Exercices 2026

Table des matières

I) ENS MP/MPI XENS **1**
1) Algèbre . . . 1
2) Géométrie . . . 13
3) Probabilités . . . 14

II) X MP/MPI XENS **17**
1) Probabilités . . . 17
2) Algèbre . . . 18
3) Analyse . . . 22
4) Géométrie . . . 26
5) Probabilités . . . 26

III) De Christophe XENS **27**

I) ENS MP/MPI XENS

1) Algèbre

Exercice 1 [ENS SR 2026 # 1] Soit F un sous-ensemble fini de R. On note $F+F=\{e+f \mid (e,f)\in F^2\}$. Majorer le cardinal de $F+F$; montrer qu'il est minoré par $2|F|-1$. Cela reste-t-il vrai dans R^d ?

Exercice 2 [ENS ULSR 2026 # 2] Soit $f:\{-1,1\}^n\to\mathbb{R}$. Montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $c:\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)\to\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\{-1,1\}^n$,

$$f(x)=\sum_{S\subset\{1,2,\dots,n\}} c(S)\prod_{i\in S} x_i.$$

Exercice 3 [ENS U 2026 # 3] Soient E un ensemble et $n\in\mathbb{N}$. On note $C(E,n)$ l'ensemble des parties de E de cardinal n. Déterminer toutes les parties $\{a_1,\dots,a_n\}\in C(\mathbb{Z},n)$, avec $a_1<\dots<a_n$, telles que l'application qui, à une paire $\{i,j\}$, associe $|a_i-a_j|$, réalise une bijection de $C(\llbracket 1,n\rrbracket,2)$ sur un intervalle d'entiers $\llbracket 1,m\rrbracket$.

Exercice 4 [ENS U 2026 # 4] Pour tout réel $x\geq 1$, on note $\pi(x)=\mathrm{card}\{p\in\mathbb{P}\mid p\leq x\}$. Trouver une minoration la plus précise possible de $\pi(x)$.

Exercice 5 [ENS U 2026 # 5] Pour K un corps et $a\in K$, on note $C(K,a)=\{(x,y)\in K^2\mid x^2+y^2=a\}$.

1. Soient p un nombre premier et $a\in\mathbb{F}_p^*$. Dénombrer l'ensemble $C(\mathbb{F}_p,a)$. Indication : on pourra décrire $C(\mathbb{Q},1)$ et $C(\mathbb{C},1)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que 2 soit un carré modulo p.

Exercice 6 [ENS ULSR 2026 # 6] Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on se propose d'établir la propriété P_n : pour toute famille de $2n-1$ entiers relatifs, il existe une sous-famille de n entiers dont la somme est divisible par n.

1. Traiter les cas $n=1$ et $n=2$.
2. On suppose que $n\geq 2$. Montrer qu'il existe une famille de $2n-2$ entiers relatifs dont aucune sous-famille de n entiers n'a une somme divisible par n.
3. Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que, si P_m et P_n sont vraies, il en est de même de P_{mn}.
4. Soit p un nombre premier. Déterminer la classe modulo p de $\binom{2p-1}{p}$ et, si $s\in\llbracket 1,p\rrbracket$, de $\binom{2p-1-s}{p-s}$.
5. Soient p un nombre premier, I un ensemble de cardinal $2p-1$, $(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{Z}^I$. On suppose que, pour toute partie J de I de cardinal p, $\sum_{i\in J}a_i$ n'est pas divisible par p. Obtenir une contradiction en considérant

$$\sum_{\substack{J\subset I\\ |J|=p}}\left(\sum_{i\in J}a_i\right)^{p-1}.$$

Conclure.

Exercice 7 [ENS ULSR 2026 # 7] Soit G un groupe. Une fonction $f:G\to\mathbb{R}$ est un quasi-morphisme quand il existe $C\geq 0$ tel que, pour tous $a,b\in G$, $|f(ab)-f(a)-f(b)|\leq C$. Un quasi-morphisme f est dit homogène quand, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et tout $a\in G$, $f(a^n)=nf(a)$.

1. Soit f un quasi-morphisme. Montrer que, pour tout $a\in G$, la suite $\left(f(a^{2^k})/2^k\right)$ converge.
2. On suppose G abélien. Montrer que tout quasi-morphisme f se décompose de façon unique sous la forme $f=f'+h$, où f' est un quasi-morphisme homogène et h une fonction bornée.
3. Montrer que, si f est un quasi-morphisme homogène, alors, pour tous $a,b\in G$, $f(aba^{-1})=f(b)$.

Exercice 8 [ENS U 2026 # 8] Soit φ un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres de $\mathbb{Q}[X]$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que le noyau de φ contient un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$. On note K le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par l'image de φ, et G le sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$ engendré par la famille $(\varphi(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que G soit dense dans K.

Exercice 9 [ENS ULSR 2026 # 9] 1. Soit $p \geq 2$ un entier. On suppose que le groupe $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}, +)$. Montrer que p est premier. On admet que, si p est premier, le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

2. Soit $N \geq 2$. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes : a. N est non premier et $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^N \equiv x \pmod N$. b. N possède au moins trois facteurs premiers distincts et, pour tout premier p divisant N, $p^2 \nmid N$ et $p-1 \mid N-1$.
Dans ce cas, on dit que N vérifie (C).

3. a. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $6k+1$, $12k+1$ et $18k+1$ soient premiers. b. Soit k un tel entier. Montrer que $(6k+1)(12k+1)(18k+1)$ vérifie (C).

Exercice 10 [ENS U 2026 # 10] 1. Déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$.

2. Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que, pour $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et une famille d'entiers $(b_p)_{p\in\mathbb{P}}$ tels que
$$\frac{m}{n} = a + \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{b_p}{p^{v_p(n)}}, \qquad 0 \leq b_p < p^{v_p(n)}.$$

3. En déduire que tout morphisme de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$ est déterminé par ses valeurs sur les $1/p^k$, pour tout premier p et tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 [ENS ULSR 2026 # 11] Soit R un anneau commutatif. On note
$$\mathrm{SL}_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R) \mid ad - bc = 1_R \right\}.$$
Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$; on admet que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$ est un groupe pour le produit matriciel.

1. Soit $\Pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la réduction modulo p. Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes surjectif.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ nilpotente. On suppose à présent $p > 3$. Montrer que si $A \equiv I_2 + X \pmod p$, alors $A^p \equiv I_2 + pX \pmod{p^2}$.
3. Soit H un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ tel que $\Pi(H) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Montrer que $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.
4. Montrer le même résultat avec $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$ à la place de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.

Exercice 12 [ENS ULSR 2026 # 12] 1. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soient $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ avec B unitaire. Montrer qu'il existe $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'application $\varphi : P \in \mathbb{Z}[X] \mapsto P(y) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un morphisme surjectif d'anneaux, de noyau
$$\{(X-y)A + nB \mid (A, B) \in \mathbb{Z}[X]^2\}.$$
4. Soient $Q \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré strictement positif et R un anneau. On suppose qu'il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[X]$ dans R de noyau $\{QA + nB \mid (A, B) \in \mathbb{Z}[X]^2\}$. Montrer que R est fini et déterminer son cardinal.
5. On suppose désormais que $Q(X) = X^2 + bX + c$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n, b, c pour que l'anneau R soit intègre.

Exercice 13 [ENS U 2026 # 13] Un idéal I d'un anneau commutatif est dit premier si $A \setminus I$ est stable par multiplication ; il est dit maximal si les seuls idéaux qui le contiennent sont I et A.

1. Montrer que tout idéal premier non nul de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est maximal.
2. Montrer que tout idéal maximal de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est premier.

Exercice 14 [ENS ULSR 2026 # 14] Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre commutative unitaire de dimension finie. On note $\mathrm{Nil}(A) = \{x \in A \mid x \text{ est nilpotent}\}$.

1. Rappeler la définition d'un idéal et montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal.
2. Montrer que si $x \in \mathrm{Nil}(A)$, alors $1 - x$ est inversible.
3. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $x_1, \ldots, x_M \in \mathrm{Nil}(A)$, $x_1 \cdots x_M = 0$.
4. Montrer que $M = \dim A$ convient.
5. Soit $L_x : y \in A \mapsto xy \in A$. Montrer que $x \in \mathrm{Nil}(A)$ si et seulement si $\chi_{L_x} = X^{\dim A}$.
6. Montrer que, pour tout $x \in A$, $\chi_{L_x}(x) = 0$.

Exercice 15 [Magistère de Rennes 2026 # 15] 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$ si et seulement s'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$. Indication : montrer que l'ensemble $\{A^2 + B^2 \mid (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2\}$ est stable par produit.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $P(x) \geq 0$ si et seulement s'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $P = A^2 + XB^2$.

Exercice 16 [ENS U 2026 # 16] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins 2. Le polynôme P est dit sympathique s'il est le produit de deux polynômes non constants à coefficients positifs. On suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que $P(X^n)$ soit sympathique. Démontrer que P est également sympathique.

Exercice 17 [ENS U 2026 # 17] Soient K un corps de caractéristique nulle et $a \in K$. Soit $(P, Q) \in K[X]^2$ non tous deux nuls en a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in K^2$ tels que $\lambda P + \mu Q$ soit un polynôme non nul admettant a comme racine de multiplicité n si et seulement si a est racine de $P'Q - PQ'$ de multiplicité $n-1$.

Exercice 18 [ENS ULSR 2026 # 18] 1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $U_n, V_n \in \mathbb{Z}[X]$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(1 + iz)^n = U_n(z) + iV_n(z)$. Donner le degré de V_n, puis ses racines.

2. Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, p divise $V_{p+1}(k)$.
3. Soient p un nombre premier impair, $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $d = m \wedge n$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On suppose que $p \mid V_m(k)$ et $p \mid V_n(k)$. Montrer que $p \mid V_d(k)$.

Exercice 19 [ENS SR 2026 # 19] On pose $P = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_N = 1$, et

$$H(P) = \sup_{|z|=1} \frac{|P(z)|}{\sqrt{|a_0|}}.$$

1. Montrer que
$$\frac{1}{|a_0|} \sum_{i=0}^{N} |a_i|^2 \leq H(P)^2 \leq \frac{N+1}{|a_0|} \sum_{i=0}^{N} |a_i|^2$$
et étudier les cas d'égalité.
2. On pose $\ln^+(x) = \max(0, \ln x)$. Montrer que
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{|P(e^{i\theta})|}{\sqrt{|a_0|}} \right) d\theta \leq \ln H(P).$$

Exercice 20 [ENS L 2026 # 20] Soit (u, v) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On appelle cristal engendré par (u, v) l'ensemble $C = \{au + bv \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Trouver les $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que $\Phi(C) = C$, pour C le cristal engendré par la base canonique.
2. Trouver les rotations Φ de $\mathbb{R}^2$ telles que $\Phi(C) = C$, pour C le cristal engendré par la base canonique.
3. Trouver les rotations Φ de $\mathbb{R}^2$ telles que $\Phi(C) = C$, pour C un cristal quelconque.
4. Soit C une partie de $\mathbb{R}^2$ stable par $+$ et $-$. Montrer que C est un cristal si et seulement si $\mathrm{Vect}(C) = \mathbb{R}^2$ et C est discret.

Exercice 21 [ENS U 2026 # 21] Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On dit que A est équivalente à B par rapport aux lignes si, pour tous k et tous $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$, la famille $(L_{i_1}(A), \ldots, L_{i_k}(A))$ est libre si et seulement si $(L_{i_1}(B), \ldots, L_{i_k}(B))$ est libre, où $L_i(A)$ est la i-ème ligne de A. On définit de même l'équivalence par rapport aux colonnes. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ si et seulement s'il existe $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ équivalente à A par rapport aux lignes et équivalente à B par rapport aux colonnes.

Exercice 22 [ENS SR 2026 # 22] Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $n_k(\sigma)$ le nombre de k-cycles de σ, et $m(\sigma)$ le nombre total de cycles.

1. Soit c un k-cycle de $\mathfrak{S}_n$ et $i \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de c^i.
2. Montrer que σ et τ sont conjugués si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $n_k(\sigma) = n_k(\tau)$.
3. Trouver le nombre total de cycles dans c^i pour c un k-cycle et $i \in \mathbb{N}^*$.
4. Calculer $\det\big((i \wedge j)_{1 \leq i,j \leq n}\big)$.
5. Montrer que σ et τ sont conjugués si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $m(\sigma^i) = m(\tau^i)$.

Exercice 23 [ENS U 2026 # 23] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit S_i un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ de cardinal au moins $n + 1$. On suppose que, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, la matrice $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$ est nilpotente. Montrer que, pour tout i, A_i est nilpotente.

Exercice 24 [ENS U 2026 # 24] Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ et $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\prod_{i=1}^{n} i!$ divise le déterminant de la matrice

$$\left(\binom{x_i}{k_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Exercice 25 [ENS SR 2026 # 25] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Soient $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ une combinaison convexe des lignes de A et $Y = (y_1 \ \cdots \ y_m)^T$ une combinaison convexe des colonnes de A.

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant tous les x_j et J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant tous les y_i. Montrer que $I \cap J \neq \varnothing$.
2. On suppose que $X = (\alpha \ \cdots \ \alpha)$ et $Y = (\beta \ \cdots \ \beta)^T$. Montrer que $\alpha = \beta$.
3. On note
$$\alpha = \min_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Delta_m} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_{k,j}, \qquad \beta = \max_{(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \Delta_n} \min_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mu_j,$$
où $\Delta_k = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in (\mathbb{R}_+)^k \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1\}$. Montrer que $\alpha \geq \beta$.

Exercice 26 [ENS ULSR 2026 # 26] Soient p un nombre premier et n un entier strictement positif.

1. Dénombrer les bases de l'espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^n$.
2. Soit E un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple (V, W) de sous-espaces de E tels que $E = V \oplus W$, V et W soient stables par u, l'endomorphisme induit par u sur V soit inversible, et celui induit sur W soit nilpotent.
3. En déduire le nombre de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$.
4. Peut-on mener le même calcul dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ pour un entier d quelconque ?

Exercice 27 [ENS U 2026 # 27] Soient $n \geq 2$ et E_n l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi : E_n \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(\{0\}) = 0$ et, pour tous $(V, W) \in E_n^2$,

$$\varphi(V \cap W) + \varphi(V + W) \leq \varphi(V) + \varphi(W).$$

Montrer qu'il existe un unique sous-espace vectoriel $V_0 \in E_n$ de dimension maximale tel que

$$\min_{V \in E_n \setminus \{0\}} \frac{\varphi(V)}{\dim V} = \frac{\varphi(V_0)}{\dim V_0}.$$

Exercice 28 [ENS L 2026 # 28] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bistochastique si ses coefficients sont positifs et de somme égale à 1 le long de chaque ligne et de chaque colonne. Montrer que si Q est une matrice bistochastique qui n'est pas une matrice de permutation, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

1. si $Q_{i,j} = 0$, alors $M_{i,j} = 0$;
2. $\sum_{k=1}^n M_{i,k} = \sum_{k=1}^n M_{k,j} = 0$.

Exercice 29 [ENS ULSR 2026 # 29]

1. Montrer que tout endomorphisme de l'anneau $\mathcal{M}_n(K)$ est injectif.
2. Montrer que les endomorphismes de la K-algèbre $\mathcal{M}_n(K)$ sont les applications $M \mapsto PMP^{-1}$ pour $P \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Exercice 30 [ENS ULSR 2026 # 30] Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathcal{L}(V)$ nilpotents et commutants. On note $\mathbb{C}[A, B]$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$ engendrée par A et B, et on pose $V_1 = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$. Soit W un supplémentaire de V_1 dans V.

1. Montrer que $\dim(\mathbb{C}[A]) \leq n$.
2. Montrer que $V = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} A^i B^j W$.
3. Montrer que l'application de restriction à W définit une injection linéaire de $\mathbb{C}[A, B]$ dans $\mathcal{L}(W, V)$ et en déduire que $\dim(\mathbb{C}[A, B]) \leq n \dim(W)$.
4. On note A_1 (resp. B_1) l'endomorphisme induit par A (resp. B) sur V_1. Montrer que $\dim(A\mathbb{C}[A, B]) \leq \dim(\mathbb{C}[A_1, B_1])$.

Exercice 31 [ENS ULSR 2026 # 31] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{Z}).$$

1. Montrer que J_n est inversible et donner son inverse.
2. Soit $G_n = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{Z}) \mid M^T J_n M = J_n\}$. Montrer que $(G_n, \times)$ est un groupe, stable par transposition.
3. Soit $M \in G_n$ dont la première ligne est $(1, 0, \ldots, 0)$. On suppose $n > 1$ et on écrit par blocs

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & A & X & B \\ * & * & y & * \\ * & C & Z & D \end{pmatrix},$$

avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$, $y \in \mathbb{Z}$ et $X, Z \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{Z})$. Montrer que $y = 1$, $X = Z = 0$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G_{n-1}$.

Exercice 32 [Magistère de Rennes 2026 # 32] On souhaite déterminer les ordres possibles des éléments A de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Pour cela, on écrit $\chi_A = X^2 - tX + d$. Préciser les valeurs de t et d, puis discuter les ordres possibles. Fournir des exemples explicites pour les différents ordres possibles.

Exercice 33 [ENS U 2026 # 33] Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 + B^2 = 2AB$. Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

Exercice 34 [ENS U 2026 # 34] Soit G un sous-groupe d'ordre 6 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Étudier les propriétés de réduction simultanée des éléments de G.

Exercice 35 [ENS L 2026 # 35] Soient K un corps et $A \in \mathcal{M}_2(K)$. On suppose que le polynôme caractéristique χ_A est irréductible sur K. Soit $B \in \mathrm{GL}_2(K)$ telle que B ne commute pas avec A. Montrer que B^2 est une matrice scalaire.

Exercice 36 [ENS SR 2026 # 36] Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que G est fini. Montrer que les éléments de G sont diagonalisables. Que peut-on dire de leurs spectres ?
2. On suppose que G est compact. Soit $M \in G$. a. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}$. b. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Montrer que $\ker(M - \lambda I_n) = \ker((M - \lambda I_n)^2)$ et en déduire que M est diagonalisable.
3. Caractériser les sous-groupes abéliens finis et les sous-groupes abéliens compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 37 [ENS ULSR 2026 # 37] Soit K un corps. Une matrice $M \in \mathrm{GL}_2(K)$ est dite super-puissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $A_n \in \mathcal{M}_2(K)$ tel que $M = A_n^n$.

1. Déterminer les matrices super-puissantes dans le cas où $K = \mathbb{C}$.
2. On suppose $K = \mathbb{R}$. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est super-puissante si et seulement s'il existe $R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $M = R^2$.
3. Sur $\mathbb{Q}$, montrer que les matrices super-puissantes sont de déterminant 1.

Exercice 38 [ENS ULSR 2026 # 38]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $\det A = 1$. Exprimer χ_A en fonction d'une forme linéaire usuelle de A.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\det A = \det B = 1$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB^2) = \mathrm{Tr}(B)\,\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A)$.

3. Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = xyz\}$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de déterminant 1. Montrer que $(\mathrm{Tr}(A), \mathrm{Tr}(B), \mathrm{Tr}(AB)) \in S$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = -2$.
4. Montrer que, pour tout $(x,y,z) \in S \setminus \{(0,0,0)\}$, il existe $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de déterminant 1 tels que $x = \mathrm{Tr}(A)$, $y = \mathrm{Tr}(B)$ et $z = \mathrm{Tr}(AB)$.

Exercice 39 [ENS ULSR 2026 # 39] Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que, si $M \in \mathcal{M}_n(K)$, alors M est nilpotente si et seulement si $\chi_M = X^n$.
2. Pour $M \in \mathcal{M}_n(K)$, on pose $\sin(M) = \frac{1}{2i}(e^{iM} - e^{-iM})$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\sin$ induit une bijection de $\mathcal{N}$ sur elle-même.
3. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0,\ P'(0) \neq 0\}$. Pour $P, Q \in G$, on note $P * Q = P(Q(X)) \pmod{X^{n+1}}$. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 40 [ENS SR 2026 # 40] Pour $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[X,Y] = XY - YX$.

1. On pose $A = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}\, X = 0\}$. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ stable par crochet.
2. On pose
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calculer les différents crochets.
3. Soit $\rho : A \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho([A,B]) = [\rho(A), \rho(B)]$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $E_\lambda = \ker(\rho(H) - \lambda I_n)$. Soit α une valeur propre de $\rho(H)$. a. Montrer que $\rho(X)(E_\alpha) \subset E_{\alpha+2}$ et $\rho(Y)(E_\alpha) \subset E_{\alpha-2}$. b. Soit $V \in E_\alpha$. Montrer que la suite $(\rho(X)^k V)_{k\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.
4. On dit que ρ est irréductible si, pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathbb{C}^n$ et tout $A \in A$, la condition $\rho(A)(V) \subset V$ implique $V = \{0\}$ ou $V = \mathbb{C}^n$. Si ρ est irréductible, montrer que $\rho(H)$ est diagonalisable.
5. Montrer que $\mathrm{Sp}(\rho(H)) = \{-m, -m+2, \ldots, m-2, m\}$ avec $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 41 [ENS ULSR 2026 # 41] Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de V. Dans les deux premières questions, on suppose V de dimension finie.

1. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de u si et seulement si elle est racine du polynôme caractéristique de u.
2. On dit que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre imaginaire de u s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 2 tel que $P(\lambda) = 0$ et $P(u)$ n'est pas injectif. Une valeur propre complexe de u est une valeur propre réelle ou imaginaire. Montrer que les racines complexes de χ_u sont exactement les valeurs propres complexes de u.
3. On suppose maintenant que V est de dimension quelconque et muni d'une norme, et que u est un homéomorphisme linéaire de V sur lui-même. On munit $\mathcal{L}_c(V)$ des endomorphismes continus de la norme d'opérateur associée. Montrer que si la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée, alors, pour tout $x \in V \setminus \{0\}$, 0 n'est pas valeur d'adhérence de la suite $G(x) = (u^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 42 [ENS U 2026 # 42] Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base orthogonale de E. Déterminer, en fonction de $\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|$, quels sont les entiers $m \in \mathbb{N}$ avec $0 < m < n$ tels qu'il existe un sous-espace vectoriel $F \subset E$ de dimension m pour lequel les projetés orthogonaux $y_1, \ldots, y_n$ des x_i sur F ont tous la même norme.

Exercice 43 [ENS ULSR 2026 # 43] Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe deux symétries orthogonales A, B telles que $M = AB$.

Exercice 44 [ENS U 2026 # 44] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k, \ell \leq n$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les k premières lignes et les ℓ premières colonnes sont orthonormées. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale ayant les mêmes k premières lignes et ℓ premières colonnes que M.

Exercice 45 [ENS ULSR 2026 # 45]

1. Pour $a \in \mathbb{C}$, montrer que $|a| < 1$ si et seulement si, pour tout $v \in \mathbb{C}$ non nul, il existe un unique $\rho > 0$ tel que $|a + \rho v| = 1$.
2. On identifie $\mathbb{C}$ au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient T un automorphisme de $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. On définit
$$T_a : z \in \mathbb{U} \longmapsto \frac{a + T(z)}{|a + T(z)|} \in \mathbb{U}.$$
Montrer que T_a est bien définie, continue et bijective si et seulement si $|T^{-1}(a)| < 1$.
3. On suppose la condition précédente vérifiée. Montrer que T_a est une involution si et seulement si T est autoadjoint, a est un vecteur propre de T associé à une valeur propre $\lambda < 0$, et l'autre valeur propre μ vérifie $\lambda^2 = |a|^2 + \mu^2$.

Exercice 46 [ENS U 2026 # 46] Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres simples et $V \in \mathbb{R}^n$ unitaire. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $G(t) = S + tVV^T$.

1. À quelle condition $G(t)$ et S n'ont-elles pas de valeurs propres communes ?
2. Étudier les valeurs propres de $G(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 47 [ENS ULSR 2026 # 47] Soient les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivantes :
$$E = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = IJ.$$
Soit H le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par $\{E, I, J, K\}$.

1. Montrer que H est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4.
2. On pose $A^* = A^T$ pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Vérifier que $A \mapsto A^*$ est un endomorphisme de H. Montrer que $(AB)^* = B^*A^*$ et $A^{**} = A$, puis donner la matrice de $A \mapsto A^*$ dans la base (E, I, J, K).

3. Soit $H_1 = \{X \in H \mid XX^* = E\}$. Montrer que H_1 est un groupe. En identifiant H_1 à $\mathbb{R}^4$, donner une description géométrique de H_1.
4. Soit H_2 le sous-espace de H engendré par $\{I, J, K\}$. Pour $X \in H_1$, on définit $\alpha(X) : Y \in H_2 \mapsto XYX^* \in H_2$. En identifiant $\alpha(X)$ à sa matrice dans la base (I, J, K), montrer que α définit un morphisme surjectif de H_1 dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ dont le noyau est $\{E, -E\}$.

Exercice 48 [ENS ULSR 2026 # 48] Une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite centro-symétrique lorsque $m_{n+1-i,n+1-j} = m_{i,j}$ pour tous $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, et elle est dite bisymétrique lorsqu'elle est à la fois symétrique et centro-symétrique. Un vecteur $X = (x_i)_i \in \mathbb{R}^n$ est dit symétrique si $x_{n+1-i} = x_i$ pour tout i, et antisymétrique si $x_{n+1-i} = -x_i$.

1. On suppose $n = 2k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, et on note $J_k = (\delta_{i+j,k+1})_{1 \leq i,j \leq k}$. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est centro-symétrique si et seulement s'il existe deux matrices symétriques $A, E \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ telles que
$$M = \begin{pmatrix} A & EJ_k \\ J_kE & J_kAJ_k \end{pmatrix}.$$
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ bisymétrique. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de M, chacun symétrique ou antisymétrique.

Exercice 49 [ENS SR 2026 # 49] Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. On rappelle que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ a une unique racine carrée dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, notée $\sqrt{A}$. Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $A \leq B$ si $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et $A < B$ si $B - A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|A\|^2 = \max(\mathrm{Sp}(A^TA))$. En déduire que, pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,
$$\|A\| = \max_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\langle AX, X\rangle}{\|X\|^2} = \max(\mathrm{Sp}(A)).$$
2. Soient $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $CD \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\|CD\| \leq \|DC\|$.
3. Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $e^B = A$.
5. Montrer que ce B est unique si on impose $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; on le note alors $\ln(A)$.
6. Montrer que $\ln$ est croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Indication : utiliser la question 3.
7. Est-ce que $A \mapsto A^2$ est croissante sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 50 [ENS ULSR 2026 # 50] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $s_k(x)$ la somme des k plus grandes composantes de x. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose $\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.

1. Montrer que s_k est convexe.
   On pose
$$K(x) = \left\{ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma \sigma(x) \;\middle|\; (\lambda_\sigma) \in [0,1]^{\mathfrak{S}_n}, \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma = 1 \right\}$$
   et
$$L(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in [\![1, n-1]\!], s_k(y) \leq s_k(x) \text{ et } s_n(y) = s_n(x)\}.$$
2. Montrer que $K(x) \subset L(x)$.
3. On note $D(x)$ l'ensemble des vecteurs dont les composantes sont les coefficients diagonaux d'une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont les composantes de x. Montrer que $K(x) \subset D(x)$.

Exercice 51 [ENS SR 2026 # 51] On note A_+ l'ensemble des matrices diagonales de la forme $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$.

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et un unique $\sigma(M) \in A_+$ tels que $M^TM = P\sigma(M)P^T$. Discuter l'unicité de P.
2. On note $\sigma(M) = \mathrm{Diag}(\sigma_1(M), \ldots, \sigma_n(M))$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. Montrer que $\|M\|_{\mathrm{op}}^2 = \sigma_1(M)$.
3. On munit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle X, Y\rangle = -\mathrm{Tr}(XY)$. Trouver une base orthonormée B de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit φ_M définie par $\varphi_M(X) = MXM^T$ pour $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, et soit F_M la matrice de φ_M dans la base B. Montrer que $\sigma_1(F_M) = \sigma_1(M)\sigma_2(M)$.

Exercice 52 [ENS SR 2026 # 52] On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de leur structure euclidienne canonique. Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_{\max}(A)$ sa plus grande valeur propre.

1. Montrer que $\lambda_{\max}(A) = \max_{x \in \mathbb{R}^n,\, \|x\|=1} x^TAx$.
2. Montrer que la fonction $\lambda_{\max} : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est convexe.
3. Soient X un espace euclidien et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tout $x \in X$, on pose
$$\partial f(x) = \{d \in X \mid \forall y \in X,\ f(y) \geq f(x) + \langle d, y - x\rangle\}.$$
   Déterminer ∂f pour une fonction convexe $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$.

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\lambda_{\max}(A)$ soit une valeur propre simple. Soit v un vecteur propre unitaire associé à $\lambda_{\max}(A)$. Montrer que $\partial\lambda_{\max}(A) = \{vv^T\}$. Indication : montrer, pour $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_{\max}(A) + v^T(tH)v \leq \lambda_{\max}(A + tH) \leq \lambda_{\max}(A) + v^T(tH)v + \frac{2t^2\|H\|^2}{\lambda_{\max}(A) - \lambda_2},$$

où λ_2 est la deuxième plus grande valeur propre de A.

Exercice 53 [ENS ULSR 2026 # 53] Soit E un espace euclidien. Pour $f \in \mathcal{S}(E)$, on pose $\mathrm{Sp}_a(f) = \{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$. Soit $j \in \mathcal{S}(E)$ tel que $j^2 = \mathrm{id}$. Un vecteur x est dit j-symétrique (resp. j-antisymétrique) lorsque $j(x) = x$ (resp. $j(x) = -x$).

1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathrm{Sp}_a(j)$ et les vecteurs j-symétriques et j-antisymétriques possibles pour j.
2. Donner un exemple d'un couple $(j, f) \in \mathcal{S}(E)^2$ tel que $j^2 = \mathrm{id}$ et que $j \circ f$ ne soit pas diagonalisable.
3. Soient $f \in \mathcal{S}(E)$ et v un vecteur propre de f associé à une valeur propre μ telle que $|\mu| = \max \mathrm{Sp}_a(f) = \max \mathrm{Sp}_a(j \circ f)$. Montrer qu'il existe un unique couple (e, h) de vecteurs propres de f tel que $v = e+h$, avec e j-symétrique et h j-antisymétrique.

Exercice 54 [ENS U 2026 # 54] Soient $S = (s_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $T = S^{-1} = (t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $\Phi(S) = (s_{i,j}t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que $\Phi(S)$ est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que sa plus petite valeur propre est 1.

Exercice 55 [ENS L 2026 # 55] Soit E un espace euclidien orienté et soit b une application bilinéaire de $E \times E$ dans E telle que, pour tout $f \in \mathrm{SO}(E)$, $f(b(u, v)) = b(f(u), f(v))$. Que dire de b ?

Exercice 56 [ENS SR 2026 # 56] On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme $\|\cdot\|$, on note B la boule unité fermée et l'on pose

$$\Delta = \sup_{(x,y,z)\in B^3} \min(\|x - y\|, \|y - z\|, \|z - x\|).$$

1. Montrer que Δ est atteint.
2. Montrer que $\Delta \leq 2$.
3. Calculer Δ pour la norme euclidienne canonique.
4. Calculer Δ pour la norme infinie.
5. Montrer que $\Delta \geq 1$.

Exercice 57 [ENS L 2026 # 57] Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

1. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer que f admet un point fixe.
2. On admet que, pour toute fonction continue $g : D \to \mathbb{U}$, il existe une fonction continue $\theta : D \to \mathbb{R}$ telle que $g = \exp(i\theta)$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $r : D \to \mathbb{U}$ dont la restriction à $\mathbb{U}$ soit l'identité de $\mathbb{U}$.
3. Déduire de la question précédente que toute fonction continue de D dans D admet un point fixe.
4. Soit C un convexe fermé de $\mathbb{R}^2$. Est-il vrai que toute fonction continue de C dans C admet un point fixe ?

Exercice 58 [ENS L 2026 # 58] Soit A l'ensemble des fonctions $f : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ telles que

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2, \quad f(0, v) = f(u, 0) = 0 \text{ et } f(u, 1) = u,$$

et, pour tous $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ et $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$,

$$f(u_1, v_2) - f(u_1, v_1) \leq f(u_2, v_2) - f(u_2, v_1).$$

Déterminer $h_0, h_1 \in A$ tels que, pour tout $f \in A$ et tout $(u, v) \in [0, 1]^2$, $h_0(u, v) \leq f(u, v) \leq h_1(u, v)$.

Exercice 59 [ENS U 2026 # 59] On appelle groupe réel tout ensemble G qui est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Un groupe réel G est discret si, pour tout $x \in G$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap G = \{x\}$.

1. Soit G un groupe réel connexe par arcs. Montrer que, si H est un sous-groupe de G d'intérieur relatif non vide, alors $H = G$.
2. Montrer qu'un groupe réel discret est fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 60 [ENS ULSR 2026 # 60] Soient $d, p \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$. On munit $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^p$ de leur structure euclidienne canonique. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $y, z \in B(x, \varepsilon)$,

$$|\|f(y) - f(z)\| - \|y - z\|| \leq \delta\|y - z\|.$$

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.
3. On suppose $d = p = 1$. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

Exercice 61 [ENS ULSR 2026 # 61] Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Une forme linéaire $\varphi \in E^*$ est dite positive si, pour tout $f \in E$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\varphi(f) \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que toute forme linéaire positive sur E est continue pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. Soit φ une forme linéaire sur E continue pour $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que φ est différence de deux formes linéaires positives sur E.

Exercice 62 [ENS U 2026 # 62] Soient $n \geq 2$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \|g - I_n\| \leq \varepsilon\}$.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que S_ε soit compact et, si l'on note U son intérieur, que le groupe engendré par U soit à la fois ouvert et fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. On note $S = S_\varepsilon$ pour le $\varepsilon > 0$ trouvé en 1 et $\langle S \rangle$ le sous-groupe engendré par S. Pour $g \in \langle S \rangle$, on note

$$\ell_S(g) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid g = g_1^{s_1} \cdots g_k^{s_k}, \quad g_i \in S,\ s_i = \pm 1\}.$$

Trouver tous les $g \in \langle S \rangle$ tels que $(\ell_S(g^n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Exercice 63 [ENS ULSR 2026 # 63] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'une norme N. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est stable si la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle, et contractante pour N s'il existe $c \in]0,1[$ tel que $N(Ax) \leq cN(x)$ pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est contractante pour N, alors elle est stable.
2. On suppose A stable. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (A^k)^T A^k$ converge et que sa somme est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si A est stable, alors A est contractante pour une norme euclidienne bien choisie.

Exercice 64 [ENS U 2026 # 64] Soit d un entier supérieur ou égal à 2.

1. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$ et que $\{\mathrm{tr}(M^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\mathbb{R}$?
2. Même question lorsque M a exactement deux valeurs propres non réelles. Indication : considérer une énumération des rationnels.

Exercice 65 [ENS L 2026 # 65] Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On note d la distance associée à la norme. Soit $f : E \to E$ une application s'annulant en 0.

1. On suppose que f est continue et que, pour tous $(x, y) \in E^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Que dire de f ?

2. On suppose dans la suite que f préserve la distance d et est surjective. Montrer que f est linéaire dans les deux cas suivants : a. $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne canonique ; b. $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie.
3. On revient au cas général. Soient $p, q \in E$ avec $q = -p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties de E définie par

$$X_0 = \{e \in E \mid d(e,p) = d(e,q) = d(p,q)/2\},$$

$$X_n = \{e \in X_{n-1} \mid \forall x \in X_{n-1},\ d(e,x) \leq \mathrm{diam}(X_{n-1})/2\}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que $0 \in X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis caractériser $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Conclure que f est linéaire.

Exercice 66 [ENS ULSR 2026 # 66] Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

1. Montrer que $B(0,1) \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.
2. Soient U un ouvert connexe par arcs de E et V une partie finie de E. Montrer que $U \setminus V$ est connexe par arcs.
3. Soient U un ouvert connexe par arcs de E et V une union dénombrable de sous-espaces affines de E de dimension au plus $n-2$. Montrer que $U \setminus V$ est connexe par arcs.

Exercice 67 [ENS ULSR 2026 # 67] On considère l'espace vectoriel normé des suites réelles sommables, noté E, muni de la norme $\|u\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$.

1. Rappeler la définition d'une partie compacte de E.
2. Montrer que la boule unité fermée $B(0,1) = \{u \in E \mid \|u\| \leq 1\}$ n'est pas compacte dans E.
Une partie $K \subset E$ est dite équisommable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $u \in K$,

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} |u_k| < \varepsilon.$$

Exercice 68 [Magistère de Rennes 2026 # 68] Montrer qu'il existe un unique couple $(\alpha, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que

$$\sin\left(\frac{\theta}{n^\alpha}\right) = \frac{\theta}{(n+1)^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right) \qquad (n \to +\infty).$$

Exercice 69 [ENS U 2026 # 69] Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x_n = \sqrt[p]{c_1 + \sqrt[p]{c_2 + \sqrt[p]{\cdots + \sqrt[p]{c_n}}}}.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la suite $\left(\frac{\ln(c_n)}{p^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

Exercice 70 [ENS SR 2026 # 70] Soient N un entier supérieur ou égal à 2 et α un réel strictement positif. On pose

$$S_N = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{m^\alpha} \sin^2\left(\frac{m\pi}{N}\right).$$

1. Pour quelles valeurs de α la série définissant S_N est-elle convergente ?
2. Déterminer la limite de S_N lorsque $N \to +\infty$.
3. Déterminer un équivalent de S_N lorsque $N \to +\infty$ dans le cas où $1 < \alpha \leq 2$.

Exercice 71 [Magistère de Rennes 2026 # 71]
1. Soient $\alpha \geq 0$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ une suite positive. On suppose que $\sum d_n$ converge. Montrer que $\sum \frac{d_n}{1+n^\alpha d_n}$ converge.
2. Soient $\alpha > 1$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ une suite positive. Montrer que $\sum \frac{d_n}{1+n^\alpha d_n}$ converge.
3. Soit $(d_n)_{n\geq 0}$ une suite positive telle que $\sum d_n$ diverge. Montrer que $\sum \frac{d_n}{1+d_n}$ diverge.
4. Soit $\alpha \in]0,1]$. Montrer l'existence de deux suites positives $(e_n)_{n\geq 0}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ telles que : a. $\sum e_n$ diverge et $\sum \frac{e_n}{1+n^\alpha e_n}$ diverge ; b. $\sum f_n$ diverge et $\sum \frac{f_n}{1+n^\alpha f_n}$ converge.

Exercice 72 [ENS SR 2026 # 72] Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^{\sigma(n)}} < +\infty$$
et expliciter un majorant de la somme.
2. Soit $\alpha \leq 2$. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha} = +\infty.$$

Exercice 73 [ENS SR 2026 # 73]
1. Déterminer le nombre de solutions de $ye^y = x$ selon la valeur de x.
2. Soit f qui à $x \in [-1/e, +\infty[$ renvoie l'unique solution $y \geq -1$ de $ye^y = x$. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1/e, +\infty[$.
3. Montrer que $f'(x) = \frac{1}{x+e^{f(x)}}$ et en déduire que f est solution de $x(1+y)y' = y$.
4. Trouver un développement asymptotique de f en $+\infty$, à deux termes, et montrer que le troisième terme est un $o(1)$.
5. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, et trouver son rayon de convergence.

Exercice 74 [ENS U 2026 # 74] Soit $\beta \geq 1$. On considère l'équation $y^\beta = \frac{1}{3}e^y$. Montrer qu'il existe une unique solution sur $[1, +\infty[$, que l'on note $y(\beta)$, puis déterminer un développement asymptotique de $y(\beta)$ lorsque β tend vers $+\infty$.

Exercice 75 [ENS L 2026 # 75] Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$. Soit T_x la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 définie sur $\mathbb{R}$ telle que $T_x(x) = f(x)$, $T_x'(x) = f'(x)$ et $T_x''(x) = f''(x)$. Que dire de l'ensemble
$$\{(y, T_x(y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}?$$

Exercice 76 [ENS ULSR 2026 # 76]
1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction f non nulle, de classe C^k, à support compact et telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.
2. Montrer qu'il existe une fonction f non nulle, de classe C^∞ et à support compact.
3. Montrer qu'il existe une fonction f non nulle, de classe C^∞, à support compact et telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 77 [ENS L 2026 # 77] Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit
$$E = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0, \quad \|f'\|_\infty \leq a, \quad \|f''\|_\infty \leq b\}.$$
Calculer $\sup_{f\in E} \|f\|_\infty$.

Exercice 78 [ENS L 2026 # 78] Soit f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit S un segment non trivial de $\mathbb{R}$ sur lequel f n'est pas polynomiale. Montrer qu'il existe un sous-segment non trivial S' de S sur lequel f n'est pas polynomiale et ne s'annule pas.
2. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Montrer que f est polynomiale.

Exercice 79 [ENS SR 2026 # 79]
1. Soit $f \in C^0([0,\pi], \mathbb{R})$. Montrer que
$$\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
2. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}.$$
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Exercice 80 [ENS U 2026 # 80] Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer
$$\int_0^{+\infty} x^{k+\frac{1}{2}} e^{-ax-\frac{b}{x}}\,dx.$$

Exercice 81 [ENS SR 2026 # 81] Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient de carré intégrable.

1. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty}(f')^2$ converge.
2. Montrer que f et f' tendent vers 0 en $\pm\infty$.
3. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f')^2 \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \int_{-\infty}^{+\infty}(f'')^2}.$$

Exercice 82 [ENS ULSR 2026 # 82] Soit $\alpha > 0$. On note E l'ensemble des fonctions f de classe C^2 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$J(f) = \int_0^{+\infty} \left((f')^2 + \alpha f^2\right) < +\infty.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}$, il existe $x \in E$ tel que $x(0) = v$.
3. On fixe $v \in \mathbb{R}$. Déterminer la borne inférieure de J sur l'ensemble des $x \in E$ tels que $x(0) = v$.

Exercice 83 [ENS L 2026 # 83] Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ continues par morceaux et telles que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leq 1$. Pour $f \in E$, on pose
$$F(f) = -\int_0^{+\infty} f(x)\ln(x)\,dx.$$

1. Montrer que $F(E) = [-\infty, 1]$.
2. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Caractériser
$$G_\varepsilon = \sup\left\{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \mid f \in E \text{ et } F(f) \geq 1-\varepsilon\right\}.$$

Exercice 84 [ENS L 2026 # 84] Trouver une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction f continue à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on ait, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(y)|}{\sqrt{|y-x|}}\,dy \leq C\sqrt{\|f\|_\infty \|f\|_1}.$$

Exercice 85 [ENS U 2026 # 85]
1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, tendant toutes vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$. Montrer que cette suite admet une suite extraite qui converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes. Montrer qu'il existe une extraction φ telle que $(\mathbf{E}(g(X_{\varphi(n)})))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et nulle en dehors d'un segment.

Exercice 86 [ENS U 2026 # 86] On note f la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

1. La fonction f est-elle limite simple sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues ?
2. Existe-t-il une famille $(f_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} f_{n,m}($

Exercice 87 [ENS L 2026 # 87] Soient $q, n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $p \in \{1, \ldots, q^n\}$ tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $d(px_i, \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{q}$.
2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la série $\sum a_n/n^x$ converge si et seulement si $x > x_0$. Soit $T > 0$. Pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(z) > x_0$, on pose
$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^z}.$$
On considère $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > x_0, \mathrm{Im}(z) \geq T\}$. Montrer que f est bien définie sur F et qu'elle n'y est pas bornée.

Exercice 88 [ENS U 2026 # 88] Soient $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On pose
$$E_c(f) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ et } \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}.$$

1. Montrer que $E_c(f)$ peut être vide, le cercle unité $\mathbb{U}$ tout entier, ou $\mathbb{U} \setminus S$ avec S une partie finie. Montrer en revanche que $E_c(f)$ ne peut pas être n'importe quel sous-ensemble de $\mathbb{U}$.
2. On suppose que $a_n \to 0$. Montrer qu'il est possible que $E_c(f) = \varnothing$ ou que $E_c(f) = \{1\}$.

Exercice 89 [ENS ULSR 2026 # 89] Si n est un entier supérieur ou égal à 2, un élément σ de $\mathfrak{S}_n$ est dit en zigzags si, pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, $\sigma(i)$ n'est pas compris entre $\sigma(i-1)$ et $\sigma(i+1)$. Une permutation en zigzags est dite ascendante si $\sigma(2) > \sigma(1)$, descendante dans le cas contraire.

1. Montrer que, si $n \geq 2$, il y a autant de permutations en zigzags ascendantes que descendantes.
2. Pour $n \geq 2$, soit A_n le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ en zigzags et ascendantes. On convient que $A_0 = A_1 = 1$. Pour $n \geq 1$, vérifier que
$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k}.$$
Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

3. Montrer que le rayon de convergence de f est supérieur ou égal à 1.
4. En utilisant une équation différentielle, déterminer une expression de $f(x)$.

Exercice 90 [ENS ULSR 2026 # 90] Soit $E = C^2([0,1], \mathbb{R})$. Soit $\varphi : E \to E$ l'application qui à $f \in E$ associe

$$\varphi(f) : x \in [0,1] \longmapsto \int_0^x sf(s)\,ds + x\int_x^1 f(s)\,ds.$$

1. Déterminer $\ker(\varphi)$ et l'ensemble des valeurs propres de φ, ainsi que les espaces propres associés.
2. On pose $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = \varphi(P_n)$. Déterminer, pour tout $x \in [0,1]$, le rayon de convergence de la série entière $\sum P_n(x)z^n$.

Exercice 91 [ENS SR 2026 # 91]
1. Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ et un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$.

Exercice 92 [ENS SR 2026 # 92] Soient $r > 0$ et $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Pour $f : G \to \mathbb{C}$ continue, on note

$$I(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})re^{i\theta}\,d\theta.$$

1. Calculer $I(z \mapsto z^k)$ et $I\left(z \mapsto \frac{1}{z-a}\right)$ si $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C} \setminus G$.
2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < r$. Montrer que

$$I\left(z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}\right) = f(a).$$

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, si r est assez grand,

$$e^M = I\left(z \mapsto e^z(zI_n - M)^{-1}\right),$$

où la fonction I est appliquée coefficient par coefficient.

Exercice 93 [ENS U 2026 # 93] Déterminer un équivalent, quand $\delta \to 0$, de

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_\delta^{+\infty}\frac{e^{-n^2t}}{t}\,dt\right).$$

Exercice 94 [ENS ULSR 2026 # 94] Pour $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note (E_u) l'équation différentielle $y'' + u(t)y = 0$.

1. Soient $b > a > 0$ réels. Montrer qu'il existe une fonction continue $u : \mathbb{R} \to [a,b]$ telle que (E_u) possède une solution non bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une fonction continue $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tendant vers 1 en $+\infty$, telle que (E_u) possède une solution non bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 95 [ENS L 2026 # 95] Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$. On considère une solution $y \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ du problème aux limites

$$y'' - y = f, \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

1. Montrer que la solution y est unique.
2. Montrer que

$$\int_0^1 y^2 \le \frac{1}{(1+\pi^2)^2}\int_0^1 f^2.$$

Exercice 96 [ENS ULSR 2026 # 96] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $X' = JSX$ sont bornées.
2. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que JS soit semblable sur $\mathbb{C}$ à la matrice diagonale de coefficients diagonaux $i\lambda_1, -i\lambda_1, \dots, i\lambda_n, -i\lambda_n$.

Exercice 97 [Magistère de Rennes 2026 # 97] Soient $N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et strictement croissante, et $a > 0$.

1. Montrer que l'application

$$L : v \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \int_v^a \frac{dw}{N(w)}$$

est bien définie, de classe C^1, injective et possède une limite (finie ou infinie) en 0. On note cette limite $L(0)$.

2. Soient $T > 0$, $u \in C^1([0,T[,\mathbb{R}_+)$, $A \in \mathbb{R}_+$ et $B : [0,T[\to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable tels que, pour tout $t \in [0,T[$,

$$u(t) \leq A + \int_0^t B(s)N(u(s))\,ds.$$

a. On suppose $A > 0$. Montrer que, pour tout $t \in [0,T[$,

$$-L(u(t)) \leq -L(A) + \int_0^t B(s)\,ds.$$

b. Expliciter l'inégalité précédente quand B est constante et N est l'identité. c. On suppose $A = 0$ et $L(0) = +\infty$. Montrer que $u(t) = 0$ pour tout $t \in [0,T[$.

3. Étendre ce qui précède au cas où u est seulement continue.

Exercice 98 [ENS L 2026 # 98] Soient $x, y \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t)(1 + x(t)y(t)) - x^3(t), \\ y'(t) = x(t)(1 - x(t)y(t)) - y^3(t). \end{cases}$$

1. Étudier le comportement asymptotique de x et y.
2. En posant $X(t) = (x(t), y(t))$, décrire le mouvement.

Exercice 99 [ENS ULSR 2026 # 99] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. On pose $S = \{X \in \mathbb{R}^m \mid AX = B\}$ et on suppose S non vide.

1. Montrer que S admet un élément de norme minimale et le caractériser géométriquement.
2. Soient $t > 0$, $q > 1$ et

$$f_t : X \in \mathbb{R}^m \longmapsto \frac{1}{2}\|X\|^2 + \frac{t}{q}\|AX - B\|^q.$$

a. Montrer que f_t atteint son minimum en un unique point X_0. b. Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^m$ telle que $f_t(u_k) \to \min f_t$. Que dire de la suite (u_k) ?

Exercice 100 [ENS SR 2026 # 100] On se place dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\rho = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$.

1. Montrer que f est trigonalisable puis que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base B_ε de E telle que la matrice $M = \mathrm{Mat}_{B_\varepsilon}(f)$ vérifie $M_{i,j} = 0$ si $j < i$ et $|M_{i,j}| < \varepsilon$ si $j > i$.
2. En déduire qu'il existe une norme N_ε sur E telle que $N_\varepsilon(f(x)) \leq (\rho + \varepsilon)N_\varepsilon(x)$ pour tout $x \in E$.
3. Montrer que le résultat persiste sur $\mathbb{R}$.
4. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que $\varphi : x \in E \setminus \{0\} \mapsto f(x)/\|f(x)\|$ est de classe C^1 et calculer sa différentielle.
5. Quels sont les points fixes de φ ?

Exercice 101 [ENS SR 2026 # 101] Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$A(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t(x - x_0), y)\,dt,$$

$$B(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + t(y - y_0))\,dt.$$

1. Après avoir rappelé les hypothèses de continuité sous le signe intégral, montrer que A et B sont continues.
2. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)A(x,y) + (y - y_0)B(x,y).$$

3. Montrer que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses suivantes : a. φ est continue ; b. $f(x,\varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; c. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; alors φ est de classe C^1.

Exercice 102 [ENS SR 2026 # 102] Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On note $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ la norme subordonnée sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

1. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et U un ouvert convexe tels que $\|df(x)\|_{\mathrm{op}} \leq M$ pour tout $x \in U$. Montrer que, pour tous $(x,y) \in U^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$.
2. Dans la suite, f est de classe C^2 et U n'est plus supposé convexe. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $df(a)$ soit inversible. Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a tel que, pour tout $x \in V$, $df(x)$ soit inversible.
3. On définit $F : V \to \mathbb{R}^n$ par $F(x) = x - (df(x))^{-1}(f(x))$. Montrer qu'il existe un ouvert non vide $W \subset V$ tel que $F(W) \subset W$ et que, pour toute suite définie par $x_0 \in W$ et $x_{k+1} = F(x_k)$, la suite (x_k) converge vers a.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe une matrice A telle que $P(A) = 0$ et $P'(A)$ soit inversible. On définit au voisinage de A l'application $F : M \mapsto M - (P'(M))^{-1}P(M)$. Montrer qu'il existe un ouvert non vide W tel que, pour toute suite définie par $M_0 = M \in W$ avec $AM = MA$ et $M_{k+1} = F(M_k)$, la suite (M_k) converge vers A.

Exercice 103 [ENS L 2026 # 103] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée canonique. On note S la sphère unité, B la boule unité fermée et r la rotation d'angle $\pi/2$. Soient $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 et $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 telles que :

1. $x'(t) = u(x(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$;
2. $\langle u(y), y\rangle < 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^2 \setminus B$;
3. $\langle u(y), r(y)\rangle = \|y\|^2$ pour tout $y \in S$;
4. il existe $e \in S$ tel que $\langle u(e), e\rangle < 0$.

Montrer qu'il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \in [T, +\infty[$, $\|x(t)\| < 1$.

Exercice 104 [ENS ULSR 2026 # 104] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction minorée. On note $f^* = \inf_{\mathbb{R}^n} f$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) = 0\}$ et $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f^*\}$. On note (PL) la propriété

$$\exists \mu > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) - f^* \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|^2.$$

1. Quel lien y a-t-il entre S et E lorsque f vérifie (PL) ?
2. Soit $E' \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace affine. Existe-t-il une fonction f vérifiant (PL) pour laquelle $E = E'$? Même question lorsque E' est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
3. On suppose que f vérifie (PL). Montrer que E est connexe par arcs.

Exercice 105 [ENS L 2026 # 105] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telles que, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = u(\varphi(t, x)), \qquad \varphi(0, x) = x.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$. On suppose que $\operatorname{tr}(du(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer que, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $\det d\varphi_t(x) = 1$.

2) Géométrie

Exercice 106 [ENS SR 2026 # 106] On appelle similitude directe de $\mathbb{C}$ une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

1. Montrer que l'ensemble des similitudes directes est un groupe pour la composition.
2. Rappeler l'écriture complexe d'une rotation.
3. Soient A_1, A_2, A_3 des points du plan d'affixes z_1, z_2, z_3. Montrer que $A_1A_2A_3$ est un triangle équilatéral direct si et seulement si $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$.
4. Peut-on généraliser pour caractériser un polygone régulier à n côtés ?

Exercice 107 [ENS L 2026 # 107] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure affine euclidienne canonique. Pour $v \in \mathbb{R}^2$, soit t_v la translation de vecteur v.

1. Soit G l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même de la forme $t_v \circ u$ où $u \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^2$. Montrer que G est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même et que, si (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont deux triplets de points non alignés de $\mathbb{R}^2$, il existe un unique $g \in G$ tel que $g(a_1) = a_2$, $g(b_1) = b_2$, $g(c_1) = c_2$.
2. On appelle ellipse toute image d'un cercle de rayon strictement positif de $\mathbb{R}^2$ par un élément de G. Montrer que, pour tout triangle non aplati $T = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^2$, il existe une ellipse tangente aux côtés de T en leurs milieux.

Exercice 108 [ENS L 2026 # 108] Soit $M \subset \mathbb{R}^2$ une partie du plan contenant au moins deux points. On dit que M vérifie la propriété (P) si, pour tous $P, Q \in M$ avec $P \neq Q$, la droite (PQ) n'intersecte M qu'en P et Q. On dit que M est maximale si, pour tout $X \notin M$, $M \cup \{X\}$ ne vérifie plus (P).

1. Trouver tous les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}^2$ vérifiant (P).
2. Montrer qu'il existe une partie dense de $\mathbb{R}^2$ vérifiant (P).
3. Montrer que le cercle unité est maximal.
4. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ tel que la frontière de Ω vérifie (P). Que dire de Ω ?

Exercice 109 [ENS L 2026 # 109] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne standard. Une ellipse est définie comme l'image directe du disque unité fermé par un certain endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, et l'on définit son aire comme $\pi|\det(f)|$. Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que, parmi les disques fermés contenant K, il en existe un et un seul de rayon minimal (éventuellement nul).
2. Montrer que, parmi les ellipses contenant K, il en existe une d'aire minimale.

Exercice 110 [ENS ULSR 2026 # 110] Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ une partie convexe compacte dont la frontière est une courbe de classe C^1. On définit un billard commençant par un point M de la frontière et un vecteur $\vec{v}$ comme le chemin obtenu en faisant des rebonds chaque fois que la trajectoire touche la frontière, de sorte que les rebonds soient symétriques par rapport à la normale au point de réflexion. Montrer qu'il existe une trajectoire triangulaire périodique. Indication : prendre un triangle dont la somme des longueurs des côtés est maximale.

3) Probabilités

Exercice 111 [ENS SR 2026 # 111] 1. On considère trois dés équilibrés dont les faces sont numérotées respectivement par les ensembles $\{18,9,8,7,6,5\}$, $\{17,16,15,4,3,2\}$ et $\{14,13,12,11,10,1\}$, et l'on note A, B, C les résultats de chaque lancer. Calculer $\mathbb{P}(A > B)$, $\mathbb{P}(B > C)$ et $\mathbb{P}(C > A)$. Commenter le résultat.

2. On numérote les faces de trois dés à n faces avec les entiers de 1 à $3n$ et l'on note A, B, C les résultats de chaque lancer. Montrer que l'une des trois probabilités $\mathbb{P}(A > B)$, $\mathbb{P}(B > C)$ ou $\mathbb{P}(C > A)$ est inférieure ou égale à $2/3$.

Exercice 112 [ENS SR 2026 # 112] On considère un tableau de taille $n \times n$, dont on révèle les cases une par une aléatoirement.

1. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$. Calculer la probabilité qu'après m étapes, la ligne i n'ait aucune case révélée. La majorer par $(1-1/n)^m$.
2. On note H_n le nombre d'étapes nécessaires pour que toute ligne et toute colonne contienne au moins une case révélée. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(H_n > \lfloor (1+\varepsilon) n \ln n \rfloor) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Déterminer la vitesse de convergence.
3. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On note X_n le nombre de lignes ne contenant pas de case révélée à l'instant $\tau = \lfloor (1-\varepsilon) n \ln n \rfloor$. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(X_n = 0) \to 0$.

Exercice 113 [ENS U 2026 # 113] Que dire de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes X et Y telles que $X+Y$ et Y soient indépendantes ?

Exercice 114 [ENS U 2026 # 114] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, M_n une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Montrer qu'il existe une constante absolue $c > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(M_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) \geq c.$$

Exercice 115 [ENS U 2026 # 115] Soit $R > 0$. On choisit aléatoirement un polynôme $P_n \in \mathbb{C}_n[X]$ unitaire de degré n, à coefficients indépendants suivant la loi uniforme sur $B(0,R) \cap \mathbb{Z}[i]$. Où se situent les racines de P_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 116 [ENS L 2026 # 116] On définit, pour une suite de réels $u = (u_i)_{i \geq 0}$, la suite de matrices $H(u)$ telle que $H_n(u) = (u_{i+j-2})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbf{E}(X^n)$, avec X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment de tout ordre. Montrer que toutes les matrices $H_n(u)$ sont symétriques positives. Quel est leur rang ?
2. On suppose que $u_0, \ldots, u_{2M-2}$ vérifient $H_M(u) \in \mathcal{S}_M^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que la suite u peut être prolongée à partir du rang $2M-1$ en une suite infinie telle que, pour tout $n \geq M$, $\mathrm{rg}(H_n(u)) = M$.
3. On suppose que $H_n(u) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les seules natures possibles pour la suite $(\mathrm{rg}(H_n(u)))_{n \geq 0}$ sont : soit $\mathrm{rg}(H_n(u)) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; soit il existe M tel que $\mathrm{rg}(H_n(u)) = n$ pour $n \leq M$, puis cette suite est stationnaire égale à M.

Exercice 117 [ENS U 2026 # 117] Soit σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_m$. Quelle est la loi de la longueur du cycle de σ contenant 1 ?

Exercice 118 [ENS L 2026 # 118] Soit $p \geq 5$ un nombre premier. On admet que le polynôme $X^3 - 1$ a pour unique racine 1 dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 2 \pmod 3$. On tire une matrice M dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ avec la probabilité uniforme. Calculer $\mathbb{P}(M^3 = I_3)$.

Exercice 119 [ENS ULSR 2026 # 119] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est inversible modulo n s'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que, pour tous $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$, $(AB)_{i,j} \equiv \delta_{i,j} \pmod n$.

1. Montrer que A est inversible modulo n si et seulement si $\det(A) \wedge n = 1$.
2. Soient a, b, c, d des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$, et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité que M soit inversible modulo n pour $n = p^k$, avec p premier et $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 120 [ENS L 2026 # 120] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k), \ldots$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit σ_m la permutation aléatoire $\sigma_m = (a_1\ b_1) \circ \cdots \circ (a_m\ b_m)$, et soit μ_m la loi de σ_m.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, exprimer μ_{m+1} en fonction de μ_m.
2. À quelle condition sur m a-t-on $\mu_m(\{\sigma\}) > 0$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$?

Exercice 121 [ENS U 2026 # 121] Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{i^\alpha}, \qquad F_N : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(S_N \leq x).$$

Montrer que la suite (F_N) converge ; on note F sa limite. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ et $x \geq 0$ a-t-on $F(x) > 0$?

Exercice 122 [ENS L 2026 # 122] 1. Soient $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $c_{a,b} > 0$ tel que, pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\mathbf{E}(Z) = 1$ et $\mathbf{E}(Z^2) \leq b$, on ait $\mathbb{P}(Z \geq a) \geq c_{a,b}$.

2. Soient $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. a. Montrer que, pour tout $a > 0$, il existe $\varphi(a) > 0$ tel que, pour tout n assez grand, $\mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \geq a) \geq \varphi(a)$. b. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right)_{n \geq 1} \text{ est bornée} \right) = 0.$$

Exercice 123 [ENS ULSR 2026 # 123]

1. Montrer que la fonction τ qui associe à un entier naturel non nul son nombre de diviseurs positifs vérifie $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.
2. Trouver un équivalent de $\mathbf{E}(\tau(T_N))$ quand $N \to +\infty$, où $T_N \sim \mathcal{U}([\![1, N]\!])$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(\tau(T_N) > \ln^3(N)) = O(1/\ln^3(N))$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 124 [ENS L 2026 # 124] Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$, et $X_0, X_1, \ldots, X_N$ des variables aléatoires complexes telles que, pour tous $i, j \in \{0, \ldots, N\}$,

$$\mathbf{E}(|X_i - X_j|^p) \leq \left(\frac{|i-j|}{N}\right)^2.$$

1. Soit $\eta > 0$. Donner une majoration de $\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq N} |X_i - X_0| \geq \eta\right)$.
2. À partir de quel p cette majoration est-elle pertinente ?

Exercice 125 [ENS L 2026 # 125] Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. Montrer l'équivalence entre :

1. pour toute distribution de probabilités $(q_i)_{i\geq 0}$ sur $\mathbb{N}$, il existe une suite (g_n) de fonctions de $\{0,1\}^{n+1}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(g_n(X_0, \ldots, X_n))$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire suivant la loi associée à (q_i) ;
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(1-p_n) = +\infty$.

Exercice 126 [ENS U 2026 # 126]

1. Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Donner un équivalent simple de $\mathbf{E}(M_n)$ quand $n \to +\infty$.
2. Soit $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$. Montrer que $\mathbf{E}(P_n) = o(\mathbf{E}(M_n))$, puis trouver un équivalent de $\mathbf{E}(P_n)$.

Exercice 127 [ENS U 2026 # 127] Soient $\beta \in]2, +\infty[$ et $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telles que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_1 = m) = \frac{1}{\zeta(\beta)} \frac{1}{m^\beta}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer un équivalent simple de $\mathbf{E}(M_n)$.

Exercice 128 [ENS U 2026 # 128] Soient $(p_k)_{k\geq 0} \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ et $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes telle que $p_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels positifs.

1. On suppose que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k p_k < +\infty$. Montrer que, pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X_k \leq A\right) > 0.$$

2. On suppose que $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k p_k = +\infty$ et que (a_k) est bornée. Montrer que, pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X_k \leq A\right) = 0.$$

Exercice 129 [ENS ULSR 2026 # 129] Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles indépendantes. On suppose que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}(|X_k|) < +\infty$ et $\mathbf{E}(X_k) \geq 0$. On note $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

1. Montrer que, pour tout $C > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max(S_1, \ldots, S_n) \geq C\right) \leq \frac{\mathbf{E}(\max(S_n, 0))}{C}.$$

2. On suppose de plus que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}(X_k) = 0$ et $\mathbf{E}(X_k^2) < +\infty$. Montrer que, pour tout $C > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max(|S_1|, \ldots, |S_n|) \geq C\right) \leq \frac{\mathbf{E}(S_n^2)}{C^2}.$$

Exercice 130 [ENS SR 2026 # 130] Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $X \leq_{\text{st}} Y$ la condition $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X \geq m) \leq \mathbb{P}(Y \geq m)$. Soient $0 < p < q < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n, q)$. Montrer que $X \leq_{\text{st}} Y$.
2. Montrer que si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que $k \mapsto \frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(Y=k)}$ est décroissante, alors $X \leq_{\text{st}} Y$.
3. Soient X', Y' deux variables aléatoires telles que $X' \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y' \sim \mathcal{B}(n, q)$. Soient X, Y des variables aléatoires telles que, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\mathbb{P}(X' = k)}{1 - \mathbb{P}(X' = 0)}, \qquad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\mathbb{P}(Y' = k)}{1 - \mathbb{P}(Y' = 0)}.$$

Justifier que de telles variables aléatoires existent. Montrer que $X \leq_{\text{st}} Y$.

Exercice 131 [ENS L 2026 # 131] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, soient

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad u_n(x) = \mathbb{P}(S_n \leq nx).$$

1. On admet que, si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelle sous-additive, alors $(a_n/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la suite $(\sqrt[n]{u_n(x)})_{n\geq 1}$ converge vers un élément $v(x)$ de $[0,1]$.
2. À quelle condition sur X la fonction v est-elle constante égale à 1 ?
3. On suppose qu'il existe $t\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathbf{E}(e^{tX})<+\infty$. Résoudre l'équation $v(x)=1$.

Exercice 132 [ENS ULSR 2026 # 132]
1. Soit $h : u\in\mathbb{R}_+\mapsto (1+u)\ln(1+u)-u$. Montrer que h est positive, convexe et en donner un équivalent en 0.
2. Soit X une variable de Poisson de paramètre $\lambda>0$. Montrer que, pour tout $u>0$,
$$\mathbb{P}(X\geq\lambda(1+u))\leq e^{-\lambda h(u)}.$$

Exercice 133 [ENS U 2026 # 133] Soit $d\in\mathbb{N}^*$. Pour $x=(x_1,\dots,x_d)$, $y=(y_1,\dots,y_d)\in\mathbb{Z}^d$, on note $x\preceq y$ si $x_i\leq y_i$ pour tout $1\leq i\leq d$. On dit que $f:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{R}$ est croissante si $x\preceq y$ implique $f(x)\leq f(y)$. Soient f,g deux fonctions croissantes et bornées de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\mathbf{E}(f(X_1,\dots,X_d)g(X_1,\dots,X_d))\geq\mathbf{E}(f(X_1,\dots,X_d))\mathbf{E}(g(X_1,\dots,X_d))$$
dans chacun des cas suivants :
1. $X_1,\dots,X_d$ sont des variables de Bernoulli indépendantes ;
2. $X_1,\dots,X_d$ sont des variables de Poisson indépendantes.

Exercice 134 [ENS SR 2026 # 134] Soit X une variable aléatoire réelle. On note $F_X : t\in\mathbb{R}\mapsto\mathbb{P}(X\leq t)$. Pour $q\in]0,1[$, on pose
$$C_X(q)=\inf\{t\in\mathbb{R}\mid F_X(t)\geq q\}.$$
1. Soit $q\in]0,1[$. Montrer que $C_X(q)$ est bien défini. Calculer $C_X(q)$ pour $X\sim\mathcal{B}(p)$ avec $p\in]0,1[$.
2. Soient $x\in\mathbb{R}$ et $q\in]0,1[$. Montrer que $C_X(q)\leq x$ si et seulement si $q\leq F_X(x)$. En déduire que
$$\int_0^1\mathbf{1}_{C_X(q)\leq x}\,dq=\mathbb{P}(X\leq x).$$
En déduire une expression de $\mathbf{E}(X)$ lorsque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Soit $\widetilde{C}_X(q)=\sup\{t\in\mathbb{R}\mid\mathbb{P}(X<t)\leq q\}$. Montrer que $C_{-X}(q)=-\widetilde{C}_X(1-q)$.

Exercice 135 [ENS ULSR 2026 # 135] On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est symétrique si $X\sim -X$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires symétriques i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Pour $n\geq 1$, on pose $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ et, pour $x\in\mathbb{Z}$, $p_n(x)=\mathbb{P}(S_n=x)$.
1. Pour $n,k\geq 1$, montrer que
$$p_{n+k}(x)=\sum_{y\in\mathbb{Z}}p_n(y)p_k(x-y).$$
2. Montrer que l'application $x\mapsto p_{2n}(x)$ atteint un maximum sur $\mathbb{Z}$ en un unique point.
3. On suppose maintenant que $X_1\sim\mathcal{U}(\{-1,1\})$. Montrer que, pour tout $n\geq 1$ et tout $x\in\mathbb{Z}$,
$$p_n(x)\leq\frac{2}{\sqrt{\pi n}}.$$

Exercice 136 [ENS U 2026 # 136] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n,b_n\in[\![0,n]\!]$ et $a_n+b_n=n-c$, avec $c\in\mathbb{N}$ fixé. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit V_n (resp. W_n) un sous-espace vectoriel aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des sous-espaces de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ de dimension a_n (resp. b_n). On suppose que V_n et W_n sont indépendants. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite
$$(\mathbb{P}(\dim(V_n+W_n)=a_n+b_n))_{n\in\mathbb{N}}$$
converge et déterminer sa limite le cas échéant.

Exercice 137 [ENS ULSR 2026 # 137] Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}$ avec $x_1<\dots<x_m$ et $y_1<\dots<y_n$. Soient $a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^m a_i=\sum_{j=1}^n b_j=1$. Soient X,Y deux variables aléatoires de lois données par $\mathbb{P}(X=x_i)=a_i$ et $\mathbb{P}(Y=y_j)=b_j$. Une matrice de couplage de X,Y est une matrice $P=(p_{i,j})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que $p_{i,j}=\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_j)$; on pose $C(P)=\mathbf{E}((X-Y)^2)$ et le couplage est optimal si P minimise $C(P)$.
1. Justifier que $C(P)$ ne dépend que de la matrice P et montrer l'existence d'un couplage optimal.
2. Justifier que minimiser $\mathbf{E}((X-Y)^2)$ revient à maximiser $\mathbf{E}(XY)$.
3. Posons $A_0=B_0=0$, $A_i=a_1+\dots+a_i$ et $B_j=b_1+\dots+b_j$. Définissons $I_i=]A_{i-1},A_i]$ et $J_j=]B_{j-1},B_j]$, puis $p^*_{i,j}=|I_i\cap J_j|$. Montrer que la matrice $(p^*_{i,j})$ est l'unique matrice de couplage optimal.

Exercice 138 [ENS U 2026 # 138] Soient $n\geq 2$ et $N\geq 2$ deux entiers, et $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X_1+\dots+X_n$ suive la loi uniforme sur $[\![0,N-1]\!]$. Est-il vrai que les X_i suivent des lois uniformes ?

Exercice 139 [ENS U 2026 # 139] Soit $p\in[0,1]$, $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, et $(Y_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $Y_0=1$ et, pour $n\in\mathbb{N}$,
$$Y_{n+1}=\frac{1}{5}(Y_n^2+4X_n+2).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(\min(Y_1, \dots, Y_n) \leq x), \qquad G_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leq x).$$

Montrer que les suites de fonctions (F_n) et (G_n) convergent simplement vers des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

II) X MP/MPI XENS

1) Probabilités

Exercice 140 [X 2026 # 218] Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = +\infty$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}}{\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_j)} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 141 [X 2026 # 219]

1. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Exprimer $\mathbf{E}((X-a)^2)$ en fonction de $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{E}(X)$ et de a.
2. Soit Y une variable aléatoire réelle telle que $\mathbf{E}(Y) = 1$ et qui admet un moment d'ordre 2. Pour $\theta \in [0,1]$, montrer que
$$\mathbf{P}(Y > \theta) \geq \frac{(1-\theta)^2}{\mathbf{V}(Y) + (1-\theta)^2}.$$
3. Caractériser le cas d'égalité.

Exercice 142 [X 2026 # 220] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k = \mathbf{P}(X = k)$. On définit, pour $\beta \in \mathbb{R}_+$,

$$z(\beta) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-\beta k}, \qquad u_k = \frac{p_k e^{-\beta k}}{z(\beta)}.$$

1. Calculer les u_k lorsque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
2. Montrer que $\beta \mapsto \ln(z(\beta))$ est convexe.
3. Soit X_β une variable aléatoire de loi (u_k). Montrer que $\beta \mapsto \mathbf{E}(X_\beta)$ est décroissante.
4. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, on note m_β la médiane définie par
$$m_\beta = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \mathbf{P}(X_\beta > k) \leq 1/2\}.$$
Montrer que $\beta \mapsto m_\beta$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 143 [X 2026 # 221] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = ((M_n)_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique aléatoire dont les coefficients $(M_n)_{i,j}$, pour $i \leq j$, sont i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On note $\lambda_1(M_n)$ sa plus grande valeur propre.

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,
$$\langle u, M_n u\rangle \leq \lambda_1(M_n)\|u\|^2.$$
2. Déterminer le spectre et les vecteurs propres de la matrice $(\mathbf{E}((M_n)_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$.
3. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\lambda_1(M_n) \geq (\tfrac{1}{2} - \varepsilon)n\right) = 1.$$

Exercice 144 [X 2026 # 222]

1. Caractériser les projecteurs orthogonaux de rang 1.
2. Soient $p_1, \dots, p_k$ des projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$. Soit $(N_r)_{r\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et, pour tout $r \in \mathbb{N}$,
$$X_{r+1} = p_{N_r}(X_r).$$
Étudier la limite éventuelle de $(\mathbf{E}(\|X_n\|))_{n\geq 1}$.

Exercice 145 [X 2026 # 223] Soient $N \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On considère une grille $N \times N$ formée de petits carrés 1×1. Chaque carré est blanc ou noir, indépendamment, avec probabilité $1/2$.

1. Soit A_N l'événement « il existe au moins un carré blanc de taille $k \times k$ ». Montrer que
$$\mathbf{P}(A_N) \leq 2^{-k^2} N^2.$$
2. Déterminer $\mathbf{E}(Y_{k,N})$, où $Y_{k,N}$ est le nombre de carrés blancs de taille $k \times k$.
3. Montrer que
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{V}(Y_{k,N})}{\mathbf{E}(Y_{k,N})^2} = 0.$$
On pourra traiter séparément les cas $k = 1$ et $k = 2$.

2) Algèbre

Exercice 146 [X 2026 # 224] Soit $n \geq 3$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n-i)^{n-2} = n^{n-2}.$$

Exercice 147 [X 2026 # 225]

1. Pour $n \geq 1$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Montrer que si $n \geq 8$, alors $\pi(n) \leq n/2$.
2. Soient p premier et $n, k, \alpha \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq n$ et p^α divise $\binom{n}{k}$. Montrer que $p^\alpha \leq n$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 8$, il existe un nombre premier entre $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ et n.

Exercice 148 [X 2026 # 226] Résoudre l'équation $x^2 + x - 2 = 0$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, puis déterminer les entiers $n \geq 2$ tels que cette équation admette exactement une solution dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 149 [X 2026 # 227] Soit $n \geq 2$.

1. Soit σ une permutation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On suppose que $\sigma - \mathrm{id}$ est une bijection. Montrer que n est impair. Que peut-on dire si $\sigma + \mathrm{id}$ est aussi une bijection ?
2. On suppose n impair et on note D_n le groupe des isométries linéaires du plan $\mathbb{C}$ qui laissent invariant $\mathbb{U}_n$. Montrer qu'il n'existe pas de permutation f de D_n telle que $g \mapsto gf(g)$ soit aussi une permutation de D_n.
3. Montrer que $g \mapsto \det g$ est l'unique morphisme non trivial de D_n dans $\{\pm 1\}$.

Exercice 150 [X 2026 # 228] Déterminer le cardinal de l'ensemble

$$\left\{ (x_k)_{k\geq 0} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \geq 0,\ a_n^2 \equiv a_n \pmod{10^n}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k 10^k \right\}.$$

Exercice 151 [X 2026 # 229] Soient A un anneau fini et $a, b \in A$ tels que $ab^2 = b$. Montrer que $bab = b$.

Exercice 152 [X 2026 # 230] Soit A un anneau tel que, pour tout $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$x = \sum_{k=2}^{n} x^k.$$

1. Déterminer la caractéristique de A.
2. Montrer que, pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.

Exercice 153 [X 2026 # 231] Soit G un groupe fini. On suppose que, pour tout automorphisme f de G, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(x) = x^m$ pour tout $x \in G$.

1. Soient $a, b \in G$ tels que l'ordre de a divise celui de b. Montrer que $ab = ba$.
2. Écrire $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ et poser
$$G_i = \{x \in G \mid x^{p_i^{\alpha_i}} = e\}.$$
Montrer que G_i est un sous-groupe commutatif de G.
3. Pour $i \neq j$, montrer que $xy = yx$ pour tout $(x, y) \in G_i \times G_j$.
4. Montrer que G est commutatif.

Exercice 154 [X 2026 # 232] Soit G un groupe fini.

1. Soient g, h deux éléments d'ordres finis a, b qui commutent, avec a et b premiers entre eux. Montrer que gh est d'ordre fini et déterminer cet ordre.
2. Montrer que, dans un groupe quelconque, le produit de deux éléments d'ordre fini n'est pas nécessairement d'ordre fini.
3. Soit $g \in G$ d'ordre fini n, et soit $n = ab$ avec a, b premiers entre eux. Montrer que $g = hh'$ où h, h' commutent et sont d'ordres respectifs a, b.
4. Y a-t-il unicité du couple (h, h') ?

Exercice 155 [X 2026 # 233] Soit p un nombre premier et G un sous-groupe de S_p transitif sur $[\![1, p]\!]$. On admet que tout groupe fini dont l'ordre est divisible par p contient un élément d'ordre p. On note $\mathrm{Aff}(_p)$ le groupe des permutations de $_p$ de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $a \in_p^*$ et $b \in_p$. Montrer l'équivalence des conditions :

1. Il existe deux éléments distincts $x, y \in [\![1, p]\!]$ tels que le seul élément de G fixant x et y soit l'identité.
2. $|G| < p^2$.
3. G possède un unique sous-groupe d'ordre p.
4. Il existe une bijection $\theta : [\![1, p]\!] \to_p$ et un sous-groupe H de $\mathrm{Aff}(_p)$ tels que $\{\theta \circ g \circ \theta^{-1} \mid g \in G\} = H$.

Exercice 156 [X 2026 # 234] Soit G un groupe fini. On suppose qu'il existe $a \in G \setminus \{e\}$ et un nombre premier p tels que, pour tout $x \in G$,

$$a^{-1} x a = x^{p+1}.$$

1. Montrer que $(xy)^p = y^p x^p$ pour tous $x, y \in G$, puis en déduire que $ay^p = y^p a$ pour tout $y \in G$.

2. On admet que si un nombre premier q divise $|G|$, alors G possède un élément d'ordre q. Montrer que $|G|$ est une puissance de p.
3. Soient $f : x \mapsto x^p$ et $H = \{x \in G \mid x^p = e\}$. Montrer que $|f(G)| = |G|/|H|$.
4. Montrer que $|G| < |H|^2$.

Exercice 157 [X 2026 # 235] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On écrit $P = A + iB$, avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que les racines de P sont dans le demi-plan $\mathrm{Im}(z) > 0$. Montrer que A et B sont scindés sur $\mathbb{R}$.

Exercice 158 [X 2026 # 236] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2n-1$ tel que, pour tout $\theta \in]0, \pi[$,
$$\frac{\sin(4n\theta)}{\cos\theta \sin\theta} = P(\cos^2\theta).$$
2. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$.
3. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)$.

Exercice 159 [X 2026 # 237] Pour $\sigma \in S_n$, on note
$$\mathrm{Inv}(\sigma) = \mathrm{Card}\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$
Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = \sum_{i=0}^{k} X^i$.

1. Montrer que
$$\sum_{\sigma \in S_n} X^{\mathrm{Inv}(\sigma)} = \prod_{k=1}^{n-1} P_k.$$
2. Soient p premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$. Simplifier $P_{p-1}(e^{2ik\pi/p})$.
3. Exprimer le cardinal de $\{\sigma \in S_n \mid (n+1) \mid \mathrm{Inv}(\sigma)\}$.

Exercice 160 [X 2026 # 238] Soit $L \geq 3$ et $f \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $d > 0$, de coefficient constant -1 et de coefficient dominant $a_d > 0$. Montrer que l'ensemble
$$\{p \in \mathbb{P} \mid p \not\equiv 1\ [L],\ \exists m \in \mathbb{Z},\ f(m) \equiv 0\ [p]\}$$
est infini.

Exercice 161 [X 2026 # 239] Soient $a \geq 3$ et $P = X^2 + X + a$. On suppose que, pour tout $n \in [\![0, a-2]\!]$, $P(n)$ est premier. Soit $k \in [\![0, a-2]\!]$.

1. Montrer que si $k+1$ est un carré, alors $P(a+k)$ n'est pas premier.
2. Réciproquement, on suppose que $P(a+k)$ n'est pas premier. a. Montrer que son plus petit facteur premier p vérifie $p \geq a$. b. Montrer que $P(a+k-p) = p$. c. Conclure.

Exercice 162 [X 2026 # 240] Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_0, x_1 > 0$ et
$$x_{n+1}x_{n-1} = 1 + x_n^2 \qquad (n \geq 1).$$

1. Montrer que (x_n) ne peut pas être périodique.
2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ tels que $x_n \sim \alpha\beta^n$.
3. On pose $Q_0 = i$, $Q_1 = iX$ et, pour tout $n \geq 1$, $Q_{n+1}Q_{n-1} = 1 + Q_n^2$. Montrer que, pour tout n, $Q_n \in i\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 163 [X 2026 # 241]

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une famille de polynômes de $\mathbb{Q}[q]$, notés $\binom{n}{k}_q$, vérifiant
$$\binom{n}{0}_q = \binom{n}{n}_q = 1, \qquad \binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q = q^k\binom{n-1}{k}_q + \binom{n-1}{k-1}_q.$$
On pourra les exprimer en fonction des $\binom{n}{1}_q$, notés $[n]_q$.
2. Montrer que
$$(X+Y)(X+qY)\cdots(X+q^{n-1}Y) = \sum_{k=0}^{n} q^{k(k-1)/2}\binom{n}{k}_q X^{n-k}Y^k.$$

Exercice 164 [X 2026 # 242] [MPI] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $d \geq 1$, de racines complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, toutes de module au plus 1. On pose $f_n = \lambda_1^n + \cdots + \lambda_d^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $f_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n, puis qu'il existe $p \geq 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $f_{n+p} = f_n$ pour tout $n \geq n_0$.
2. En déduire que, pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $\lambda_k = 0$ ou $|\lambda_k| = 1$.

Exercice 165 [X 2026 # 243] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
$$\det(M^{2024} - I_2) = \det(M^{2024} + I_2), \qquad \det(M^{2026} - I_2) = \det(M^{2026} + I_2).$$
Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$\det(M^n - I_2) = \det(M^n + I_2).$$

Exercice 166 [X 2026 # 244] Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $(A-B)^2 = 0$.

1. Montrer que $\det(A^2 - B^2) = (\det A - \det B)^2$.
2. Montrer que $\det(AB - BA) = 0$ si et seulement si $\det A = \det B$.

Exercice 167 [X 2026 # 245] Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\det(A + A^{-1}) + \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Montrer que $\det(A + A^{-1}) = (\operatorname{Tr} A)^2$.

Exercice 168 [X 2026 # 246] Soient $A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tels que $AB = BA$ et $\det(A^2 - AB + B^2) = 0$. Montrer que

$$\det(A+B) + 3\det(A-B) = 6(\det A + \det B).$$

Exercice 169 [X 2026 # 247] Soient $n \geq 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et p un nombre premier. Montrer que

$$\operatorname{Tr}((A+B)^p) \equiv \operatorname{Tr}(A^p) + \operatorname{Tr}(B^p) \pmod{p}.$$

Exercice 170 [X 2026 # 248] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on note $\varphi(A)$ le pgcd de ses coefficients.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Trouver une relation entre $\varphi(AB)$ et $\varphi(A)\varphi(B)$.
2. Montrer que $\varphi(AB)$ divise $\det(A)\varphi(B)$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $A^2 - \alpha A + I_n = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(A^k - I_n) \to_{k\to+\infty} +\infty$.

Exercice 171 [X 2026 # 249]

1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})$ ne peut pas être engendré par un nombre fini d'éléments.
2. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que (S, T) engendre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, où

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 172 [X 2026 # 250] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 + B^2 = 2AB$.

1. Montrer que $AB - BA$ n'est pas inversible.
2. On suppose $\operatorname{rg}(A-B) = 1$. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 173 [X 2026 # 251] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$ si et seulement s'il existe $P, Q, R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $AP + QB = ARB$.

Exercice 174 [X 2026 # 252]

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rg}(M^2) \neq \operatorname{rg}(M)$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AM = MA = A^2 = 0$: a. dans le cas $n = 2$; b. dans le cas où M est nilpotente ; c. dans le cas général.
2. Le résultat subsiste-t-il pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(M) \neq \operatorname{rg}(M^2)$?

Exercice 175 [X 2026 # 253] Pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$.

1. Soient $X, Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $[X, [Y, Z]^2] = 0$.
2. A-t-on nécessairement $[X, [Y, Z]] = 0$?
3. Expliciter le sous-espace vectoriel engendré par $\{[X, [Y, Z]] \mid X, Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$.

Exercice 176 [X 2026 # 254] Soient $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $E = \{A_1, \ldots, A_p\} \subset \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ tel que $AB \in E$ pour tous $A, B \in E$. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) \in \{0, 1, -1\}^p \setminus \{0\}$ tel que $\operatorname{rg}(\sum_{i=1}^p \varepsilon_i A_i) \leq n$. On suppose le contraire.

1. Pour $A \in E$, montrer que $M \mapsto AM$ est injective sur E.
2. Pour $A \in E$, montrer que $\operatorname{rg}(A - I_{2n}) \leq n$. Indication : considérer $S = \sum_{i=1}^p A_i$.
3. Conclure.

Exercice 177 [X 2026 # 255] Soit $n \geq 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on pose

$$J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad G = \{M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \mid M^T J M = J\}.$$

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$, stable par transposition.
2. Posons $H = \{(X, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid z^2 - \|X\|^2 = 1\}$ et $a_0 = (0_{\mathbb{R}^n}, 1)$. Montrer que, pour tout $a \in H$, il existe $g \in G$ tel que $ga_0 = a$.
3. Soit $g \in G$, écrit par blocs $g = \begin{pmatrix} M & X \\ Y^T & z \end{pmatrix}$. Montrer que $z \geq 1$. On note $L(g)$ l'unique réel positif tel que $\cosh(L(g)) = z$. Caractériser les g tels que $L(g) = 0$.
4. Montrer que, pour tous $g, h \in G$, $L(g) = L(g^{-1})$ et $L(gh) \leq L(g) + L(h)$.

Exercice 178 [X 2026 # 256] [MPI] Soit p un nombre premier impair.

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ dont les racines sont de module 1 et $Q \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que si

$$P(X) = p^n Q\left(\frac{X-1}{p}\right),$$

alors $P(X) = (X-1)^n$.

2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est un groupe et que
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \det M = \pm 1\}.$$
3. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ congruentes coefficient par coefficient modulo p. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $AB^{-1} = I_n + pM$.
4. Montrer que si A et B appartiennent à un même sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, alors $A = B$.

Exercice 179 [X 2026 # 257] Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = A^2$. Est-ce encore vrai dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 180 [X 2026 # 258] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie d et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si la suite $(\mathrm{Tr}(u^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors elle est bornée par d.

Exercice 181 [X 2026 # 259] Soient $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $b^k \neq 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = aI_n + bBA$.

1. Montrer que A et B sont inversibles.
2. Que peut-on dire du spectre de AB ?

Exercice 182 [X 2026 # 260] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose
$$\sin(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
1. Quelles sont les matrices réelles diagonalisables qui s'écrivent $\sin(A)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui s'écrivent $\sin(A)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 183 [X 2026 # 261] Soient $n \geq 3$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $b \neq 0$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on pose
$$A_k = \mathrm{diag}(I_{k-1}, H, I_{n-k-1}), \qquad H = \begin{pmatrix} a & b \\ (1-a^2)/b & -a \end{pmatrix}.$$
1. Pour $|k - k'| \neq 1$, déterminer le cardinal du sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ engendré par $A_k, A_{k'}$.
2. Trouver un vecteur propre commun à tous les A_k.
3. Montrer que ce vecteur n'est inclus dans aucun plan de $\mathbb{C}^n$ stable par tous les A_k.

Exercice 184 [X 2026 # 262] Soit $n \geq 2$.

1. Déterminer les couples $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tels que $AB = BA^2$, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$, et A^2, B n'ont pas de vecteur propre commun.
2. Que se passe-t-il si l'on enlève la condition $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$?
3. Déterminer les couples (A, B) tels que $AB = BA^2$, B inversible et A nilpotente.
4. Soit A telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Existe-t-il B inversible telle que $AB = BA^2$?

Exercice 185 [X 2026 # 263] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. On pose
$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\},$$
et
$$C(C(A)) = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid MN = NM \text{ pour tout } M \in C(A)\}.$$
1. Montrer que $C(C(A)) = \mathbb{C}[A]$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $C(C(A)) = C(A)$.
3. Montrer que
$$2n - \dim C(A) \leq \dim C(C(A)) \leq n \leq \dim C(A).$$
4. On ne suppose plus A diagonalisable, mais nilpotente non nulle avec $n = 2$. Montrer que $C(A) = \mathbb{C}[A]$.

Exercice 186 [X 2026 # 264] Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Déterminer les fonctions continues $f : E \to \mathbb{R}$ telles que
$$\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 187 [X 2026 # 265] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. On suppose $\langle by - x, x - ay\rangle \geq 0$. Montrer que
$$\|x\|\|y\| \leq \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}|\langle x, y\rangle|.$$
2. On suppose qu'il existe $m_1, m_2, M_1, M_2 > 0$ tels que $x_i \in [m_1, M_1]$ et $y_i \in [m_2, M_2]$ pour tout i. Montrer que
$$\langle x, y\rangle \geq \frac{2\sqrt{m_1 m_2 M_1 M_2}}{\sqrt{M_1 M_2} + \sqrt{m_1 m_2}}\|x\|\|y\|.$$

3. Montrer que $\langle by - x, ay - x\rangle \leq 0$ si et seulement si

$$\left\| x - \frac{a+b}{2} y \right\| \leq \frac{|b-a|}{2} \|y\|.$$

4. Montrer que si $\langle by - x, x - ay\rangle \geq 0$, alors

$$\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 \leq \frac{(b-a)^2}{4}\|y\|^4.$$

Exercice 188 [X 2026 # 266] On se place dans $\mathbb{R}^d$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$, et A, B les matrices des projections orthogonales sur E, F. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que, pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|v\| \leq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(AB)^n v - Qv\| \leq \alpha^n.$$

Exercice 189 [X 2026 # 267] [MPI] 1. Soient E un espace vectoriel réel, $n \geq 1$ et $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, montrer que $f \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$ si et seulement si $\ker f_1 \cap \cdots \cap \ker f_n \subset \ker f$.

2. Pour $n \geq 1$, on note $L_n(X)$ la dérivée n-ième de $(X^2 - 1)^n$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) Q(x)\, dx = 0,$$

puis que L_n est simplement scindé à racines dans $]-1, 1[$.

3. Notons $-1 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ les racines de L_n. Montrer qu'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} a_i Q(x_i).$$

Exercice 190 [X 2026 # 268] 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Existe-t-il $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ telle que $B = P^T A P$?

2. Même question avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Même question avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix}$.

Exercice 191 [X 2026 # 269] Soit $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$, et supposons $P = P^2 = P^T$.

1. Montrer que A est symétrique positive.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\, B \subset \mathrm{Im}\, A$.
3. Montrer qu'il existe une unique matrice A^+ telle que A, A^+ commutent, A^+A soit la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}\, A$, et $A^+AA^+ = A^+$.
4. Montrer que $Q = I_{n-r} - D + B^T A^+ B$ est la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(I_{n-r} - D)$.

Exercice 192 [X 2026 # 270] [MPI] Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les formes linéaires ℓ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$, $\ell(PMP^{-1}) = \ell(M)$.

Exercice 193 [X 2026 # 271] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^*$ si et seulement s'il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$ et $c < 0$ tels que $\langle Ax, x\rangle \leq c\langle x, x\rangle$ pour tout x.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ si et seulement s'il existe un produit scalaire et $c < 0$ tels que la même inégalité soit vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 194 [X 2026 # 272] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AA^T = A^T A$ si et seulement si $A^2 A^T = AA^T A$.

3) Analyse

Exercice 195 [X 2026 # 273] Soit $B \subset \mathbb{R}_+$ non majorée. Montrer que

$$\left\{ \frac{n}{x} \mid n \geq 1,\ x \in B \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 196 [X 2026 # 274] Soient X une partie compacte d'un espace vectoriel normé et $f : X \to X$ continue. Pour $x \in X$, on pose

$$\omega(f, x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f^k(x) \mid k \geq n\}.$$

1. On suppose qu'il existe x tel que $\omega(f, x) = X$. Montrer que f est transitive : pour tous ouverts non vides U, V de X, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.
2. On suppose que $\omega(f, x)$ est fini et non vide. Montrer que f induit sur $\omega(f, x)$ une permutation cyclique.

Exercice 197 [X 2026 # 275] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $S(A) = \{PAP^{-1} \mid P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$.

1. Si A est diagonalisable, montrer que $S(A)$ est connexe par arcs.
2. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$ et A n'est pas diagonalisable, montrer que $S(A)$ n'est pas connexe par arcs.
3. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, montrer que $S(A)$ n'est pas connexe par arcs.
4. Qu'en est-il dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 198 [X 2026 # 276] Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $d(A) = \dim(\mathbb{C}[A])$.

1. Quelles valeurs peut prendre $d(A)$?
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $d(P(A)) = d(A)$.
3. Étudier les propriétés topologiques de l'ensemble $E_k = d^{-1}(k)$.

Exercice 199 [X 2026 # 277] Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = |u_n - n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver un équivalent de u_n.

Exercice 200 [X 2026 # 278] Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $x_1, x_2 \in]0,1[$ et

$$x_{n+2} = \frac{x_n^2}{x_{n+1} - x_n^2 + 1}.$$

1. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $(x_1 \cdots x_n)$ converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que $(\sqrt{n}\, x_1 \cdots x_n)$ converge et déterminer sa limite.
4. Si $1 - x_n \sim \alpha/n$, la suite $(\sqrt{n}\, x_1 \cdots x_n)$ converge-t-elle nécessairement ?

Exercice 201 [X 2026 # 279] [MPI] Soit $f \in C^0([0,1],[0,1])$. On définit $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 202 [X 2026 # 280] [MPI] Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$, $f(x) = 2x^2 - 1$.

1. Montrer qu'il existe $x \in [-1,1]$ tel que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ soit égal à $[-1,1]$.
2. Montrer que l'ensemble des x vérifiant cette propriété est dense dans $[-1,1]$.

Exercice 203 [X 2026 # 281] Pour $x, y > 0$, on définit $d(x,y) = |x - y|$ et $h(x,y) = |\ln x - \ln y|$.

1. Pour $x > 0$ et $(x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, montrer que $d(x_n, x) \to 0$ si et seulement si $h(x_n, x) \to 0$.
2. Soient $a, b, c, d > 0$ et $T(x) = (c + dx)/(a + bx)$. Montrer que $T(\mathbb{R}_+^*)$ est inclus dans un compact de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour $x \neq x'$ positifs, poser $\lambda = h(a/c, b/d)$, $y = T(x)$ et $y' = T(x')$. Montrer que

$$\frac{h(y,y')}{h(x,x')} \leq \tanh(\lambda/4).$$

4. Pour $x > 0$, poser $x_0 = x$ et $x_{n+1} = T(x_n)$. Montrer que (x_n) converge vers l'unique point fixe de T.

Exercice 204 [X 2026 # 282]

1. Soit $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)$, avec $u_0 \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
2. Soit $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)^2$, avec $u_0 \leq 0$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 205 [X 2026 # 283] On pose

$$\alpha = 4 \sum_{k=0}^{499999} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Montrer qu'exactement une des 16 premières décimales de α diffère de la décimale correspondante de π.

Exercice 206 [X 2026 # 284] Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{\ln(6^x + 1)}{\ln 7} = \frac{\ln(7^x - 1)}{\ln 6}.$$

Exercice 207 [X 2026 # 285] Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$. On suppose que g est monotone et surjective et que $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$ pour tous $x, y \in [0,1]$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.
2. Montrer que $\{x \in [0,1] \mid f(x) = g(x)\}$ est un segment.

Exercice 208 [X 2026 # 286] Soit $T \geq 2$ et $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique telle que, pour tout $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{i=-n}^{n-1} f(i+k) \leq \sum_{i=-n}^{n-1} f(i).$$

1. Si T est impair, montrer que f est constante.
2. Donner un exemple non constant lorsque T est pair.

Exercice 209 [X 2026 # 287] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sous-additive : $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

1. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ et $\varphi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$, φ dérivable en 0 et $f \leq \varphi$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout x.
2. On suppose qu'il existe $x_0, y_0 > 0$ tels que $f(x_0), f(-y_0) \leq 0$ et $x_0/y_0 \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est périodique.
3. Construire une fonction avec $f(x_0), f(-y_0) \leq 0$ pour certains $x_0, y_0 > 0$, mais qui n'est pas périodique.

Exercice 210 [X 2026 # 288] Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que $ff'' - (f')^2 \geq 0$. Montrer que si f s'annule en un point, alors $f = 0$.

Exercice 211 [X 2026 # 289] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $f : I \to I$ vérifie P si, pour tous $x, y \in I$, $f_n(x) - f_n(y) \to 0$, où f_n est la n-ième itérée de f. Pour $f(x) = x + 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, f admet-elle un point fixe ? Vérifie-t-elle P ?

Exercice 212 [X 2026 # 290] [MPI] Déterminer tous les couples (f, g) de polynômes trigonométriques réels tels que $f^2 + g^2 = 1$.

Exercice 213 [X 2026 # 291] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g(x) = 2f(x) + f(-x)$.

1. On suppose g continue en 0 et f bornée au voisinage de 0. Montrer que f est continue en 0.
2. Trouver une fonction f discontinue en 0 telle que g soit continue.

Exercice 214 [X 2026 # 292] Soit

$$F = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid e^{f(x)} + f(x) \geq x + 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}.$$

Calculer $\inf_{f \in F} \int_0^e f$.

Exercice 215 [X 2026 # 293] [MPI] On appelle polynôme trigonométrique complexe toute combinaison linéaire complexe des fonctions $e_k : x \mapsto e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer les polynômes H tels que $H(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et $\cos \circ H$ soit un polynôme trigonométrique.

Exercice 216 [X 2026 # 294] [MPI]

1. Déterminer les endomorphismes T de $\mathbb{R}[X]$ qui commutent avec la dérivation et avec la multiplication par X.
2. Posons
$$S = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k f^{(n)}(x)| < +\infty \text{ pour tous } k, n \in \mathbb{N}\}.$$
Montrer que S est un espace vectoriel stable par dérivation et par multiplication par l'identité de $\mathbb{R}$. Déterminer les endomorphismes de S qui commutent avec ces deux opérateurs.

Exercice 217 [X 2026 # 295] Posons $E = C^0([-1, 1], \mathbb{C})$. Soit $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ continue, croissante et surjective, et $\Phi : f \mapsto f \circ g$. Montrer que 1 est la seule valeur propre possible de Φ.

Exercice 218 [X 2026 # 296] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(1) = P(-1) = 0$ et $P(x) > 0$ pour $x \in]-1, 1[$.

1. Calculer l'aire T du triangle formé par l'axe des abscisses et les tangentes à P en -1 et 1.
2. Posons $A = \int_{-1}^1 P(x)\,dx$. On suppose $P = (X^2 - 1)\prod_{i \in I}(X - \lambda_i)$, avec λ_i réels, distincts et différents de ± 1. Montrer que
$$A \geq \frac{4}{3}\prod_{i \in I}(\lambda_i^2 - 1).$$
3. En déduire que $A \geq 2T/3$.
4. Ce résultat reste-t-il vrai si P possède des racines non réelles ?
5. On suppose de plus P concave sur $[-1, 1]$. Soit R l'aire du rectangle formé par l'axe des abscisses, $x = \pm 1$ et la tangente horizontale de P sur l'intervalle. Montrer que $A \leq cR$ pour une constante $c < 1$ indépendante de P.

Exercice 219 [X 2026 # 297] Soient $a < b$ et $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$. Posons

$$G = \{g \in C^2([a, b], \mathbb{R}) \mid g(a) = g(b) = g'(a) = g'(b) = 0\}.$$

1. Pour $f \in E$ et $n \geq 1$, montrer que
$$h(x) = \int_a^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$$
est de classe C^n et $h^{(n)} = f$.
2. Montrer qu'il existe $g \in G$ telle que $f = g''$ si et seulement si $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b tf(t)\,dt = 0$.
3. Montrer que, pour $f \in E$, $\int_a^b fg'' = 0$ pour tout $g \in G$ si et seulement si f est affine.

Exercice 220 [X 2026 # 298] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f = 1$. Posons $g(x) = \int_x^{+\infty} f$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx$.
2. Si f est décroissante, montrer qu'il existe un unique $M > 0$ tel que $\int_0^M f = 1/2$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx \geq M$.

Exercice 221 [X 2026 # 299] On définit $f_1(x) = \sin x$ sur $]0, \pi[$, puis $f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x))$. Montrer que $(\sqrt{n} f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction constante $\sqrt{3}$.

Exercice 222 [X 2026 # 300] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et

$$|f'(x) - k| \leq \mu x^\lambda,$$

avec $k \in]0, 1[$ et $\lambda, \mu > 0$. Posons $f_0 = \mathrm{id}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$ et $x_n = f_n(x)$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ et $b \in]0,1[$ tels que, pour $x \in [0,a]$, $x_n \leq b^n x$.
2. Posons $g_n = f_n/k^n$. Montrer que, pour $x \in [0,a]$,
$$\left| \frac{g_n'(x)}{g_{n+1}'(x)} - 1 \right| \leq \frac{\mu}{k} x^\lambda b^{\lambda n}.$$
3. Montrer qu'on peut choisir $a > 0$ tel que $f_n'(x) > 0$ sur $[0,a]$.
4. Montrer que (g_n) et (g_n') convergent uniformément sur $[0,a]$.

Exercice 223 [X 2026 # 301] Soit
$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2+1}.$$
Montrer que f n'est pas polynomiale.

Exercice 224 [X 2026 # 302] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, avec $a_0 = 1$ et rayon de convergence $R > 0$. On suppose qu'il existe $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, de rayon de convergence positif, telle que $f(x)(1-g(x)) = 1$ au voisinage de 0.

1. Montrer que si tous les b_n sont positifs, alors tous les $\$a_n$ le sont.
2. Trouver un exemple où tous les a_n sont positifs et où au moins un b_n est strictement négatif.
3. On suppose $a_{n+1}a_{n-1} \geq a_n^2$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $b_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.
4. On suppose, pour $x \in]-R,R[$,
$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$
Montrer que $b_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 225 [X 2026 # 303] Soit $P = a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{R}[X]$, avec $a_d \neq 0$, et $f(z) = e^{P(z)}$. On suppose que son développement en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ vérifie $c_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que $a_d > 0$ et $a_v > 0$, où $v = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$.
2. Si $P = a_v X^v + a_m X^m + a_d X^d$ avec $v < m < d$, montrer que $a_m \geq 0$. Indication : poser $\rho = e^{2i\pi/d}$ et considérer $f(\rho z)/f(z)$.
3. Pour le cas général, soit m tel que $v < m < d$. On suppose $a_m < 0$ et que le pgcd des $i \geq m+1$ tels que $a_i \neq 0$ ne divise pas m. Montrer qu'il existe $n \geq 0$ tel que $c_n \leq 0$.

Exercice 226 [X 2026 # 304] Posons
$$J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\, dt.$$
1. Montrer que J est de classe C^1 sur un domaine à préciser et exprimer J'.
2. Montrer que $\zeta(2) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt$.
3. Montrer que $\zeta(2) = \pi^2/6$. Indication : considérer $J(1) - J(0)$.

Exercice 227 [X 2026 # 305] [MPI] Soit $k \in C^0([0,1]^2, \mathbb{C})$ et $E = C^0([0,1], \mathbb{C})$. Pour $f \in E$, on pose
$$v(f)(x) = \int_0^x k(x,y) f(y)\, dy.$$
1. Montrer que v est un endomorphisme de E dont l'unique valeur propre possible est 0.
2. Si k est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, montrer que les éléments non nuls du noyau de v ne sont pas développables en série entière en 0.

Exercice 228 [X 2026 # 306] [MPI] Soit
$$E = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)(|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)|) < +\infty \right\}.$$
1. Pour $t, x \in \mathbb{R}$ et $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, poser $A_t(f)(x) = f'(x) + txf(x)$ et $A_t^*(f)(x) = -f'(x) + txf(x)$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $f \in E$,
$$\int_{\mathbb{R}} A_t^*(A_t(f))(x) f(x)\, dx \geq 0.$$
2. Si $\int_{\mathbb{R}} f^2 = 1$, montrer que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)^2\, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f'(x)^2\, dx \right) \geq \frac{1}{4}.$$
3. Étudier les cas d'égalité.

Exercice 229 [X 2026 # 307] [MPI]
1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$,
$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{1 - te^{i\theta}}\, d\theta = 0.$$

2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\int_0^{2\pi} \ln|e^{i\theta} - z|\, d\theta = 2\pi \max(0, \ln|z|).$$

Exercice 230 [X 2026 # 308] Soient $f, g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $S, T > 0$. On suppose $(f-g)(t) = o(e^{t/2})$ lorsque $t \to +\infty$, et que $F = f'' - f' + f$ est T-périodique et $G = g'' - g' + g$ est S-périodique. On suppose aussi que $F(t) - G(t) \to 0$. Montrer que $f = g$.

Exercice 231 [X 2026 # 309] On considère l'équation fonctionnelle $u'(x) = u(x - x^2)$, où $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dérivable.

1. Montrer que si deux solutions coïncident sur $[0, \varepsilon]$ pour un $\varepsilon > 0$, elles coïncident sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe une solution non nulle. Indication : considérer $u_0(x) = 1$ et
$$u_n(x) = 1 + \int_0^x u_{n-1}(t - t^2)\, dt.$$

Exercice 232 [X 2026 # 310] Soient $\lambda \in]-1, 1[$ et F l'espace des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f'(t) = e^t f(\lambda t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que F est de dimension 1.
2. Majorer asymptotiquement aussi bien que possible les éléments de F lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 233 [X 2026 # 311] Soit $M_0 \in O_2(\mathbb{R})$. Pour quels couples $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ la solution du problème de Cauchy $M(0) = M_0$, $M'(t) = AM(t)B$ est-elle à valeurs dans $O_2(\mathbb{R})$?

Exercice 234 [X 2026 # 312] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour l'équation différentielle $M'(t) = AM(t)B$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions soient bornées.

Exercice 235 [X 2026 # 313] [MPI] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $T > 0$. On note A_T l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels il existe $u \in C^0([0,T], \mathbb{R}^p)$ et une solution de $X' = AX + Bu(t)$ telle que $X(0) = 0$ et $X(T) = v$. Montrer que $A_T = \mathbb{R}^n$ si et seulement si
$$M = (B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B)$$
est de rang n.

4) Géométrie

Exercice 236 [X 2026 # 314] Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur le cercle unité ?

Exercice 237 [X 2026 # 315] [MPI] Soit $A_0A_1A_2$ un triangle du plan. On définit A_2' comme le sommet extérieur au triangle $A_0A_1A_2$ du triangle $A_0A_1A_2'$ isocèle en A_2', d'angle au sommet $2\pi/3$. On définit de même A_0', A_1' par permutation circulaire. Montrer que $A_0'A_1'A_2'$ est équilatéral.

Exercice 238 [X 2026 # 316] Soit K un quadrilatère convexe de sommets O, u, v, w dans le sens trigonométrique, avec $v > 0$. On note A son aire.

1. Montrer que
$$A^2 = \frac{v^2}{4}\left(|w-u|^2 - (\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Re}(u))^2\right).$$
2. Montrer que
$$A^2 = \frac{1}{4}\left(p^2q^2 - \frac{1}{4}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2\right),$$
où a, b, c, d sont les longueurs des côtés dans le sens direct et p, q celles des diagonales.
3. Si K est inscriptible dans un cercle, montrer que $pq = ac + bd$. En notant $S = (a+b+c+d)/2$, montrer ensuite
$$A^2 = (S-a)(S-b)(S-c)(S-d).$$

5) Probabilités

Exercice 239 [X 2026 # 317]
1. Montrer qu'il existe deux multiensembles distincts de six entiers strictement positifs issus de $\{1,2,3,4,5,6\}$ tels que deux dés équilibrés construits avec leurs éléments donnent la même loi pour la somme que deux dés classiques.
2. Montrer que, pour N assez grand, il existe deux dés pipés à N faces, portant les entiers de 1 à N, dont la somme suit la loi de la somme de deux dés équilibrés à N faces.

Exercice 240 [X 2026 # 318] Soit σ uniforme sur S_n.

1. Pour $k, i \in [\![1, n]\!]$, calculer la probabilité que i appartienne à un cycle de longueur k dans la décomposition de σ.
2. Si X_k est le nombre de cycles de longueur k, montrer que $\mathbf{E}(X_k) = 1/k$.
3. Soit $\alpha \in]0,1[$ et p_n la probabilité que tous les cycles de σ aient longueur au plus αn. Montrer qu'il existe $C_\alpha > 0$ tel que $p_n \geq C_\alpha$ pour n assez grand.

Exercice 241 [X 2026 # 319] On fixe $N \geq 1$. Soit U_1 uniforme sur $[\![1, N]\!]$ et, pour $n \geq 1$, U_{n+1} uniforme sur $[\![1, U_n]\!]$. Posons $E_N = \{U_j \mid j \geq 1\}$.

1. Montrer que $\mathbf{P}(1 \in E_N) = 1$.

2. Calculer $\mathbf{P}(k \in E_N)$ pour $1 \leq k \leq N$.
3. Montrer que les événements $(k \in E_N)$ sont indépendants.

Exercice 242 [X 2026 # 320] Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi de Bernoulli $B(p)$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et

$$T_n = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid |\{i \in [\![1,m]\!] : X_i = 0\}| \geq n\}.$$

1. Montrer que $(S_n \geq k) = (T_{n-k+1} \geq n+1)$.
2. En déduire
$$\mathbf{P}(S_n \geq k) = \binom{n}{n-k}(1-p)^{n-k+1}p^k \sum_{\ell\geq 0} \frac{(n+1)\cdots(n+\ell)}{(k+1)\cdots(k+\ell)}p^\ell.$$
3. En déduire que, si $p = 1/2$ et $j \geq 3$,
$$\mathbf{P}(S_{nj} \leq n) \sim 2^{-nj}\binom{nj}{n}\frac{j-1}{j-2}.$$

Exercice 243 [X 2026 # 321] Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire à composantes i.i.d. dans L^4, à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $\mathbf{E}(X_1) = 0$ et $\mathbf{V}(X_1^2) = \mathbf{V}(X_1) = 1$. Soient $F \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k et P la matrice de la projection orthogonale sur $F^\perp$.

1. Justifier que $d(X,F)^2 = X^T P X$ et montrer que $\mathbf{E}(d(X,F)^2) = n-k$.
2. Montrer que $\mathbf{V}(d(X,F)^2) \leq n-k$.
3. Si $\lambda \geq 1$, montrer que
$$\mathbf{P}\left(|d(X,F) - \sqrt{n-k}| \geq \lambda\right) \leq \frac{2}{\lambda^2}.$$

Exercice 244 [X 2026 # 322] Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des variables aléatoires X, X_1, X_2 telles que $X = aX_1 + bX_2$, avec $X \sim \mathcal{P}(\nu)$, $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $X_2 \sim \mathcal{P}(\mu)$, et X_1, X_2 indépendantes.

Exercice 245 [X 2026 # 323] Pour $k, n \geq 1$, on note

$$B_{k,n} = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq n^{1/10},\ p \mid k\},$$

et X_n uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Montrer que
$$\mathbf{E}(|B_{X_n,n}|) = \sum_{p\in\mathbb{P}, p\leq n^{1/10}} \frac{1}{p} + O(n^{-9/10}).$$
2. Montrer que
$$\mathbf{V}(|B_{X_n,n}|) = \sum_{p\in\mathbb{P}, p\leq n^{1/10}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right) + O(n^{-8/10}).$$
3. Si $\nu(x) = |\{p \in \mathbb{P} \mid p \mid x\}|$ et $a_n \to +\infty$, montrer que
$$\mathbf{P}\left(|\nu(X_n) - \ln\ln n| \geq a_n\sqrt{\ln\ln n}\right) \to 0.$$
On pourra utiliser $\sum_{p\leq n,\ p\in\mathbb{P}} 1/p = \ln\ln n + O(1)$.

III) De Christophe XENS

Exercice 246 [ENS SR 2026] On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme $\|\cdot\|$. On note $B = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$ et

$$\Delta_3(B) = \sup_{x,y,z\in B} \min(\|x-y\|, \|y-z\|, \|x-z\|)$$

1. Montrer que $\Delta_3(B)$ est atteint.
2. Montrer que $\Delta_3(B) \leq 2$.
3. Calculer $\Delta_3(B)$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 247 [ENS SR 2026] Soit $a > 0$. On considère l'équation différentielle

$$y_a''(t) = \frac{1}{2y_a(t)^{1+a}}, y_a(0) = 1, y_a'(0) = 0$$

On suppose qu'il existe T_a et $y_a \in C^2([0,T_a[,\mathbb{R}^+)$ solution telle que $T_a = +\infty$ ou $y_a(t) + \frac{1}{y_a(t)} \xrightarrow[t\to T_a]{} +\infty$.

1. Trouver une relation entre $(y_a')^2$ et y_a.
2. Montrer que le cas $\frac{1}{y_a(t)} \xrightarrow[t\to T_a]{} +\infty$ est impossible pour T_a fini.
3. Montrer que le cas $y_a(t) \xrightarrow[t\to T_a]{} +\infty$ est impossible pour T_a fini.
4. Montrer que y_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et de limite $+\infty$ en $+\infty$.

5. Donner un équivalent de y_a en $+\infty$.
6. Question bonus : lemme de Gronwall

Exercice 248 [ENS U 2026]
1. On considère un sous-groupe G de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un morphisme de groupe. Montrer qu'il existe un morphisme $\psi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\forall x \in G, \psi(x) = \varphi(x)$.
2. Soit $(G, +)$ un groupe fini, commutatif. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in G, n.x = 0$ et n minimal pour la division. Montrer qu'il existe un sous-groupe H de G tel que $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus H$.
3. Montrer que tout groupe fini commutatif est isomorphe à un unique groupe de la forme $\prod \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$, où $\forall i,\ d_i \mid d_{i+1}$. TODO

Exercice 249 [ENS PSLR 2026]
1. Soit $(c_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$\prod_{i=0}^{n-1}(1-c_i) \leq e^{-\sum_{i=0}^{n-1} c_i}$$

2. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ et $m \geq \alpha$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, H_f(x) - \alpha I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } mI_n - H_f(x) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

Montrer que $\exists! x^* \in \mathbb{R}^2, \nabla f(x^*) = 0$.
3. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $s > 0$. On définit $\forall n \geq 0, x_{n+1} = x_n - s\nabla f(x_n)$ Montrer que

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \max((1-\alpha s)^2, (1-ms)^2)\|x_n - x^*\|^2$$

Exercice 250 [ENS 2026 L] Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$, et soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p_k.

Montrer que, pour toute distribution de probabilité $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$, il existe une suite de fonctions $f_n\colon \{0,1\}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite de variables aléatoires $(f_n(X_1, \ldots, X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X de loi (q_i) si et seulement si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k(1-p_k)$ diverge.

Exercice 251 [ENS U 2026] Soient m et N dans $\mathbb{N}^*$. On considère $X_1, \ldots, X_m$ variables aléatoires mutuellement indépendantes, respectivement à valeurs dans $E_1, \ldots, E_m$ qui sont des parties de $\mathbb{R}$. On suppose que $X_1 + \cdots + X_m$ suit une loi uniforme sur $[\![0, N-1]\!]$. Les X_i suivent-ils une loi uniforme ?

Exercice 252 [X 2026] Soit $(A, +, \times)$ un anneau qui n'est pas un corps et vérifiant

$$\forall x \in A \setminus A^\times, \exists n_x \in \mathbb{N}^*, x = \sum_{k=2}^{2^{n_x}} x^k$$

1. Montrer que $\forall x \in A \setminus A^\times, x + x = 0_A$. On pourra considérer $y_x = \sum_{k=1}^{2^{n_x}-1} x^k$.
2. Montrer que $1_A + 1_A = 0_A$.
3. Montrer que $\forall x \in A \setminus A^\times, x = x^2$. On pourra d'abord montrer que $x = x^{2^{n_x}+1}$.

Exercice 253 [X 2026] On pose $E = \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tous r, s de $\mathbb{N}$,

$$\varphi_1(X^r, X^s) = (-X^{r+2}, X^s + X^{r+1}) \text{ et } \varphi_2(X^r, X^s) = (X^{s+1} + X^r, -X^{s+2})$$

1. Déterminer les spectres de φ_1 et φ_2.
2. φ_1 et φ_2 sont-ils des automorphismes de E ?
3. Mêmes questions avec $E = \mathbb{C}(X) \oplus \mathbb{C}(X)$.
4. On pose $B_n = \{\varphi_{i_1} \circ \cdots \circ \varphi_{i_n}, i_1, \ldots, i_n \in \{1,2\}\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le cardinal de B_1, B_2, B_3.

Exercice 254 [X 2026] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\det(M^{2024} + I_2) = \det(M^{2024} - I_2) \text{ et } \det(M^{2026} + I_2) = \det(M^{2026} - I_2)$$

Montrer que $\forall n \geq 1, \det(M^n + I_2) = \det(M^n - I_2)$.

Exercice 255 [ENS SR 2026] On note $\mathbb{H}$ l'algèbre des quaternions sur $\mathbb{R}$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base canonique $(1, i, j, k)$ dont la multiplication est régie par : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ Pour tout quaternion $z = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, on définit son conjugué par $\bar{z} = a - bi - cj - dk$. On admet que $\overline{wz} = \bar{z}\bar{w}$.

1. Inversibilité dans $\mathbb{H}$. Montrer que tout élément non nul $z \in \mathbb{H}$ admet un inverse pour la loi de multiplication, et exprimer explicitement z^{-1} en fonction de $\bar{z}$ et $N(z)$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif.
2. Anneaux de Lipschitz et de Hurwitz. On note $\mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$. On pose $\delta = \frac{1+i+j+k}{2}$ et on définit $A = \mathbb{H}(\mathbb{Z}) + \mathbb{Z}\delta$. Montrer que $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ et A sont des sous-anneaux de $\mathbb{H}$.
3. Lien avec la somme de quatre carrés. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que n s'écrit comme la somme de quatre carrés d'entiers si et seulement s'il existe un quaternion de Hurwitz $z \in A$ tel que $n = N(z)$.
4. Structure euclidienne et application au théorème de Lagrange.
   a) Démontrer que l'anneau A est euclidien (à droite) pour la norme N.

b) Soit p un nombre premier impair. On admet qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Montrer que p n'est pas irréductible dans A, puis qu'il existe $z \in A$ tel que $p = N(z)$.

c) En déduire le théorème des quatre carrés de Lagrange.

d) Démontrer la propriété admise.

Exercice 256 [X 2026] Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que u_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$ ($N \in \mathbb{N}^*$ fixé) et pour $n \geq 1$, u_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, u_n]\!]$. On pose $E_N = \{u_i, i \geq 1\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(1 \in E_N) = 1$.
2. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on pose $p_{N,k} = \mathbb{P}(k \in E_N)$. Calculer $p_{N,k}$.

Exercice 257 [ENS SR 2026] Soit $T > 0$ et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $u : [a, b] \times [0, T] \to \mathbb{R}$ de classe C^4 solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \text{pour } (x,t) \in]a,b[\times]0,T[\\ u(a,t) = 0 \text{ et } u(b,t) = 0 & \text{pour tout } t \in [0,T] \end{cases}$$

où $\nu > 0$. On définit un maillage régulier : $\Delta x = \frac{b-a}{M+1}$ et $\Delta t = \frac{T}{N}$. On note u_j^n l'approximation de $u(x_j, t_n)$ par le schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

1. En définissant $U^n = (u_1^n, \dots, u_M^n)^\top \in \mathbb{R}^M$, montrer que $U^{n+1} = AU^n$.
2. On définit l'erreur de troncature ε_j^n. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que $\max |\varepsilon_j^n| \leq C(\Delta t + (\Delta x)^2)$.

Exercice 258 [X 2026] Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $|a| > \sqrt{3}$ et $b \neq 0$ et $n \geq 3$ un entier. On note $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ et pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $A_k = \operatorname{diag}(I_{k-1}, B, I_{n-k-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soient $k, k' \in [\![1, n-1]\!]$. Donner l'ordre du sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ engendré par A_k et $A_{k'}$.
2. Trouver un vecteur propre commun à tous les A_k.

Exercice 259 [ENS PLSR 2026] Soit $n \geq 1$ un entier. On considère $G_n = \{\frac{j}{2^n} \mid j \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}\}$. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables indépendantes uniformes sur $G_1, \dots, G_n$. Pour $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, on définit $\hat{\varphi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi(X_i)$. Soit $\mathcal{L}_1$ l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sup_{\varphi \in \mathcal{L}_1} |\hat{\varphi}_n - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x| \geq \frac{1}{2^{n+2}}$.
2. Soit $M \geq 1$. Montrer que $\sup_{\varphi \in \mathcal{L}_1} |\hat{\varphi}_n - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x| \leq \frac{2}{M} + \sum_{m=1}^M |\frac{1}{n}\mathrm{Card}\{i \mid X_i \in B_m\} - \frac{1}{M}|$.

Exercice 260 [X 2026] Soient $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2f(x) + f(x^2)$.

1. On suppose g continue en 0 et f bornée au voisinage de 0. Montrer que f est continue en 0.
2. Donner un exemple où g est continue en 0 et f discontinue en 0.

Exercice 261 [X 2026] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 0 \implies \mathrm{Im}(z) > 0$. On écrit $P = A + iB$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que A et B sont scindés sur $\mathbb{R}$.

Exercice 262 [ENS L 2026] Soit $f \colon x \mapsto x(1 + \ln|1 - |x||)$. TODO

1. Étudier f.
2. Soit (x_n) définie par $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Trouver les x_0 tels que (x_n) soit 3-périodique.

Exercice 263 [ENS PLSR 2026] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{C}, f(x) = \lambda x$. Que dire de f ?
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice M de f vérifie $\forall i, M_{i,i+1} \neq 0$.

Exercice 264 [ENS PLSR 2026] Soit V un espace euclidien. Pour $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V, on note $L = \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}}(e_1, \dots, e_n)$. TODO

1. Montrer que $L = \{\sum_{i=1}^n m_i e_i, m_i \in \mathbb{Z}\}$.
2. Soit B' une autre base. Montrer qu'elle engendre L ssi la matrice de passage est dans $GL_n(\mathbb{Z})$ avec un déterminant ± 1.
3. Justifier que $\lambda_1(L) = \min\{\|x\|, x \in L \setminus \{0\}\}$ est bien défini.
4. Montrer qu'il existe une base (b_1, b_2) de $\mathbb{R}^2$ qui engendre L avec $\|b_1\| = \lambda_1(L)$ et $\frac{|(b_1|b_2)|}{\|b_1\|^2} \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 265 [X 2026] Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $J_n(x) = \frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi} e^{i(n\theta + x\cos\theta)}\,\mathrm{d}t\theta$. TODO

1. Montrer que $J_n(x) \in \mathbb{R}$ et relier J_n et J_{-n}.
2. DSE et équation différentielle vérifiée par J_0.

Exercice 266 [X 2026] Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même lois telle que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et T_n le nombre minimal d'expériences pour avoir n échecs. TODO

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!], (S_n \geq k) = (T_{n+1-k} \geq n + 1)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq k) = \binom{n}{n-k} p^k q^{n-k+1} \sum_{\ell=0}^\infty \frac{(n+1)\dots(n+\ell)}{(k+1)\dots(k+\ell)} p^\ell$.
3. Soit $j \geq 3$. On suppose $p = 1/2$. Montrer que $\mathbb{P}(S_{nj} \leq n) \sim 2^{-jn}\binom{jn}{n}\frac{j-1}{j-2}$.