $(H_n)_{n\geq 0}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que, pour tout n, $H_n \in I$.
3. sV2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(H_n) = H_{n-1}$.
4. sV2 Montrer que $I \subset \mathbb{Q}[X]$.
5. Montrer que $I = \{\sum_{i=0}^n a_i H_i \ ; \ n \in \mathbb{N}, \ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$.
6. Soient $P_1, P_2 \in I$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P_1(n)$ soit premier avec $P_2(n)$. Montrer qu'il existe $U_1, U_2 \in I$ tels que $U_1P_1 + U_2P_2 = 1$.

Exercice 23 [ENS PLSR 2025 # 23] Soit $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $C_H = \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \ MH = HM\}$.

1. Montrer que C_H est un sous-groupe infini de $GL_2(\mathbb{Z})$.
2. Montrer que $C_H = \mathbb{Z}[H] \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, où $\mathbb{Z}[H] = \{xI + yH, (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$.
3. Montrer que C_H est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ et en donner un système de générateurs.

Exercice 24 [ENS L 2025 # 24] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le signe de $\det(A^k + B^k)$.

Exercice 25 [ENS SR 2025 # 25] Soient $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ et $x_0, \ldots, x_{n-1}$ des réels > 0. On souhaite montrer que :

$$\det\left(\frac{d^j}{dx^j}(f(x)^{x_i})\right)_{0\leqslant i,j<n} = f(x)^{\sum_{0\leqslant i<n}(x_i - i)} f'(x)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{0\leqslant i<j<n} (x_j - x_i).$$

1. a) Soit $(p_j)_{0\leq j<n}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout j, p_j est de degré j et de coefficient dominant d_j. Montrer que $\det(p_j(x_i))_{0\leq i,j<n} = d_0 \times \cdots \times d_{n-1} \prod(x_j - x_i)$.
   b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $p_j \in \mathbb{R}[X]$ de degré j et de coefficient dominant $f'(x)^j$ tel que : $\forall z \in \mathbb{R}$, $\frac{d^j}{dx^j}(f(x)^z) = f(x)^{z-j}p_j(z)$.
   c) Démontrer le résultat annoncé. Que dire dans des cas particuliers ?
2. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.
   Pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, on note $c_{i,j}$ le coefficient en x^j de f^i. Calculer $\det((c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n})$.

Exercice 26 [ENS L 2025 # 26] Soit $A \in GL_3(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à A^{-1} si et seulement s'il existe $B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = BC$, $B^2 = C^2 = I_3$.

Exercice 27 [ENS P 2025 # 27] Soit $n \geq 2$. On note $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des matrices M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M\overline{M}$ appartient à $\mathbb{C}^* I_n$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $A \sim B$ s'il existe $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $A = \lambda \overline{M} B M^{-1}$. Justifier que $\sim$ induit une relation d'équivalence sur $\mathcal{R}_n$. Déterminer les classes d'équivalence sur $\mathcal{R}_n$.

Exercice 28 [ENS P 2025 # 28] On note G_n l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Soit $\Phi : G_n \to \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$ une application telle que $\forall V, W \in G_n, \ \Phi(V \cap W) + \Phi(V + W) \leqslant \Phi(V) + \Phi(W)$
et $\Phi(\{0\}) \geq 0$. Montrer qu'il existe un unique $V_0 \in G_n$ de dimension maximale tel que $\inf_{V \in G_n \setminus \{(0)\}} \frac{\Phi(V)}{\dim V} = \frac{\Phi(\hat{V}_0)}{\dim V_0}$.

Exercice 29 [ENS PLSR 2025 # 29] Soient G un groupe admettant une partie génératrice finie et H un groupe fini.

1. Montrer que l'ensemble E des morphismes de groupes de G vers H est fini.

b) Soit ψ un endomorphisme surjectif du groupe G. Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi) \subset \bigcap \mathrm{Ker}(\varphi)$.

1. On pose $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \det(M) = 1\}$.
   a) Montrer que G est un groupe multiplicatif.
   b) Montrer que G est engendré par $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   c) Montrer que tout endomorphisme surjectif du groupe G est bijectif.

Exercice 30 [ENS PLSR 2025 # 30] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\det(A) = 1$ et $\operatorname{tr}(A) = \gamma > 2$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$, on pose $(k, U) = \begin{pmatrix} A^k & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'ensemble $G_A = \{(k, U); k \in \mathbb{Z}, U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})\}$ est un groupe pour la loi de multiplication matricielle. Est-il abélien ?
2. Montrer l'existence d'un morphisme injectif de groupes de G_A dans le groupe

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Soit D_A le sous-groupe de G_A engendré par les éléments $ghg^{-1}h^{-1}$ où $(g, h) \in G_A^2$. Montrer que $D_A = \{(0, (I_2 - A)U), U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})\}$.

Exercice 31 [ENS L 2025 # 31] 1. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \dots, F_r) \in \mathbb{C}(X)^r$. On pose $M_r = (F_j^{(i-1)})_{1 \leq i,j \leq r} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}(X))$. Montrer que la famille $(F_1, \dots, F_r)$ est liée si et seulement si la matrice M_r
n'est pas inversible.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(X))$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $A^{(p)} = (A_{i,j}^{(p)})$ la matrice des dérivées $p^{\text{èmes}}$ des coefficients de A.

Montrer que les matrices $A^{(p)}$ pour $p \in \mathbb{N}$ commutent deux à deux si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $(F_1, \dots, F_r) \in (\mathbb{C}(X))^r$ et des matrices $C_1, \dots, C_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux telles que $A = F_1 C_1 + \dots + F_r C_r$.

Exercice 32 [ENS SR 2025 # 32] Soit $S = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier la diagonalisabilité de S et donner ses valeurs propres.
2. Donner une base orthonormale de vecteurs propres de S.
3. Caractériser les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par S.
4. Soient $\omega = \exp(2i\pi/n)$ et $A = \left(\frac{\omega^{jk}}{\sqrt{n}}\right)_{1 \leq j,k \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer les puissances de A. En déduire que A est diagonalisable.
5. On suppose n impair. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

Exercice 33 [ENS SR 2025 # 33] 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est suffisamment proche de M, alors N admet n valeurs propres distinctes.

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. À quelle condition la matrice $A + \varepsilon B$ admet-elle deux valeurs propres distinctes pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit ?
3. Même question en demandant que $A + \varepsilon B$ soit diagonalisable pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit.

Exercice 34 [ENS L 2025 # 34] Soient $\mathbb{K}$ un corps et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que χ_A est irréductible et qu'il existe $B \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $B^{-1}AB$ commute avec A, mais que B ne commute pas avec A. Montrer que B^2 est scalaire.

Exercice 35 [ENS L 2025 # 35] Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\operatorname{rg}(AB - BA) = 1$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

Exercice 36 [ENS PLSR 2025 # 36] Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = 1$ et $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$.

1. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ et $B = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$.
2. Pour $P, Q \in GL_2(\mathbb{R})$, on pose $\Psi_{P,Q} : M \mapsto PMQ$. On pose $\tau : M \mapsto M^T$. Soit $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ qui conserve le rang. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Psi = \Psi_{P,Q}$ ou $\Psi = \Psi_{P,Q} \circ \tau$.

Exercice 37 [ENS PLSR 2025 # 37] Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, $C \in \mathbb{C}\ \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ telle que $C = AX - XB$.

Exercice 38 [ENS PLSR 2025 # 38] Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de Bourdaud si $\chi_M = \prod (X - m_{i,i})$.

1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice de Bourdaud si et seulement si elle est trigonalisable sur K.
2. Montrer qu'une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est de Bourdaud si et seulement si elle est diagonale.
3. Est-il vrai que toute matrice de Bourdaud de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ?
4. On dit que A est normale si $A^T A = A A^T$. Déterminer les matrices réelles normales et de Bourdaud.

Exercice 39 [ENS SR 2025 # 39] Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. On pose $e^M = \begin{pmatrix} M_1 & \varphi_{A,B}(C) \\ M_2 & M_2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer M_1, M_2, M_3.
2. Montrer que $\varphi_{A,B}$ est linéaire.
3. Montrer que, si A et B sont diagonalisables, alors $\varphi_{A,B}$ l'est aussi, et préciser son spectre.
4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \frac{e^x e^y}{xy}$ si $x \neq y$, et $f(x,x) = e^x$. Montrer que fest de classe C^∞.
5. On suppose que $\varphi_{A,B}$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont distinctes. Montrer que A et B sont diagonalisables.

Exercice 40 [ENS SR 2025 # 40] Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose [A, B] = AB BA. Soit $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ stable par [,].
2. Calculer les [A,B] pour les $A, B \in \{X, Y, H\}$ où $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\rho : A \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ linéaire telle que, pour tous $A, B \in A$, $\rho([A,B]) = [\rho(A), \rho(B)]$. Montrer que $\rho(H)$ admet une valeur propre α.

Montrer que $\rho(X)(E_\alpha(\rho(H))) \subset \mathrm{Ker}(\rho(H) - (\alpha+2)I_n)$.
Montrer que $\rho(Y)$ $(E_\alpha(\rho(H))) \subset$ Ker $(\rho(H)(\alpha 2)I_n)$.

1. On suppose que, si V est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ stable par tous les $\rho(A)$, pour $A \in \mathcal{A}$,

alors $V = \mathbb{C}^n$ ou $V = \{0\}$. Déterminer les ρ possibles.

Exercice 41 [ENS U 2025 # 41] Soient k un corps de caractéristique nulle, E un k-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On écrit $\pi_u = \prod_i P_i^{n_i}$, le polynôme minimal de u, où les P_i sont irréductibles
distincts et les n_i dans $\mathbb{N}^*$. On pose $f = P_1 \times \cdots \times P_r$. On définit une suite en posant $u_0 = u$
et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n f(u_n) f'(u_n)^{-1}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie.
2. Montrer que (u_n) est stationnaire de valeur ultime $d \in \mathcal{L}(E)$ où d est un polynôme en u, u-d est nilpotent et d est annulé par f.

Exercice 42 [ENS L 2025 # 42] Déterminer le cardinal minimal p d'un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Vect}(G) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si G_1 et G_2 conviennent et sont de cardinal p, sont-ils conjugués ?

Exercice 43 [ENS L 2025 # 43] On dit que la propriété $MT(n, \mathbb{K})$ est vraie si, pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ soit diagonalisable, A et B commutent.

1. Montrer que, si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonalisables et commutent, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable.
2. On suppose que $n \geq 2$. La propriété $MT(n, \mathbb{R})$ est-elle vraie ?
3. Montrer que $MT(2, \mathbb{C})$ est vraie.
4. On suppose que $n \geq 2$. La propriété $MT(n, \mathbb{F}_2)$ est-elle vraie ?
5. Soit $p \geq 3$ un nombre premier. La propriété $MT(2, \mathbb{F}_p)$ est-elle vraie ?

Exercice 44 [ENS L 2025 # 44] Quelle est l'image de l'application $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M^{2n+1}$?

Exercice 45 [ENS SR 2025 # 45] 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB = BA. Justifier que $e^{A+B} = e^A e^B$.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$.
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ convenable, on pose $\log A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (AI_n)^k$. Pour quelles

matrices $\log A$ est-il défini ? Montrer les égalités $\exp(\log A) = A$ et $\log(\exp A) = A$. Pour chaque égalité, déterminer les matrices A qui la satisfont.

1. Montrer que, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} e^{A+B}$.

Exercice 46 [ENS PLSR 2025 # 46] Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence égal à $+\infty$.

1. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, justifier la définition de $f^*(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k$.
2. Montrer que f^* est continue.

c) On suppose que f est surjective. Montrer que f induit une surjection de l'ensemble des matrices diagonalisables sur lui-même.

1. On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda$ et $f'(z) \neq 0$. Montrer que f^* est une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lui-même.

Exercice 47 [ENS L 2025 # 47] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe un ensemble $F_n \subset \mathbb{R}^d$ de cardinal n tel que, pour toute partie G de F_n, il existe $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $G = \{x \in F_n, \langle \omega, x \rangle + b > 0\}$.

Exercice 48 [ENS P 2025 # 48] Pour $\omega \in \mathbb{R}$, on pose $R(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu. Montrer qu'il existe $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = P \begin{pmatrix} e^{tR(\omega_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{tR(\omega_r)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_{r-2r} \end{pmatrix}.$$

Exercice 49 [ENS L 2025 # 49] Soient u et v deux endomorphismes autoadjoints positifs d'un espace euclidien. Montrer que $v \circ u$ est diagonalisable.

Exercice 50 [ENS P 2025 # 50] Déterminer l'ensemble des symétries linéaires sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui fixent un hyperplan et stabilisent l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 51 [ENS P 2025 # 51] Soit $H = (H_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tous $i \ne j$, $H_{i,j} \le 0$. Si $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on dit que i et j sont connectés s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \ldots, k_m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $k_1 = i$, $k_m = j$ et, pour tout $\ell \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, $H_{k_\ell, k_{\ell+1}} \ne 0$. Montrer que i et j sont connectés si et seulement si $H^{-1}_{i,j} > 0$, où $H^{-1}_{i,j}$ est le coefficient d'indice (i,j) de H^{-1}.

Exercice 52 [ENS PLSR 2025 # 52] On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})^2$. On pose C = AB et on s'intéresse aux valeurs propres réelles de C.

1. Donner un exemple de n, A et B tels que χ_C n'admette aucune racine réelle.
2. On suppose A inversible. On note $\varphi : (\mathbb{C}^{2n})^2 \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(X, Y) = X^T A^{-1} Y$. Montrer que les sous-espaces caractéristiques $F_\lambda(C)$ de C sont deux à deux φ -orthogonaux, *i.*e. pour tous λ et μ distinctes dans $\operatorname{Sp} C$, $\forall (X, Y) \in F_\lambda(C) \times F_\mu(C)$, $\varphi(X, Y) = 0$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 53 [ENS PLSR 2025 # 53] On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure canonique d'espace euclidien orienté, et on note $\mathbf{B}$ sa base canonique.

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique endomorphisme z_u de $\mathbb{R}^3$ tel que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\det_{\mathbf{B}}(u, x, y) = \langle z_u(x), y \rangle$, et montrer qu'alors $z_u = -z_u$.
2. Soient $u \in \mathbb{R}^3$ unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$. On munit le plan $\{u\}^\perp$ de l'orientation dont les bases directes sont les bases (x,y) de $\{u\}^\perp$ telles que (x,y,u) soit une base directe de $\mathbb{R}^3$. On note $r_{u,\theta}$ la rotation de $\mathbb{R}^3$ fixant u et induisant sur $\{u\}^\perp$ la rotation d'angle de mesure θ. On note enfin p_u la projection orthogonale sur $\mathbb{R}u$. Exprimer $\operatorname{tr}(r_{u,\theta})$ en fonction de θ, et montrer que $r_{u,\theta} = (\cos\theta).\, \mathrm{id} + (1 - \cos\theta).\, p_u + (\sin\theta).\, z_u$.
3. Soient u,v des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$. On pose $\tau = \arccos(\langle u, v \rangle)$. Soit $(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que $r_{u,\varphi} \circ r_{v,\psi}$ est une rotation, et montrer qu'elle s'écrit $r_{w,\theta}$ pour un vecteur unitaire w et un réel θ vérifiant $|\cos(\theta/2)| = |\cos(\varphi/2)\cos(\psi/2) - \cos(\tau)\sin(\varphi/2)\sin(\psi/2)|$.

Exercice 54 [ENS PLSR 2025 # 54]

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables et telles que AB = BA. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales.
2. Montrer que l'application $\Phi : (S, O) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto SO \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est bien définie et bijective, et que Φ^{-1} est continue.
3. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $M_0 = M$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_{k+1} = \frac{M_k}{2}(I_n + (M_k^T M_k)^{-1})$, et étudier sa convergence.

Exercice 55 [ENS PLSR 2025 # 55] On pose $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $F = \mathcal{P}_2(V)$ l'ensemble des paires de V. Soient $E \subset F$ et $n_i = |\{j \in V,\ \{i,j\} \in E\}|$ pour $i \in V$. On définit la matrice $L = (\ell_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\ell_{i,j} = n_i$ si i=j,-1 si $\{i,j\} \in E$ et 0 sinon. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres (avec multiplicité) de L.

1. Montrer que $\lambda_1 = 0$.
2. Montrer que $\lambda_2 = \min_{X \in \{(1,\ldots,1)\}^\perp \setminus \{0\}} \frac{X^T L X}{X^T X}$.
3. Pour $S \subset V$, on note $\partial S = \{\{i,j\},\ \{i,j\} \in E \text{ avec } i \in S \text{ et } j \notin S\}$.

Montrer que $\frac{\lambda_2}{2} \leqslant \min_{\substack{S \subset V \\ 0 < |S| \leqslant \frac{n}{2}}} \frac{|\partial S|}{|S|}$.

Exercice 56 [ENS P 2025 # 56] Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on note $A \ge B$ lorsque $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on écrit $A = P \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et les $\lambda_i > 0$, et on pose, pour $r \in \mathbb{R}$, $A^r = P \operatorname{Diag}(\lambda_1^r, \ldots, \lambda_n^r) P^{-1}$; cette définition ne dépend pas de l'écriture de A sous la forme précédente.

1. Montrer que $M \mapsto M^{-1}$ est décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Est-ce que $M \mapsto M^2$ est croissante sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$?
3. Montrer que $M \mapsto M^r$ est convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque $r \in [-1, 0]$. Ceci signifie que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et tout $t \in [0, 1[$, $(tA + (1-t)B)^r \leqslant tA^r + (1-t)B^r$.

Exercice 57 [ENS PLSR 2025 # 57] On dit d'une norme $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ qu'elle est invariante orthogonalement lorsque $\forall M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\forall (P, Q) \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})^2$, $\mathcal{N}(M) = \mathcal{N}(PMQ)$.

1. Donner un exemple d'une telle norme.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $(P, Q) \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})^2$ tel que $A = PDQ$ où $D = \operatorname{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$ avec $\forall i \in [1, r]$, $\sigma_i > 0$.

3. On se donne une norme $\mathcal{N}$ invariante orthogonalement sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

On note $T(A) = \sup\{\|AX\|, \|X\| = 1\}$ où $\|\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow T(A) = \alpha\mathcal{N}(A)$.

Exercice 58 [ENS SR 2025 # 58] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur qui lui est subordonnée.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   - Que dire des valeurs propres et des espaces propres de A ?

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A.

- Soient $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \alpha \in \mathbb{R}$ et $y = Ax\alpha x$. Montrer que $\min_{1\leqslant i\leqslant r} |\lambda_i \alpha| \leqslant \frac{\|y\|}{\|x\|}$.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A. Soient enfin $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et α une valeur propre de $A + B$. Montrer que $\min_{1\leq i\leq r} |\lambda_i \alpha| \leq ||P||_{\mathrm{op}}||P^{-1}||_{\mathrm{op}}||B||_{\mathrm{op}}$.

Exercice 59 [ENS NIL 2025 # 59] Soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que SA est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 60 [ENS P 2025 # 60] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ toute application $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $q(x) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j$ pour tout $x = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ tels que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les éléments de G. Montrer que les formes quadratiques invariantes par G constituent une droite vectorielle.

Exercice 61 [ENS SR 2025 # 61] Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $\nabla_H : (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto x^T Hy$ et $Q_H : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x^T Hx$.

1. Soit $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la norme d'opérateur de H à l'aide de Q_H.
2. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de leur structure euclidienne canonique. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, comment déterminer la norme d'opérateur de A pour ces normes ?
3. Soient J, K deux ensembles finis non vides, $(a_{j,k})_{(j,k)\in J\times K} \in (\mathbb{R}^+)^{J\times K}$. On suppose qu'il existe C_1 et C_2 tels que : $\forall j \in J, \sum_{k\in K} a_{j,k} \leqslant C_1$ et $\forall k \in K, \sum_{j\in J} a_{j,k} \leqslant C_2$. On

ordonne J et K et on note A la matrice des $a_{j,k}$. Montrer que $||A||_{\mathrm{op}} \leqslant \sqrt{C_1C_2}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J = K = [1, n]$, on pose, pour $1 \leqslant j, k \leqslant n$, $a^n_{j,k} = \frac{1}{(j-k)^2}$ si $j \neq k$, et $a^n_{j,k} = 0$ sinon. On note enfin $A^n = \left(a^n_{j,k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de $(\|A^n\|_{\mathrm{op}})_{n\geq 1}$.

Exercice 62 [ENS PLSR 2025 # 62] L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée notée $\|\|_{op}$. Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, on définit le conditionnement de M comme le réel cond $(M) = ||M||_{\mathrm{op}}||M^{-1}||_{\mathrm{op}}$.

1. Calculer cond(M) dans le cas où M est symétrique définie positive.
2. Montrer que, pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $cond(M) \geq 1$ et $cond(M^T) = cond(M)$.
3. Que dire des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{cond}(M) = 1$?
4. Pour A et B dans S_n^{++}, montrer que $Cond(A + B) \leq max(Cond(A), Cond(B))$.

Exercice 63 [ENS SR 2025 # 63] On note E l'ensemble des matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in E$ si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$A = UU^T$. Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, E)$.

1. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(α) il existe $u : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, a(t) = u(t)u(t)^T$; (β) il existe $z : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, z(t)^T a(t)z(t) > 0$.

1. Soient $0 \leq b \leq c$. On suppose qu'il existe $(i, j) \in [1, n]^2$ avec $i \neq j$ tel que, pour tout $t \in [b, c], a_{i,i}(t) > 0$ et $a_{j,j}(t) > 0$. Montrer qu'il existe $z : [b, c] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in [b, c], z(t)^T a(t)z(t) > 0$ et, en outre, $z(b) = e_i, z(c) = \pm e_i$ (les e_k sont les

vecteurs de la base canonique).

1. En considérant l'ensemble des $d \geq 0$ tels qu'existe $z : [0, d] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue vérifiant $\forall t \in [0, d], z(t)^T a(t)z(t) > 0$ et $z(d) = \pm e_i$, montrer que a vérifie la propriété (α).

Exercice 64 [ENS SR 2025 # 64] Soient $n \geq 2$, $a : [0, 1] \to \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ continue et $A = \int_0^1 a(t)dt$.

1. Montrer que A appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A=0. Exprimer Ker(A).
3. Montrer que $M = \left(\frac{1}{1+i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. On suppose a à valeurs dans l'ensemble des matrices de projecteurs orthogonaux. Donner une condition pour que A soit une matrice de projecteur orthogonal.
5. Soit $\Gamma : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$. Soient $0 < \alpha < \beta$.

Montrer que $\begin{pmatrix} \Gamma(2\alpha) & \Gamma(\alpha+\beta) \\ \Gamma(\alpha+\beta) & \Gamma(2\beta) \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

1. En déduire que $\ln(\Gamma)$ est convexe

Exercice 65 [ENS P 2025 # 65] Soit $(O_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts non majorés de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $O_n \cap x\mathbb{N}$ soit infini.

Exercice 66 [ENS L 2025 # 66] Soit E un ensemble non vide. Soit $d : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $x, y, z \in E$:

- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(z, y))$.

Ainsi d est une distance sur E. Pour $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on note $B(x, r) = \{y \in E, d(x, y) \leq r\}$ la boule fermée de centre x et de rayon r. On suppose que, pour tout $x \in E$ et tous r, r' vérifiant 0 < r < r', on a $B(x, r) \subsetneq B(x, r')$. Enfin, on suppose qu'il existe une suite d'éléments de E dense dans (E,d). Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E et une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, B(z_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(z_n, r_n)$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(z_n, r_n) = \emptyset$.

Exercice 67 [ENS PLSR 2025 # 67] On note E l'ensemble des fonctions lipschitziennes 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha \in]0, 1]$ et $f \in E$, on pose

$$||f||_\alpha = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Démontrer que $\|\|_\alpha$ est une norme sur E.

1. On note $F = E \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Démontrer que F est un fermé de E pour la norme $\| \cdot \|_1$.

Exercice 68 [ENS P 2025 # 68] Soient E l'espace des suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$ nulles à partir d'un certain rang, et $T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose T continu pour la norme $\| \|_1$ et pour la norme $\| \|_\infty$. Montrer que T est continu pour la norme $\| \|_2$.

Exercice 69 [ENS SR 2025 # 69] Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

1. La forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(0)$ est-elle continue pour $\| \cdot \|_\infty$? pour $\| \cdot \|_1$? Dans chaque cas calculer l'adhérence de $\operatorname{Ker} \varphi$.
2. Soit $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f(x) \cos(2\pi x)dx$. Montrer que φ est continue pour $\| \cdot \|_1$ et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 70 [ENS L 2025 # 70] Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

$$\text{Si } a = (a_n)_{n\geq 0} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}, \text{ on pose, pour } f, g \in E, \langle f, g\rangle_a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(a_n)\, g(a_n)}{2^n}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\langle\ ,\ \rangle_a$ soit un produit scalaire sur E. On note alors $\| \|_a$ la norme associée.
2. Si $a, b \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ vérifient les hypothèses de a), donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\|\|_a$ et $\|\|_b$ soient équivalentes.

Exercice 71 [ENS NIL 2025 # 71] Soient $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{x\})$ est compact.

1. Montrer que f admet un extremum global.

Exercice 72 [ENS P 2025 # 72] Soient $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension infinie et K une partie bornée de E dont la frontière est compacte. Montrer que K est d'intérieur vide dans E.

Peut-on généraliser le résultat à n'importe quel espace vectoriel normé de dimension infinie ?

Exercice 73 [ENS P 2025 # 73] Pour x,y réels et $\varepsilon > 0$, on dit que $x \approx_\varepsilon y$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que |x-y-k|<
ε. Soient λ_1, λ_2 deux réels non nuls. Montrer que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$ si et seulement si, pour tout $(a_1, a_2) \in [0, 1]^2$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x\lambda_1 \approx_\varepsilon a_1$ et $x\lambda_2 \approx_\varepsilon a_2$.

Exercice 74 [ENS P 2025 # 74] Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 2$ et C une partie non vide, convexe et bornée de E. Montrer que la frontière de C est connexe par arcs.

Exercice 75 [ENS PLSR 2025 # 75] Soient E un espace vectoriel normé et $f : E \to E$ une application telle que f(0) = 0 et $\forall x, y \in E, ||f(x)f(y)|| = ||xy||$.

On pose, pour $x, y \in E$, ||f(x) - f(y)|| = ||x - y||. $\left\| \frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\|$.

1. Montrer que $\forall x, y \in E, df(x, y) \leq \frac{1}{2}\|xy\|$.
2. Montrer que f est linéaire si et seulement si df est identiquement nulle.
3. Trouver une fonction vérifiant les propriétés de la fonction f, non linéaire et non surjective.
    a) On suppose que f est surjective. Montrer que f est linéaire.

Exercice 76 [ENS P 2025 # 76] On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des normes $\|\|_2$ et $\|\|_\infty$. Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. Soit $F = \operatorname{Vect}(x \mapsto x^{n_k}, k \geq 0)$. À quelle condition F est-il dense dans E pour la norme $\|\|_2$? pour la norme $\|\|_\infty$?

Exercice 77 [ENS L 2025 # 77] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $D = \{\ell 2^{-k} + 2^{-k}[0, 1]; (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour tout intervalle I de D, on note $\log(I)$ la longueur de I et on pose $M_I(f) = \frac{1}{\log(I)} \int_I f$. On pose $||f|| = \sup \left\{ \frac{1}{\log(I)} \int_\Gamma |f M_I(f)| \ ;\ I \in D \right\}$.

1. On suppose ||f|| finie. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $(I,J) \in D^2$ avec $I \subset J$ tels que $\log(J) = 2^m \log(I)$. Démontrer que $|M_I(f)M_I(f)| \leq 2m||f||$

$2^m \log(I)$. Démontrer que $|M_I(f)M_J(f)| \leq 2m||f||$.

1. On suppose que ||f|| = 1 et $M_{[0,1]}(f) = 0$.

On note $F_k = \{I \in D : I \subset [0,1], M_I(f) > 5k$ et I maximal pour cette propriété$\}$. On pose $\Omega_k = \bigcup_{I \in F_k} I$ et et $\log(\Omega_k) = \sum_{I \in F_k} \log(F_I)$.

Montrer que, pour $k \geq 1$, $\log(\Omega_k) \leqslant \frac{1}{3}\log(\Omega_{k-1})$.

Exercice 78 [ENS PLSR 2025 # 78] On munit les espaces $\ell^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ et $\ell^2_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ de leurs normes usuelles $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On pose $H = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \ ; \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n^2(1+n^2) < +\infty\right\}$.

1. Définir un produit scalaire sur H. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Quelles inclusions a-t-on entre $\ell^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, $\ell^2_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ et H ? Montrer que ces inclusions sont continues (i.e. les injections canoniques sont continues).
3. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Montrer que $u \in H$ si et seulement si l'application $\mu_u : H \to H$ définie par $\forall v \in H,\ \mu_u(v) = u * v$ avec $(u*v)_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ est bien définie et continue.

Exercice 79 [ENS P 2025 # 79] On note ℓ^1 l'ensemble des suites sommables de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On munit ℓ^1 de la norme définie, pour $u = (u_n)_{n\geq 0}$, par $||u||_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. Soient $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^1 et $u \in \ell^1$. Montrer l'équivalence entre :

- la suite $(\overline{u^k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u pour la norme $\|\|_1$,
- pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n u_n^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n u_n$.

Exercice 80 [ENS L 2025 # 80] On note $S = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et $\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], S) \ ; \ \gamma(0) = \gamma(1) = 1\}$.

1. Soit $\gamma \in \Gamma$, montrer qu'il existe $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall t,\ \gamma(t) = e^{i2\pi\theta(t)}$.
2. On prend $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$. On note F la propriété : « il existe $h \in \mathcal{C}([0,1]^2, S)$ tel que $\forall x \in [0,1],\ h(x,\cdot) \in \Gamma,\ h(0,\cdot) = \gamma_0$ et $h(1,\cdot) = \gamma_1$ ». On pose $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_1 : t \mapsto e^{2i\pi t}$. Montrer que γ_0 et γ_1 ne vérifient pas F.
3. On note D le disque fermé unité de $\mathbb{C}$. Existe-t-il $f \in \mathcal{C}^0(D,S)$ telle que $f|_S = \mathrm{id}$?

Exercice 81 [ENS PLSR 2025 # 81] 1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$.

On définit par récurrence une suite (x_k) avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{k+1} = x_k \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $x_0 \in [x^*\varepsilon, x^* + \varepsilon]$, la suite (x_k) est bien définie et converge vers x^*.

1. Avec $f : x \mapsto e^x 1$, quelles sont les valeurs de $x_0 \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite (x_k)

précédente est stationnaire ? c) On revient au cas général et on suppose f" > 0 et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $x_0 \in \mathbb{R}$ la suite (x_k) est-elle stationnaire ?

Exercice 82 [ENS L 2025 # 82] Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],[a,b])$. On suppose dans les questions a) et b) que f n'a pas de point de période 2, c'est-à-dire que $\forall x \in [a,b], f(x) \neq x \Rightarrow (f \circ f)(x) \neq x$.

1. Soit $c \in [a,b]$ tel que f(c) > c. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k(c) > c$.
2. Soit $x_0 \in [a,b]$, on pose pour tout n, $x_{n+1} = f(x_n)$. Démontrer que la suite (x_n)

converge.

1. Démontrer que la suite (x_n) converge pour tout choix de x_0 si et seulement si f n'a pas de point de période 2.

Exercice 83 [ENS PLSR 2025 # 83] 1. Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\sin n}{n}, \sum \frac{\sin^2 n}{n}, \sum \frac{|\sin n|}{n}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in [1,Q]$ tels que $|qxp| \leqslant \frac{1}{Q}$.

En déduire qu'il existe une infinité de couples (p,q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x\frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$.

1. On admet que π est irrationnel. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n\sin(n)}$.

Exercice 84 [ENS P 2025 # 84] Soit (a_n) une suite de réels décroissante de limite nulle. Pour $P \subset \mathbb{N}$, on note $A(P) = \sum_{n\in P} a_n$. On suppose $A(\mathbb{N}) = A_\infty \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\{A(P),\ P \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\} = [0, A_\infty] \text{ si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Exercice 85 [ENS L 2025 # 85] 1. Pour quels réels **s** la somme $\sum_{n,m\in\mathbb{N}^*} \frac{|n-m|^s}{nm(n^2-m^2)^2}$ est-elle finie ?

b) Pour $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, on note $|n| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$.

Pour quels réels s la somme $\sum_{(n,m)\in(\mathbb{Z}^2\setminus\{0\})^2} \frac{|n-m|^s}{|n||m|(1+(|n|-|m|)^2)}$ est-elle finie?

Exercice 86 [ENS PLSR 2025 # 86] On note S l'ensemble des suites croissantes à termes dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1. Pour $a \in S$, montrer que $\varphi(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k}\right)$ appartient à]0,1].
2. Montrer que φ définit une bijection de S sur]0,1].
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in S$ pour que $\varphi(a) \in \mathbb{Q}$.

Exercice 87 [ENS L 2025 # 87] Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+*}$ décroissante de limite nulle. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une unique suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} f(n_i)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $n_{i+1} \geq \varphi(n_i)$. Montrer que $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n-1) = \sum_{i=0}^{+\infty} f\left(\varphi^i(n)\right)$, où φ^i désigne l'itérée i-ème de φ pour la composition des applications.

Exercice 88 [ENS P 2025 # 88] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

- f(x) = O(x) ;
- $\sum_{r\neq els} f(a_n)$ converge absolument pour toute série $\sum_{r\neq els} a_n$ absolument convergente à termes
- $\sum f(a_n)$ converge pour toute série $\sum a_n$ absolument convergente à termes réels.

Exercice 89 [ENS P 2025 # 89] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\sum f(a_n)$ converge pour toute série convergente $\sum a_n$ à termes réels. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$ pour x voisin de 0.

Exercice 90 [ENS SR 2025 # 90] 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec a < b et $f : [a, b] \to [a, b]$.

a) Si f est continue, montrer que f possède un point fixe.

b) Si f est croissante, montrer que f possède un point fixe.

2. Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que l'ensemble dis(f) des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
3. Construire f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{Q}$.

Exercice 91 [ENS P 2025 # 91] Trouver les $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Exercice 92 [ENS PLSR 2025 # 92] Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement égale à $+\infty$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $f^*(y) = \sup\{xy - f(x); x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}, f^*(x) < +\infty\}$ est un intervalle (éventuellement vide) sur lequel f^* est convexe.
2. Montrer que, si f est dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$, alors $f = f$.
3. On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, que f"> 0 sur $\mathbb{R}$ et que $\frac{f(x)}{|x|} \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f^* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = f'(x) \Leftrightarrow x = (f^*)'(y)$.

Exercice 93 [ENS SR 2025 # 93] Pour $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on pose $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $B_n(u_1)$ et $B_n(u_2)$ où $u_n : x \mapsto x^n$.

***b*) Montrer que, pour tout** $x \in [0, 1], \sum_{k=0}^{n} \left|x\frac{k}{n}\right| \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$.

1. En déduire que si f est M-lipschitzienne, alors $|B_n(f)(x)f(x)| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}$ pour tout x.

Exercice 94 [ENS L 2025 # 94] Trouver toutes les fonctions f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

- f est croissante, à valeurs dans [0, 1], f est continue à droite,
- $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists b_k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x)^k = f(x + b_k)$.

Exercice 95 [ENS PLSR 2025 # 95] 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|b| < \pi$.
Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + e^z = a + ib$.

1. Montrer que l'application $z \mapsto ze^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 96 [ENS P 2025 # 96] Soient $\sigma > 0$ et f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) + f(y) - f(x+y)| \leq \sigma$. Montrer que f est la somme d'une fonction linéaire $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et d'une fonction bornée par σ.

Exercice 97 [ENS L 2025 # 97] Une partie E de [0, 1] est dite négligeable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\geq 0}$ d'intervalles de [0,1] dont la réunion contient X et dont la somme des longueurs est majorée par ε. Soit f une fonction dérivable de [0,1] dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une partie négligeable E de [0,1] telle que, pour tout $x \in [0, 1] \setminus E$, on ait $f'(x) \geq 0$. Montrer que f est croissante.

Exercice 98 [ENS P 2025 # 98] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ et $(Q_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ deux familles de polynômes réels, f la fonction de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{P}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{n} P_n(x)e^{Q_k(x)}$. Montrer que si
fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1} P_k(x)\, e^{Q_k(x)}$. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors f ne possède qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 99 [ENS P 2025 # 99] Soit n un entier impair supérieur ou égal à 3. Déterminer les fonctions continues f de [0,1] dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $k \in [1, n-1]$, $\int_0^1 (f(x^{1/k}))^{n-k}\, dx = \frac{k}{n}$.

Exercice 100 [ENS P 2025 # 100] Soit $(a_k)_{k\geq1}$ une suite décroissante de réels positifs telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $ka_k \leq (k+1)a_{k+1}$. Montrer que $\int_0^\pi \max_{1\leq k\leq n}\left(a_k\frac{|\sin(kx)|}{x}\right) dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} + O(1)$.

Exercice 101 [ENS PLSR 2025 # 101] Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Quelle est la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Déterminer la vitesse de convergence.

b. On suppose désormais f 1-périodique et de classe C^2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geq 1, \left|S_n - \int_0^1 f(t)\, dt\right| \leq \frac{C}{n^2}$.

c. On suppose désormais f 1-périodique et de classe C^3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geq 1, \left|S_n - \int_0^1 f(t)\, dt\right| \leq \frac{C}{n^3}$.

d. Que dire si f est 1-périodique et de classe C^∞ ?

Exercice 102 [ENS P 2025 # 102] Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que a < b, f une fonction continue de $[a,b]\times[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, soit $I(\lambda)=\int_a^b f(t,\sin(\lambda t))\,dt$. Montrer que $I(\lambda)$ admet une limite que l'on déterminera lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice 103 [ENS SR 2025 # 103] Soient $N\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{C}^N$. Pour $y\in\mathbb{R}$, on note $e(y)=e^{2i\pi y}$.
Soit $f\colon t\in\mathbb{R}\mapsto\sum_{n=1}^N x_n e(nt)$. Soient $R\in\mathbb{N}^*$ et $(t_1,\ldots,t_R)\in\mathbb{R}^R$.

1. a) Montrer que $\sum_{r=1}^R |f(t_r)|^2\le NR\sum_{k=1}^N |x_k|^2$.
   b) Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.
2. Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $\Delta(t)=\inf_{n\in\mathbb{Z}}|n-t|$. On suppose les t_i distincts. Soit $\delta>0$ tel que $\delta\le\min_{1\le i\ne j\le R}\Delta(t_i-t_j)$. Montrer que $\sum_{r=1}^R|f(t_r)|^2\le(2N\pi+\delta^{-1})\sum_{r=1}^N|x_k|^2$.Ind. On pourra montrer que, pour une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour $a\in\mathbb{R}$ et $h>0$,

$$|g(a)|\le\frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h}|g(t)|dt+\frac{1}{2}\int_{a-h}^{a+h}|g'(t)|dt$$

.

Exercice 104 [ENS PLSR 2025 # 104] On note E l'ensemble des fonctions 1-périodiques et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $f\in E$. Pour $n\in\mathbb{Z}$, on pose $c_n(f)=\int_0^1 e^{-2in\pi t}f(t)dt$.

1. Montrer que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. On suppose que f(0)=0. Montrer qu'il existe $g\in E$ telle que $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=g(t)\,(e^{2i\pi t}-1)$.

Exercice 105 [ENS P 2025 # 105] Soient a,b> 0 et $m\in\mathbb{Z}$. Calculer $I_m(a,b)=\int_a^{+\infty}e^{-ax-\frac{b}{x}}x^{m-\frac{1}{2}}dx$.

Exercice 106 [ENS L 2025 # 106] Soit $n\ge 2$. Déterminer l'ensemble des matrices $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t^2A}dt$ converge.

Exercice 107 [ENS PLSR 2025 # 107] Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lipschitzienne. On suppose qu'il existe R > 0 tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus[-R,R]$, f(x) = 0.

1. Montrer que $\varepsilon\mapsto\int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{-\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ admet une limite en 0^+.

On note vp $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx\right)$ cette limite.

1. On note $T_f\colon x\mapsto\int_{-\infty}^{x}f(y)\ln|yx|dy+\int_x^{+\infty}f(y)\ln|yx|dy$. Justifier que T_f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose f de classe C^1. Montrer que T_f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (T_f)'(x)=\text{vp}\left(\int_{-y}^{+\infty}\frac{f(y+x)}{y}dy\right)$$

.

Exercice 108 [ENS SR 2025 # 108] 1. Pour $(p,k)\in\mathbb{N}^2$, montrer la convergence de $I_{p,k}=\int_0^1\int_0^1\frac{y^kx^p}{1xy}\,dx\,dy$ et l'exprimer sous forme de la somme d'une série numérique.

2. On note $d_n=\text{ppcm}(1,\ldots,n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $I_{p,k}\in\frac{1}{d_p^2}\mathbb{Z}$ si p > k, et $I_{p,p}\in\zeta(2)+\frac{1}{d^2}\mathbb{Z}$.
3. On pose $P_n=\frac{1}{n!}D^n(X^n(1X)^n)$. Montrer que P_n est à coefficients entiers.
4. Montrer que $I_n=\int_0^1\int_0^1\frac{(1-y)^nP_n(x)}{1-xy}dxdy$ converge, et en donner une expression simplifiée.- e) Montrer que $I_n\in\frac{1}{d^2}(\mathbb{Z}+\zeta(2)\mathbb{Z})$.

Exercice 109 [ENS L 2025 # 109] Déterminer les segments S de $\mathbb{R}$ non réduits à un point tels que l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de S dans $\mathbb{R}$ soit dense dans $(\mathcal{C}^0(S,\mathbb{R}),\|\|_\infty)$.

Exercice 110 [ENS L 2025 # 110] On note E l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant pour limites respectives 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Soient $F,G,H\in E$, avec G et H continues.
On suppose qu'il existe quatre suites réelles a,b,c,d telles que $(x\mapsto F(a_nx+b_n))_n$ et $(x\mapsto F(c_nx+d_n))_n$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$, respectivement vers G et H. Montrer qu'il existe deux réels $\lambda>0$ et μ tels que $\forall x\in\mathbb{R},\ H(x)=G(\lambda x+\mu)$.

Exercice 111 [ENS L 2025 # 111] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de [0,1] dans]0,1], convergeant simplement vers une fonction f.

1. Pour $n\ge 2$, on pose $t_n=\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^n\frac{f_i}{i}$. Montrer que la suite (t_n) converge simplement

vers f.

1. On suppose que f_0 est à valeurs strictement positives et que, pour tout $n\ge 1$, la fonction

f_n est dérivable, croissante et que $f_n'\ge\frac{nf_n}{\sigma_n}$, où $\sigma_n=\sum_{i=0}^{n-1}f_i$. On suppose également que $\sup\sigma_n(1/2)<+\infty$. Montrer que, pour tout $x\in[0,1/2[$, il existe $C_x>0$ tel que, pour tout $n\ge 1$ n assez grand, $f_n(x)\le e^{-C_xn}$.

1. On enlève l'hypothèse sur $\sigma_n(1/2)$. Montrer qu'il existe $x_0\in[0,1]$ tel que :

(i) $\forall x<x_0,\ \exists C_x>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\ge n_0,\ f_n(x)\le e^{-C_xn}$; (ii) $\forall x>x_0,\ f(x)\ge x-x_0$.

Exercice 112 [ENS P 2025 # 112] Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{4^n}\right)$.

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(\inf\{f(t),t\ge x\})=0$.

2. Montrer que $0 < \lim_{x\to+\infty}\left(\sup\left\{\frac{|f(t)|}{\ln(\ln t)},\ t \geq x\right\}\right) < +\infty$.

Exercice 113 [ENS L 2025 # 113] Soit (λ_n) une suite de réels > 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2\lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq 3\lambda_n$. Montrer que :

$$\forall \alpha > 0,\ \exists (c_1, c_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \forall t \in [1/2, 1[,\ \frac{c_1}{(1-t)^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^\alpha t^{\lambda_n} \leq \frac{c_2}{(1-t)^\alpha}$$

.

Exercice 114 [ENS SR 2025 # 114] On pose : $\forall x > 0, \eta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Montrer que η est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$. Étudier sa limite en $+\infty$.
2. Montrer que η est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $\eta(1)$.
4. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |e^z 1| \leq e^{|z|} 1$.
5. Montrer que $\eta(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Exercice 115 [ENS P 2025 # 115] 1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $L_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L_n(1) = 1$ et $(1 - X^2)L_n'' - 2XL_n' + n(n+1)L_n = 0$.

2. Montrer que $\forall x \in [-1, 1],\ \forall z \in]-1, 1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} L_n(x) z^n$.

Exercice 116 [ENS PLSR 2025 # 116] Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telles que f(1)=g(1)=1 et, pour tout $x \in [0, 1[, |f(x)| < 1$. On suppose qu'il existe C> 0 et $M \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 - f(1-x) \underset{x\to 0^+}{\sim} Cx^{1/M}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 g(x) f(x)^n dx$.

1. Déterminer un équivalent de u_n.
2. Montrer l'existence de C' tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} 1\right| \leq \frac{C'}{n}$.

Exercice 117 [ENS SR 2025 # 117] Soit $f \colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + tx\right) dt$.

1. Montrer la définition de f sur $\mathbb{R}^+$
2. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\mathrm{Re}\left[\int_0^{+\infty} \exp\left(i\left(\frac{(t+i\varepsilon)^3}{3} + (t+i\varepsilon)x\right)\right) dt\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} f(x)$.

Exercice 118 [ENS SR 2025 # 118] On note E l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable de $\mathbb{R}^{+*}$ dans C.

1. On convient que

$$\sqrt{+\infty} = +\infty$$

. Pour f continue de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{C}$, montrer que

$$\sqrt{\int_0^{+\infty} |f|^2} = \sup\left\{\int_0^{+\infty} |fg|\ ;\ g \in E \text{ tel que } \int_0^{+\infty} |g|^2 = 1\right\}$$

.

1. Soit $f \in E$. Montrer que $\Phi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x} dt$ appartient à E.

Exercice 119 [ENS P 2025 # 119] Soient $K \in \mathcal{C}^0([0, 1]^2, \mathbb{R})$ telle que $||K||_\infty < 1$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Étudier l'exis- tence et l'unicité de $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0, 1],\ g(x) \int_{\mathbb{R}}^1 K(x, t) g(t)\, dt = f(x)$.

Exercice 120 [ENS L 2025 # 120] Soient $\alpha, \theta \in]0, 1[$. Pour $f : [1, +\infty[\to [0, 1]$ continue, on pose $\|f\|_\alpha = \sup_{s\to\infty} s^\alpha |f(s)|$ et $F_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, [0, 1]),\ \|f\|_\alpha < +\infty\}$.

1. Pour $f \in F_\alpha$, on pose $T(f) : s \geq 1 \mapsto 1 - \left(1 - \frac{1}{s}\right)^\theta + \theta(s-1)^\theta \int_{-\infty}^{+\infty} (s + t - 1)^{-\theta-1} f(t) dt$.

Montrer que T est une application lipschitzienne de F_α dans F_α (pour $\|\cdot\|_\alpha$).- b) On admet que, pour tout $\alpha \in]0, 1-\theta[, T$ possède un unique point fixe $f_\alpha \in F_\alpha$. Montrer que f_α ne dépend pas de α; on le note f_0. Montrer que $\int_t^{+\infty} t^{-\theta} f_0(t) dt = +\infty$.

Exercice 121 [ENS PLSR 2025 # 121] 1. Expliciter le terme général d'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de ré- currence $na_{n+1} = (n+1)a_n$ pour tout n.

1. Résoudre x(x-1)y" + 3xy' + y = 0 sur]-1,1[.

Exercice 122 [ENS PLSR 2025 # 122] Résoudre $x^2 y'' + xy' + (x^2 1/4)y = 0$ sur $]0, 1[$.

Exercice 123 [ENS P 2025 # 123] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b, \psi \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^{+*})$ croissante. Soit $y \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ non nulle et vérifiant $y'' + \psi(x)y = 0$. Montrer que les points où |y| admet un extremum local forment une suite finie $(a_1, \ldots, a_n)$ (éventuellement vide) et que la suite des valeurs $(|y(a_1)|, \ldots, |y(a_n)|)$ est décroissante.

Exercice 124 [ENS PLSR 2025 # 124] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. On suppose que $f'' + f' + f \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
2. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré 1 ou 2 et à racines simples dans $\mathbb{C}$.

On pose $\partial_P f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que, quelle que soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \partial_P f \xrightarrow[+\infty]{} 0$ implique $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\forall (x,y,z) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})^3, \quad \begin{cases} x' + ax + by + cz \xrightarrow{+\infty} 0 \\ y' + bx + cy + az \xrightarrow{+\infty} 0 \\ z' + cx + ay + bz \xrightarrow{+\infty} 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \xrightarrow{+\infty} 0 \\ y \xrightarrow{+\infty} 0 \\ z \xrightarrow{+\infty} 0 \end{cases}$$

Exercice 125 [ENS SR 2025 # 125] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ continue. On regarde l'équation (1) : $X'(t) = A(t)X(t)$.

1. Décrire l'ensemble des solutions de (1).
2. On suppose qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $D : I \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = P^{-1}D(t)P$.

Trouver une condition sur D pour que les solutions de (1) aient une limite quand $t \to +\infty$.

Exercice 126 [ENS P 2025 # 126] Soit $n \geq 2$. Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue. On considère les solutions de l'équation différentielle $() : x'(t) = A(t)x(t)$.

1. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue et à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans $]-\infty,-1]$ telles que, pour tout t, $A(t) = PD(t)P^{-1}$. Les solutions de () ont-elles toutes pour limite 0 en $+\infty$?
2. On suppose qu'il existe $P : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients dans $]-\infty,-1]$ telles que, pour tout t, $A(t) = P(t)DP^{-1}(t)$. Les solutions de () ont-elles toutes pour limite 0 en $+\infty$?

Exercice 127 [ENS PLSR 2025 # 127] On fixe un intervalle non trivial I.- a) Soient a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Soit f une solution non nulle sur I de y" + ay' + by = 0. Montrer que les zéros de f sont isolés : pour tout zéro t_0 de f il existe un $\delta > 0$ tel que f n'ait pas de zéro dans $|t_0\delta, t_0 + \delta| \setminus \{t_0\}$.

1. Soient p_1, p_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I$, $p_1(t) \geq p_2(t)$. Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telles que $f'' + p_1 f = 0$ et $g'' + p_2 g = 0$. Soient $t_1 < t_2$ deux zéros de f entre lesquels f n'admet aucun autre zéro. Montrer qu'il existe un zéro de g dans $[t_1, t_2]$, ainsi que dans $[t_1, t_2]$.
2. Soient p,q deux fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in [0,1],\ q(t) > 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ la solution sur [0,1] de l'équation différentielle $y'' + (p(t) + \lambda q(t))y = 0$ avec la condition initiale $f_\lambda(0) = 0$ et $f'_\lambda(0) = 1$. On note N_λ le nombre de zéros de f_λ. Montrer que $\lambda \mapsto N_\lambda$ est croissante et déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3. On admet que $(x,\lambda) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mapsto f_\lambda(x)$ est continue. Montrer que l'ensemble

$\{\lambda \in \mathbb{R},\ f_\lambda(1) = 0\}$ est l'ensemble des termes d'une suite réelle strictement croissante.

1. Montrer que $(\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Exercice 128 [ENS PLSR 2025 # 128] Soit $\mu \in \mathbb{R}^+$. On considère $(E_\mu) : y''\mu(1-y^2)y' + y = 0$.

1. Résoudre (E_0).
2. Soient x_0 et x_1 deux fonctions bornées et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et $\omega_1 \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des fonctions $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables par rapport à la seconde variable telles que :
   - $\omega(\mu) = 1 + \omega_1\mu + o(\mu)$;
   - il existe $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que $\forall k \in \{0,1,2\},\ \forall (\tau,\mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ |(\partial_2)^k \varepsilon(\tau,\mu)| \leq C(\tau)\mu^2$;
   - pour $x : (\tau,\mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \varepsilon(\tau,\mu)$, la fonction $t \mapsto x(\omega(\mu)t, \mu)$ est solution de (E_μ) sur $\mathbb{R}^+$ pour μ voisin de 0.

   Calculer alors ω_1 et donner une expression explicite de x_0 et x_1 en fonction de quelques constantes inconnues.

Exercice 129 [ENS L 2025 # 129] Soit A une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, X'(t) = A(t)X(t) X(t)A(t). Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, X(t) est semblable à X(0).

Exercice 130 [ENS SR 2025 # 130] Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \frac{e^x e^y}{xy}$ si $x \neq y$ et $f(x,x) = e^x$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 131 [ENS P 2025 # 131] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $L \geq \ell > 0$ des réels. On suppose qu'en tout point de $\mathbb{R}^d$ la hessienne de f a son spectre inclus dans $[\ell, L]$. Soit $\tau \in]0, 2/L[$ ainsi qu'une suite u à termes dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \tau \nabla f(u_n)$. Montrer que u converge.

Exercice 132 [ENS PLSR 2025 # 132] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f tend vers $+\infty$ en ∞, que ∇f est lipschitzienne et que les points critiques de f sont isolés dans $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe un réel $\tau > 0$ tel que, quel que soit le choix de $a \in \mathbb{R}^d$, la suite définie par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \tau \nabla f(x_n)$ soit convergente. On commencera par le cas où $d = 1$ et $f \colon x \mapsto \frac{x^2}{2}$.

Exercice 133 [ENS L 2025 # 133] Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On pose $L = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} \in G\}$.

1. Montrer que L est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ind. Considérer $\left(e^{tA/k}e^{tB/k}\right)^k$.
2. Montrer que $\forall (A,B) \in L^2, ABBA \in L$.
3. Que peut-on dire de L pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 134 [ENS PLSR 2025 # 134] Soit $n \geq 2$ un entier. Une application f de classe C^2 définie sur un ouvert O de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si, pour tout $x \in O$, df_x est composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.

1. On suppose que n=2 et que f vérifie $\mathcal{P}$. On note $f = (f_1, f_2)$. Montrer que f_1 et f_2 sont harmoniques, c'est-à-dire que $\Delta f_1 = 0$ et $\Delta f_2 = 0$.
2. Montrer que le résultat de la question a) est faux si $n \geq 3$. On pourra considérer l'application $f : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$.

Exercice 135 [ENS P 2025 # 135] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que f est harmonique si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On dit que f est homogène de degré $\lambda \geq 0$ si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$. Soit $\lambda \geq 0$. Déterminer les fonctions harmoniques et homogènes de degré λ.

2) Géométrie

Exercice 136 [ENS L 2025 # 136] Montrer qu'il n'existe aucun triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont dans $\mathbb{N}^*$ et dont l'aire est un carré parfait non nul.

Exercice 137 [ENS P 2025 # 137] Soient a, b, c, d dans $\mathbb{R}^{+*}$. Quelle est l'aire maximale d'un quadrilatère dont les côtés successifs ont pour longueurs a, b, c, d ?

Exercice 138 [ENS PLSR 2025 # 138] 1. Quelle est l'aire maximale possible pour un rectangle de périmètre 1 ?

2. On considère un entier $n \geq 3$ et une liste strictement croissante $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ à termes dans $[0, 2\pi]$. Déterminer la valeur maximale possible pour le périmètre du polygone de sommets $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ (dans cet ordre).
3. Soit $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. On convient que $z_0 = z_n$. On définit l'aire algé-

brique du polygone $z_1 \cdots z_n$ comme $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{Re}(z_k)\,\mathrm{Im}(z_{k+1}) - \mathrm{Im}(z_k)\,\mathrm{Re}(z_{k+1}))$. On fixe un réel p> 0. Parmi les listes $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ telles que le périmètre de $z_1 \cdots z_n$ soit égal à p, déterminer celles qui maximisent l'aire algébrique du polygone associé.

3) Probabilités

Exercice 139 [ENS PLSR 2025 # 139] 1. Calculer la variance d'une variable de Poisson.

2. Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier. Calculer $\mathbf{E}(X^p$ modulo $p)$ où $X \sim \mathcal{P}(a)$.

Exercice 140 [ENS SR 2025 # 140] Soient $p \in [0, 1]$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi Bernoulli de paramètre p. On pose $S_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$, $S_{n+1} = \begin{matrix} 3S_n + 1 & \text{si } X_n = 1 \\ \frac{S_n}{2} & \text{si } X_n = 0 \end{matrix}$

1. Étudier les cas $p = 0$ et $p = 1$. On supposera que $0 < p < 1$ dans toute la suite de l'exercice.
2. Donner une formule de récurrence vérifiée par la suite $(\mathbf{E}(S_n))_{n\geq 0}$, et étudier son comportement quand $n \to +\infty$.
3. Montrer que $\mathbf{P}((S_n)_{n\geq 0}$ est bornée$) = 0$.

Exercice 141 [ENS SR 2025 # 141] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}(X_1^4) < +\infty$. On pose $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(X_1)$.

Exercice 142 [ENS L 2025 # 142] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ (resp. $(Y_n)_{n\geq 1}$) une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $T = \inf\{n \geq 2 \ ; \ X_n \notin \{X_1, \dots, X_{n-1}\}\}$ et $S = \inf\{n \geq 2 \ ; \ Y_n \notin \{Y_1, \dots, Y_{n-1}\}\}$. On suppose que $T \sim S$. Que peut-on dire du lien entre les suites (X_n) et (Y_n) ?

Exercice 143 [ENS P 2025 # 143] Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\beta > 1$. Soit $(Y_p)_{p\in\mathcal{P}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbf{P}(Y_p = k) = (1 - p^{-\beta})p^{-k\beta}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathcal{P}$. On pose $Z = \sum_{n\in\mathcal{P}} Y_p \ln p$ et $X = \exp Z$.

1. Donner la loi de X.
2. En déduire que $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^\beta} = \frac{1}{\zeta(\beta)}$ où μ est la fonction de Möbius, définie par $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré > 1, et $\mu(n) = (-1)^m$, où m est le nombre de ses facteurs premiers, sinon.

Exercice 144 [ENS L 2025 # 144] Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ et tout $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \{\pm 1\}^{n^2}$, il existe $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\{\pm 1\}^n$ tels que $\sum_{1\leq i\leq n} a_{i,j}x_iy_j \geq Cn^{3/2}$.

Exercice 145 [ENS MP 2025 # 145] Soient $\theta \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathbf{P}(X > 0) > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(X \geq \theta\,\mathbf{E}(X)) \geq \frac{(1-\theta)^2\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

Exercice 146 [ENS P 2025 # 146] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble de cardinal n. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur S_n. Si $i, j \in [1, n]$, on pose $e_ie_j = e_{\sigma_i(j)}$. Montrer que la probabilité que $(E,)$ soit un groupe, sachant que admet un neutre, tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 147 [ENS L 2025 # 147] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_n = e_i) = \mathbf{P}(X_n = -e_i) = \frac{1}{2d}$ pour $1 \leq i \leq d$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_k$ et $S_0 = 0$.
Soit $T = \inf\{n > 0, S_n = 0\}$ et $p_d = \mathbf{P}(T < +\infty)$. On admet que $p_d < 1$ pour $d \geq 3$. Montrer que $p_d \to 0$ lorsque $d \to +\infty$.

Exercice 148 [ENS P 2025 # 148] Soient $p \in]0, 1/2[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telle que $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_n = -1) = p$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer 1'existence de $c, C_1, C_2 > 0$ tels que $\forall u \geq 0,\ C_1e^{-cu} \leq \mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1} S_n \geq u\right) \leq C_2e^{-cu}$.

Exercice 149 [ENS PLSR 2025 # 149] 1. Soit X une variable aléatoire réelle et s > 0 tel que $\mathbf{E}(e^{sX})$ soit finie. Démontrer que $\forall a > 0, \mathbf{P}(X \geq a) \leq e^{-sa}\mathbf{E}(e^{sX})$.

2. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variable aléatoires i.i.d. à valeurs dans [0, 1].

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Démontrer que $\forall t > 0, \mathbf{P}(|S_n - \mathbf{E}(S_n)| \geq t) \leq 2e^{-t^2/(2n)}$.

Exercice 150 [ENS PLSR 2025 # 150] Soit $(E, \mathcal{P}(E))$ un espace probabilisable avec E dénombrable.

1. Rappeler la définition d'une probabilité sur cet espace.
2. Pour A et B probabilités sur cet espace, on pose $d(A,B) = \max_{S \subset E} A(S)B(S)$. Montrer que $d(A,B) = \frac{1}{2}\sum_x |A(\{x\}) - B(\{x\})|$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans E de lois respectives A et B. Montrer que $P(X \neq Y) \geq d(A,B)$.
4. Les deux lois A et B étant fixées, montrer qu'on peut construire X et Y de façon à assurer l'égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 151 [ENS PLSR 2025 # 151] Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans [0, n]. On pose $p_k = \mathbf{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbf{P}(Y = k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et $d(p,q) = \max_{S \subset [\![0,n]\!]} \overline{\mathbf{P}}(X \in S) - \mathbf{P}(Y \in S)$.

1. Montrer que $d(p,q) \geq 0$. Que dire si d(p,q) = 0 ?
2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Comparer $\mathbf{E}(\varphi(X))$ et $\varphi(\mathbf{E}(X))$.
3. On suppose de plus qu'il existe au moins deux éléments k de [0,n] tels que $p_k > 0$. On suppose de plus que φ strictement convexe, c'est-à-dire telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in]0,1[\ \ x \neq y \Rightarrow \varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$. Montrer que $\mathbf{E}(\varphi(X)) > \varphi(\mathbf{E}(X))$.
4. On suppose que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ p_k > 0$ et $q_k > 0$. On pose $H(p,q) = \sum_{k=0}^n p_k \ln\left(\frac{p_k}{q_k}\right)$.

Montrer que $H(p,q) \geq 0$. Que dire si H(p,q) = 0 ?

Exercice 152 [ENS L 2025 # 152] On considère $r_0 = 0$ et $(r_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$. Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose $p_{i,j} = r_i$ si $j = i+1, 1-r_i$ si $j = i-1$ et 0 sinon.On admet l'existence d'une famille de variables aléatoires $(X_k^i)_{(i,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$ telles que

- $X_0^{i_0} = i_0$ p.s. pour tout $i_0 \in \mathbb{N}^*$,
- $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_k^{i_k} = i_{k-1})\right) = \prod_{i=1}^n p_{i_{k-1}, i_k}$ pour tout $(i_0, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^{*k+1}$.

On pose, pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, $\tau_j^i = \inf\{k \in [\![0, +\infty]\!],\ X_k^i = j\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Soit $b \in \mathbb{N}$. Calculer, pour $i \in [0, b]$, $\hat{p_i} = \mathbf{P}(\tau_0^i < \tau_b^i)$ en fonction des $\gamma_k = \prod_{i=1}^k \frac{1-r_i}{r_i}$.

Exercice 153 [ENS PLSR 2025 # 153] Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes et $X_0 = k \in \mathbb{Z}$ (constante). On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_0 + \cdots + X_n$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$. Que dire de la loi de $(S_n)_{n \geq m}$ conditionnée par $(S_1 = k_1, \dots, S_m = k_m)$?
3. Soient $k, N \in \mathbb{N}^*$ avec $N \geq k$. On considère que la marche aléatoire s'arrête dès que $S_n = 0$ ou $S_n = N$. On admet que l'arrêt est presque sûr. Déterminer la probabilité p_k que la marche s'arrête sur 0 en partant de k.
4. Déterminer le temps moyen d'arrêt (en 0 ou N cette fois) en partant de k.

Exercice 154 [ENS P 2025 # 154] On considère n variables aléatoires de Rademacher indépendantes $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$. Montrer que, pour tout réel p > 0, il existe $(c_p, C_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que,
pour tout

$$(z_1, \dots z_n) \in \mathbb{C}^n$$

, $c_p \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 155 [ENS L 2025 # 155] Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X_n = -k) = ce^{-|k|}$ où c est à déterminer. Déterminer la loi du rayon de convergence de la série entière aléatoire $\sum X_n z^n$.

Exercice 156 [ENS P 2025 # 156] Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de [0,1]. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_n le graphe aléatoire G_{n,p_n} d'Erdös-Renyi, c'est-à-dire un graphe aléatoire de sommets [1,n] et une famille $(X_{\{i,j\}})_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2([1,n])}$ de variables de Bernoulli i.i.d. de paramètre p_n, avec $X_{\{i,j\}} = 1$ si et seulement s'il existe une arête reliant i et j. On note I_n le nombre de sommets isolés $de G_n$.

1. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geq (1+\varepsilon)\frac{\ln(n)}{n}$. Montrer que $\mathbf{P}(I_n \geq 1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
2. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leq (1-\varepsilon)\frac{\ln(n)}{n}$. Montrer que $\mathbf{P}(I_n \geq 1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 157 [ENS L 2025 # 157] Montrer qu'il existe un réel c> 0 vérifiant la condition suivante : quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelle que soit S partie non vide de $\mathbb{U}_n$, il existe un entier naturel $p \leq \frac{cn}{|S|}$ ainsi
qu'une p-liste $(z_1, \dots, z_p)$ d'éléments de $\mathbb{U}_n$ telle que $|\bigcup_{k=1}^p z_k S| \geq \frac{n}{2}$.

Exercice 158 [ENS PLSR 2025 # 158] Soit $p \in [0, 1/2]$. On fixe une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ et telles que $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = p$ et $P(X_1 = 0) = p$
valeurs dans

$$\{-1, 0, 1\}$$

et telles que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = 1) = 1 - 2p$. Pour $b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(b,a,n) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k = b\right)$.

1. On suppose $a = 2^{k-1}$. Calculer P(0, a, n) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose p = 1/4 et $a = (1)_{k \in \mathbb{N}}$. Calculer P(0, a, n) pour tout $n \in N$.
3. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles $b \mapsto P(b,a,n)$ est maximale en 0 pour tout $a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$.

Exercice 159 [ENS PLSR 2025 # 159] Soit $n \geq 3$. Une alpiniste dispose de n lieux possibles pour planter sa tente, lieux numérotés de 1 à n. Elle peut visiter chacun de ces lieux successivement, à partir du numéro 1, et doit décider si elle y plante sa tente. Lorsqu'elle visite le lieu k, elle peut savoir si elle préfère ce lieu à tous les lieux précédemment visités, mais ne sait pas si elle le préfère aux lieux non encore visités. Une fois un lieu visité, si l'alpiniste a refusé d'y installer sa tente elle ne pourra plus revenir sur ce lieu. L'alpiniste a pour objectif de maximiser la probabilité d'avoir choisi celui des n lieux qui a sa préférence parmi les n lieux.

1. Déterminer une stratégie optimale pour l'alpiniste lorsque n=3.
2. On fixe un $k \in [0, n-1]$. L'alpiniste suit la stratégie décrite ci-après : elle visite automatiquement les k+1 premiers lieux ; étant donné $\ell \in [k+1, n-1]$, si l'alpiniste visite le ℓ-ième lieu alors elle l'écarte si et seulement s'il n'a pas sa préférence parmi tous les lieux déjà visités. Déterminer la probabilité $p_{n,k}$ pour que l'alpiniste s'installe sur le lieu ayant sa préférence parmi les n lieux.
3. On fixe un k_n maximisant $p_{n,k}$ lorsque k parcourt $[0, n-1]$. Étudier le comportement asymptotique de k_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 160 [ENS L 2025 # 160] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles discrètes. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $f_n(t) = \frac{1}{n}\left|\{k \in [1, n], X_k \leq t\}\right|$. Montrer qu'il existe une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{P}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\right)$
0 pour tout réel $\varepsilon > 0$.

Exercice 161 [ENS L 2025 # 161] Pour deux variables aléatoires réelles bornées X et Y, sur des espaces probabilisés a **priori** distincts, on note $X \leq_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leq \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On se donne, sur un espace probabilisé, deux suites $(M, X_1, X_2, \dots)$ et $(N, Y_1, Y_2, \dots)$ de variables aléatoires indépendantes bornées vérifiant les conditions suivantes :

- les X_n, où $n \in \mathbb{N}^*$, sont identiquement distribuées et positives ;
- les Y_n, où $n \in \mathbb{N}^*$, sont identiquement distribuées et positives ;
- M et N sont à valeurs dans $\mathbb{N}$:
- $M \preccurlyeq_c N$ et $X_1 \preccurlyeq_c Y_1$.

On pose $S = \sum_{k=1}^{M} X_k$ et $T = \sum_{k=1}^{N} Y_k$. Montrer que $S \preccurlyeq_c T$.

Exercice 162 [ENS L 2025 # 162] Soient E une partie bornée et au plus dénombrable de $\mathbb{R}^+$, et $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux lois de probabilité sur E. Déterminer, en fonction de ces lois, la plus petite constante $K_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ telle que, pour tout couple (X,Y) de variables aléatoires réelles à valeurs dans E telles que $X \sim \mathcal{L}$ et $Y \sim \mathcal{L}'$, on ait l'inégalité $\mathbf{E}(XY) \leq K_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$.

Exercice 163 [ENS SR 2025 # 163] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbf{E}\left(\|X\|^2\right) < +\infty$. On note $C(X) = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de covariance.

1. Que dire de C(X) si les X_i sont indépendantes ?
2. Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $Y = \langle v, X\rangle$. Exprimer $\mathbf{V}(Y)$ en fonction de C(X).
3. On suppose les X_i centrées. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Z = AX. Exprimer $\mathbf{E}(\|Z\|^2)$ en fonction de C(X).
4. Caractériser les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un vecteur aléatoire X tel que A = C(X).
5. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $P(X \in H) = 1$ si et seulement si $H^\perp \subset \mathrm{Ker}(C(X))$.

Exercice 164 [ENS SR 2025 # 164] Soit $\alpha > 0$. On considère l'équation différentielle () : $(y' = -x, x' = \alpha^2 y)$ avec $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

1. Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est fixé, justifier l'existence et l'unicité d'une solution de () vérifiant $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Pour cette solution, on pose $I(t) = y^2(t)$ et $J(t) = \alpha^2 x^2(t)$.
2. Montrer que les applications $T \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt$ et $T \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T J(t)dt$ admettent une

limite finie en $+\infty$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires x_0, y_0 indépendantes à valeurs dans $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}\left(x_0 = \frac{k}{N}\right) = \mathbf{P}\left(y_0 = \frac{k}{N}\right) = \gamma_N \exp\left(-(k/N)^2\right)$.
   a) Justifier l'existence de $\gamma_N \in \mathbb{R}^+$ pour lequel ces conditions définissent la loi des deux variables aléatoires.
   b) On fixe t et on considère, pour $N \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $f_N(t) = I(t) + J(t)$ (les fonctions I et J sont associées aux variables aléatoires x_0 et y_0). Montrer que $\mathbf{E}\left(e^{-f_N(t)}\right)$ possède une limite quand $N \to +\infty$.

II) X MP **XENS**

1) Algèbre

Exercice 165 [X MP 2025 # 256] Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre réel $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ est-il rationnel ?

Exercice 166 [X MP 2025 # 257] On étudie l'équation $x^2 + y^2 = N(1 + xy)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, où $N \in \mathbb{N}$.

1. Traiter les cas x = y, N = 0, N = 1.- b) On suppose $N \geq 2$ et on se donne (x,y) solution avec $x \neq y$. Montrer qu'on peut se ramener à $x > y \geq 0$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que (y, z) soit solution et tel que y > z.

En déduire que N est un carré parfait.

1. On considère maintenant l'équation $x^2 + y^2 = -N(1 + xy)$ dans $\mathbb{Z}^2$. En adaptant la méthode précédente, trouver tous les couples solutions.

Exercice 167 [X MP 2025 # 258] Soient $a \in \mathbb{N}$ avec $a \geq 2$ et $P = X^2 + X + a$. On suppose que, pour tout $n \in [0, a-1]$, P(n) est premier. Soit $k \in [1, a-2]$.

1. Montrer que si k+1 est un carré alors P(a+k) n'est pas premier.
2. Montrer que si P(a+k) n'est pas premier alors k+1 est un carré.

Exercice 168 [X MP 2025 # 259] 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 1-périodique. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} f(x+ka) \leq \sum_{k=0}^{n} f(y+ka)$. Montrer que f est constante.

2. Soient p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valuation p-adique de n !.
3. Soient $m, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{\prod_{j=1}^{m} \binom{2jk}{jk}}{\prod_{j=1}^{m} \binom{2j}{j}} \in \mathbb{N}$.

Exercice 169 [X MP 2025 # 260] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour une partie I de [1, n], on appelle composante de I tout sous-ensemble maximal de I formé d'entiers consécutifs. On note c(I) le nombre de composantes de I.

1. Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est dite i-adaptée lorsque, pour tout $i \in I$, les entiers $\sigma(i)$ et $\sigma(i+1)$ sont consécutifs. Dénombrer les permutations I-adaptées en fonction de |I| et c(I).
2. Soient $c \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, n]$. Dénombrer les parties I de [1, n] telles que |I| = p et c(I) = c.

Exercice 170 [X MP 2025 # 261] Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'entiers relatifs. On dit que les deux séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ sont congrues modulo m si $a_n \equiv b_n \mod m$ pour tout $n \geq 0$. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \mod m$.

1. Soit p un nombre premier. Montrer que $(e^z - 1)^{p-1} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{z^{n(p-1)}}{(n(p-1))!} \mod p$.
2. Soit m > 4 un entier non premier.

Montrer que m divise (m-1) !, et que $(e^z-1)^{m-1} \equiv 0 \mod m$.

Exercice 171 [X MP 2025 # 262] Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est dit maximal lorsque $H \neq G$ et aucun sous-groupe de G n'est compris strictement entre H et G. Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \varepsilon(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe maximal de $\mathcal{S}_n$.
2. Soit $k \in [1, n]$. Montrer que $\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \sigma(k) = k\}$ est un sous-groupe maximal de $\mathcal{S}_n$.
3. On suppose que G est fini, et on se donne un sous-groupe H de G tel que $\frac{|G|}{|H|}$ soit un nombre premier. Montrer que H est maximal.

Exercice 172 [X MP 2025 # 263] Soit φ un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Z}$ nul sur l'ensemble $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ des suites presque nulles. Montrer que φ est nul.

Exercice 173 [X MP 2025 # 264] On pose

$$\alpha = \frac{12+5i}{13}$$

.

1. Montrer que α n'est pas une racine de l'unité.
2. Le nombre α est-il racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$? dans $\mathbb{Z}$?
3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que α soit racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers dont toutes les racines complexes sont de module 1. Montrer que α est racine de l'unité.

Exercice 174 [X MP 2025 # 265] 1. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, $z \in \mathbb{C}$ une racine de $A = P^2 + Q^2$. Est-ce que z est racine de $B = P'^2 + Q'^2$? Que dire si z est racine multiple de A ?

a) Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, P s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si

$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

1. Montrer que tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$ si et seulement s c) Montrer que tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Est-ce que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ peut s'écrire $U^3 + V^3$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$? Ind. Montrera que le plus petit facteur premier p de P(a+k) est supérieur ou égal à a, puis que P(a+k-p)=p.

Exercice 175 [X MP 2025 # 266] On admet le résultat suivant. Soient $c \in \mathbb{C}$, U un voisinage de c dans $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de c et telle que $f(z) = O((z-c)^k)$. Alors il existe r > 0 et $z_1, \ldots, z_{2k} \in U$ distincts tels que : $\forall i \in [1, 2k], f(z_i) \in \mathbb{R}$ et $|c - z_i| = r$.

1. Soient $A, B \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que les polynômes non nuls de $\mathrm{Vect}(A, B)$ sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'entre deux racines de A (au sens large) se trouve au moins une racine de B.
2. Démontrer le résultat admis.

Exercice 176 [X MP 2025 # 267] Soient $F \in \mathbb{R}(X)$, $A = \{x \in \mathbb{Q}, F(x) \in \mathbb{Q}\}$ et $A' = \{x \in \mathbb{Z}, F(x) \in \mathbb{Z}\}$.

1. On suppose A infini. Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.
2. On suppose A' infini. Que peut-on dire de F ?

Exercice 177 [X MP 2025 # 268] Soit $f = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ un polynôme de degré n à coefficients entiers et dont toutes les racines complexes appartiennent à $\mathbb{Q}^*$. On pose $H = \max(|c_0|, \ldots, |c_n|)$.

1. Montrer que pour le complexe i on a $|f(i)|^2 \leq H^2\left(\frac{n^2}{2}+n+1\right)$.
2. Montrer que $|f(i)| < 2^n$.
3. En déduire que si $n \geq 10$ alors $n \leq 5\log_2(H)$.

Exercice 178 [X MP 2025 # 269] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 179 [X MP 2025 # 270] Soient A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $k = \dim \mathrm{Ker}(AB)$. Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de $\mathrm{Ker}(BA)$?

Exercice 180 [X MP 2025 # 271] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C_n = \{-1, 1\}^n$. On pose $H = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ f(C_n) = C_n\}$. Montrer que H est un groupe pour la loi de composition et déterminer son cardinal.

Exercice 181 [X MP 2025 # 272] Soient $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que la matrice $A = XY + YX - \mathrm{tr}(X)Y - \mathrm{tr}(Y)X + (\mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y) - \mathrm{tr}(XY))I_2$ est nulle.

Exercice 182 [X MP 2025 # 273] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ tels que P soit scindé à racines simples, $\deg P = n$ et $\deg Q \leq n$. On admet qu'il existe une matrice $B = (b_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ avec $x \neq y$, on ait

$$\frac{P(x)Q(y) - P(y)Q(x)}{x - y} = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} b_{i,j} x^i y^j$$

.

Montrer que dim Ker $B = |\{z \in \mathbb{C},\ P(z) = Q(z) = 0\}|$.

Exercice 183 [X MP 2025 # 274] Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u et v dans $\mathcal{L}(E)$, $c = u \circ v - v \circ u$, on suppose $\mathrm{rg}\, c = 1$.

1. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de c est égale à $E_{n-1,n}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\mathrm{Im}\, c) \subset \mathrm{Ker}\, c$.
3. Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E non trivial tel que $u(F) \subset F$. Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Étudier la réciproque.

Exercice 184 [X MP 2025 # 275] On fixe un entier $n \geq 1$ et, pour $k \in [1, n]$, on note $\mathcal{R}_k$ l'ensemble des matrices de rang k de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{R}_1 = \{XY^T, (X, Y) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^2\}$.
2. Montrer que $\mathcal{R}_2$ est l'ensemble des matrices de la forme $X_1Y_1^T + X_2Y_2^T$ avec (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) couples libres de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $M \in \mathcal{R}_1$. Décrire l'ensemble des couples $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $M = XY^T$.
4. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ conservant le rang.

Soient X_1, X_2, Y_0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et P_1, P_2, Q_1, Q_2 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\varphi(X_1Y_0^T) = P_1Q_1^T$ et $\varphi(X_2Y_0^T) = P_2Q_2^T$, avec (P_1, P_2) libre. Montrer qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $Q_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \varphi\left(XY_0^T\right) = AXQ_0^T$.

Exercice 185 [X MP 2025 # 276] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Pour $k \in [0, n]$, on pose $N(k) = \{N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \forall i, j \in [1, n], i > j - k \implies N_{i,j} = 0\}$ et $T(k) = \{I_n + N; N \in N(k)\}$.

1. Montrer que, pour tout $k \in [0, n]$, $T(k)$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. Construire pour, $k \in [\![0, n-1]\!]$, un morphisme de groupes $\varphi_k : T(k) \to G(k)$ où $G(k)$ est un groupe abélien bien choisi tel que $Ker(\varphi(k)) = T(k+1)$.
3. Pour un groupe G, on note $D(G)$ le sous-groupe engendré par $\{ghg^{-1}h^{-1}; g, h \in G\}$. Montrer que $T(0)$ est résoluble i.e. qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $D^q(T(0)) = \{I_n\}$.

Exercice 186 [X MP 2025 # 277]

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux distincts. Montrer que l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $X^2 = D$ est fini non vide, déterminer son cardinal.
2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = I_n + N$.

Exercice 187 [X MP 2025 # 278] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $R(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^2 = A\}$.

1. Déterminer le cardinal maximal d'une famille de matrices de $R(I_n)$ non semblables deux à deux à deux.
2. On suppose A diagonalisable avec n valeurs propres distinctes. Déterminer le cardinal de $R(A)$.
3. Est-il vrai que, si A est diagonalisable, toutes les matrices de $R(A)$ le sont ?
4. Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet-elle une racine carrée ?
5. On pose $U_n = \{I_n + N, N \text{ nilpotente}\}$. Montrer que toute matrice A de U_n admet une unique racine carrée dans U_n.

Exercice 188 [X MP 2025 # 279] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{IA} = \sup\{r \in \mathbb{N}; \exists A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall i, A_i^2 = I_n \text{ et } \forall i \neq j, A_iA_j = -A_jA_i\}$.

1. Si n est impair, montrer que $\mathcal{IA}(n) = 1$.
2. Soient $s, t \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{IA}(2^s(2t+1)) = 2s + 1$.

Exercice 189 [X MP 2025 # 280]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x, Ax, \ldots, A^{n-1}x)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

2. Soient

$$b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$$

et $M = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$.

- À quelle condition la matrice M est-elle diagonalisable ?
- À quelle condition existe-t-il $x \in \mathbb{R}^3$ tel que (x, Mx, M^2x) soit une base de $\mathbb{R}^3$?
- On suppose que $b_1b_2b_3 = 1$. Montrer qu'il existe un unique $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que M soit semblable à la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 190 [X MP 2025 # 281] $ $ Soient V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$.

1. On suppose que G = GL(V). Que vaut Vect(G) ? La réciproque est-elle vraie ?

On suppose maintenant que, pour tout $g \in G$, g id est nilpotent.

1. Quels sont les éléments diagonalisables de G ?
2. On suppose que G est fini et que $Vect(G) = \mathcal{L}(V)$. Quelle est la dimension de V ?
3. Si G n'est plus fini mais que $Vect(G) = \mathcal{L}(V)$, quelle est la dimension de V ?

Exercice 191 [X MP 2025 # 282] 1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R > 0. Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice complexe dont les valeurs propres sont de module strictement inférieur à R. Montrer que $\sum a_n M^n$ converge.

2. Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R> 0 telle que, pour toute matrice M à spectre inclus dans $\overline{D(0,R)}$ et admettant une valeur propre de module R, la série $\sum a_n M^n$ diverge ?
3. Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R> 0 telle que, pour toute matrice M à spectre inclus dans $\overline{D(0,R)}$ admettant une valeur propre de module R, la série $\sum a_n M^n$ converge ?d) Soit $f\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R > 0.

On pose

$$f^{(k)} : z \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^n.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_M = \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont distincts et de module $< R$ et les α_i dans $\mathbb{N}^*$.

- Montrer l'existence de $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$\forall i \in [1, r], \forall k \in [0, \alpha_i 1], f^{(k)}(\lambda_i) = P^{(k)}(\lambda_i)$.

- On suppose que M est diagonalisable. Montrer que f(M) = P(M).
- Est-ce toujours le cas si on ne suppose plus M diagonalisable ?

Exercice 192 [X MP 2025 # 283] Soient $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$, g une surjection continue croissante de [-1,1] sur luimême. On considère F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie stable par $f \mapsto f \circ g$. On note φ l'endomorphisme de F défini par $\varphi : f \mapsto f \circ g$.

1. Montrer que 1 est la seule valeur propre de φ.
2. En déduire que $\varphi = \mathrm{id}_F$.
3. Que peut-on dire des valeurs propres possibles de φ si g n'est plus supposée surjective ?

Exercice 193 [X MP 2025 # 284] Soit p un nombre premier, A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Démontrer que $\mathrm{tr}((A+B)^p) \equiv \mathrm{tr}(A^p) + \mathrm{tr}(B^p) \pmod p$.

Exercice 194 [X MP 2025 # 285] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit matriciel. On note $D = \{\delta \in \mathcal{L}(H) : \forall (A,B) \in H^2,\ \delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)\}$.

1. Soit $C \in H$. Montrer que $\delta : A \mapsto CAAC$ est dans D, et exprimer simplement e^δ.
2. Soit $\delta \in D$. Montrer que $\forall A, B \in H$, $e^\delta(AB) = e^\delta(A)e^\delta(B)$.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en considérant l'application $f\colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t\delta}\left(e^{t\delta}(A)e^{t\delta}(B)\right)$ et en calculant f'.
4. Soit $\delta \in D$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note H_λ le sous-espace caractéristique de δ associé à λ (éventuellement $\{0\}$). Soient λ, $\mu \in \mathbb{C}$, $A \in H_\lambda$ et $B \in H_\mu$. Montrer que $AB \in H_{\lambda+\mu}$.

Exercice 195 [X MP 2025 # 286] 1. Soient $k, m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^m$ tels que $\langle v_i, v_j \rangle \leq -1/k$ pour tous i,jdistincts. Montrer que $n \leq k+1$.

2. Montrer qu'il existe une famille $(v_1, \dots, v_{k+1})$ de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^k$ tels que $\langle v_i, v_j \rangle = -1/k$ pour tous i, j distincts.

Exercice 196 [X MP 2025 # 287] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que Tr(f id) = 0 et rg(f id) = 1 si et seulement s'il existe $a \in E$ et $\ell \in E^*$ tel que $\ell(a) = 0$ et $f = id + \ell a$. On dit alors que f est une transvection.

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire telle que : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists y \in E, \varphi(x, y) \neq 0$ et $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$.
Soit $G = \{u \in GL(E) : \forall x, y \in E, \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)\}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de GL(E).- c) Montrer que G contient les applications de la forme id $+\lambda\varphi(a, \cdot)$ a avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in E$.
2. Montrer que G est engendré par les transvections de la forme indiquée en c).

Exercice 197 [X MP 2025 # 288] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\alpha_O = |\det(\psi_O)|$ où $\psi_O : A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto O^T AO$.

Exercice 198 [X MP 2025 # 289] Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $-1 \notin Sp(M)$, on pose $T(M) = (I_nM)(I_n + M)^{-1}$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $-1 \notin \mathrm{Sp}(M)$.

1. Montrer que T est bien définie sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.
2. Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $T(A) \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.
3. Si $B \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$, montrer que $T(B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Calculer $T \circ T(A)$ si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
5. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$. Calculer T(A).
6. Déduire des questions précédentes que toute matrice de $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ est orthosemblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 199 [X MP 2025 # 290] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto \langle M^{-1}x, y\rangle$ définit un

produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soient $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que MN est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectre inclus dans $i\mathbb{R}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectre inclus dans $i\mathbb{R}$. Existe-t-il $M \in$

$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que A = MN ?

Exercice 200 [X MP 2025 # 291] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_{2n}$. Montrer l'équivalence : $M^T J \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T JM = J$.
2. On note $C = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), M^2 = -I_{2n}$ et $M^T J \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})\}$. Montrer que, pour tout $M \in C$, $M + J \in GL_{2n}(\mathbb{R})$.
3. Pour $M \in C$, on note $S_M = (M+J)^{-1}(M-J)$. Montrer que $S_M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, ||S_M X||_2 < ||X||_2$.
4. Montrer que, pour pour tout $M \in C$, $S_M J + JS_M = 0$.

Exercice 201 [X MP 2025 # 292] Les espaces $\mathbb{R}^p$ sont munis de leurs normes euclidiennes canoniques. Soient d et D des entiers ≥ 1. Étant donné $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^d$, on dit que $(p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$ s'il existe $q_0, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}^D$ vérifiant $\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|$ pour tous $i, j \in [0, n]$.

1. On suppose que $(p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$. Soit p une combinaison linéaire à coefficients rationnels de $p_0, \ldots, p_n$. Montrer que $(p, p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$.
2. Soient $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^d$ tels que $||p_ip_j||^2 \in \mathbb{Q}$ pour tous $i, j \in [0, n]$. Montrer que $(p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^{4d}$. On admettra que tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers.

Exercice 202 [X MP 2025 # 293]
1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si et seulement si, pour tout $k \in [1, n]$, $\det((a_{i,j})_{1}$ 0.
2. On pose $A_k = (t^{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq k}$ où $t \in \mathbb{R}^{+*}$. Calculer $\det A_k$.
3. On pose $A = \left(\frac{1}{1+|i-j|}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Démontrer que A est symétrique définie positive.

Exercice 203 [X MP 2025 # 294] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ une base or-

thonormée de F. On pose : $\tau_F(A) = \sum_{i=1}^k \langle f_i, Af_i\rangle$. Montrer que $\tau_F(A)$ ne dépend pas de la
base orthonormée choisie.
Dans la suite de l'exercice, on suppose $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on note $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A, comptées avec multiplicité.

1. Déterminer le meilleur encadrement possible de $\tau_F(A)$ en fonction de F et de Sp(A).
2. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = A + tE_{1,1}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lambda_1(t) \geq \cdots \geq \lambda_n(t)$ les valeurs propres de A(t). Montrer que : $\forall t \geq 0, \lambda_n(t) \geq \lambda_n$ et $\lambda_1 \geq \lambda_2(t)$.
3. Déterminer un équivalent simple de $\lambda_1(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

2) Analyse

Exercice 204 [X MP 2025 # 295]
1. Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E. Montrer que si N_1 et N_2 ont la même sphère unité alors $N_1 = N_2$.
2. On pose $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $(f, g) \in E^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|xf + yg\|_\infty$ soit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, dont on note $\|\|$ la norme. Soit p une autre norme sur E. On note S et S_p les sphères unité respectives pour $\|\|$ et p. Montrer que $d : x \in S \mapsto \sup |\langle x, y\rangle|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, que $k = \sup \|y\|$ est un réel strictement positif, et enfin $y \in S_p$ que d est k-lipschitzienne pour la norme $\| \cdot \|$.
4. On note $B = \{f \in E,\ p(f) \leq 1\}$ et, pour $x \in S$, $D_x = \{z \in E; |\langle x, z\rangle| \leq d(x)\}$. Montrer que $B = \bigcap_{x \in S} D_x$.

Exercice 205 [X MP 2025 # 296] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que tout convexe non borné contient au moins une demi-droite. On pourra commencer par le cas d'un convexe fermé.

Exercice 206 [X MP 2025 # 297] Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit R_k la borne inférieure de l'ensemble E_k des $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tels qu'il existe une boule fermée de $\mathbb{R}^2$ euclidien de rayon r contenant au moins k points de $\mathbb{Z}^2$.

1. Calculer R_k pour k = 2, 3, 4.
2. Si $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que R_k est le minimum de E_k.
3. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $4R_k^2$ est entier.
4. Donner un équivalent de R_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Exercice 207 [X MP 2025 # 298] Soit E l'espace des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$. On munit E de la norme $\|\|_\infty$. Déterminer les formes linéaires continues φ sur E telles que, pour tout $(f, g) \in E^2$ tel que $\varphi(fg) = 0$, on ait $\varphi(f) = 0$ ou $\varphi(g) = 0$.

Exercice 208 [X MP 2025 # 299] Soit $\rho : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue telle que, pour tout t, $\rho(t)^2 = \rho(t)$.

1. Montrer que $t \mapsto \mathrm{rg}\, \rho(t)$ est constante.
2. Montrer l'existence de $u \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ telle que $\forall t, \rho(t) = u(t)\rho(0)u^{-1}(t)$.
3. On suppose de plus que $\rho(1) = \rho(0)$. Montrer que l'on peut choisir u de sorte que l'on ait aussi $u(0) = u(1)$.

Exercice 209 [X MP 2025 # 300] Soit $n \geq 2$. On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire les $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1$ et $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 m_{i,j} \geq 0$. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de permutation associée à σ ; la matrice P_σ est dans $\mathcal{B}_n$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un élément M de $\mathcal{B}_n$ est dit extrémal lorsqu'il ne peut pas s'écrire M=(1-t)A+tB avec

A, B éléments distincts dans $\mathcal{B}_n$ et $t \in]0, 1[$.

1. Montrer que les P_σ sont des points extrémaux de $\mathcal{B}_n$.
2. On fixe un élément M de $\mathcal{B}_n$.
   Pour une partie $I \subset [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{F}(I) = \{i \in [\![1, n]\!] : \exists j \in I, m_{i,j} > 0\}$.
   a) Montrer que $|I| \leq |\mathcal{F}(I)|$.
   b) Montrer qu'il existe une injection $f : [1, n] \to [1, n]$ telle que, pour tout $i \in [1, n]$, $m_{i,f(i)} > 0$.
   c) En déduire l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}_n$.
3. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est l'enveloppe convexe des P_σ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Exercice 210 [X MP 2025 # 301] On munit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^\mathbb{N}$ telle que $\sum a_n$ converge.

1. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_{3^n}(x)$.
   - Montrer que f est bien définie et continue sur [-1, 1].
   - Montrer que $d(f, \mathbb{R}_{3^n}[X]) = \inf_{P \in \mathbb{R}_{3^n}[X]} \|fP\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Ind. On pourra considérer les points $x_k = \cos(\pi(1 + k3^{-n-1}))$ pour $k \in [0, 3^{n+1}]$.

Exercice 211 [X MP 2025 # 302] Soient K une fonction continue de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}$, E l'espace des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$.- a) Si $f \in E$, soit $T_K(f)$ la fonction de [0,1] dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0, 1], T_K(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)f(y)dy$. Montrer que T_K est un endomorphisme continu de l'espace normé $(E, \| \cdot \|_\infty)$.

1. On suppose que K est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, que $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et que l'espace propre $E_\lambda(T_K)$ contient une fonction non identiquement nulle à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $E_\lambda(T_K)$ est de dimension 1.

Exercice 212 [X MP 2025 # 303] Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \to 0$. Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 213 [X MP 2025 # 304] Soient a < b réels et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $t \in [a, b]$, il existe une suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers tels que $tu_n - k_n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 214 [X MP 2025 # 305] Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\beta = 1/\alpha$. Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $z_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{\alpha n + 1}{\alpha(n+1)} z_n$.

1. Donner un équivalent de z_n et sa valeur exacte lorsque $\beta \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle.
   - On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$ et $y_n = \alpha x_n + (1 - \alpha)\mu_n$. On suppose que $y_n \to x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x_n \to x$.

Exercice 215 [X MP 2025 # 306] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = |\{(p, q) \in \mathbb{N}^2, p^2 + q^2 = n\}|$.

1. Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum u_k$.

2. Étudier la nature de la suite (u_n).
3. Montrer que (u_n) n'est pas bornée.

Exercice 216 [X MP 2025 # 307] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$.

1. On suppose que $a_0 = 1/2$. Montrer que $\frac{1}{a_n} n \sim \ln n$ quand $n \to +\infty$.
2. On suppose $a_0 > 1$. Déterminer la limite de (a_n) puis un équivalent de a_n.
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n.

Exercice 217 [X MP 2025 # 308] 1. Pour $n \geq 3$, justifier l'existence de $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ avec $0 < x_n < y_n$ solutions de $x - n\ln x = 0$.

2. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n et y_n.

Exercice 218 [X MP 2025 # 309] Construire une suite strictement croissante $(p_n)_{n\geq 2}$ d'entiers avec $p_2 = 2$ telle qu'il existe C> 0 vérifiant, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=n}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{\ln k} \geq C$, et telle que la série de terme général $2^{-(p_{n+1}-p_n)}$ diverge.

Exercice 219 [X MP 2025 # 310] On pose $\alpha = 4\sum_{k=0}^{499999} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer qu'exactement une des 16 premières décimales de α diffère de la décimale de π correspondante.

Exercice 220 [X MP 2025 # 311] Soient p> 0 et q> 0 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout

$$(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^+)^{2n}, \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

.

Exercice 221 [X MP 2025 # 312] Soit $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f^{(n)}(x_n) = 0$.

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x^n f^{(n)}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
3. On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour tout x > 0. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe $a_{n,0}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{Z}$ tels que $g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \frac{f^{(n-k)}(x)}{x^{k+1}}$ pour tout x> 0.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $(-1)^n g^{(n)}(x) > 0$ pour tout x > 0.

Exercice 222 [X MP 2025 # 313] Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que : $f^2 \leq 1$ et $(f')^2 + (f'')^2 \leq 1$. Le but est de montrer par l'absurde que $g = f^2 + (f')^2 \leq 1$. On suppose donc qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $f(t)^2 + f'(t)^2 > 1$.
On pose : $E = \{x \in \mathbb{R}; \forall y \in [\min(t,x), \max(t,x)], f(y)^2 + f'(y)^2 > 1\}$.

1. Montrer que E est un intervalle ouvert.
2. Montrer que f' ne s'annule pas sur E.
3. Conclure.

Exercice 223 [X MP 2025 # 314] Si $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ est une famille de fonctions de]-1,1[dans $\mathbb{R}$, on dit que $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ vérifie (C) si $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4$ sur]0, 1[et $\varphi_2 < \varphi_4 < \varphi_1 < \varphi_3$ sur]-1, 0[.

1. Montrer qu'il n'existe pas de famille $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ de fonctions polynomiales vérifiant (C). Ind. On pourra étudier la valuation de $\varphi_i - \varphi_j$ pour $i \neq j$.
2. Existe-t-il une famille $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ de fonctions de classe C^∞ vérifiant (C) ?

Exercice 224 [X MP 2025 # 315] Soit $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $(*)$: $\forall x \in \mathbb{R}, s(x+1) = s(x) + \frac{1}{1+x^2}$ et $s(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $s(x) \geq 0$.
2. A-t-on existence et unicité de s vérifiant () ? Déterminer les s solutions.
3. Que se passe-t-il si on remplace la condition $s(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ par la condition $s(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

Exercice 225 [X MP 2025 # 316] 1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que f est affine si et seulement si, pour tout réel x, on a $\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(}{h^2}$

0.b) Montrer que le résultat de la question précédente peut tomber en défaut sans hypothèse de continuité.

Exercice 226 [X MP 2025 # 317] Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$. On suppose qu'il existe $\alpha, \eta > 0$ tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha F(x)F(y) \leq F(x+y) \leq \eta F(x)F(y)$$

.

1. On suppose que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{F'}{F}$ est bornée. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ bornée tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = e^{\gamma x} H(x)$.
2. On revient au cas général. Montrer qu'il existe une unique fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\frac{F}{G}$ soit bornée et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ G(x+y) = G(x)G(y)$.

Exercice 227 [X MP 2025 # 318] Soient $M, m \in \mathbb{R}$ avec 0 < m < M, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, [m, M])$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Soit () l'équation fonctionnelle $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = 1 + \frac{g(qt)}{f(t)}$.

1. On suppose m > 2 ou M < 1/2. Montrer qu'il existe une unique solution bornée de ().

2. Montrer que les solutions bornées de () ne s'annulent pas.

Exercice 228 [X MP 2025 # 319] Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(G_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n P^{(n)}$$

.

1. Expliciter (G_n) pour φ vérifiant : $\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = \int_0^x P(t)dt$.
2. On suppose que, pour tout $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, si P admet un minimum local en a alors $\varphi(P)(a) = 0$. Montrer qu'il existe $Q \in E$ tel que, pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = QP'$.
3. On suppose que, pour tout $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, si P admet un minimum local en a alors $\varphi(P)(a) \geq 0$. Montrer qu'il existe $Q, R \in E$ tels que, pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = QP'+$

RP" avec R positif sur $\mathbb{R}$.

1. Donner une preuve directe de l'égalité trouvée en b).

Exercice 229 [X MP 2025 # 320] Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe quatre réels strictement positifs α, β, A, B tels que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x)f(y)| \leq A|xy|^\alpha$ et $|g(x)g(y)| \leq B|xy|^\beta$ et $\alpha + \beta > 1$. On pose $\zeta : s \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ · On fixe deux réels $a < b$.

1. Pour une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de [a,b], on pose $J(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k))$

$g(x_k))$. Montrer que $|J(\sigma) f(a)(g(b) g(a))| \leq AB\zeta(\alpha+\beta)(2(b-a))^{\alpha+\beta}$.

1. Montrer qu'il existe un réel $I_{a,b}(f,g)$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de [a,b], $\max_k |x_{k+1} x_k| < \delta \Rightarrow |J(\sigma) I_{a,b}(f,g)| < \varepsilon$.

Exercice 230 [X MP 2025 # 321] On note S l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $\gamma : [0,1] \to S$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une fonction continue $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$ pour tout $t \in [0,1]$.

Exercice 231 [X MP 2025 # 322] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose $h : t \in [0,1] \mapsto \inf_{s\in[0,t]} f(s)$ et g=f-2h.

1. Montrer que g est continue, positive et que g(0) = 0.
2. Montrer que si f est affine par morceaux alors q l'est aussi.
3. On suppose que f atteint son minimum en 1. On pose $q : t \in [0,1] \mapsto \inf_{s\in[t,1]} g(s)$. Montrer que f = g - 2q.

Exercice 232 [X MP 2025 # 323] Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On pose $\Psi(x) = \sum_{\substack{p\in\mathcal{P},\alpha\in\mathbb{N}^* \\ p^\alpha \leq x}} \ln p$ et $T(x) = \sum_{1\leq n\leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que $T(x) = \sum_{1\leq n\leq n} \ln(n) = x\ln(x)x + O(\ln x)$ quand $x \to +\infty$.
2. Montrer que $T(x) 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) = x\ln 2 + O(\ln x)$.

Exercice 233 [X MP 2025 # 324] Soit f une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, de réciproque notée g.

1. Montrer que, pour $x \geq 0$, $\int_a^x f(t)dt + \int_a^{f(x)} g(t)dt = xf(x)$.
2. Déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, xy \leq \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(t)dt$.

Exercice 234 [X MP 2025 # 325] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive sur]0,1[.

1. Calculer $\lim_{p\to+\infty} \left(\int_0^1 f(x)^p dx\right)^{1/p}$.
2. Calculer $\lim_{x\to 0^+} \left(\int_0^1 f(x)^p dx\right)^{1/p}$.

Exercice 235 [X MP 2025 # 326] Soit f la fonction 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1[, f(x) = x - \frac{1}{2}$. Pour i et j dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^1 f(ix)f(jx)dx$.

Exercice 236 [X MP 2025 # 327] Pour a, b > 0, on définit $J_{a,b} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(a\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2}}$.

1. Montrer que $J_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$.
2. Montrer que $J_{a,b} = J_{\frac{a+b}{2}} \sqrt{ab}$

Exercice 237 [X MP 2025 # 328] Déterminer les réels α et β tels que $\int_0^{+\infty} |\sin t|^\alpha t^\beta dt < +\infty$.329. [nil] a) Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $I_f = \left\{p > 0, \int_{\mathbb{R}} |f|^p < +\infty\right\}$. Montrer que I_f

Exercice 238 [X MP 2025 # 329] 1. Pour

$$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

, on note $I_f = \{p > 0, \int_{\mathbb{R}} |f|^p < +\infty\}$. Montrer que est un intervalle et exhiber f telle que $I_f =]a, b[,]0, b[$ ou $]b, +\infty[$ pour $0 < a < b$.

1. Déterminer $\lim_{p\to+\infty} \left(\int_a^1 |f|^p\right)^{1/p}$.

Exercice 239 [X MP 2025 # 330] Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $g\colon x\in\mathbb{R}^*\mapsto f\left(x-\frac{1}{x}\right)$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Exprimer $\int_{-\infty}^0 g+\int_0^{+\infty} g$ en fonction de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Exercice 240 [X MP 2025 # 331] On rappelle que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $p_n : x\in\mathbb{R}\mapsto(-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n(e^{-x^2/2})}{dx^n}$.

1. Montrer que p_n est polynomiale, préciser son degré et son coefficient dominant, et dé-

montrer que p_n est paire ou impaire.

1. Calculer $\int_{\mathbb{R}} p_m(x)p_n(x)e^{-x^2/2}dx$ pour $(m,n)\in\mathbb{N}^2$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale multiple

$$I=\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\left(\prod_{1\le i\le n}(x_j-x_i)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_k^2\right)dx_1\cdots dx_n$$

.

Ind. On pourra s'intéresser au déterminant de la matrice $(p_{i-1}(x_j))_{1\le i,j\le n}$.

Exercice 241 [X MP 2025 # 332] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f_i f_j =$

$\delta_{i,j}$ pour tous $i,j\in\mathbb{N}$. Pour $N\in\mathbb{N}^*$ et $x,y\in\mathbb{R}$, on pose $K_N(x,y)=\sum_{i=1}^N f_k(x)f_k(y)$. Pour $p\in\mathbb{N}$ et $x_1,\dots,x_p\in\mathbb{R}$, on pose $\varphi_p(x_1,\dots,x_p)=\det((K_N(x_i,x_j))_{1\le i,j\le p})$.
Calculer $\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_p(x_1,\dots,x_p)dx_1\dots dx_p$.

Exercice 242 [X MP 2025 # 333] 1. Soit $a\in\mathbb{R}^{+*}$. Calculer les intégrales $\int_0^1\frac{\ln(1+t^a)}{t}dt$ et $\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}dt$.

2. Soit $(a_n)_n\in(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $I\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\mapsto\sum_{n\in I}a_n$ soit injective, $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ désignant l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\le 2$.
   c. Soit $(a_n)_n\in(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle qu'il n'existe pas d'entier n ni de partie finie I de $\mathbb{N}\setminus\{n\}$ telle que $a_n=\sum_{k\in I}a_k$. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\le 50$.

Exercice 243 [X MP 2025 # 334] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On pose $f_n : x\in\mathbb{R}\mapsto a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 244 [X MP 2025 # 335] Pour

$$n\in\mathbb{N}$$

, soit $f_n : x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\mapsto\pi\cot(\pi x)-\sum_{k=-\infty}^n\frac{1}{x+k}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\ge0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ vers une fonction f, et que l'on peut prolonger f par continuité à $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction prolongée par continuité est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\forall x\in\mathbb{R}, 4f'(x)=f'\left(\frac{x}{2}\right)+f'\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

.

1. En déduire que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $g\colon x\mapsto\frac{x}{e^x-1}$. Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que le développement en série entière de $x\mapsto g(x)-1+\frac{x}{2}$ ne contient que des termes

pairs. On note

$$g(x)=1-\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^{2n}$$

.

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, donner une expression de $\zeta(2n)$ en fonction de a_n. Ind. On pourra considérer g(ix) pour $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 245 [X MP 2025 # 336] Soit $f\in C^0([0,1],\mathbb{R})$.
Si

$$t\ge0$$

, on pose $g_t : x\in[0,1]\mapsto\inf\{f(y)+t|y-x|, y\in[0,1]\}$.

1. Si $t\ge0$, montrer que g_t est une fonction continue.
2. Soit $x\in[0,1]$. Montrer que la suite $(g_n(x))_{n\ge0}$ est croissante et qu'elle converge vers

f(x).

1. Montrer que $(g_n)_{n\ge0}$ converge uniformément vers f sur [0,1].

Exercice 246 [X MP 2025 # 337] 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$.

2. Pour $x, y \in [-2, 2[$ avec $x \neq y$, on pose $S(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} T_n(x) T_n(y)$.
   - Montrer que $S_n(x, y)$ est bien défini.
   - Montrer que, pour $x, y \in [-2, 2[$ avec $x \neq y$, on a $S(x, y) = -2 \ln |xy|$.

Exercice 247 [X MP 2025 # 338] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. À quelle condition sur α la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n+x}$ est-elle définie sur $\mathbb{R}^+$?
2. Lorsque f est définie sur $\mathbb{R}^+$, déterminer sa limite, puis un équivalent, en $+\infty$.
3. On fixe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d > 0$, sans racine dans $[1, +\infty[$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, d) pour que $g\colon x \mapsto \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{P(n+x)}$ soit définie

sur $\mathbb{R}^+$. Dans ce cas, donner un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 248 [X MP 2025 # 339] 1. On fixe un entier $d \geq 0$. Soit $(c_k)_{k \leq d}$ une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}_{\leq d} = \{k \in \mathbb{Z}, k \leq d\}$. On suppose qu'il existe un réel $R > 0$ telle que $(c_k z^k)_k$ soit sommable pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que |z| > R ; pour un tel z, on pose $g(z) = \sum_k c_k z^k$. On suppose enfin que $c_1, \dots, c_d$ sont tous rationnels et que $g(a) \in \mathbb{Z}$ pour une infinité d'entiers a. Montrer que $c_0 \in \mathbb{Q}$ et $c_k = 0$ pour tout $k < 0$.

2. Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que, pour tout entier n assez grand, P(n) est la puissance s-ième d'un entier. Soient $\tau_1, \dots, \tau_s$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe une fonction gvérifiant les hypothèses de la question précédente (pour un certain d) et telle que, pour tout complexe z de module assez grand, $\prod P(z + \tau_k) = g(z)^s$. En déduire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q^s$ et $\forall k \in \mathbb{Z},\ Q(k) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 249 [X MP 2025 # 340] Soient $\theta > 1$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$ dont θ est racine de multiplicité 1 et dont les autres racines complexes sont de module < 1 et dont $1/\theta$ n'est pas racine. Soit $Q = X^n P(1/X)$.

1. Montrer que $f\colon z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon

$1/\theta$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ ce développement.

1. Montrer que $g\colon z \mapsto f(z)(1 - \theta z)$ est développable en série entière de rayon > 1. On note $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. Montrer que les c_n sont dans $\mathbb{Z}$ et que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|g(e^{it})\right|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2$.
2. Démontrer que $1 + \theta^2 = b_0^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n \theta b_{n-1})^2$.
3. On suppose que P(0) > 0. Montrer que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 250 [X MP 2025 # 341] 1. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-2}^{2} x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx$. Prouver l'existence d'une constante

c> 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c\, I_n$ et la déterminer.

Exercice 251 [X MP 2025 # 342] Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_0 = 4^m$, $u_1 = 4^m - 1$ et, pour $k \in [1, m]$, $u_k = -1 + \frac{2m-k}{2m} u_{k+1} + \frac{k}{2m} u_{k-1}$ et $v_k = m \int_0^1 \frac{(1+x)^{2m-k}}{x} \left((1+x)^k - (1-x)^k\right) dx$.

1. Montrer que, pour tout $k \in [1, m]$, $v_k = u_k$.
2. Donner un équivalent de $W_m = m \int_0^1 \frac{(1+x)^m}{x} ((1+x)^m (1-x)^m) dx$.

Exercice 252 [X MP 2025 # 343] Déterminer un équivalent de $\int_0^{+\infty} (te^{-t})^x dt$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 253 [X MP 2025 # 344] Soit E l'ensemble des fonctions y de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $y''(t) + e^t y(t) = 0$. Soit $y \in E \setminus \{0\}$.

1. Montrer que les zéros de y sont isolés.
2. Montrer que les zéros de y peuvent être rangés en une suite strictement croissante $(t_n)_{n \geq 0}$ tendant vers $+\infty$.
3. Donner un équivalent de t_n.

Exercice 254 [X MP 2025 # 345] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$.

1. Soient p un projecteur de E et $a \in \mathcal{L}(E)$ tels que ap + pa = a. Montrer que $\operatorname{tr} a = 0$.
2. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E. Pour $p \in \mathcal{P}(E)$, décrire l'espace tangent à $\mathcal{P}(E)$ en p. Quelle est sa dimension ?

3) Géométrie

Exercice 255 [X MP 2025 # 346] Soit (u, v) une base de $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (u, v) pour qu'il existe un polygone régulier à n côtés dont les sommets sont tous dans $\mathbb{Q}u + \mathbb{Q}v$.

4) Probabilités

Exercice 256 [X MP 2025 # 347] Un tiroir contient 2n chaussettes, constituant n paires. On tire successivement et aléatoirement les chaussettes du tiroir les unes après les autres jusqu'à avoir tiré une paire. Quelle est l'espérance du nombre total de chaussettes tirées ?

Indication : Pour simplifier le résultat, on pourra utiliser un raisonnement probabiliste pour établir que $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} 2^{-k} = 1.$

Exercice 257 [X MP 2025 # 348] On organise un tournoi avec une infinité $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de joueurs. Les modalités sont les suivantes : J_0 et J_1 s'affrontent, le gagnant affronte J_2 et ainsi de suite : le gagnant de chaque partie affronte le joueur suivant lors de la partie suivante. On considère tous les matchs comme indépendants et on note $p_n = \mathbf{P}(J_n$ remporte son premier match). Le tournoi s'arrête lorsqu'un joueur remporte deux matchs successifs. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de matchs joués jusqu'à l'arrêt du tournoi. Pour les deux premières questions, on fixe

$$\alpha \in]0,1[$$

et on suppose que : $\forall n \geq 2,\ p_n = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Montrer que T est presque sûrement finie.
2. Montrer que T est d'espérance finie.
3. Dans cette question, on fixe $N \geq 2$ et la condition de victoire devient : un joueur remporte le tournoi quand il a gagné N matchs consécutifs. Ainsi le cas précédent correspond au cas N=2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = p \in]0,1[$.

On note $a_n = \mathbf{P}(T \geq n)$ avec, pour $k \leq N$, $a_k = 1$. Déterminer une relation de récurrence entre les a_n.

Exercice 258 [X MP 2025 # 349] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $|\sigma|$ le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints (y compris les cycles de longueur 1).a) Pour $k \in [1,n]$, on pose $C_k = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n, |\sigma| = k\}|$.

1. Pour $k \in [1,n]$, on pose $C_k = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n, |\sigma| = k\}|$

Calculer f_n où $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n C_k x^k$.

1. Soit σ_n une variable de loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Donner un équivalent de l'espérance de $|\sigma_n|$.
2. Montrer que $\frac{|\sigma_n|}{\ln(n)}$ tend vers 1 en probabilités quand $n \to +\infty$.

Exercice 259 [X MP 2025 # 350]
1. Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbf{E}(X(X-1)\cdots(X-p+1))$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et calculer $\mathbf{E}(1/(X+1))$ et $\mathbf{E}(1/(X+2))$.
2. Soient A un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Une p-partition de A est une partition de X formée de p sous-ensembles (non vides) de X. Soit B un ensemble fini de cardinal m. Dénombrer, pour une p-partition de $\mathcal{F}$ de A, les applications de A dans B dont $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fibres non vides (à savoir des ensembles non vides de la forme $f^{-1}\{b\}$ où $b \in B$).
3. En utilisant les deux questions précédentes, exprimer le nombre de partitions de A comme

Exercice 260 [X MP 2025 # 351] Soient $p \in]0,1[$ et t> 0. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = -1) = 1-p$ et $N \sim \mathcal{P}(t)$ indépendante des X_n. On pose :

$$S_n = \sum_{i=0}^n X_i$$

.

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\mathbf{P}(S_N = n)$.
2. Montrer que :

la somme d'une série numérique.

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} y^n \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ n\geq 0}} \frac{x^{n+2i}}{n!(n+i)!} = e^{xy+1/y}$$

.

Exercice 261 [X MP 2025 # 352] Soient $p \in [0,1[, m \geq 2$ et $\xi = e^{2i\pi/m}]$.

1. Montrer que :

$$\forall a,b \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k\in[\![0,n]\!]} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (b + \xi^j a)^n$$

.

1. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose : $A_n = (m \mid X_1 + \cdots + X_n)$ et $u_n = \mathbf{P}(A_n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|u_n \frac{1}{m}\right| \leq e^{-8pqn/m^2}$ où q = 1 p.

Exercice 262 [X MP 2025 # 353] Soit X une variable aléatoire discrète positive ayant un moment d'ordre 2 et telle que $\mathbf{E}(X^2) > 0$. Montrer que, pour t > 0, $\mathbf{P}(X\mathbf{E}(X) \leq -t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{\mathbf{E}(X^2)}\right)$.

Exercice 263 [X MP 2025 # 354] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose de plus que $\mathbf{E}(X_1^2) < +\infty$, et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_i}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que, pour tout ω, $(T_n(\omega))_{n\geq 1}$ a une limite dans $[0,+\infty]$.

2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ et une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ d'entiers ≥ 1 vérifiant $n_{k+1} \geq 2n_k$ et $\mathbf{P}(S_{n_k} \geq 2n_k\mathbf{E}(X_1)) \leq \frac{C}{2^k}$ pour tout $k \geq 1$.
3. En déduire que $(T_n)_{n\geq 1}$ tend presque sûrement vers $+\infty$.
4. Montrer que $\mathbf{V}(T_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(\frac{1}{S_i^2}\right)$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 264 [X MP 2025 # 355] On pose $(X)_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(X)_n = X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

1. Montrer que $((X)_n)_{n\geq 0}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on décompose $X^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}(X)_n$. Déterminer $a_{k,0}$ et $a_{k,n}$ pour $n \geq k$.
3. En considérant une variable aléatoire Z suivant la loi de Poisson de paramètre 1, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{+\infty} a_{k,n} = \frac{1}{e}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^k}{i!}$.
4. Pour $0 \leq n \leq k$, on note $b_{k,n}$ le nombre de façons de ranger k objets indifférenciés dans n tiroirs non numérotés, aucun des tiroirs n'étant vide. Montrer que $b_{k,n} = a_{k,n}$.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de façons de partitionner un ensemble à k éléments.

Exercice 265 [X MP 2025 # 356] On cherche à prouver l'existence d'un réel $C > 0$ tel que, pour toutes variables aléatoires réelles X et Y indépendantes et de même loi, on ait l'inégalité $\mathbf{P}(|X-Y| \leq 2) \leq C\,\mathbf{P}(|X-Y| \leq 1)$.

1. On suppose X et Y à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer l'existence de $C' > 0$ indépendant de X tel que $\mathbf{P}(|XY| \leq 2) \leq C'\mathbf{P}(X = Y)$.
2. Montrer le résultat souhaité.
3. Montrer que $C' \geq 3$.

Exercice 266 [X MP 2025 # 357] 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2 de même loi telles que $Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{B}(n,p)$?

2. On dit qu'une variable aléatoire Z est infiniment divisible si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_k$ telles que $Y_1 + \cdots + Y_k \sim Z$, avec a priori $(Y_1, \ldots, Y_k)$ défini sur un espace probabilisé différent de celui de Z.

Donner un exemple d'une telle variable aléatoire.

1. Que dire d'une variable aléatoire Z infiniment divisible de support inclus dans [0,1] ?
2. Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ indépendante des X_i (avec $\lambda > 0$). Montrer que $Z = X_1 + \cdots + X_N$ est une variable aléatoire infiniment divisible.

Exercice 267 [X MP 2025 # 358] Soient $a \in]0,1[$ et $\varphi_a : x \mapsto 1(1-x)^a$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X_a à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $x \in [0,1], \varphi_a(x) = \mathbf{E}(x^{X_a})$.b) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) = \frac{a}{n}$. On pose $Y = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{1}_{A_n} = 1\}$. Montrer que $Y \sim X_a$.

On considère l'équation fonctionnelle : $\forall x \in [0,1], \varphi_a(x) = x\varphi(\varphi_a(x))$ d'inconnue φ :
$[0,1] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour $a \in [1/2, 1]$ cette équation admet une unique solution continue, qui est

de plus la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans N.

1. Montrer que ce n'est pas le cas pour a = 1/3.

Exercice 268 [X MP 2025 # 359] Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ et $\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la limite de $\left(\mathbf{E}\left(e^{-\lambda\frac{S_n}{n}}\right)\right)_{n\geq 1}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ dérivable sur $]1, +\infty[$ et telle que : $\forall x > 1, f(x-1) + xf'(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1], f(x) = 1$.

Montrer qu'il existe une unique fonction f qui respecte ces conditions, qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers 0 en $+\infty$.

1. On définit $\varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt$, avec f la fonction de la question précédente. Mon- trer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+, \lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda\frac{S_n}{n}}\right) = e^{-k}\varphi(\lambda)$.

Exercice 269 [X MP 2025 # 360] Soient X une variable aléatoire à support fini à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ et telle que $-X \sim X$, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(\|S_n\|^2) = n\,\mathbf{E}(\|X\|^2)$ et $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{P}(S_n = x)^2$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(S_{2n} = 0) \geq \frac{c}{n}$.
3. Démontrer que $P(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1$.

III) De Christophe **XENS**

Exercice 270 [ENS 25, ULSR] Une randonneuse doit choisir un emplacement pour poser sa tente. Elle dispose de N emplacements distincts numérotés, qu'elle parcourt à partir du premier. Elle ne peut pas revenir en arrière, et lorsqu'elle est au niveau d'un emplacement, elle peut le comparer aux emplacements qu'elle a déjà vu. On suppose que tous les emplacements ont autant de chance d'être le meilleur. L'objectif est de s'arrêter au niveau du meilleur emplacement. But de l'exercice : trouver une stratégie maximisant les chances de réussite.

1. Traiter le cas $N = 3$.

2. (Question donnée après avoir fini Q1) On considère la stratégie suivante : la randonneuse parcourt les k premiers emplacements sans s'arrêter, et à partir du $k+1$-ième, elle s'arrête dès qu'elle en trouve un meilleur que les précédents. Quel est le meilleur k (asymptotiquement) ?

Exercice 271 [ENS 25, SR] Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$. On écrit

$$e^M = \begin{pmatrix} * & \Phi_{A,B}(C) \\ & * \end{pmatrix}$$

1. Rappeler la valeur de chacune des étoiles.
2. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est linéaire.
3. On suppose A, B diagonalisables. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

Exercice 272 [ENS SR 25] Montrer le caractère C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction définie par

$$\forall x \neq y, f(x,y) = \frac{e^x - e^y}{x-y} \text{ et } \forall x, f(x,x) = e^x$$

Exercice 273 [X 2025] Soit $\alpha > 0$. On définit

$$z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{\alpha n + 1}{\alpha(n+1)} z_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} z_i \sim \alpha n z_n$.
2. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note $\mu_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i$. On suppose que $\alpha x_n + (1-\alpha)\mu_n \to x$. Montrer que $x_n \to x$.

Exercice 274 [ENS 2025, MPI] Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie. Soit K une partie de E non vide, bornée et dont la frontière est compacte. Montrer que K est d'intérieur vide. Question supplémentaire : et si on remplace l'hypothèse "préhilbertien" par "normé" ?

Exercice 275 [ENS 2025, MPI] Dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on définit la relation d'ordre strict $>$: $A > B \iff A - B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 276 [X 2025] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note $f \colon z \mapsto \displaystyle\sum_{k \leq d, k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$, et on suppose que f est définie sur le complémentaire d'un disque centré en 0. On suppose également que $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{Q}$ et qu'il existe une infinité de $z \in \mathbb{Z}$ tels que $f(z) \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $c_0 \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\forall k < 0, c_k = 0$.
3. Autres questions non abordées.

Exercice 277 [X 2025] Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$?

Exercice 278 [ENS SR 2025] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \{A \in S_n^+(\mathbb{R}), \mathrm{rg}(A) = 1\}$.

1. Montrer que $A \in E \iff \exists U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, A = UU^T$.
2. Soit $a \in C^0(\mathbb{R}^+, E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   - $\exists u \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall x > 0, a(x) = u(x)u(x)^T$
   - $\exists z \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall x > 0, z(x)^T a(x) z(x) > 0$
3. On suppose vraies les propriéts de la question 2. Soient $b < c$ dans $\mathbb{R}^+$ et $i, j \in [1, n]$. On suppose que $a_{i,i}(x) > 0$ et $a_{j,j}(x) > 0$ pour tout $x \in [b, c]$. Montrer que

$$\exists z \in C^0([b,c], \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \begin{cases} \forall x \in [b,c], z(x)^T a(x) z(x) > 0 \\ z(b) = e_i \\ z(c) = \pm e_j \end{cases}$$

Exercice 279 On note $A = \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, n a_{n+1} = (n+1) a_n\right\}$.

1. Etudier A.
2. Trouver les solutions sur $]-1,1[$ de $(H) : x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$

Exercice 280 [ENS 2025] Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$, ppremier impair. On dit qu'une partie $D \subset \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ est f génératrice pour $f \colon \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ si

$$\forall y \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}, \exists n \geq 2, \exists d_1, \ldots, d_n \in D, y : f\left(f\left(\ldots f\left(d_1, d_2\right), d_3\right) \ldots, d_n\right)$$

1. Avec $f : (x,y) \mapsto x - y$, dénombrer les parties $D \subset \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ qui sont f-génératrices et de cardinal minimal.
2. Avec $f : (x,y) \mapsto xy$, montrer qu'il n'existe aucune partie f-génératrice de cardinal 1.
3. Avec $f : (x,y) \mapsto xy$, montrer qu'il existe au moins une partie f-génératrice de cardinal 2. On admettra que le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ est cyclique.

Exercice 281 [ENS25, SR] Pour $f, g \in E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$, on note $(f \mid g) = \int_{-1}^{1} fg$.

Pour tout entier naturel n, on pose $\quad L_n = \left(X^2-1\right)^n$ et $P_n = \dfrac{1}{n!2^n} L_n^{(n)}$.

1. Rappeler pourquoi (.|.) est un produit scalaire.
2. Montrer que pour tout n, P_n est un polynôme de degré n. Montrer que les P_i sont deux à deux orthogonaux.
3. Montrer que P_n est scindé simple à racines dans $]-1,1[$.
4. Ecrire P_n sous la forme $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X-1)^{n-k}(X+1)$. Montrer que $(X-1)^n P\left(\frac{X+1}{X-1}\right)$ est un polynôme.
5. Etudier la rationnalité des racines de P_n

Exercice 282 [X 2025] Soit $\sum (a_n z^n)$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme f. Soeint $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M), |\lambda| < R$.

1. Montrer que $\sum (a_n M^n)$ converge.
2. Peut-on trouver une suite (a_n) telle que le résultat soit vrai pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M), |\lambda| \leq R$.

Exercice 283 [X 2025] On note $B_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(M) = 1$ et $-1 \notin \mathrm{Sp}(M)$. On note

$$T : M \mapsto (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$$

1. Montrer que T est bien définie sur $A_n(\mathbb{R})$ et que $T(A_n(\mathbb{R})) \subset B_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $T(B_n(\mathbb{R})) \subset A_n(\mathbb{R})$.
3. On prend $n = 2$. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -\tan(\theta) \\ \tan(\theta) & 0 \end{pmatrix}$ avec $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Que dire de $T(M)$ et $T^2(M)$?

Exercice 284 [ENS 2025] On dit qu'une matrice est de Bordaud si ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

1. Montrer que A est semblable à une matrice de Bordaud si et seulement si A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. Existe-t-il une matrice symétrique dans $\mathbb{C}$, non diagonalisable, qui est de Bordaud ?
3. Caractériser les matrices A qui sont normales, *i.e.* $A^T A = AA^T$, et de Bordaud.

Exercice 285 [ENS 2025] 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient A, B diagonalisables qui commutent. Montrer que A et B sont codiagonalisables.

2. Soit $\Phi : S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(H, Q) = HQ$. Montrer que Φ est une bijection.
3. Montrer que Φ^{-1} est continue.

Exercice 286 [X 2025] Trouver deux dés non biaisés tels que la probabilité de la somme soit la même que pour deux dés usuels. Les valeurs des faces sont des entiers naturels, pas forcément distincts et les dés peuvent être différents.

Exercice 287 Ci-dessous, version alternative du même exercice Soient $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que :

- Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta > 1$;
- Il existe $A, B > 0$ tels que : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq A|x-y|^\alpha, \quad |g(x) - g(y)| \leq B|x-y|^\beta$.

Soit $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $a = x_0$, $b = x_n$. On définit :

$$J_S(f,g) := \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left(g(x_{i+1}) - g(x_i)\right)$$

1. Montrer que : $\quad |J_S(f,g) - f(a)(g(b)-g(a))| \leq AB|2(b-a)|^{\alpha+\beta}\zeta(\alpha+\beta)$, où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.
2. Montrer qu'il existe une unique valeur $I \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ si } \max_{0 \leq i < n} |x_{i+1} - x_i| < \delta \Rightarrow |J_S(f,g) - I| < \varepsilon$$

Exercice 288 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in [a,b],\ |f(x) - f(y)| \leq A|x-y|^\alpha$$
$$|g(x) - g(y)| \leq B|x-y|^\beta$$

Soient $a < b$ et $S = (x_k)$ une subdivision de $[a,b]$ de cardinal n. On note :

$$J_S(f,g) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\left(g(x_{k+1}) - g(x_k)\right)$$

1. Montrer qu'il existe un indice i entre 1 et $n-1$ tel que $x_{i+1} - x_{i-1} < \frac{2(b-a)}{n-1}$.
2. Soit un tel i, et $S' = S \setminus \{x_i\}$. Exprimer simplement puis majorer $|J_S(f,g) - J_{S'}(f,g)|$.
3. Montrer que $\quad |J_S(f,g) - f(a)(g(b)-g(a))| \leq AB(2(b-a))^{\alpha+\beta}\zeta(\alpha+\beta)$.

4. Montrer qu'il existe un réel I tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision S de $[a, b]$ de pas inférieur à δ,

$$|J_S(f, g) - I| < \varepsilon$$

Exercice 289 [X 2025] Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ une application linéaire.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(g_n)_{n \geq 0}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on ait : $\varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \cdot P^{(n)}$.
2. Déterminer les polynômes g_n dans le cas particulier où $\varphi(P)(X) = \int_0^X P(t) \, \mathrm{d}t$.

Exercice 290 [X 2025] On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n, u_n = u_{n-1}(1 - u_{n-1})$.

1. Etudier la limite de (u_n).
2. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
3. Montrer que $\frac{1}{u_n} - n \sim \ln(n)$.