Exercices 2023

Table des matières

I) ENS MP-MPI xens **1**
1) Algèbre . . . 1
2) Analyse . . . 9
3) Géométrie . . . 16
4) Probabilités . . . 17
5) ENS PSI autre . . . 20
a) Algèbre . . . 20
b) Analyse . . . 23
c) Probabilités . . . 25
6) ENS PC autre . . . 25
a) Algèbre . . . 25
b) Analyse . . . 26
c) Géométrie . . . 27
d) Probabilités . . . 27

II) X xens **28**
1) Algèbre . . . 28
2) Analyse . . . 34
3) Géométrie . . . 40
4) Probabilités . . . 40
5) X PSI autre . . . 43
a) Algèbre . . . 43
b) Analyse . . . 43
c) Géométrie . . . 43
d) Probabilités . . . 44
6) X PC autre . . . 44
a) Algèbre . . . 44
b) Analyse . . . 46
c) Probabilités . . . 49

III) Mines **49**
1) Algèbre . . . 49
2) Analyse . . . 59
3) Probabilités . . . 71
4) Mines PSI . . . 75
a) Algèbre . . . 75

IV) Centrale **76**
1) Algèbre . . . 76
2) Analyse . . . 80
3) Probabilités . . . 84
4) Centrale - PSI . . . 85
a) Algèbre . . . 85

V) Autres écoles **85**

I) ENS MP-MPI xens

1) Algèbre

Exercice 1 [ENS 2023 # 1] Soient S et T des ensembles finis non vides et f une application de S dans T. On pose $X = \{(x, y) \in S^2, f(x) = f($
Montrer que $|X| \geq \max\left(\frac{|S|^2}{|T|}, \left(\left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil\right)^2 + |S| - \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil\right)$.

Démonstration. Pour le terme de gauche, il s'agit de montrer que $\sum_y n_y^2 \geq \frac{\left(\sum_y n_y\right)^2}{\sum_y 1}$, c'est Cauchy-Schwarz.
Pour le terme de droite, c'est un principe des tiroirs, puis compter pour 1 les éléments qui ne sont pas dans le tiroir. □

Exercice 2 [ENS 2023 # 2] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et S un sous-ensemble non vide de $[\![1, n]\!]$ tels que $\left|m - \sum_{i \in S} x_i\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

Démonstration. S sera un sous-ensemble d'entiers consécutifs : considérer les sommes partielles $S_0, \ldots, S_n$. □

Exercice 3 [ENS 2023 # 3] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E(n)$ la valuation 5-adique de $\prod_{k=1}^n k^k$. Donner un équivalent de $E(n)$, quand $n \to +\infty$. SUP

Démonstration. C'est $\sum_{q=1}^{\lfloor n/5 \rfloor} 5q + \sum_{q=1}^{\lfloor n/5^2 \rfloor} 25q + \dots$ □

Exercice 4 [ENS 2023 # 5] Soit p un entier premier > 1. Montrer que -1 est un carré modulo p si et seulement si p est somme de deux carrés d'entiers.

Démonstration. Si p est somme de deux carrés d'entiers, $p \equiv 1[4]$, et a est un carré si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.
Réciproquement, si $p \mid m^2+1$. On peut trouver $0 < x, y < \sqrt{p}$ tels que $p \mid m^2x^2 - y^2$. On obtient alors $p \mid x^2+y^2$. □

Exercice 5 [ENS 2023 # 6]

1. Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^\times$ contient $(p-1)/2$ carrés.
2. Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ s'écrit comme la somme de deux carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Soit n un entier impair. Montrer que tout élément de $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times$ s'écrit comme somme de deux carrés.
   Indication : Commencer par le cas où n est sans facteur carré.

Exercice 6 [ENS 2023 # 7] Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Si p est un nombre premier et si $r \in \mathbb{Q}^*$ s'écrit $\frac{a}{b}$ de manière irréductible, on définit la p-valuation $v_p(r)$ comme $v_p(a) - v_p(b)$.

1. Montrer que si $p \geq 3$ est premier, alors $v_p(H_{p-1}) \geq 1$.
2. Montrer que si $p \geq 5$ est premier, alors $v_p(H_{p-1}) \geq 2$.
3. Montrer que si $p \geq 5$ est premier, alors $v_p(H_{(p-1)p}) \geq 1$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $v_2(H_n)$.

Exercice 7 [ENS 2023 # 9]

1. Calculer $\sum\limits_{d|n} \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.
2. Calculer $\sum\limits_{d|n} \mu(d)$ où μ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1, \mu(p) = -1, \mu\left(p^k\right) = 0$ pour $k \geq 2$ si p est un nombre premier et $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ si $n \wedge m = 1$. On pose $F \colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \left|\left\{\frac{p}{q} \in [0,1]; q \leq x\right\}\right|$.
3. Montrer que $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \ln x)$.

Démonstration.

1. $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$
2. $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$, ou 1 pour $n = 1$.
3. Par inversion de Möbius, on a $\varphi(d) = \sum\limits_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) d'$. □

Exercice 8 [ENS 2023 # 10] Soient p, q deux nombres premiers distincts. On note $v_p(n)$ la valuation p-adique d'un entier n. On pose, pour $m \in \mathbb{N}^*, N(m) = (1-q)\left(1-q^2\right)\dots(1-q^m)$. Trouver une constante $c > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*, v_p(N(m)) \leq cm\ln(m)$.

Démonstration. Relier à 423 (LTE).
On a $v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(n)$ (pour $p \neq 2$).
Donc $v_p(N(m)) = \sum_{k=1}^m v_p(1-q) + v_p(m!)$, plus formule de Legendre. □

Exercice 9 [ENS 2023 # 11] Si X est un ensemble fini, on note $X^* = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} X^k, c \colon \left(X^*\right)^2 \to X^*$ la concaténation et $\ell \colon X^* \to \mathbb{N}$ la longueur. Soient A et B deux ensembles finis et $\varphi \colon A^* \to B^*$ telle que, pour tous $a, a' \in A, \varphi\left(c\left(a, a'\right)\right) = c\left(\varphi(a), \varphi\left(a'\right)\right)$. SUP

1. On pose $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{0, 1\}$. Étudier l'injectivité des applications définies sur les lettres de A puis étendues sur A^* par $\varphi \colon A \to B^*$ telles que $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 01, \varphi(c) = 10, \varphi(d) = 10011$, et $\psi \colon A \to B^*$ telle que $\psi(a) = 01, \psi(b) = 10, \psi(c) = 11, \psi(d) = 00$.
2. Montrer que, si φ est injective, alors $\sum_{a\in A} |B|^{-\ell(\varphi(a))} \leq 1$.

Démonstration.

1. La première est non injective : 0100110 peut être lu de deux façons.
   La seconde l'est.
2. On note C_N le nombre de choix possibles, de mots, dont la longueur totale N.
   On doit avoir $C_N \leq |B|^N$. Mais C_N vérifie une relation de récurrence : $C_N = \sum_{a\in A} C_{N-\ell(a}$.
   Donc les racines de cette récurrence doivent être $\leq |B|$, ce qui implique qu'en $|B|$ la valeur est négative, d'où le résultat. □

Exercice 10 [ENS 2023 # 12]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition $(1\,2)$ et le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.
2. La transposition $(1\,3)$ et le cycle $(1\,2\,3\,4)$ engendrent-ils $\mathcal{S}_4$?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq a < b \leq n$ tels que $\tau = (ab)$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{S}_n$. Montrer que $b-a$ et n sont premiers entre eux.
4. Montrer la réciproque de la propriété précédente. SUP

Démonstration.

1.
2. Non.
3. Si $p \mid b - a \wedge n$, alors $\sigma(a) - \sigma(b) \equiv a - b[p]$.

4. Facile de se ramener à un cycle $(u\,u+1)$ ☐

Exercice 11 [ENS 2023 # 14] Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, on pose $X^{-1} = \{x^{-1}, x \in X\}$ et $XY = \{xy, (x,y) \in X \times Y\}$. SUP

Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.

1. On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
2. On suppose que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

Démonstration.
1. Si X a un seul élément, ok. Sinon, alors pour tous $a, b \in X$, les ensembles aX et bX ne sont pas disjoints, donc il existe u, v tels que $au = bv \Leftrightarrow a^{-1}b = uv^{-1}$. D'où le résultat.
2. $X^{-1}X$ contient l'élément neutre, et stable par inverse.
   Si ce n'est pas un sous-groupe, c'est qu'il existe $u^{-1}va^{-1}b$ qui ne s'écrit pas de cette forme.
   !!
   Quitte à translater, on peut supposer que $e \in X$. Alors XX^{-1} contient tous les éléments de X, et leurs inverses. Au moins la moitié des éléments de X ont leurs inverses dans X ! ☐

Exercice 12 [ENS 2023 # 15] Soient A un anneau et $B \subset A$ finie non vide. On note $E(B) = \left|\{(a,b,c,d) \in B^4 \mid ab = cd\}\right|$. Montrer que $E(B) \geq \frac{|B|^4}{|BB|}$. SUP

Démonstration. On note x_i le nombre de couples qui donnent une valeur $i \in A$. Alors $E(B) = \sum x_i^2$, et $|BB| = \sum_i 1$. Cauchy-Schwarz permet de minorer par $(\sup x_i)^2$, d'où le résultat. ☐

Exercice 13 [ENS 2023 # 16]
1. Montrer que $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$.
2. Soit $m \geq 2$. Montrer que le morphisme $\pi\colon SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjectif. SUP

Démonstration. Easy ☐

Exercice 14 [ENS 2023 # 17] Soit p un nombre premier. On admet qu'il existe un anneau commutatif A dans lequel $p^2.1_A = 0_A$ et il existe un élément inversible x tel que :

- tout élément de A s'écrive $P(x)x^{-k}$ pour un $P \in \mathbb{Z}[X]$ et un $k \in \mathbb{N}$;
- pour deux polynômes P, Q dans $\mathbb{Z}[X]$ et deux entiers naturels k, l, l'égalité $P(x)x^{-k} = Q(x)x^{-\ell}$ équivaut à ce que X^kQ et $X^\ell P$ aient même réduit modulo p^2 (autrement dit, tous les coefficients de $X^kQ - X^\ell P$ sont des multiples de p^2).

1. Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Caractériser l'inversibilité de $P(x)x^{-k}$ dans A.
2. Montrer que le groupe multiplicatif $A^\times$ ne possède pas de partie génératrice finie.

Démonstration. !! ☐

Exercice 15 [ENS 2023 # 18] Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$. On pose $S_q = \sum\limits_{\substack{0 \leq a < q \\ a \wedge q = 1}} \sum\limits_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi a f(n)}{q}}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $q \wedge q' = 1$, alors $S_{qq'} = S_q S_{q'}$.

Démonstration. Les $a \in [\![1, qq']\!]$ premiers avec q et q' sont les $bq + aq'$, avec a premier avec q et b premier avec q'. ☐

Exercice 16 [ENS 2023 # 19] On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{C}$ est intégrable si : $\forall (x,y) \in X^2, |x - y| \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble intégrable X composé de n points tous sur un même cercle. SUP

Démonstration. On veut que les $\sin(\frac{\theta_i - \theta_j}{2})$ soient rationnels, c'est-à-dire les $\sin\frac{\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_j}{2} - \sin\frac{\theta_j}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}$.
Il suffit donc de prendre les doubles d'une infinité de points rationnels sur le cercle. ☐

Exercice 17 [ENS 2023 # 20] Soit $z \in \mathbb{C}$ annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers. Soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $Q(z)$ est annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers. SUP

Démonstration. !! ☐

Exercice 18 [ENS 2023 # 21] Soit $n = 2m + 1 \geq 1$ un entier impair. Expliciter un polynôme P_m de degré $2m$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sin(nx) = (\sin x)^n P_m(\text{cotan}\, x)$.

1. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^m \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^m \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Démonstration. Easy. ☐

Exercice 19 [ENS 2023 # 22] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$. SUP

1. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si n est impair, alors P_n possède exactement une racine réelle, et qu'elle appartient à $[-n, -1]$.
3. On suppose n pair. Le polynôme P_n a-t-il une racine réelle ?

4. Déterminer les variations et la convexité de $x \mapsto P_n(x)$.

Démonstration. Easy. □

Exercice 20 [ENS 2023 # 23] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$.

1. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, nP(x)P''(x) \leq (n-1)P'(x)^2$.
2. Donner un polynôme ne vérifiant pas le résultat de la question précédente, puis un polynôme non scindé le vérifiant.

Démonstration.
1.
2. Ajouter à un précédent. □

Exercice 21 [ENS 2023 # 24] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On factorise P sous la forme $P = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k = \sum_{i=1}^{n} z_i^k$. Montrer que, si $k > n$, $S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_0 S_{k-n} = 0$ et que, si $k \leq n$, $S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1}S_1 = -k a_{n-k}$. **SUP**

Exercice 22 [ENS 2023 # 25] Une suite d'entiers $(a_n)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme si pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, $m - n \mid a_m - a_n$. **SUP**

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $\big(P(n)\big)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme.
2. Montrer que $\big(\lfloor n!e \rfloor\big)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme.
3. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et que la suite $\big(P(n)\big)_{n\geq 1}$ ne soit pas un pseudo-polynôme.

Démonstration.
1.
2.
3. $\frac{n(n+1)}{2}$ □

Exercice 23 [ENS 2023 # 26] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{n+1}$ tel que, pour tout $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$, le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Easy, à relier. □

Exercice 24 [ENS 2023 # 27] Deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont entrelacées si

- $-P$ et Q sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$,
- P et Q n'ont aucune racine réelle commune,
- entre deux racines consécutives de P (respectivement Q) il y a une unique racine de Q (respectivement P).

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, $\lambda P + \mu Q$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P et Q sont entrelacés.

Démonstration. À relier. □

Exercice 25 [ENS 2023 # 28] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. On note D_r le disque complexe ouvert de centre 0 et de rayon r. Montrer que $D_{1/n} \subset P(D_1)$. **SUP**

Démonstration. $X + X^2 Q(X) - z_i = 0$ avec $|z_i| < \frac{1}{n}$ admet toujours une racine, < 1.
Vient des relations coefficients-racines. □

Exercice 26 [ENS 2023 # 29] Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\mathcal{C}_Q = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid P \circ Q = Q \circ P\}$. **SUP**
On appelle suite commutante toute famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n,\ \deg P_n = n$ et $\forall n, m \in \mathbb{N},\ P_n \circ P_m = P_m \circ P_n$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{C}(X^2 + \alpha)$ contient au plus un polynôme.
2. Expliciter une famille commutante telle que $P_2 = X^2$.
3. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(nx) = T_n(\cosh x)$.
4. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite commutante.
5. Montrer que les polynômes de degré 1 sont inversibles pour $\circ$.
6. Montrer que, pour P de degré 2, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 unitaire tel que $P = U \circ (X^2 + \alpha) \circ U^{-1}$.
7. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille commutante. Montrer que, ou bien il existe U de degré 1 tel que $P_n = U \circ X^n \circ U^{-1}$, ou bien il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 tel que $P_n = U \circ T_n \circ U^{-1}$.

Exercice 27 [ENS 2023 # 31]
- CNS sur n pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.
- On suppose cette condition satisfaite. Combien y a-t-il de polynômes de degré $d \in \mathbb{N}$ fixé dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- Soit p premier. Montrer qu'il existe des polynômes irréductibles de degré 2 et 3 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Démonstration.
-
-
- Compter les multiples. □

Exercice 28 [ENS 2023 # 32] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps, et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang ≤ 1. Montrer que V est de dimension $\leq n$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 29 [ENS 2023 # 33] Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(X, Y) \in V^2$, on ait $\mathrm{Tr}(XY) = 0$.

Démonstration. !!
On a $X \perp X^T$, donc la dimension de X est $\leq \frac{n^2}{2}$.
Réciproquement. ☐

Exercice 30 [ENS 2023 # 35] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même rang telles que $A^2B = A$. Montrer que $B^2A = B$. SUP

Démonstration. En passant à la transposée, on veut montrer que $(B'A' - I_n)A' = O_n \Rightarrow (A'B' - I_n)B' = O_n$.
Mais la première relation donne que si $X \in \operatorname{Im} A'$, alors $B'A'X = X$. Donc $\operatorname{Im} B' = \operatorname{Im} A'$, et leurs induits sont inverses l'un de l'autre. ☐

Exercice 31 [ENS 2023 # 38] Soient $n \geq 1$ et E une partie de $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. SUP

1. On suppose que E est stable par différence symétrique. Que dire de $C = \{\mathbb{1}_A\}$ comme partie de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n$?
2. On ne fait plus l'hypothèse précédente, mais on suppose que $A \cap B$ est de cardinal pair pour tous $A, B \in E$. Montrer que $|E| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Démonstration.
1. C'est un sous-espace vectoriel.
2. D'une part les cardinaux des éléments sont pairs. D'autre part les cardinaux des réunions aussi.
   On vérifie que si $A, B, C \in E$, alors $(A \Delta B) \cap C$ est pair. Donc on peut supposer que E est stable par Δ.
   Chaque $A \in E$ donne un élément du dual $\tilde{A} \colon B \mapsto A \cap B$, ce qui limite la dimension de E. ☐

Exercice 32 [ENS 2023 # 39] Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $|a_i| \geq 2$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i$, $a_{ii} = a_i$, $a_{ij} = 1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Montrer que A est inversible et que son déterminant a le même signe que $\prod a_k$.
2. Montrer que la conclusion tient encore si l'on suppose $|a_{ij}| \leq 1$ si $|i - j| = 1$ au lieu de $a_{ij} = 1$.

Démonstration. !! ☐

Exercice 33 [ENS 2023 # 40] On considère $\varphi : \left(\mathbb{R}^4\right)^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui à (u, v) associe la matrice dont le coefficient en (i, j) vaut $\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$. SUP

1. Que peut-on dire si $\varphi(u, v) = \varphi\left(u', v'\right) \neq 0$?
2. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que A s'écrit comme $\varphi(u, v)$ avec (u, v) libre si et seulement si $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$ et $A \neq 0$.
4. Décrire l'image et le noyau d'une telle matrice.

Démonstration. ☐

Exercice 34 [ENS 2023 # 41] Soient a, b, m, p des entiers naturels tels que $a^2 + b^2 - pm = -1$. On pose $A = \begin{pmatrix} p & a + ib \\ a - ib & m \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(i))$ telle que $A = B^*B$ où $B^* = \bar{B}^T$. Même question avec B dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Démonstration. On a une matrice hermitienne, de déterminant 1. Donc diagonalisable ? !! ☐

Exercice 35 [ENS 2023 # 42] Soient $n \in \mathbb{N}^*, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^2$. Pour $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $f_g : (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n \mapsto \varphi_1\left(g\left(x_1\right)\right) \times \cdots \times \varphi_n\left(g\left(x_n\right)\right)$, application de $\left(\mathbb{R}^2\right)^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

- il existe une suite $(g_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}^2$, $f_{g_k}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,
- il existe une droite vectorielle L telle que $|\{i, L \subset \operatorname{Ker}\left(\varphi_i\right)\}| > \frac{n}{2}$.

Démonstration. Si il existe une droite L, en prenant $g_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ selon L et n'importe quel supplémentaire, ça devrait être bon.

Réciproquement, !! ☐

Exercice 36 [ENS 2023 # 43] Soit G l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $ad - bc = 1$ et $a \equiv d \equiv 1 - c \equiv 1 \bmod 3$. Montrer que G est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Démonstration. Facile ? Attention : faux pour 2. ☐

Exercice 37 [ENS 2023 # 45] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C_A \colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX - XA$. Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors C_A l'est aussi.

Démonstration. Calculer les puissances de C_A. ☐

Exercice 38 [ENS 2023 # 46] Soient A et B deux matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec A et B. Montrer que $BA = \pm AB$.

Démonstration. $\Leftarrow$ Ok.
Si $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec un Vect de dimension 2. Si $AB = \lambda BA$, c'est bon. Sinon, alors le commutant de $ABA^{-1}B^{-1}$ est $\mathrm{Vect}(I_n, C)$, donc $B = \lambda A + \mu I_n$, puis faire de la réduction. ☐

Exercice 39 [ENS 2023 # 47] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ leurs multiplicités. On note $P_k = (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et $F_k = \mathrm{Ker}\, P_k(A)$.

1. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.
2. Montrer que P_k est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur F_k.
3. Montrer que A se décompose en $D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente et $ND = DN$.

Démonstration. Easy. ☐

Exercice 40 [ENS 2023 # 48] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et m la multiplicité de 0 dans χ_A. On suppose que $m \geq 1$. Montrer l'équivalence entre

- $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^2$.
- il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^m = A$.
- pour tout $k \geq 1$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^k = A$.

Démonstration. $(iii) \Rightarrow (ii)$
$(iii) \Rightarrow (i)$ est simple, via les noyaux itérés.
$(i) \Rightarrow (iii)$: Décomposition des noyaux, on est ramené au cas A inversible. ! ! ☐

Exercice 41 [ENS 2023 # 49] Soit $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ dont toutes les valeurs propres sont de module ≤ 1. Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $M^k - I_n$ soit nilpotente.

Démonstration. Il s'agit exactement de montrer que les valeurs propres de M sont des racines de l'unité.
Les $\mathrm{Tr}\, M^k$ prennent un nombre fini de valeurs, et par co-approximations, on peut tendre vers 1, donc c'est gagné. ☐

Exercice 42 [ENS 2023 # 51] Soit $n \geq 1$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{i,j}$ la matrice de permutation associée. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que $\forall A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}), \quad f(PAP^{-1}) = f(A)$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f \colon \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que $f(P_\sigma D P_\sigma^{-1}) = f(D)$. Expliciter un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$.

Démonstration. $\mathcal{B}$ est l'ensemble des polynômes symétriques. On a une application $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Elle est injective : si l'on coïncide sur les matrices diagonales, on coïncide sur les diagonalisables, donc par densité, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Elle est surjective : Si f est donné sur les $\mathcal{D}_n$, on montre que f est entièrement déterminée par $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Par ailleurs, f est polynomiale en les σ_i (il faut travailler…).
Puis on peut définir f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en prenant l'image des coefficients du polynôme caractéristique. ☐

Exercice 43 Décomposition de Jordan [ENS 2023 # 52] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m, $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $\left(f^k(x)\right)_{0 \leq k \leq m-1}$ est libre. On note V le sous-espace de E engendré par cette famille.
2. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(f^{m-1}(x)) \neq 0$, W le sous-espace de E^* engendré par $(\varphi \circ f^i)_{0 \leq i \leq m-1}$, $W^\perp$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $\forall \psi \in W^\perp, \psi(y) = 0$. Montrer que $W^\perp$ est un supplémentaire de V dans E stable par f.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme J_k avec $k \in \mathbb{N}^*$, où $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la sur-diagonale qui sont égaux à 1.

Démonstration. ☐

Exercice 44 [ENS 2023 # 53] Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$. Un élément $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ soit une base de E.

1. Quels sont les endomorphismes de E diagonalisables et cycliques ?
2. Montrer que si u est cyclique, le commutant de u est égale à $\mathbb{K}[u]$.
3. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des sous-espaces $E_1, \dots, E_r$ de E stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ et que, pour tout i, u_{E_i} soit cyclique.

Démonstration. Ok. ☐

Exercice 45 [ENS 2023 # 54] Soient $r \in \mathbb{N}^*, d_1, \dots, d_r$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $d_1 \, |d_2| \dots \mid d_r$. Déterminer le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contienne un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$.

Démonstration. $n = r$ convient. Réciproquement, si G contient un tel groupe, on peut codiagonaliser. ☐

Exercice 46 [ENS 2023 # 55] Le groupe $GL_2(\mathbb{Q})$ contient-il un élément d'ordre 5 ?

Démonstration. Montrer qu'une racine 5-ème de l'unité n'a pas de polynôme annulateur sur $\mathbb{Q}$ de degré 2, c'est-à-dire que $1 + \cdots + X^4$ est irréductible. ☐

Exercice 47 [ENS 2023 # 56] On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle.

1. Montrer que $\forall M \in H,\ e^M \in SL_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall M \in H,\ \operatorname{Tr} e^M \geq -2$.
3. A-t-on $\exp(H) = SL_2(\mathbb{R})$?
4. Montrer que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit d'une matrice de $SO_2(\mathbb{R})$ et d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0.
5. En déduire que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit de deux exponentielles de matrices de H.

Démonstration.
1.
2. C'est $\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
3. Non, cf question précédente.
4. Partir d'une matrice de SL_2, et faire le produit.
5. Antisymétrique + triangulaire. □

Exercice 48 [ENS 2023 # 57] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, h_1 et h_2 deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une norme sur E pour laquelle h_1 et h_2 sont des isométries et que $[h_1, h_2] = h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ commute avec h_1 et h_2. Montrer que l'espace des vecteurs de E fixes par h_1 et h_2 admet un supplémentaire dans E stable par h_1 et h_2.

Démonstration. On peut supposer que l'ensemble F des points fixes est de dimension 1. Donc est le noyau d'une forme linéaire φ.
Notons C le commutateur. On a $Ch_2 = h_1 h_2 h_1^{-1}$.
Si h_1 et h_2 commutent.
Si $h_1 = h_2$.!! □

Exercice 49 [ENS 2023 # 58] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

1. Montrer que $\sum |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.
2. Montrer que $|\det A| \leq n^{n/2} \sup |a_{ij}|$.

Démonstration.
1. !!
2. IAG probablement. □

Exercice 50 [ENS 2023 # 59] Soient $(E, \langle\rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E tels que, pour tout $(i,j) \in [\![1, m]\!]^2, \langle u_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$. On note p le projecteur orthogonal de E sur $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_m)$. Montrer que $\forall x \in E, \sum_{i=1}^n \langle u_i, x \rangle \langle x, p(v_i) \rangle = \|p(x)\|^2$.

Démonstration. Easy, on a $\langle x, p(v_i) \rangle = \langle p(x), v_i \rangle = \langle u_i, x \rangle$. □

Exercice 51 [ENS 2023 # 60] On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$. On pose $F = \operatorname{Vect}(X, X^2, \dots, X$
et on note Q la projection orthogonale de 1 sur F.
On écrit $Q = -\sum_{k=1}^n a_k X^k$ et $P = 1 + \sum_{k=1}^n a_k (X+1)\dots(X+k)$.

- Déterminer $\langle Q-1, X^k \rangle$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et montrer que $P(k) = 0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
- Calculer $\inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 e^{-x}\, dx$.

Démonstration.
1. Cela vaut 0. Découle des relations intégrales.
2. Cela vaut $\langle 1-Q, 1-Q \rangle = \langle 1-Q, 1 \rangle = \int (1 + \sum a_i x^i) e^{-x}\, \mathrm{d}x$. C'est une fonction des a_i, et la question 1 permet de conclure, peut-être. □

Exercice 52 [ENS 2023 # 61] Soient $(E, \langle\rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*$ et $u, u_1, \dots, u_m$ des vecteurs de E. Montrer que $u \in \mathbb{R}^+ u_1 + \dots + \mathbb{R}^+ u_m$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\{x \in E; \forall i \in [\![1, m]\!], \langle u_i, x \rangle \leq 0\} \subset \{x \in E; \langle u, x \rangle \leq 0\}$.

Démonstration. $\Rightarrow$: Easy.
$\Leftarrow$: Si les vecteurs u_i sont libres, on peut prendre un élément x orthogonal à tous sauf 1.
Sinon, si u_m est combinaison linéaire des précédents, avec un coefficient < 0.!! □

Exercice 53 [ENS 2023 # 62] Montrer que, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, M s'écrit d'une unique façon QR avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure a termes diagonaux dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Démonstration. C'est GS. □

Exercice 54 [ENS 2023 # 63] [Rennes sur dossier] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et inversible.

- Que peut-on dire de l'entier n ?
- En considérant M^2, montrer que M admet un plan stable puis qu'il existe une matrice orthogonale $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $O^T M O$ soit une matrice diagonale par blocs de la forme $\operatorname{diag}(R_{a_1}, \dots, R_{a_k})$, avec $R_a = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.
- Qu'en est-il si M n'est plus supposée inversible ?

Démonstration.
1. pair.
2. M^2 est symétrique donc diagonalisable. Alors si X est valeur propre, X, MX est stable.
3. On rajoute le noyau. □

Exercice 55 [ENS 2023 # 64] Soit $n \geq 1$. Déterminer les matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^k = A^T$ pour tout entier $k \geq n$.

Démonstration. On a A et A^T cotrigonalisable, donc $\lambda \mapsto \lambda + \lambda^k$ est une bijection sur les valeurs propres. La seule possibilité est que A soit nilpotente, donc symétrique. ☐

Exercice 56 [ENS 2023 # 65] Soient $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de réflexion dans $\mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. On pose $A' = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Calculer $\chi_{A'}(1)$ en fonction de la première colonne de M et de χ_A.

Démonstration. $\chi_{A'}(1) = \det(I_{n+1} - M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}).!!$ ☐

Exercice 57 [ENS 2023 # 66] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On suppose que A et $A + vv^T$ n'ont pas de valeur propre commune. Sous reserve d'existence, on pose $F(x) = 1 + v^T(A - xI_n)^{-1}v$ pour x réel.

- Montrer que les zeros de F sont les valeurs propres de $A + vv^T$.
- On note $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les valeurs propres de A. Montrer que chaque intervalle $]\lambda_1, \lambda_2[$,..., $]\lambda_{n-1}, \lambda_n[$, $]\lambda_n, +\infty[$ contient exactement une valeur propre de $A + vv^T$.

Démonstration. !! ☐

Exercice 58 [ENS 2023 # 67] Soient $n \in \mathbb{N}$ impair, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $A + M$ soit non inversible. Montrer que $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Par récurrence. On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A' \end{pmatrix}$, avec h petit et A' fixé. Le terme en h^2 est $h^2 \det(M' + A')$. ☐

Exercice 59 [ENS 2023 # 68] Soient A, B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'ont pas -1 pour valeur propre et telles que AB n'ait pas 1 pour valeur propre. Montrer que $(A - I_n)(BA - I_n)^{-1}(B - I_n)$ est antisymétrique.

Démonstration. Classique ☐

Exercice 60 [ENS 2023 # 69] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres de J et leur multiplicité.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
- Que peut-on dire de la matrice BJB ?
- Lorsque A est diagonale, calculer les valeurs propres de JA.
- Montrer plus généralement que toute valeur propre d'une matrice antisymétrique réelle est imaginaire pure.

Exercice 61 [ENS 2023 # 70] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A non nécessairement distinctes. Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^k \lambda_{n+1-i}$.

Démonstration. !! ☐

Exercice 62 [ENS 2023 # 71]

1. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ Montrer que AB est diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles.
2. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $f_{A,B} : X \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(AX) + \mathrm{Tr}\left(BX^{-1}\right)$. Montrer que $f_{A,B}$ admet un minimum $\mu_{A,B}$ atteint en une unique matrice $M_{A,B}$. Expliciter $\mu_{A,B}$ et $M_{A,B}$.

Démonstration. ☐

Exercice 63 [ENS 2023 # 72] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On définit $p(A)$ comme la dimension maximale d'un sous-espace V sur lequel $\forall x \in V \setminus \{0\}$, $\langle Ax, x\rangle > 0$. On définit de meme $q(A)$ avec la condition $\langle Ax, x\rangle < 0$.

- Montrer que $p(A) + q(A) = \mathrm{rg}\, A$.
- Montrer que, si A est inversible, alors p et q sont constantes sur un voisinage de A dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on suppose que $f : t \mapsto \det(A + tB)$ n'a que des racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet au moins $|p(B) - q(B)|$ racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 64 [ENS 2023 # 73] On note $\lambda_1(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonne d'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Si $1 \leq i, j \leq n$ et $i + j \geq n + 1$, que dire du signe de $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$

Soient $a \leq b$ deux réels, et $(O - i \in I$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. On note X l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels qu'il existe une partie finie $J \subset I$ vérifiant $[a, x] \subset \bigcup_{j \in J} O_j$. Montrer que $X = [a, b]$.

Exercice 65 [ENS 2023 # 74] Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonné de M.

1. On considère $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. Montrer que, si $i + j < n + 2$ alors $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) < 0$.
2. Généraliser à $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1 + \cdots + A_d \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. telle que $B = P^T AP$.

Démonstration. ☐

Exercice 66 [ENS 2023 # 75] On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne. Soit $S \in \mathcal{S}_n$. On suppose que $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid S = M^T M - MM^T\}$ est non vide. On note $\gamma(S) = \inf_{M \in E} \|M\|^2$. Montrer que $\|S\| \leq \gamma(S) \leq 2\|S\|$.

Exercice 67 [ENS 2023 # 76]
1. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^T A P$.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Proposer une définition naturelle de $f(A)$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Pour A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on pose $d(A,B) = \left\|\ln\left(\sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}\right)\right\|$. Justifier la définition, et montrer que d est une distance sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $d\left(P^T A P, P^T B P\right) = d(A,B)$.

Démonstration. □

Exercice 68 [ENS 2023 # 77] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Montrer que $(X,Y) \mapsto \mathrm{Tr}\, X^T Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $L(M)\colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MX$. Montrer que L est un morphisme d'algèbre injectif.
3. Soit $|||\cdot|||_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, et $|||\cdot|||$ la norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ subordonnée à $\|\cdot\|$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $|||L(M)||| \leq |||M|||_2$.
4. Montrer que $\left|\left|\left|M^T\right|\right|\right|_2 = |||M|||_2$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 69 [ENS 2023 # 78] On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associée à la norme $X \mapsto \sqrt{\bar{X}^T X}$.
1. Soient A, B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left\|e^{iA} - e^{iB}\right\| \leq \|A - B\|$.
2. Démontrer le même résultat sous l'hypothèse que A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\bar{A}^T = A$ et $\bar{B}^T = B$.

Démonstration. □

2) Analyse

Exercice 70 [ENS 2023 # 79] Soit $p > 1$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\Big\| x = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$.
1. Montrer qu'il s'agit bien d'une norme.
2. Montrer l'inégalité de Hölder.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner la boule unité de la norme p pour plusieurs valeurs de p.

Exercice 71 [ENS 2023 # 80] Soient $a \leq b$ deux réels, et $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a,b] \subset \bigcup_i O_i$. On note X l'ensemble des $x \in [a,b]$ tels qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $[a,x] \subset \bigcup_{j \in J} O_j$. Montrer que $X = [a,b]$.

Exercice 72 [ENS 2023 # 81] Soient K un compact convexe non vide d'un espace norme E, f un endomorphism continu de E tel que $f(K) \subset K$. Montrer que f admet un point fixe dans K.

Exercice 73 [ENS 2023 # 82] Peut-on écrire $]0{,}1[$ comme réunion dénombrable disjointe de segments d'intérieurs non vides ?

Démonstration. Non. Par l'absurde, on fait de la dichotomie, entre des segments, dont la distance tend vers 0, alors la limite n'appartient à aucun segment. □

Exercice 74 [ENS 2023 # 83] Pour tout réel x dans $[0{,}1[$, on note $0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ le développement décimal propre de x. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i$. Soit a un réel tel que $0 < a < 9$. On définit $P_n = \{x \in [0{,}1[; S_n(x) \leq na\}$ et $P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} P_n$. Montrer que P est compact, non vide, d'intérieur vide et sans point isolé.

Démonstration. P est borné et fermé, car S_n est continue inférieurement. Clairement non vide et d'intérieur vide. Si $x \in P$, en retirant 1 a un chiffre de x arbitrairement grand, on reste dans P. Possible sauf si x est décimal, auquel cas on peut ajouter 1. □

Exercice 75 [ENS 2023 # 84] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que la classe de similitude de A est fermée si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 76 [ENS 2023 # 85]
- On note D le disque unite du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(C - i \in \mathbb{N}$ de parties de D telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble C_i soit un carré de $\mathbb{R}^2$ dont les cotes sont parallèles aux axes ;
  - ▷ les C_i soient d'intérieurs deux a deux disjoints ;
  - ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Aire}(C_i) = \pi$.
- On note $C = [-1,1]^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(D - i \in \mathbb{N}$ de parties de C telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble D_i soit un disque ferme de $\mathbb{R}^2$;
  - ▷ les D_i soient d'intérieurs deux a deux disjoints ;
  - ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Aire}(D_i) = 4$.

Exercice 77 [ENS 2023 2023 # 86] Soit $d \geq 1$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{R}[X]$.
1. On pose $A = \{(P,x) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}; P(x) = 0\}$ et $P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de A dans $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}$.
2. On pose $B = \{P \in \mathcal{P}; \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \neq 0$ ou $P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de B dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Démonstration.
1. Par translation, on peut passer de (P,x) à $(\tilde{P}, 0)$. Alors $P = X^n + Q + \alpha X$, avec $\alpha \neq 0$. On peut ramener Q à 0, et α à ± 1. Deux composantes connexes, selon le signe de $\alpha = P'(x)$.

2. B est l'ensemble des polynômes unitaires à racines simples. Le nombre de racines simples est un invariant, et réciproquement, ces morceaux sont clairement connexes par arcs. □

Exercice 78 [ENS 2023 # 87] Soient $(M_k)_{k\geq 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables les unes aux autres, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\|M_k\| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et une extractrice $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\frac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|} \to N$.

Démonstration. On peut extraire $\frac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|}$ convergent, vers Π.

Si Π a une valeur propre complexe X, comme $\left\|\frac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|} - \Pi\right\| \leq \varepsilon$, on a une valeur propre complexe proche de λ, donc $M_{\varphi(k)}$ a une valeur propre qui tend vers $+\infty$. □

Exercice 79 [ENS 2023 # 88] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module < 1. Montrer qu'il existe une norme \|\| sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour la norme d'opérateur associée, on ait $\|A\| < 1$.

Démonstration. Trigonaliser, puis conjuguer par une matrice diagonale pour n'avoir que des petits coefficients hors de la diagonale. □

Exercice 80 [ENS 2023 # 89] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de lignes $L_1, \ldots, L_n$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|L_i\|_2 = 1$ et la distance euclidienne canonique de L_i au sous-espace engendré par les L_j, pour $j \neq i$, est supérieure ou égale à ε. Montrer que A est inversible et que $\sup\left\{\left\|A^{-1}x\right\|_2 ; x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = 1\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Démonstration. A est inversible car aucune ligne n'est combinaison linéaire des autres.
Si $x = E_i$, on considère les colonnes de A^{-1}, notées C_i. On $\langle C_i, L_i\rangle = 1$ et C_i orthogonal aux autres lignes, ce qui donne $\|C_i\|_2 \leq \frac{1}{\varepsilon}$, peut-être.
Ensuite, utiliser une convexité ? □

Exercice 81 [ENS 2023 # 90] On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\| \; \|_\infty$. On fixe $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ non nulle a support compact, et on note $W(g)$ l'espace vectoriel engendre par les fonctions $x \mapsto g(x-n)$, n décrivant $\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des réels t lets que $\left\{x \mapsto f(x-t), f \in \overline{W(g)}\right\} = \overline{W(g)}$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.

Exercice 82 [ENS 2023 # 91] Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles de limite 1 et (u_n) une suite réelle strictement positive telle que, pour tout n, $u_{n+2} = a_{n+1}u_{n+1} + b_{n+1}u_n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \frac{\ln(u_n)}{n}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent.

Démonstration. Soit m. On peut écrire $u_{a+n} = G_n u_a + G_{n+1}u_{a-1}$ et $u_{a+n+1} = G_{n+1}u_a + G_{n2}u_{a-1}$, où $G_n \xrightarrow[a\to+\infty]{} F_n$, ce qui devrait implique ce que l'on veut.
w_n s'obtient à partir de v_n par Cesàro. □

Exercice 83 [ENS 2023 2023 # 92] 1. Si $n \geq 2$ est un entier, montrer que $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n)\rfloor = \sum_{j=2}^n \lfloor \sqrt[j]{n}\rfloor$.

2. Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n)\rfloor$, puis un développement asymptotique à deux termes.

Démonstration. 1. Le premier compte les puissances de k inférieures à n, dont k^1.
Le second compte les puissances j-èmes inférieures à n.
2. En coupant la somme en $k = \sqrt{n}$, on a du $\sqrt{n}\ln n + (n - \sqrt{n})n$, d'où un équivalent à n.
En suite, on prend l'autre expression, on retire n. Le premier terme est $\sqrt{n}$. Les termes non nuls correspondent à $\sqrt[j]{n} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 2^j$, donc les autres termes sont au plus en $\sqrt[3]{n}\ln n$, d'où le DSA $n + \sqrt{n} + o_{+\infty}(\sqrt{n})$. □

Exercice 84 [ENS 2023 # 93] Soient $\alpha > 0$ et $(a - n \in \mathbb{N}$ une suite strictement décroissante a valeurs dans $]0,1[$. Soit $(u - n \in \mathbb{N}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(u_n^\alpha + a_n)$. Montrer qu'il existe un unique $u_0 > 0$ tel que la suite $(u - n \in \mathbb{N}$ converge vers un réel strictement positif.

Exercice 85 [ENS 2023 # 94] Soit (u_n) une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin(\ln n)$. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

- Montrer que, pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$.
- Montrer que $u_{n+1} - u_n \to 0$.
- Montrer que V est un intervalle inclus dans $[-1,1]$, puis que $V = [-1,1]$.

Exercice 86 [ENS 2023 # 95] Si A est une partie de $\mathbb{N}^*$, on dit que A admet une densité si la suite $\left(\frac{|A\cap[\![1,n]\!]|}{n}\right)_{n\geq 1}$ admet une limite. Cette limite est alors notée $d(A)$.

- Si $m \in \mathbb{N}^*$, quelle est la densité de l'ensemble des multiples de m dans $\mathbb{N}^*$?
- Soient A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ admettant une densite. Montrer que $A \cup B$ admet une densité que l'on precisera.
- Donner un exemple de partie de $\mathbb{N}^*$ n'admettant pas de densite.

Exercice 87 [ENS 2023 # 96] On considère une suite $a \in \{2,3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n-ième occurrence de 2 et la $(n+1)$-ième occurrence de 2 soit égal a a_n.
Étudier la convergence de la suite de terme général $\frac{1}{n}\left|\{k \in [\![1,n]\!],\, a_k = 3\}\right|$.

Exercice 88 [ENS 2023 # 97] On considère une suite $a \in \{2,3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n-ième occurrence de 2 et la $(n+1)$-ième occurrence de 2 soit égal à a_n. Montrer qu'il existe un unique irrationnel α tel que les indices $n \geq 1$ tels que $a_n = 2$ soient exactement les entiers de la forme $\lfloor m\alpha \rfloor + 1$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. ☐

Exercice 89 [ENS 2023 # 98] Une suite réelle (x_n) est dite équirépartie modulo 1 si elle vérifie, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$, $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2}$
0.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(n\alpha)$ est équirépartie modulo 1.
2. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_{n+h} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie ; on veut montrer que (x_n) est équirépartie modulo 1.
   a) Soit (a_n) une suite de complexes de module ≤ 1. Montrer, pour tous $N, H \in \mathbb{N}^*$: $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq \left|\frac{1}{H}\sum_{h=0}^{H-1}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_{n+h}\right| + \frac{2H}{N}$.
   b) Montrer que $\left|\frac{1}{H}\sum_{h=0}^{H-1}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_{n+h}\right| \leq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=0}^{H-1}\frac{a_{n+h}}{H}\right|^2}$.
   c) Conclure.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et de coefficient dominant irrationnel. Montrer que $(P(n))_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1.
4. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle équirépartie modulo 1, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \xrightarrow[n\to+]{}$ $\int_0^1 f$.
5. On reprend les hypothèses de la question 3. Montrer que la distance de $P(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$ est nulle.

Démonstration. 1.
2.
3.
4.
5. ?? ☐

Exercice 90 [ENS 2023 # 99] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on note A_n la matrice
$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ ou, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$.
Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de $(\mathrm{tr}\,(A_n^q))_{n\geq 2}$.

Exercice 91 [ENS 2023 # 100] Montrer la convergence et calculer $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left\lfloor\frac{\ln(k)}{\ln(2)}\right\rfloor$.

Démonstration. Écrit quelque part… ☐

Exercice 92 [ENS 2023 # 101] On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$. On se donne une suite presque nulle $v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ainsi qu'une suite $(u_k)_k$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ (l'élément u_k est donc noté $(u_{k,i})_{i\in\mathbb{N}}$). On suppose que, pour tout entier $p \geq 2$, la suite de terme général $w_k = \sum_{n=0}^{+\infty}(u_{k,n})^p$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty}(v_n)^p$. Montrer que $\inf_{\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_{k,\sigma(n)} - v_n\right)^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{}$ 0.

Démonstration. Écrit quelque part…
On peut supposer que les (v_n) sont décroissants, par réordonnement. ☐

Exercice 93 [ENS 2023 # 102] Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et telle que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

Démonstration. Facile. ☐

Exercice 94 [ENS 2023 # 103] Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $[a,b] \subset I$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que la tangente au graphe de f en c passe par le point $(a, f(a))$.

Démonstration. On peut supposer $f'(a) = f'(b) = 0$. À relier. ☐

Exercice 95 [ENS 2023 # 104] Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit dérivable en aucun point.

Exercice 96 [ENS 2023 # 105] Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geq 2$, f^n (puissance) soit polynomiale.

Démonstration. f^2 et f^3 polynomiales, donc f est une fraction rationnelle, $f \in \mathbb{Q}(x)$ et $f^2 \in \mathbb{Q}[X]$ impliquent $f \in \mathbb{Q}[X]$. ☐

Exercice 97 [ENS 2023 # 106] Soit $p > 1$ un réel. Montrer qu'il existe une constante $k_p > 0$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x|^p + |y|^p = 2$, on ait $(x-y)^2 \leq k_p\left(4 - (x+y)^2\right)$.

Exercice 98 [ENS 2023 # 107] Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. On note $f^*(s)=\sup_{x\in\mathbb{R}}(sx-f(x))$ et $f^*(x)=\sup_{s\in\mathbb{R}}(sx-f^*(s))$.
Montrer que $f^*(x)=\sup_{a\text{ affine }\leq f} a(x)$.

Exercice 99 [ENS 2023 # 108] Soient I un ensemble fini et $(P-i\in I$ une famille de polynômes réels stable par derivation. On définit une fonction signe par $\operatorname{sign}(x)=\dfrac{x}{|x|}$ si $x\neq 0$ et $\operatorname{sign}(0)=0$.

Pour $\varepsilon\in\{-1,1,0\}^I$, soient $A_\varepsilon=\{t\in\mathbb{R}\ ;\ \forall i\in I,\ \operatorname{sign}(P_i(t))=\varepsilon(i)\}$ et
$B_\epsilon=\{t\in\mathbb{R}\ ;\ \forall i\in I,\operatorname{sign}(P_i(t))\in\{\varepsilon(i),0\}\}$.

- Montrer que A_ε est soit vide, soit réduit a un point, soit un intervalle ouvert.
- Si A_ε est non vide, montrer que B_ε est l'adhérence de A_ε. Si A_ε est vide, montrer que B_ε est soit vide suit un singleton.

Exercice 100 [ENS 2023 # 109] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

- Soient $x_0,\dots,x_n$ des points de I. On note $V(x_0,\dots,x_n)$ le déterminant de Vandermonde associe a $(x_0,\dots,x_n)$. Montrer qu'il existe $\tau\in I$ tel que
$$\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0)\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n)\end{vmatrix}=\frac{f^{(n)}(\tau)}{n!}\,V(x_0,x_1,\dots,x_n)$$
- On suppose que $n=2$, que I est un segment et que f est strictement convexe. On note $\Gamma_f=\{(x,f(x));x\in I\}\subset\mathbb{R}^2$ le graphe de f. Montrer qu'il existe une constante C, dépendant uniquement de I et f, telle que le nombre de points de $\Gamma_f\cap\frac{1}{N}\,\mathbb{Z}^2$ soit majore par $C\,N^{2/3}$ pour tout entier $N\geq 1$.

Exercice 101 [ENS 2023 # 110] Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $w_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n(x)\,dx$.

- Montrer que $(w_n)_{n\geq 0}$ est decroissante.
- Etablir une relation de recurrence entre w_{n+2} et w_n.
- Sans utiliser la formule de Stirling, déterminer un équivalent simple de w_n.
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$.

Exercice 102 Théorème de Rouché [ENS 2023 # 111] Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$.

1. Montrer que le nombre de racines de P de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité n'est autre que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}P'(e^{it})}{P(e^{it})}$ d
2. Soit $Q\in\mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$ et tel que $\forall z\in\mathbb{U},|P(z)-Q(z)|<|Q(z)|$. Montrer que P et Q ont même nombre de racines de module strictement inférieurs à 1 comptées avec multiplicité.

Démonstration. □

Exercice 103 [ENS 2023 # 112] Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $A_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,dx$ et $B_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^{2n}(x)\,dx$. On admet que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $2nA_n=(2n-1)A_{n-1}$.

- Montrer que $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}=\frac{2B_0}{A_0}-\frac{2B_n}{A_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
- En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ puis que $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}+O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 104 [ENS 2023 # 113] Soit $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue et presque périodique c'est-à-dire telle que, pour tout $\epsilon>0$, il existe $T>0$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\forall n\in\mathbb{N},|f(x+nT)-f(x)|\leq\epsilon$. Soit $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue et presque périodique.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $t\mapsto\frac{1}{t}\int_0^t f$ possède une limite quand $t\to+\infty$.

Démonstration. 1. Easy.
2. !! □

Exercice 105 [ENS 2023 # 114] Soit f une fonction continue par morceaux et croissante de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^1 f(x)e^{i\lambda x}dx\underset{\lambda\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Exercice 106 [ENS 2023 # 115] Soient $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n$ des fonctions de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Soit A la matrice de terme général $A_{i,j}=\int_0^1 f_i(x)g_j(x)\,dx$.
On pose $B(x_1,\dots,x_n)=\det\left(f_i(x_j)\right)$ et $C(x_1,\dots,x_n)=\det\left(g_i(x_j)\right)$.Montrer que $\int_{[0,1]^n}B(x_1,\dots,x_n)\,C(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n=n!\det(A)$.

Exercice 107 [ENS 2023 # 116 - La fonction f • Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et telle que f' est uniformément continue. Est-ce que f' a une limite en $+\infty$?

Exercice 108 [ENS 2023 # 117] [Rennes sur dossier] Soient $d,N\in\mathbb{N}$ tels que $N>d$. Soient $(P-n\in\mathbb{N}$ une suite de polynômes a coefficients réels de degré au plus d et x_1, ..., x_N des réels distincts. On suppose que pour tout $j\in\{1,...,N\}$, la suite $(P_n(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que l'on peut extraire de $(P-n\in\mathbb{N}$ une suite $(Q-n\in\mathbb{N}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers un polynôme de degré au plus d.

Exercice 109 [ENS 2023 # 118] Montrer que la suite de fonctions de terme général $f_n : x\mapsto(\sin x)^n\,\cos(x)$ converge uniformément sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 110 [ENS 2023 # 119] On note I (resp. S) l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ telles que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in [0,1], f(x) \leq a\}$ est ferme (resp. de meme avec l'inégalité dans l'autre sens).

- Montrer que $S \cap I$ est l'ensemble C des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
- Soit $f : [0,1] \to [0,1]$. On pose $f_n : x \mapsto \inf(\{1\} \cup \{f(y) + n|x-y|, y \in [0,1]\})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n est continue pour tout n, que la suite (f_n) est croissante et que $f \in I$ si et seulement si la suite (f_n) converge simplement vers f.

Exercice 111 [ENS 2023 # 120] Soit $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(n) = \ln(p)$ si $n = p^k$ avec p premier et $k \in \mathbb{N}^*$, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.
2. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^s}$.
3. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} \underset{s\to 1+}{=} \frac{1}{s-1} + O(1)$.
4. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \underset{s\to 1^+}{=} \ln\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1)$. Qu'en déduire ?

Démonstration. □

Exercice 112 [ENS 2023 # 121] Soit $q \geq 2$ entier. On se donne un caractère non trivial χ sur le groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, c'est-à-dire un morphisme de groupes non constant $\chi : ((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \times) \longrightarrow (\mathbb{U}, \times)$. Pour $m \in \mathbb{Z}$, on pose alors $\widetilde{\chi}(m) = 0$ si q n'est pas premier avec m, et $\widetilde{\chi}(m) = \chi(\overline{m})$ sinon (ou $\overline{m}$ désigne la classe de m modulo q).

- Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\chi(m)}{m^s}$ converge si et seulement si $s > 0$.
- Montrer que la fonction $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 113 [ENS 2023 # 122] Soient $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle en $+\infty$ et $g\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$. Quelle est la limite de g en 0^+ ?

Démonstration. C'est $\sum f(2nx) - f((2n+1)x) = \sum \int_{2nx}^{(2n+1)x} f'(t)\,\mathrm{d}t$. Cela tend vers $\frac{1}{2}f(0)$, en découpant sur un segment, et en utilisant l'uniforme continuité de f'. □

Exercice 114 [ENS 2023 # 123] Pour tout polynôme trigonométrique $P : \theta \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(P)e^{ik\theta}$ (somme a support fini) et pour tout $d \in \mathbb{R}$, on pose $\|P\|_{h^d}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(P)|^2(1+|k|)^{2d}$.
On admet que $\| \, \|_{h^d}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{T}$ des polynômes trigonométriques pour tout $d \in \mathbb{R}$. Soit E l'espace des fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit le produit de convolution de deux fonctions $f, g \in E$ par : $f \star g : \varphi \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)g(\varphi - \theta)\mathrm{d}\theta$. Enfin, on pose, pour $f \in E$, $\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta$.

- Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ et $c = c(d) \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tous $f, g \in \mathcal{T}$,

$\|f \star g\|_2 \leq c(d)\|f\|_{h^d}\|g\|_2$.

- Déterminer tous les réels d vérifiant la condition de la question précédente.
- Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-periodique. On pose, pour $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta$ et, pour tout $d \in \mathbb{R}$, $\|f\|_{h^d}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2(1+|k|)^{2d}$. Déterminer les $d \in \mathbb{R}$ tels que $\|f\|_{h^d} < +\infty$.
- Soient f, g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périoddiques et $d \in \mathbb{R}$. Calculer $\|f \star g\|_{h^d}$.

Exercice 115 [ENS 2023 # 124] Soient $p \geq 2$ et $q \geq 2$ deux entiers tels que $p \wedge q = 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on pose $f(z) = \frac{1-z^{pq}}{(1-z^p)(1-z^q)}$. Écrire $f(z)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ et trouver le plus grand $n \geq 0$ tel que $c_n = 0$.

Exercice 116 [ENS 2023 # 125] Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-R,R[$ telles que $\forall x \in]-R,R[, \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que l'une au moins des deux fonctions f et g est identiquement nulle sur $]-R,R[$.

Démonstration. □

Exercice 117 [ENS 2023 # 126] Soient $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et $g : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.

- Déterminer les rayons de convergence de f et g.
- Trouver les complexes $z \in \mathcal{S}(0,1)$ tels que $f(z)$ converge.
- Montrer que f admet un prolongement $\bar{f}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, développable en série entière en tout point de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- Montrer que $|g(r)| \to +\infty$ quand $r \to 1$ avec $r \in \mathbb{R}$. - Montrer que, si $z \in \mathcal{B}(0,1)$, alors $g(z^2) = g(z) - z$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{U}_{2^n}$. Montrer que $|g(r\alpha)| \to +\infty$ quand $r \to 1$ avec $r \in \mathbb{R}$.
- Soit $h : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n+1}}{2^n+1}$. Montrer que h est continue sur $\overline{\mathcal{B}}(0,1)$.
- Montrer que, pour tout $z_0 \in \mathcal{S}(0,1)$, $\varepsilon > 0$ et $\tilde{h}$, prolongement de h sur $\overline{\mathcal{B}}(0,1) \cup \mathcal{B}(z_0,\varepsilon)$, la fonction $\tilde{h}$ n'est pas développable en série entière en z_0.

Exercice 118 [ENS 2023 # 127] Soit $\alpha = (\alpha - i \geq 1$ une suite de $\mathbb{Z}$ nulle a partir d'un certain rang. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \prod_{i\in\mathbb{N}^*}((in)!)^{\alpha_i}$.

- Déterminer, selon la valeur de α, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1} u_n z^n$.

Dans la suite, on note f la somme de cette série entière.

- Expliciter f si $\alpha = (-\delta_{i,1})_{i\geq 1}$.

- Pour une somme g de série entière sur un intervalle $]-a,a[$ non trivial, on pose $\Delta(g) : z \mapsto zg'(z)$. Expliciter $P(\Delta)(g)$ lorsque $g : z \mapsto z^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
- Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite complexe, et $P \in \mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{P(n+1)}$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} v_n z^n$ a un rayon de convergence non nul et donner une methode simple pour trouver une équation différentielle lineaire non triviale a coefficients polynomiaux dont sa somme est solution.
- Résoudre le meme probleme qu'en (d) lorsqu'il existe P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ telles que $v_{n+1} = \frac{Q(n+1)}{P(n+1)} v_n$ pour tout $n \geq 1$, et en supposant cette fois-ci que $\deg(Q) \leq \deg(P)$.
- Justifier que le cadre de la question - s'applique bien a la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ lorsque $R > 0$.

Exercice 119 [ENS 2023 # 128] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n!\,(30n)!}{(15n)!\,(10n)!\,(6n)!}$.

- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier.
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
- Trouver une équation différentielle vérifiée par la somme de la série entière précédente.

Exercice 120 [ENS 2023 # 129] Existe-t-il une partie A de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n\in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$?

Démonstration. Cf un précédent □

Exercice 121 [ENS 2023 # 130] • Soit $f\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$. Montrer que, pour tout $0 < r < R$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.

- ▷ Soit f une fonction développable en série entière de rayon de convergence égal a 1. On suppose que f est prolongeable par continuité sur le disque ferme $D_f(0,1)$. Expliquer pourquoi la formule de Cauchy ci-dessus reste vraie pour $r = 1$. - Soit $f : x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}} e^{-\frac{1-x}{1+x}}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
- ▷ On admet que le rayon de convergence du développement de f en 0 vaut 1. Montrer que les coefficients du développement en série entière en 0 de f sont bornes par $M > 0$. Experimer M en fonction de f.

Exercice 122 [ENS 2023 # 131] Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ a l'aide de la transformation de Laplace.

Exercice 123 [ENS 2023 # 132] Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ tel que $\forall x \in [0,1], 1 + ax + bx^2 \geq 0$.

1. Si $a \in \mathbb{R}^+$, montrer que $n \int_0^1 \left(1 + ax + bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Si $a \in \mathbb{R}^{-*}$, montrer que $n \int_0^1 \left(1 + ax + bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{a}$.

Démonstration. □

Exercice 124 [ENS 2023 # 133] Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{e^{2x}\cos^2(t) + e^{-2x}\sin^2(t)}}$. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq (ax+b)e^{-x}$.

Démonstration. □

Exercice 125 [ENS 2023 # 134] Pour x réel, on pose $J(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t)\,dt$.

- Calculer $J(0)$.
- Montrer que J est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- En estimant $\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \cos(x\sin t)\,dt$ pour un ε a choisir convenablement en fonction de x, etablir que $J(x) = O(x^{-1/2})$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 126 [ENS 2023 # 135] Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f \star g\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt$. Montrer que $f \star g$ est dérivable et donner une expression de sa derivée.

Exercice 127 [ENS 2023 # 136] Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geq 1$ et $s < t$ dans $]0,1[$, on pose
$a_n(f,s,t) = \frac{2}{t-s} \int_s^t f(u) \cos\left(\frac{2n\pi}{t-s}(u-s)\right) du.$

- On suppose f strictement convexe. Montrer que $a_1(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$.
- On suppose f strictement convexe. Montrer que $a_n(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Réciproquement, on suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ et $a_1(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$. Montrer que f est strictement convexe.

Exercice 128 [ENS 2023 # 137] Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^n y^{(k)} = 0$.
À quelle condition sur n tout élément de $\mathcal{S}$ possède-t-il une limite en $+\infty$?

Démonstration. Si et seulement si toutes les valeurs propres ont une partie réelle < 0 (puisque 0 n'est pas racine). □

Exercice 129 [ENS 2023 # 138] Soit I un (vrai) intervalle de $\mathbb{R}$. Si $r \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$, on pose $W_r(f_1,\ldots,f_r) = \det\left(\left(f_j^{(i-1)}\right)_{1\leq i,j\leq r}\right)$. Soient $r \in \mathbb{N}^*, f_1,\ldots,f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$. Montrer que $W_r(gf_1,\ldots,gf_r) = g^r W_r(f_1,\ldots,f_r)$.
2. On suppose que, pour tout $k \in [\![1,r]\!], W_k(f_1,\ldots,f_k)$ ne s'annule pas. Montrer que, pour tout $(a_1,\ldots,a_r) \in \mathbb{R}^r$ non nul, la fonction $a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$ s'annule au plus $(r-1)$ fois sur I.

3. On suppose que $W_r(f_1, \ldots, f_r)$ est identiquement nul sur I et que $W_{r-1}(f_1, \ldots, f_{r-1})$ ne s'annule pas. Montrer que $(f_1, \ldots, f_r)$ est liée.

Démonstration. □

Exercice 130 [ENS 2023 # 139] On considère l'équation différentielle $(D_\lambda)\colon y'' + (\lambda - r)y = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $r \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, ou I un intervalle contenant $[0, 1]$. On considère E_λ l'espaces des solutions y de (D_λ) telles que $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

1. Quelles sont les dimensions possibles de E_λ ?
2. On note y_λ la solution du probleme de Cauchy (D_λ), $y_\lambda(0) = 0$, $y'_\lambda(0) = 1$. Caractériser le cas où $\dim(E_\lambda) = 1$.
3. Montrer que, à r fixé, les E_λ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$.
4. On note N_λ le nombre de zeros de y_λ sur $[0, 1]$. Pourquoi est-il fini ?
5. Calculer N_λ dans le cas $r = 0$, $\lambda > 0$.
6. Dans le cas général, étudier le comportement de N_λ.

Démonstration. 1. $0, 1$: c'est l'intersection de deux formes linéaires.
2.
3.
4.
5.
6. □

Exercice 131 [ENS 2023 # 140] Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et a, b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : x^{''} + a(t)\, x' + b(t)\, x = 0$.

- Soit x une solution non nulle de (E). Montrer que les zeros de x sont isoles.
- On suppose a de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe z de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$, et $q : I \to \mathbb{R}$ continue telles que $x \mapsto [t \mapsto x(t)\, e^{z(t)}]$ définisse une bijection de l'ensemble des solutions de (E) sur celui des solutions de $y^{''} + q(t)\, y = 0$.
- Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \leq q_2$. On considère l'équation différentielle $(E_i) : y^{''} + q_i(t)\, y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs de y_1. Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
- Soient $q : I \to \mathbb{R}$ continue, et m, M deux réels strictement positifs tels que $m \leq q \leq M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs d'une solution non nulle de $y^{''} + q(t)y = 0$. Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

Exercice 132 [ENS 2023 # 141] Soient A une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M l'unique application dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(0) = I_n$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ M'(t) = A(t)M(t)$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \det(M(t)) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{Tr} A\right)$.

Exercice 133 [ENS 2023 # 142] Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, π-périoddique et telle que $\int_0^\pi p(t)dt \geq 0$ et $\int_0^\pi |p(t)|dt \leq \frac{\pi}{4}$. Montrer que l'équation $u^{''} + pu = 0$ n'admet pas de solution u non nulle sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t + \pi) = \lambda\, u(t)$.

Exercice 134 [ENS 2023 # 143] Soit $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A_0 + A_0^T) \subset \mathbb{R}^-$.

On admet l'existence d'une unique fonction $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(0) = A_0$ et $\forall t \geq 0,\ A'(t) = (A(t))^2 - \left(A(t)^T\right)^2$. Montrer que la fonction A a une limite en $+\infty$ et expliciter cette limite.

Exercice 135 [ENS 2023 # 144] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Décrire le comportement asymptotique en $+\infty$ des solutions de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 136 [ENS 2023 # 145] On considère l'équation différentielle $(1)\colon X'(t) = P(t)X(t)$ où P est une application continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Résoudre (1) si $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- On revient au cas général. Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ une période de P. On note $X_1, \ldots, X_n$ une base de l'espace des solutions de (1) et, si $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))$. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t + T) = M(t)C$.
- Avec les notations de la question précédente, montrer qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t)e^{-tA}$ soit T-périoddique.

Démonstration. •
- Par inversibilité, il existe C tel que $M(T) = M(0)C$.

  Puis on considère $Y(t) = M(t)C$, elle vérifie la même équation différentielle.
- Si et seulement si $M(t)Ce^{-(t+T)A} = M(t)e^{-tA}$, c'est-à-dire $Ce^{-TA} = I_n$

  Le caractère inversible de A implique que C ne peut pas avoir 1 comme valeur propre, ce qui est faux pour $P = 0$.

  Sans cette condition, c'est la surjectivité de l'exponentielle… □

Exercice 137 [ENS 2023 # 146] • Soit $f\colon (x, y) \mapsto \left(\ln\left(x^2 + y^2\right), \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$. Donner le domaine de définition Ω de f. Étudier la continuité et la différentiabilité de f.
- On identifie naturellement $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Montrer que, si $(x, y) \in \Omega$, $df_{(x,y)}$ est $\mathbb{C}$-lineaire.

Démonstration. • $\Omega = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$. La continuité et la différentiabilité ne posent pas de problème.
•
□

Exercice 138 [ENS 2023 # 147, 148] 1. Calculer $\sup_{a,b,c>1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^b + \left(1-\frac{1}{2b}\right)^c + \left(1-\frac{1}{3c}\right)^a$.

2. Trouver $\sup_{a,b,c\geq 1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^b \left(1-\frac{1}{2b}\right)^c \left(1-\frac{1}{3c}\right)^a$.

Démonstration. • C'est $\leq e^{-\frac{b}{a}} + e^{\frac{c}{2b}} + e^{\frac{a}{3c}}$, et cela s'en approche pour a, b, c très grand. Puis étudier cette quantité, en dérivant.
• C'est $\leq e^{-\frac{b}{a}-\frac{c}{2b}-\frac{a}{3c}}$, et cela s'en approche pour a, b, c très grand. Puis étudier la quantité dans l'exponentielle. □

Exercice 139 [ENS 2023 # 149] [Rennes sur dossier] Soient $q \in \mathbb{R}^+$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x+y=1\}$, Déterminer $\min_{(x,y)\in D}(x^q + y^q)$.

Exercice 140 [ENS 2023 # 150] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.
Déterminer les extrema de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

Exercice 141 [ENS 2023 # 151] Soient f une application différentiable convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq 0$.
2. On suppose que l'application ∇f est L-lipschitzienne.

Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq \frac{1}{L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$.

Exercice 142 [ENS 2023 # 152] Soit $p > 1$. Montrer qu'il existe $K_p \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x|^p + |y|^p = 2$, on a $(x-y)^2 \leq K_p(4-(x+y)^2)$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\frac{(x-y)^2}{K_p(4-(x+y)^2)^2}$ est majorée.
On sait que $\frac{|x|+|y|}{2} \leq \left(\frac{|x|^p+|y|^p}{2}\right)^{1/p} = 2$, donc le seul problème de définition est en $(x,y) = (1,1)$, où il faut montrer que la fonction admet un prolongement par continuité.
Le dénominateur est $(x-y)^2 - 2(x-1)^2 - 2(y-1)^2 - 4(x-1) - 4(y-1)$. On pourrait poser $x' = x - 1$. □

Exercice 143 [ENS 2023 # 153] Soient f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ telle que df_x soit injective. Montrer qu'il existe un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel f est injective.

Démonstration. Par l'absurde, on extrait deux suite $(x_n), (y_n)$ qui tendent vers x. Alors $f(x_n) = df_0(x_n) + o(x_n)$, idem pour y_n, et en posant $z_n = x_n - y_n$, on a $df(z_n) = o(z_n)$. Ce qui n'est pas possible car $\|df(\dots)\|$ est une norme. □

Exercice 144 [ENS 2023 # 154] On identifie $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 et telle que $\Delta f = 0$. Montrer que $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt$.

Exercice 145 [ENS 2023 # 155] On munit $\mathbb{R}^n$ de la nome euclidienne canonique et on note B unité fermée de cet espace. Soient f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(u,v) \in B^2$, $\|-f(0) + v - df_u(v)\| \leq \frac{1}{2}$. Montrer que f s'annule exactement une fois sur B.

Démonstration. □

3) Géométrie

Exercice 146 [ENS 2023 # 156] • Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(2\ \cos(\theta)) = 2\ \cos(n\theta)$.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, quel est le terme de plus haut degré de T_n ? En déduire les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.
- Déterminer les triangles du plan euclidien dont les cotes ont des longueurs rationnelles et les angles sont des multiples rationnels de π.

Exercice 147 [ENS 2023 # 157] Soit G un groupe d'isométries affines de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout point x, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$. Montrer que G contient une translation autre que l'identité de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Faux pour $G = O_2$. □

Exercice 148 [ENS 2023 # 158] Soit S le groupe (pour la composition) des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe de S vérifiant les conditions suivantes :

- si $g \in G, g(0)$ est nul ou de module supérieur ou égal à 1 ;
- l'ensemble des $b \in \mathbb{C}$ tels que $z \mapsto z + b$ appartienne à G contient deux éléments $\mathbb{R}$ linéairement indépendants.

Montrer que l'ensemble $\{a \in \mathbb{U} \mid \exists b \in \mathbb{C},\ z \mapsto az + b \in G\}$ est fini.

Démonstration. Sinon, il existe une suite (a_n) qui s'accumule. On peut supposer qu'elle s'accumule sur 1, puis on peut borner les (b_n), puis extraire une suite convergence, donc elle est constante à partir d'un certain rang. Donc on a une infinité de $z \mapsto a_n z$, ce qui est impossible. □

Exercice 149 [ENS 2023 # 159] Soit L la courbe du plan complexe d'équation $|z|^2 = \cos(2\arg(z))$.

- Trouver une équation cartésienne réelle définissant L.

- En déduire une paramétrisation de $L \cap (\mathbb{R}^+)^2$ sous la forme $\{(x(r), y(r)),\ r \in [0,1]\}$. - Montrer que la longueur de la courbe L entre le point $(0,0)$ et le point $(x(r), y(r))$ s'écrit : $A(r) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
- Montrre que A définit une bijection de $[-1,1]$ dans un intervalle de la forme $[-w, w]$ ou $w > 0$.
- On définit $B = A^{-1}$. Montrer que B vérifie une équation différentielle du second ordre.

Exercice 150 [ENS 2023 # 160] Soit (e_1, e_2) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $L =_1 +_2$ et on note $\mathrm{Vol}(L) = |\det(e_1, e_2)|$.

- Soit A un disque ferme de $\mathbb{R}^2$, d'aire strictement supérieure a $\mathrm{Vol}(L)$. Montrer qu'il existe deux éléments distincts x et y de A tels que $x - y \in L$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe dans $L \setminus \{0\}$ un élément ℓ tel que $\|\ell\| \leq \frac{2+\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mathrm{Vol}(L)}$.
- Soit p un nombre premier congru a 1 modulo 4.
- Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}$ tel que p divise $1 + \omega^2$.
- Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$.

Exercice 151 [ENS 2023 # 161]
- On note D le disque unite du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(C - i \in \mathbb{N}$ de parties de D telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble C_i soit un carré de $\mathbb{R}^2$ dont les cotes sont parallèles aux axes;
  - ▷ les C_i soient d'intérieurs disjoints;
  - ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Aire}(C_i) = \pi$.
  - ▷ On note $C = [-1,1]^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(D - i \in \mathbb{N}$ de parties de C telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble D_i soit un disque ferme de $\mathbb{R}^2$;
  - ▷ les D_i soient d'intérieurs disjoints;
  - ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Aire}(D_i) = 4$.

4) Probabilités

Exercice 152 [ENS 2023 # 162] On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de A de $\mathbb{N}$ telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|A \cap [\![1,n]\!]|}{n}$ existe. Est-ce que $\mathcal{A}$ est une tribu ?

Démonstration. Non vide, stable par complémentaire, et stable par union dénombrable. On n'est pas stable par union dénombrable : toute partie est réunion dénombrable de singleton. □

Exercice 153 [ENS 2023 # 163] On pose, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, $d(\sigma) = \sum_{k=1}^n |\sigma(k) - k|$ et on note, pour $p \in \mathbb{N}$, $q_{n,p} = |\{\sigma \in S_n,\ d(\sigma) = p\}|$. Montrer que, si $p \geq 2n$, alors $q_{n,p}$ est pair.

Démonstration. On procède par récurrence. Si $\sigma \neq \sigma^{-1}$, ils vont par paires. De même, par hypothèse de récurrence, si σ a au moins un point fixe, le cardinal est pair.
Reste les éléments vérifiant $\sigma = \sigma^{-1}$, sans point fixes, qui sont produits de transpositions. Par ailleurs, la condition $p \geq 2n$, implique que les transpositions ont des croisements.
On peut alors transformer $(i_1 i_2)(j_1 j_2)$ en $(i_1 j_2)(j_1 i_2)$, qui préserve la quantité donnée (faire le dessin), et faire la transformation réciproque. □

Exercice 154 [ENS 2023 # 164] Un derangement est une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sans point fixe. On note D_n le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ formé des derangements.

- Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur D_n. Calculer la probabilité que X soit une permutation paire.
  Indications.
  - ▷ On donne la formule d'inversion de Pascal : si (a_n) et (b_n) sont deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.
  - ▷ On pourra calculer la difference du nombre d'éléments pairs et impairs de D_n.
- Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Calculer la probabilité de $(Y \in D_n)$ sachant que Y est paire.

Démonstration.
- La différence du nombre d'éléments pairs et impairs est le déterminant de la matrice avec des 1 et des 0 sur la diagonale.
- □

Exercice 155 [ENS 2023 # 165] Soient $m \geq 1$ et $r \geq 1$ deux entiers. On munit l'ensemble des morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de la loi uniforme. Donner une expression simple de la probabilité de l'événement «le morphisme φ est surjectif».

Démonstration. Le faire pour $m = p$, puis lemme Chinois. □

Exercice 156 [ENS 2023 # 166] Deux joueurs A et B lancent une pièce truquée donnant pile avec une probabilité égale à $5/9$. Les règles de gain sont les suivantes : pile rapporte 5 euros et face 4 euros. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chacun des joueurs effectue $9n$ lancers indépendants; on note A_n (resp. B_n) la variable aléatoire donnant le gain du joueur A (resp. B).

- Trouver un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\mathbf{P}(A_n = B_n)$.
- Montrer que $\mathbf{P}(A_n \geq B_n) \geq \frac{1}{2}$.
- Vers quoi tend $\mathbf{P}(A_n < B_n)$?

Démonstration. • On a $P(A_n = B_n) = P(A_n = 9n - B_n) = P(A_n + B_n = 9n)$, et la somme est une loi binomiale.

- C'est clair.
- Découle des questions précédentes. ☐

Exercice 157 [ENS 2023 # 167, 177] On joue a pile ou face avec une pièce pipée qui donne pile avec probabilité $p < \frac{1}{2}$. On lance la pièce $2n$ fois et on compte le nombre de «Piles». Déterminer l'entier n qui maximise la probabilité d'avoir compté au moins $n+1$ «Piles».

Démonstration. On a $P(S_{2n} = n+k)P(S_{2n} = n-k)$, puis on montre que $P(S_{2n} \geq n+1) + \frac{1}{2}P(S_{2n} = n)$ est décroissante. Mais on connaît $P(S_{2n} = n)$, et il suffit de voir quand elle devient plus petite que les premières valeurs de $P(S_{2n} \geq n+1)$. ☐

Exercice 158 [ENS 2023 # 168] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{E}(X) = 1$, $\mathbf{E}\left(X^2\right) = 2$ et $\mathbf{E}\left(X^3\right) = 5$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{P}(X = 0)$?

Démonstration. On a $E(X)E(X^3) \geq E(X^2)^2$. En notant $e = P(X = 1)$, on a $E(X1_{X>1})E(X^3 1_{X>1}) \geq E(X^2 1_{X>1})^2$, donc $(1-e)(5-e)(2-e)^2$, qui donne $e \leq \frac{1}{2}$.
Comme $E(X) = 1$, on doit avoir $P(X = 0) \geq \frac{1}{4}$, mais le cas d'égalité ne donne pas les bonnes valeurs : mais $E(X) = 1$, $E(X^2) = \frac{3}{2}$ et $E(X^3) = \frac{5}{2}$.
Si on suppose que $e = \frac{1}{2}$, on peut prendre Y qui vaut 3 avec probabilité $\frac{1}{6}$ et 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$.
!! Manque : on ne peut pas faire mieux… ☐

Exercice 159 [ENS 2023 # 169] Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier impair ≥ 3, $(X_m)_{m\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que $X_0 = 0$, et pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_{m+1} = k+1 \mid X_m = k) = \mathbf{P}(X_{m+1} = k-1 \mid X_m = k) = \frac{1}{2}$. Montrer que $(X_m)_{m\geq 0}$ converge en loi vers la loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Démonstration. On regarde la loi de $X_m + m$, dont la série génératrice est $G_m = \left(\frac{1+X^2}{2}\right)^m$. Puis on regarde $P(S_m = 0[n])$, c'est $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} G_m(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+e^{\frac{4ik\pi}{n}}}{2}\right)^m = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos^{2m}\frac{2k\pi}{n}$
Pour les autres valeurs que 0 modulo n, il faut prendre $X^k G_m(X)$, cela marche pareil. ☐

Exercice 160 [ENS 2023 # 170] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ c'est-a-dire le nombre de couples (i,j) avec $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

- Montrer que $P_n = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} X^{I(\sigma)} = \prod_{k=1}^{n-1}(1 + X + \cdots + X^k)$.
- On pose $f(n) = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ (n+1) \text{ divise } I(\sigma)\}|$. Exprimer $f(n)$ a l'aide de P_n.
- Montrer qu'il existe une infinite de nombres premiers p tels que $f(p-1) < \frac{(p-1)!}{p}$ et de meme une infinite de nombres premiers p tels que $f(p-1) > \frac{(p-1)!}{p}$.

Exercice 161 [ENS 2023 # 171] Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, P une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{F}_p[X]$, N le nombre de racines de P dans $\mathbb{F}_p$ (sans tenir compte des multiplicités). Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.

Exercice 162 [ENS 2023 # 172] Dans tout l'exercice, les variables aléatoires considérées sont supposées réelles, discrètes et à loi de support fini. Pour deux telles variables X et Y, on note $X \leq_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leq \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Soient X une variable aléatoire vérifiant les conditions de l'exercice et $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(f(X))$.
2. Donner un exemple de couple (X,Y) pour lequel $X \leq_c Y$ mais $X \neq Y$.
3. Montrer que si $X \leq_c Y$ alors $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X) \leq \mathbf{V}(Y)$.
4. Montrer que $X \leq_c Y$ si et seulement si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et
$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geq x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. ☐

Exercice 163 [ENS 2023 # 173] On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. On choisit de façon équiprobable $u_1 \in [\![1, N]\!]$, puis $u_2 \in [\![1, u_1 - 1]\!]$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $u_\ell = 1$ avec nécessairement $\ell \leq N$. On note $E_N = \{u_j, 1 \leq j \leq \ell\}$.

1. Calculer $\mathbf{P}\left(k \in E_N\right)$ pour $1 \leq k \leq N$.
2. Calculer $\mathbf{P}\left(2 \in E_N \mid 3 \notin E_N\right)$.
3. Calculer $\mathbf{E}\left(|E_N|\right)$ et $\mathbf{V}\left(|E_N|\right)$.

Démonstration. 1. $P(k \in E_{k+1}) = \frac{1}{k}$, puis $P(k \in E_n) = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\big(P(k \in E_{N-1}) + \cdots + P(k \in E_{k+1})\big)$. On trouve $P(k \in E_N) = \frac{1}{k}$.
2. On a $P(2 \in E_N \mid 3 \in E_N) = \frac{1}{2}$.
3. Semble facile. ☐

Exercice 164 [ENS 2023 # 174] Dans tout l'énonce, on fixe un entier $p \geq 1$.

- Développper $(x_1 + \cdots + x_N)^p$ pour toute liste $(x_1, \ldots, x_N)$ de nombres réels.

- Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$. Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leq (2p)^p (\mathbf{E}(X^2))^p$.
- Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leq p^p (\mathbf{E}(X^2))^p$.
- Soit $(a - k \geq 1$ une suite réelle telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = 1$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $Y_x = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)\, X_i$.

Montrer que $\omega \mapsto \int_0^{2\pi} Y_x(\omega)^{2p}\, dx$ prend au moins une valeur inférieure ou égal a $2\pi p^p$.

Exercice 165 [ENS 2023 # 175] suivant la loi uniforme sur $\{1, -1\}$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher, et $a_1, \dots, a_n$ des réels. On pose $Y = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$.

- Montrer que $\mathbf{E}(|Y|)^2 \leq \mathbf{E}(Y^2)$.
- Montrer que $\mathbf{E}(Y^2) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$.
- Montrer que si $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$ alors $\mathbf{E}(Y^2) \leq e\, \mathbf{E}(|Y|)^2$.
- Montrer que $\mathbf{E}(Y^2) \leq e\, \mathbf{E}(|Y|)^2$ en toute généralite.

Exercice 166 [ENS 2023 # 176] Une variable aléatoire discrète réelle X est dite decomposable s'il existe deux variables aléatoires discrètes réelles non presque sûrement constantes et indépendantes X_1 et X_2 telles que $X \sim X_1 + X_2$. - Une variable aléatoire de Bernoulli est-elle decomposable ? Une variable aléatoire binomiale est-elle decomposable ?

- Montrer que le polynôme $T^4 + 2T + 1$ ne peut se factoriser comme produit de deux polynômes de degré 2 a coefficients dans $\mathbb{R}^+$. En déduire une variable aléatoire réelle discrète decomposable X telle que X^2 ne soit pas decomposable.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme que $[\![0, n-1]\!]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que X soit decomposable.

Exercice 167 [ENS 2023 # 178] On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $X = [\![1, n]\!]$. Soient A et B des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X.

- Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $|A|$ (cardinal de A).
- Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(|A| \geq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) n\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathbf{1}_{\{i\}}$ la fonction indicatrice du singleton $\{i\}$. Déterminer la loi de $\mathbf{1}_{\{i\}}(A)$.
- Calculer $\mathbf{P}(A \subset B)$. Commenter.

Exercice 168 [ENS 2023 # 179] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On considère un échiquier $n \times n$. On colorie chaque case en rouge (resp. en bleu) avec probabilité p (resp. $1 - p$). On note $Q(p)$ la probabilité pour qu'il existe un chemin joignant le bord gauche au bord droit constitué uniquement de cases rouges (les déplacements ne se font pas en diagonale) ? Que dire de la fonction Q ?

Exercice 169 [ENS 2023 # 180] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$.

- Calculer l'espérance du nombre R de retour en zero de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{R}$. Montrer que la probabilité qu'il existe $n \geq 1$ tel que $S_n \notin I$ est égale a 1.
- Montrer que l'évènement $(R = +\infty)$ est presque sûr.

Démonstration. • Passer par la probabilité de premier retour en 0, il faut tout refaire... □

Exercice 170 [ENS 2023 # 181] Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilise et $(m - k \in \mathbb{N}$ une suite de réels positifs de somme 1. On considère un arbre aléatoire sur cet espace tel que chaque noeud ait un nombre aléatoire X de successive avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = m_k$. Ces variables aléatoires correspondant au nombre de succcesseurs sont mutuellement indépendantes. On note X_1 la variable aléatoire comptant le nombre de succcesseurs de la racine. Caracteriser le fait que la longueur de l'arbre soit presque surement finie.

Exercice 171 [ENS 2023 # 182] On construit iterativement et aléatoirement un arbre aléatoire sur l'ensemble de sommets $[\![1, n]\!]$ (graphe oriente) selon le procede suivant : a l'etape k, on choisit aléatoirementun point dans $[\![1, k]\!]$ (avec probabilité uniforme) et on rajoute une arete orientée de ce point vers $k + 1$. Ces choix s'effectuent de maniere indépendante les uns des autres.

- On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre d'aretes partant du point 1. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
- On suppose $n \geq 2$. On note S_n la variable aléatoire donnant le nombre de descendants (directs ou non) du sommet 2. Déterminer la loi de S_n.
- Calculer l'espérance du nombre de feuilles de l'arbre.

Exercice 172 [ENS 2023 # 183] Soient E un ensemble fini, $V : E \to \mathcal{P}(E)$ une fonction de E vers les parties de E et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Un point $a \in E$ est un minimum local si $f(a) \leq f(b)$ pour tout $b \in V(a)$. Soit M un entier tel que $M \geq \sqrt{|E|}$. Soient $b_1, \dots, b_M$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans E. Soit k tel que $f(b_k) = \min_{1 \leq i \leq M} f(b_i)$. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de E telle que $u_0 = b_k$ et, pour tout $n \geq 0$:

- si u_n est un minimum local, alors $u_{n+1} = u_n$;
- sinon $u_{n+1} \in V(u_n)$ et $f(u_{n+1}) < f(u_n)$.

Montrer que u_M est un minimum local avec probabilité au moins $1/2$.

Démonstration. La donnée est celle d'un graphe. Étant donné l'algorithme, on peut retirer des arêtes, de sorte que les voisins de a vérifient $f(b) < f(a)$. Auquel cas il n'y a plus de cycles.

Alors on choisit aléatoirement $\sqrt{n}$ sommets du graphe, et parmi ceux-ci le sommet de valeur minimale. On veut montrer que la plus longue chaîne décroissante à partir de celui-ci est de longueur $\leq \sqrt{n}$ avec probabilité $\geq \frac{1}{2}$.

On peut attribuer à chaque sommet sa valeur par f, et on peut supposer que c'est injectif.

Puis on peut ajouter des arêtes, vers ceux qui sont $< s$. Puis on peut retirer les arêtes, sauf celle juste en dessous. On est ramené à traiter le cas du graphe $n \to n-1 \to \ldots \to 1$. □

Exercice 173 [ENS 2023 # 184] Une variable aléatoire réelle X est infiniment divisible si X admet un moment d'ordre 2, et si, pour tout $n \geq 2$, il existe $(X_{i,n})_{i \in [\![1,n]\!]}$ i.i.d. et admettant des moments d'ordre 2 telles que $X \sim \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$. Montrer que si X est bornée et infiniment divisible, alors X est presque surement constante.

Exercice 174 [ENS 2023 # 185] On se donne une suite $(X - i \geq 1$ de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $i \geq 1$, il existe $a_i \in]0,2]$ et $p_i \in [0,1]$ tels que X_i soit a valeurs dans $\{0, a_i, -a_i\}$ et $\mathbf{P}(X_i = a_i) = \mathbf{P}(X_i = -a_i) = \frac{p_i}{2}$.

- Quelle relation doivent vérifier a_i et p_i pour que $\mathbf{V}(X_i) = 1$? Dans toute la suite, on suppose cette relation vérifiée et on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Calculer la variance de $n^{-1/2} S_n$.
- Montrer que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2} t S_n)) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\cos(n^{-1/2} t X_i))$.
- En déduire que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2} t S_n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2/2}$.

Exercice 175 [ENS 2023 # 186] On fixe un entier $n \geq 1$. On considère la relation d'ordre partielle $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \leq y_i$. Une fonction $f \colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ est dite croissante lorsque $f(x) \leq f(y)$ quels que soient x, y dans $\{0,1\}^n$ tels que $x \preccurlyeq y$.

- Donner un exemple de fonction croissante non constante de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- Dans la suite, on se donne une liste $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires i.i.d. suivant $\mathcal{B}(1/2)$. Soit $f \colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ croissante. On suppose $n \geq 2$.

Montrer que $\mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_n)) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_{n-1}, 0) + \mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_{n-1}, 1))\Big)$. - Soit $f \colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ croissantes.

Montrer que $\mathbf{E}((fg)(X_1, \ldots, X_n)) \geq \mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_n))\, \mathbf{E}(g(X_1, \ldots, X_n))$.

Exercice 176 [ENS 2023 # 187] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit S_n de la distribution uniforme de probabilité. On note $A_i = \{\sigma \in S_n,\ \sigma(i) = i\}$ et N la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation.

- Soit $I \subset [\![1,n]\!]$. Calculer $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$.
- Exprimer N avec des indicatrices. Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.
- Soient $k \in [\![1,n]\!]$ et $F \subset [\![1,n]\!]$. Calculer $\sum_{I \subset [\![1,n]\!],\ |I|=k} \prod_{i \in I} \mathbf{1}_F(i)$.
- Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $\mathbf{E}(N(N-1)\cdots(N-k+1))$.
- Soient $X \sim \mathcal{P}(1)$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbf{E}(X(X-1)\cdots(X-k+1))$.
- Calculer $\mathbf{P}(N = 0)$.

Exercice 177 [ENS 2023 # 188] On considère une suite i.i.d. $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires suivant toutes la loi uniforme sur $\{1,2\}$. On définit $(S_n)_{n \geq 0}$ par $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.

a) i) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|S_n - 3n/2| \geq \varepsilon n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|S_n - 3n/2| \geq \varepsilon n^{2/3})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- On considère la variable aléatoire $T_n : \omega \mapsto \min\{k \in \mathbb{N},\ S_k(\omega) \geq n\}$. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n.
- Soit $k \geq 2$. Montrer que $\mathbf{P}(T_n = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-2} = k-1)$.
- Calculer l'espérance de T_n.

Exercice 178 [ENS 2023 # 189] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 3$. On pose $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S = \{\pm e_i, 1 \leq i \leq d\}$, où e_i désigne l'élément de G dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème, égale à $\overline{1}$. Soient enfin $f \colon G \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et X une variable aléatoire uniformément distribuée sur G.

Montrer que $\mathbf{E}(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))|) \leq \frac{nd}{2} \max_{s \in S} \mathbf{E}(|f(X) - f(X+s)|)$.

Démonstration. C'est simple : On peut passer d'un somme à un autre en au plus $\frac{nd}{2}$ pas. □

5) ENS PSI **AUTRE**

a) Algèbre

Exercice 179 [ENS PSI 2023 # 191] Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, annule par un polynôme Q tel que $Q(0) = 0$ et $Q'(0) \neq 0$. Montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplementaires.

Exercice 180 [ENS PSI 2023 # 192]
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et les autres valent 1 ou -1. Montrer que si n est pair alors A est inversible.
  - ▷ Soit $B = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. On suppose que, pour toute partie P de B de cardinal $2n$, on peut trouver Q_1 et Q_2 contenues dans P, chacune de cardinal n, telles que $\sum_{x \in Q_1} x = \sum_{x \in Q_2} x$. Montrer que tous les x_i sont eaux.

Exercice 181 [ENS PSI 2023 # 193] Soient E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\forall g \in \mathcal{L}(E), \varphi_f(g) = f \circ g - g \circ f$.

- Calculer $\varphi_f^n(g)$ pour $g \in \mathcal{L}(E)$.
- Montrer que $f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} f^k(f \circ g - g \circ f) f^{n-k}$.
- On suppose f non inversible. Montrer que f est nilpotente si et seulement si φ_f l'est.
- Montrer que, si f possede une unique valeur propre, alors φ_f est nilpotente. Étudier la réciproque.

Exercice 182 [ENS PSI 2023 # 194] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $c_0, c_1, \cdots, c_{2n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $c_n = 1$ et $c_{n+1} = \cdots = c_{2n-1} = 0$. Soit $Q = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$. On définit les matrices A, B, P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+1=j \\ -c_{i-1} & \text{si } j=n \end{cases}$, $b_{i,j} = c_{i+j-1}$ et $p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j-1=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- Montrer que $Q(A) = 0$ en calculant $A^k e_1$ ou $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$.
- Soit $R(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \exists P \in \mathbb{R}[X],\ P(A) = M\}$. Montrer que $R(A)$ est de dimension n.
- Montrer que PB est triangulaire puis en déduire que B est inversible.
- Montrer que $AB = BA^T$.
- Montrer que A^T est semblable a A.
- Montrer que A s'écrit comme le produit de deux matrices symétriques.

Exercice 183 [ENS PSI 2023 # 195] • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que, pour tout polynôme P a coefficients complexes, la matrice $P(A)$ est diagonalisable. - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Décrire l'ensemble des matrices inversibles P telles que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

- ▷ Soient A et B deux matrices codiagonalisables. On suppose que B a des valeurs propres deux a deux distinctes. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(B)$.
- ▷ On suppose toujours A et B codiagonalisables mais on ne suppose plus B a valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe une matrice C et deux polynômes P et Q tels que $A = P(C)$ et $B = Q(C)$.
- ▷ La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle le carré d'une matrice réelle ?

Exercice 184 [ENS PSI 2023 # 196] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = \mathrm{Com}(A)^T$.

Ind. Commencera par A inversible.

Exercice 185 [ENS PSI 2023 # 197] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que \$f^ f=-\$id.

- Donner un exemple d'application f vérifiant les hypotheses en dimension 2.
- Montrer que f n'a pas de valeur propre réelle. Montrer que E est de dimension paire.
- Montrer qu'il existe $(e_1, \ldots, e_p)$ telle que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_p, f(e_p))$ soit une base de E avec $d = 2p$. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 186 [ENS PSI 2023 # 198] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = A$.

- Montrer que $A^k B - BA^k = kA^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- On définit l'application $\varphi_B : M \mapsto MB - BM$.
- Vérifier que φ_B est un endomorphisme et caracteriser son noyau.
- Montrer que, si $A^p \neq 0$, alors p est une valeur propre de φ_B.
- La matrice A est-elle nilpotente ? Justifier.

Exercice 187 [ENS PSI 2023 # 199] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| \right\}$.

Exercice 188 [ENS PSI 2023 # 200] On note $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques : $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{S}$ si $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = 1$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres.

- Montrer que les éléments de $\mathcal{S}$ ont tous une valeur propre commune.
- Montrer que $\mathcal{S}$ est convexe, ferme, borne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et qu'il est stable pour le produit.

c) i) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{S}$, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.

Ind. Si $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre, considèrer $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

- Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ telle que $|\lambda| = 1$. Montrer que λ est une racine ℓ-ième de l'unite avec $\ell \leq n$.
- On suppose que $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}$ est telle que $a_{i,j} > 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.
- Montrer que 1 est une valeur propre de A et que $\dim \ker (A - I_n) = 1$.
- Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$ alors $|\lambda| < 1$. - On dit que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $(\mathcal{P})$ si : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $b_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} \leq 1$.
- Montrer que si $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $(\mathcal{P})$ alors $|\det B| \leq 1$.
- Déterminer l'ensemble des matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient $(\mathcal{P})$ ainsi que $|\det B| = 1$.
- Déterminer l'ensemble des matrices stochastiques dont la valeur absolue du déterminant vaut 1.

Exercice 189 [ENS PSI 2023 # 201] Soient $(E, \langle\ \rangle)$ un plan euclidien, $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de E de norme 1 telle que $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = \ldots = \langle v_n, v_1 \rangle$. Soit $\mathbb{D}_{2n}$ l'ensemble des isometries vectorielles de E qui laissent invariantes la famille $\mathcal{V}$, c'est-à-dire :

$\mathbb{D}_{2n} = \{\sigma \in \mathcal{O}(E) \ ; \ \forall i \in [\![1,n]\!] \ \sigma(v_i) \in \mathcal{V}\}$.

- Trouver, pour $1 \leq i < j \leq n$, la valeur de l'angle $\langle v_i, v_j \rangle$.
- Montrer que $\mathbb{D}_{2n}$ est un sous-ensemble finie de $\mathcal{O}(E)$.
- Montrer que $\mathbb{D}_{2n}$ est stable par composition et passage a l'inverse.
- Exprimer $\mathbb{D}_6$ et $\mathbb{D}_8$.
- Si $\sigma \in \mathbb{D}_{2n}$ vérifie $\sigma(v_1) = v_i$, montrer que $\sigma(v_2) = v_{i-1}$ ou $\sigma(v_2) = v_{i+1}$.
- En déduire que le cardinal de $\mathbb{D}_{2n}$ est $2n$.
- Montrer que $\mathbb{D}_{2n} = \{\mathrm{id}, r, sr, r^2, sr^2, r^3, sr^3, \dots\}$ ou s est une reflexion et r une rotation d'angle $\mathrm{Arccos}\,(\langle v_1, v_2 \rangle)$.
- On note $D = \bigcup_{n \geq 3} D_{2n}$. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{O}(E)$, il existe une suite $(\sigma - k \geq 0 \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $\sigma = \lim_{k \to +\infty} \sigma_k$.

Exercice 190 [ENS PSI 2023 # 202] • On note φ l'application $M \mapsto M^T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ▷ Montrer que φ est un automorphisme.
- ▷ Déterminer les valeurs propres de φ.
- ▷ L'application φ est-elle diagonalisable ? Justifier.
- ▷ On fixe un réel $\mu > 0$. Soit f l'application $t \mapsto (4\mu t^2, 2\mu t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que t_0 et t_1 sont deux réels tels que les tangentes au support de la courbe paramètrée définies par f sont orthogonales.
- ▷ Montrer que $4t_0t_1 + 1 = 0$.
- ▷ Montrer que le point d'intersection des tangentes en $f(t_0)$ et $f(t_1)$ appartient a une droite fixe.
- ▷ Soient $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- ▷ Montrer que $(QX)^T(QY) = X^TY$.
- ▷ Déterminer les valeurs propres réelles de Q puis montrer que deux vecteurs propres associés a des valeurs propres réelles distinctes sont orthogonaux.
- ▷ Soit $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer, qu'a similitude pres, M peut prendre exactement trois formes distinctes. Pour chacune d'entre elles donner la transformation géometrique du plan correspondante.

Exercice 191 [ENS PSI 2023 # 203] • Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ de rang k. Montrer qu'il existe des vecteurs $U_1, \dots, U_k$ lineairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$ tels que $A = \sum_{j=1}^k U_jU_j^T$.Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Leur produit d'Hadamard $A \circ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de terme général $a_{ij}b_{ij}$.

- ▷ Montrer que, si A et B sont des matrices symétriques de rang 1, alors $A \circ B$ est symétrique de rang au plus 1.
- ▷ Montrer que, si A et B sont symétriques positives, alors $A \circ B$ est symétrique.
- ▷ Si A et B sont symétriques positives, montrer que $A \circ B$ est symétrique positive.

Exercice 192 [ENS PSI 2023 # 204] On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(c_0, \dots, c_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $c_n = 1$ et $c_{n+1} = \ldots = c_{2n-1} = 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^n c_kX^k$. On considère enfin les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivantes : $A = (a_{i,j})$, ou $a_{i,j} = 1$ si $j = i-1$, $a_{i,j} = -c_{i-1}$ si $j = n$ et $a_{i,j} = 0$ sinon ; $B = (c_{i+j-1})$ et $C = (\delta_{i+j,n+1})$.

- Montrer que $Q(A) = 0$. Ind. Calculer A^ke_1 pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
- On pose $\mathbb{R}[A] = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ \exists P \in \mathbb{R}[X], \ M = P(A)\}$. Montrer : $\dim \mathbb{R}[A] = n$.
- Montrer que CB est triangulaire. En déduire que B est inversible.
- Montrer que $AB = BA^T$.
- Montrer que A est semblable a sa transposée.
- Montrer que A s'écrit comme le produit de deux matrices symétriques.

Exercice 193 [ENS PSI 2023 # 205] a) i) Soit m un entier ≥ 2. Montrer que $\int_1^{m-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(m-x)}} \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{k(m-k)}}$.

- Calculer $\int_1^{m-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(m-x)}}$ l'aide du changement de variables $x = \frac{m}{1+t^2}$.
- Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général $\frac{1}{i+j-1}$.
- Montrer que $A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Soit λ_n la plus petite des valeurs propres de A_n. Montrer qu'il existe $a, b > 0$ tels que $\forall n \geq 1, \ 0 \leq \lambda_n \leq \frac{1}{n}\big(a + b\ln(n)\big)$.
- Soient μ_n la plus grande valeur propre de A_n et $X = (1/\sqrt{1}, 1/\sqrt{2}, \dots, 1/\sqrt{n})^T \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\langle A_nX, X \rangle \geq 2\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \arctan(\sqrt{i}$ ou $\langle \ \rangle$ designe le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
- Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t = -i\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$. En déduire que, pour tout $Q = \sum_{k=0}^d a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 Q^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{-1}^1 Q^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \pi\sum_{k=0}^d a_k^2$.
- En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \mu_n = \pi$.

Exercice 194 [ENS PSI 2023 # 206] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On considère des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que : $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $M_i = (\lambda_i, \lambda_i^{-1})$.On considère $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\|_2 = 1$ et on note M le barycentre des M_i pondere par les coefficients y_i^2.

- Montrer que $M = (a,b)$ ou $a = \langle Dy, y \rangle$ et $b = \langle D^{-1}y, y \rangle$ ou $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
- Montrer que $a^{-1} \leq b \leq -\dfrac{a}{\lambda_1\lambda_n} + \lambda_1^{-1} + \lambda_n^{-1}$.

- En déduire que $1 \leq ab \leq \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}}+\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2$.
- On considère $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que $\|x\|_2^4 \leq \langle Ay, y\rangle\langle A^{-1}y, y\rangle \leq \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}}+\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|_2^4$.

- Soient $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c$. Montrer que f admet un minimum atteint en un unique point, et déterminer sa valeur.

b) Analyse

Exercice 195 [ENS PSI 2023 # 207] On pose $A_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\sin(t)dt$, $B_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\cos(t)dt$ et $X_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que A_n et B_n existent et que $|A_n|^2 + |B_n|^2 \leq (2n)!$.
- Trouver A_0 et B_0.
- Montrer qu'il existe une matrice de rotation $R(\theta_0)$ telle que $(n+1)X_n = \sqrt{2}R(\theta_0)X_{n+1}$.
- Exprimer A_n et B_n en fonction de n.
- Trouver une condition pour que $A_n = B_n$.
- Montrer qu'il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ distinctes telle que

$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n g_1(t)dt = \int_0^{+\infty} t^n g_2(t)dt$

Exercice 196 [ENS PSI 2023 # 208] Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$ et $F = \mathcal{D}^1([0,1], \mathbb{C})$. On définit T comme l'operateur qui, a tout $f \in E$ associe : On note E_λ le sous-espace propre de T pour une valeur propre λ.

a) i) : Montrer que T est un endomorphisme.

- Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $T^n(f)$ a l'aide d'une somme.
- Montrer que $(T^n(f))_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction ℓ.

b) i) : Montrer que E_1 est l'ensemble des fonctions constantes.

- Montrer que $E_\lambda = \{0\}$ si $|\lambda| \geq 1$ et $\lambda \neq 1$.
- Soit λ tel que $|\lambda| < 1$.
- Montrer que $f_\lambda : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \cos(2^k \pi x)$ est définie et continue sur $[0,1]$.
- Montrer que $f_\lambda \in E_\lambda$.
- On note $D_\lambda = E_\lambda \cap F$.
- Montrer que, si $|\lambda| < \dfrac{1}{2}$, $D_\lambda \neq \{0\}$. - Comparer $T(f')$ et $(Tf)'$ pour $f \in F$.

iii) : Montrer que, si $|\lambda| \geq \frac{1}{2}$ et $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $D_\lambda = \{0\}$.

Exercice 197 [ENS PSI 2023 # 209] Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}\ u_0(x) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

- Étudier la convergence de $\sum u_n$.
- Sur quel domaine a-t-on $(\sum u_n)' = \sum u_n'$?
- La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 198 [ENS PSI 2023 # 210] On fixe $p > 1$. On note q l'unique réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Soit f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et non identiquement nulle tel que $\int_0^{+\infty} f(t)^p e^t\, dt$ converge.

- Soient $t \in]0,1[$ et $(u,v) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Montr re que $u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v$.

Ind. Utiliser un argument de convexite ou une etude de fonction.

b) i) : Soit $A > 0$, et soient g et h deux fonctions continues de $[0, A]$ dans $\mathbb{R}$.
Montr re que la suite (u_n) est bien définie et qu'il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que
$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ |u_n| \leq K\left(\frac{p}{q}\right)^n (I(nq))^{1/q}$.

- En déduire que $\sum |u_n|^{-1/n}$ diverge.
- On suppose que $p = 1$. Montr re que $\sum |u_n|^{-1/n}$ diverge.

Exercice 199 [ENS PSI 2023 # 211] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $g_\alpha : t \in]0, +\infty[\mapsto e^{-t}t^\alpha$.

- Donner les valeurs de α tels que $\int_0^{+\infty} g_\alpha(t)dt$ converge.
- Calculer $I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt$, avec $p \in]0, +\infty[$.
- Justifier l'existence de $\frac{d^k I}{dp^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- En déduire $\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Retrouver ce résultat en integrant par parties $\int_\varepsilon^x g_n(t)dt$ pour $0 < \varepsilon < x$.

Exercice 200 [ENS PSI 2023 # 212] Soit $a > 0$. On pose $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2-a^2/t^2}\,dt$ et $J(a) = a\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2-a^2/t^2}}{t^2}dt$.

- Montrer que ces intégrales convergent.
- Montrer que $I(a) = J(a)$,
- En déduire que $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{a}{t^2}\right)e^{-(t-a/t)^2}dt$
- Montrer que $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$. La valeur de l'intégrale de Gauss etait donnée.

Exercice 201 [ENS PSI 2023 # 213] Soient $a > 0$ et $q \in \mathcal{C}^2([a,+\infty[,\mathbb{R}^{+*})$ telle que $\int_a^{+\infty}\sqrt{q(t)}\,dt = +\infty$. Soit (E) l'équation différentielle $y^{''} + qy = 0$.

- Soient y_1 et y_2 deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui n'ont pas de zeros en commun. On pose $\Phi = y_1 + iy_2$ et $\Phi(a) = r_0e^{i\theta_0}$. Montrer que $\forall x \geq a, \Phi(x) = e^{\Psi(x)}$ ou $\Psi(x) = \int_a^x \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\,dt + \ln(r_0) + i\theta_0$.
- Montrer que l'on peut écrire $y_1(x) = r(x)\cos(\theta(x))$ et $y_2(x) = r(x)\sin(\theta(x))$ ou $r(x) = \sqrt{y_1^2(x)+y_2^2(x)}$ et $\theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{y_1y_2'-y_2y_1^{'}}{y_1^2+y_2^2}$.
- On pose $x \mapsto f(x) = \int_a^x \sqrt{q(t)}\,dt$. Montrer que f realise une bijection de $[a,+\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit y une solution de (E), non identiquement nulle. On pose $Y = y\circ f^{-1}$. Montrer que $Y^{''} + vY' + Y = 0$ ou $v : t \mapsto \frac{q'(f^{-1}(t))}{2(q(f^{-1}(t)))^{3/2}}$.
- Montrer que Y et Y' n'ont pas de zero en commun et que l'on peut écrire $Y = r\cos(\theta)$ et $Y' = r\sin(\theta)$ ou r,θ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Montrer que $(r^2)' = -2vr^2\sin^2(\theta)$. En déduire que y et y' sont bornées.

Exercice 202 [ENS PSI 2023 # 214] On considère une solution u de l'équation de transport :
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$ ou $u(x,0) = u_0(x)$.

- Montrer alors que si u est solution de l'équation homogéné, alors u est constante le long de la droite $x = x_0 + ct$. En déduire qu'il existe une unique solution de l'équation homogéné, et que celle-ci est : $u(x,t) = u_0(x-ct)$.
- On suppose f non nulle. Montrer que pour une solution u, on a :

$u(x,t) = u_0(x_0) + \int_0^t f(x_0+c\theta,\theta)\,d\theta$.

- En déduire que : $u(x,t) = u_0(x-ct) + \int_0^t f(x-c(t-\theta),\theta)\,d\theta$. On considère maintenant une solution u de l'équation des ondes :

$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t) = 0$ ou $u(x,0) = g(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$.

b) i) : On suppose u de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que :$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - c^2\{\partial^{2u}\}\{\partial^{2x}\}$.

- En déduire qu'une solution u de l'équation s'écrit : $u(x,t) = u_1(x+ct) + u_2(x-ct)$.
- On pose $v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$. Montrer que v est solution d'une équation de transport dont on precisera le paramètre c ainsi que les conditions initiales.
- Experimer u en fonction de v et déduire :

$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x-ct)+g(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

c) i) Trouver toutes les solutions $\mathcal{C}^2$ de l'équation d'onde a variables separées, de la forme : $u(x,t) = \varphi(t)\psi(x)$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $g : x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k\sin(k\pi x)$ et $h = 0$. Déterminer $u(x,t)$.

Exercice 203 [ENS PSI 2023 # 215] On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. On dit que f est differentiable sur l'ouvert Ω si ∇f existe et est continu.

- Soient C ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^d$, $f : C \to \mathbb{R}$ differentiable. On suppose que ∇f est L-lipschitzien. Soient $w, v \in C$ et $g : t \mapsto f(v+t(w-v))$.
- Experimer $g'(t)$.
- Montrer que $f(w) - f(v) = \int_0^1 \langle\nabla f(v+t(w-v)), w-v\rangle\,\mathrm{d}t$.
- Montrer que $f(w) \leq f(v) + \langle\nabla f(v), w-v\rangle + \frac{L}{2}\|w-v\|$.
- Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si

$\forall w, v \in \mathbb{R}^d, f(w) \geq f(v) + \langle\nabla f(v), w-v\rangle$. Ind. Commencer par $d = 1$.

- Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differentiable. On pose $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2L}\|\nabla f(v_n)\|^2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(v_{n+1}) \leq f(v_n) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(v_n)\|^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- On suppose de plus f convexe.
- Montrer que $\forall w \in \mathbb{R}^d, f(v_{n+1}) \leq f(w) + \langle\nabla f(v_n), v_n - w\rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(v_n)\|^2$.
- Montrer que $f(v_n) - f(w) \leq \frac{L}{2}(\|v_n-w\|^2 - \|v_{n+1}-w\|^2)$.
- Montrer que $f(v_n) - f(w) \leq \frac{L}{2n}\|w\|^2$.
- Soit v_* un point critique de f. Montrer que v_* est un minimum local de f et que la suite (v_n) converge vers v_*.

c) Probabilités

Exercice 204 [ENS PSI 2023 # 216] Soit $n \geq 2$. On note $n = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}$ sa decomposition en facteurs premiers. On munit $\Omega = \{1, \dots, n\}$ de la loi uniforme. Pour tout diviseur d de n, on note A_d l'ensemble des multiples de d contenus dans $Ω :A_d= \kd\,,\ k≤n_{\frac{}{d}}\.$

a) i) Montrer que si d et d' sont deux entiers premiers entre eux alors $A_d \cap A_{d'} = A_{dd'}$, et en déduire que A_d et $A_{d'}$ sont indépendants. - On note $B = \{k \in \Omega,\ k \wedge n = 1\}$. Exprimer B en fonction des A_{p_i} et en déduire une expression de $\mathbf{P}(B)$ puis de $|B|$. Cette valeur sera notée $\varphi(n)$.

- Soient n et m deux entiers premiers entre eux. Montrer que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
- On note $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n$ ou $\mathbb{U}_n$ designe l'ensemble des racines n-ièmes de l'unite. Pour z dans $\mathcal{U}$, on note $n_z = \inf\{n \in \mathbb{N}\ z \in \mathbb{U}_n\}$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, montrer qu'il existe une suite $(z - k \in \mathbb{N}$ a valeurs dans $\mathcal{U}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} z_k = z$.
- Pour tout entier naturel n on note $P_m = \{z \in \mathcal{U},\ n_z = m\}$. Montrer que P_m est fini et de cardinal $\varphi(m)$, et que si n et m sont distincts $P_m \cap P_n = \emptyset$.
- Montrer que $\mathcal{U} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} P_m$.

Exercice 205 [ENS PSI 2023 # 217] Soit X une variable aléatoire définie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Soient $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ deux probabilités sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P_1}(\{n\}) > 0$, $\mathbf{P_2}(\{n\}) > 0$, $\mathbf{P_1}(X = n) > 0$ et $\mathbf{P_2}(X = n) > 0$. Soit $A = \{n \in \mathbb{N}, \mathbf{P_1}(\{n\}) \leq \mathbf{P_2}(\{n\})\}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n(X) = \mathbf{P_2}(X = n) \ln\left(\frac{\mathbf{P_2}(X=n)}{\mathbf{P_1}(X=n)}\right)$.

Enfin, on pose $\ell(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(X)$ si cette série converge, $\ell(X) = +\infty$ sinon.

- Soit $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ avec $C \neq \mathbb{N}$ et $C \neq \emptyset$. Montrer que $0 < \mathbf{P_1}(C) < 1$ pour $i = 1, 2$.
- On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ_1 pour $\mathbf{P_1}$ et de paramètre λ_2 pour $\mathbf{P_2}$.
- Calculer $u_n(X)$ en fonction de n, λ_1, λ_2.
- Montrer que $\sum u_n(X)$ converge et exprimer sa somme $\ell(X)$ en fonction de λ_1, λ_2.
- Montrer que $\ell(X) \geq 0$.
- Montrer que $\{n \in \mathbb{N}, n \geq \max(\lambda_1, \lambda_2)\} \subset A \subset \{n \in \mathbb{N}, n \leq \min(\lambda_1, \lambda_2)\}$.
- On revient au cas général. Montrer que $\sum u_n(X)$ converge et que $\ell(X) \geq 0$.
- Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbf{P_2}(X = n) - \mathbf{P_1}(X = n)| = 2(\mathbf{P_2}(X \in A) - \mathbf{P_1}(X \in A))$.

Exercice 206 [ENS PSI 2023 # 218] Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires a valeurs réelles, identiquement distribuées, centres, de variance finie σ^2 et indépendantes. On suppose de plus $\mathbf{P}(|X_1| > 1) = 0$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

- Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Pour $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $X_i = aY_i + b$. A quelle condition sur a et b les X_i vérifient-elles les conditions précédentes ?
- Montrer $\forall u \in]-\infty, 2],\ e^u \leq 1 + u + \frac{u^2}{2}(1 + \max(0, u))$.
- Dans le cas général, montrer $\forall t \in [0, 2],\ \mathbf{E}(e^{tX_1}) \leq 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2}(1 + t) \leq e^{\sigma^2 t^2(1+t)/2}$. - En déduire que $\forall t \in [0, 2],\ \mathbf{E}(e^{tS_n}) \leq e^{n\sigma^2 t^2(1+t)/2}$,
- Soit α tel que $0 < \alpha < 6\sigma^2$. Montrer $\mathbf{P}(S_n/n \geq \alpha) \leq e^{-n\alpha^2/6\sigma^2}$.

6) ENS PC **AUTRE**

a) Algèbre

Exercice 207 [ENS PC 2023 # 219] ★ Soit A une partie de cardinal n de $\mathbb{R}$. On pose $B = A + A = \{a + a',\ a, a' \in A\}$. Montrer que $2n - 1 \leq \operatorname{card}(B) \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$. Généraliser a $B = kA = A + A + \cdots + A$ (k fois).

Exercice 208 [ENS PC 2023 # 220] Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers distincts. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P(a) = b$ et $P(b) = a$.

Exercice 209 [ENS PC 2023 # 221] ★ Soient $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il n'existe aucun voisinage ouvert de 0 sur lequel on ait simultanement i) $\forall x < 0,\ P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$
ii) $\forall x > 0,\ P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$.

Exercice 210 [ENS PC 2023 # 222] [PL] Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de l'application $\Phi\colon M \in E \mapsto M^T \in E$.

Exercice 211 [ENS PC 2023 # 223] Considérons des réels $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq 1$. Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(x_k)$.

Exercice 212 [ENS PC 2023 # 224] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $A + iB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- Si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 213 [ENS PC 2023 # 225] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

Exercice 214 [ENS PC 2023 # 226] Soient $\varepsilon \in \left]0\,;\frac{1}{4}\right[$ et M la matrice $M = \begin{pmatrix} 1-2\varepsilon & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 1-2\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$

- Quel est le spectre de M ?
- Déterminer la limite de la suite $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 215 [ENS PC 2023 # 227] Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui preserve le produit scalaire canonique :
$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Montrer que f est une isometrie lineaire.

Exercice 216 [ENS PC 2023 # 228] Soit $A \in S_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = 3, \mathrm{tr}(A^2) = 5, \mathrm{tr}(A^3) = 9$. Déterminer la borne inférieure de $\mathrm{tr}(M^2)$ lorsque M décrit $\left\{M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})\ ;\ \mathrm{tr}(AM) = 1 \text{ et } \mathrm{tr}(A^2M) = 1\right\}$,

Exercice 217 [ENS PC 2023 # 229] Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $s \in \mathbb{R}^{+*}$,
$\mathrm{tr}\left((sI_2 + A)^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left((sI_2 + B)^{-1}\right)$. Montrer que A et B sont semblables. Est-ce toujours vrai en dimension n ?

b) Analyse

Exercice 218 [ENS PC 2023 # 230] On note $\|\ \ \|_1$ la norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par :
$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$.

- Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Montrer que $\|x+y\|_1 + \|x-y\|_1 = 2(\|x\|_1 + \|y\|_1)$ si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k y_k = 0$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui preserve la norme $\|\quad\|_1$: $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\|_1 = \|x\|_1$. Montrer que la matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ de f sur la base canonique est une matrice de permutation signée, c'est-a-dire qu'il existe une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ vérifiant $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = \varepsilon_j \delta_{i,\sigma(j)}$.

Exercice 219 [ENS PC 2023 # 231] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ avec $d \ge 2$ et $p \in [1, +\infty[$. On définit la norme $\|\ \ \|_p$ sur $\mathbb{R}^d$ par $\forall X \in \mathbb{R}^d,\ \|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p\right)^{1/p}$. Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose
$\rho(X,Y,t) = \frac{1}{2}(\|X+tY\|_p + \|X-tY\|_p) - 1$ et $\overline{\rho}(t) = \sup_{\|X\|_p = \|Y\|_p = 1} \rho(X,Y,t)$.

- On suppose que $p \in [1,2]$ et qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ \overline{\rho}(t) \le Ct^2$. Montrer que $p = 2$.
- On suppose que $p = 2$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \overline{\rho}(t) \le Ct^2$.

Exercice 220 [ENS PC 2023 # 232] Soit E l'espace des fonctions $f\colon\ [0\,;1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \|f + f'\|_\infty$.

- Montrer que $\|\ \ \|$ est une norme sur E.
- Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, on ait $\|f\|_\infty \le a\,\|f\|$.
- Les normes $\|\ \ \|$ et $\|\ \ \|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E ?

Exercice 221 [ENS PC 2023 # 233] Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel norme de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \le \|x\|$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n f^k$. Étudier le comportement de s_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 222 [ENS PC 2023 # 234] Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $D : E \to E$ défini par
$\forall u \in E,\ D(u) = u'$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = u_{n+1} - u_n$.

- L'endomorphisme D est-il injectif ? surjectif ? Quels sont ses valeurs propres et ses vecteurs propres ? - On pose $F = \{u \in E\ ,\ \sum u_n^2$ con
Pour $u, v \in F$, on pose $\langle u,v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ et $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$. Montrter que F est stable par D puis déterminer l'ensemble

\$H= \ $\dfrac{\langle u, D(u)\rangle}{\|u\|^2}$\;;\ ;u ∈ F\ \0\\.\$

Exercice 223 [ENS PC 2023 # 235] On considère la suite $(F_n)_{n\ge 0}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ puis $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrere que tout entier $N \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de maniere unique $N = F_{p_1} + F_{p_2} + \cdots + F_{p_m}$ avec des entiers p_i tels que $p_{i+1} - p_i \ge 2$ pour tout $i \in [\![1\,;\,m-1]\!]$ et $p_1 \ge 2$. Prouver l'unicite de cette écriture.

Exercice 224 [ENS PC 2023 # 236] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\prod_{k=n}^{2n} k^k\right)^{1/n}$

- Déterminer un équivalent de $\ln(u_n)$ lorsque n tend vers l'infini.
- Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 225 [ENS PC 2023 # 237] Quelle est la nature de la série $\sum \sin(2\pi\, n!\, e)$?

Exercice 226 [ENS PC 2023 # 238] Quelle est la nature de la série $\sum \tan(2\pi\, n!\, e)$?

Exercice 227 [ENS PC 2023 # 239] Nature, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, de $\sum |\sin(2\pi e n!)|^\alpha$.

Exercice 228 [ENS PC 2023 # 240] Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{\sin^2(n)}{n}$?

Exercice 229 [ENS PC 2023 # 241] Soit $\sum a_n$ une série convergente de réels positifs. Montrere que la série $\sum \dfrac{a_n^x}{n}$ converge pour tout $x > 0$.

Exercice 230 [ENS PC 2023 # 242] Soit $(a - n \in \mathbb{N}$ une suite réelle telle que $\sum \exp(a_n)$ converge.
Déterminer $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(ka_n)$.

Exercice 231 [ENS PC 2023 # 243] Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et ℓ un réel.
On suppose que $f(x) + f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Étudier la limite de f et de f' en $+\infty$.

Exercice 232 [ENS PC 2023 # 244] Soient $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que : $F(0) = 1$ et $\forall x \in [0,1]$, $|F'(x)| = F(x)g(x)$. Déterminer les valeurs possibles de $F(1)$.

Exercice 233 [ENS PC 2023 # 245] Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que les fonctions $af' + bf$ et $cf' + df$ soient bornées. A quelle condition sur (a,b,c,d) la fonction f est-elle bornée ?

!! Page manquante.

Exercice 234 [ENS PC 2023 # 256] Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+^*)$. On définit $\Phi\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \ln\left(\int_0^1 e^{xt} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

- Montrer que Φ est convexe.
- On suppose maintenant que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Trouver un équivalent et un développement asymptotique de Φ en $+\infty$.

Exercice 235 [ENS PC 2023 # 257] Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $F : \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer un développement asymptotique de $F(\lambda)$ lorsque $\lambda \to +\infty$.

Exercice 236 [ENS PC 2023 # 258] Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon > 1. Soient $\varphi \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \varphi(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y$. Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 237 [ENS PC 2023 # 259] Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On cherche les applications $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $(*) : \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$ et $f(0,x) = P(x)$.

- Montrer qu'il existe une solution de $(*)$ polynomiale en x.
- On suppose P scinde a racines simples sur $\mathbb{R}$. Soit f une solution de $(*)$ polynomiale en x. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,\varepsilon[$, $x \mapsto f(t,x)$ est aussi scinde a racines simples.

Exercice 238 [ENS PC 2023 # 260] Soient $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

- Donner un exemple de telles fonctions u et v.
- On suppose que u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\Delta u = \Delta v = 0$.
- Montrer que, pour tout $r > 0$, $u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta$.
- Soit V un ouvert contenant $(0,0)$. Soit u de classe $\mathcal{C}^2$ sur V telle que $\Delta u = 0$ sur V. On admet que sous ces conditions, l'égalité de - est encore valable pour $r > 0$ suffisamment petit.

On note D le disque unite ouvert et C le cercle unite. Soit g une fonction continue sur D et f une fonction continue sur C. Montrer qu'il existe au plus une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur le disque unite ferme, de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et telle que $\Delta u = g$ sur D et $u = f$ sur C.

c) Géométrie

Exercice 239 [ENS PC 2023 # 261] Montrer qu'un polygone convexe a n sommets inscrit dans le cercle unite est d'aire maximale si et seulement si le polygone est regulier.

Exercice 240 [ENS PC 2023 # 262]

- Sur le cercle trigonometrique $\mathcal{C}$, on place A de coordonnées $(-1,0)$ et $P \neq A$ de coordonnées (x,y). Soit Q le point d'intersection de la droite (AP) avec l'axe des ordonnées. On note t l'ordonnée de Q. Exprimer t en fonction de x et y. - Exprimer x et y en fonction de t. Que reconnait-on ? Expliquer cela géométriquement. Peu-on paramètrer les points de $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ a l'aide de fractions rationnelles ?
    - ▷ Peut-on paramètrer un arc Γ (non reduit a un point) du cercle $\mathcal{C}$ a l'aide de polynômes a coefficients réels c'est-a-dire existe-t-il un intervalle I et deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que le point de coordonnées (x,y) appartienne a Γ si et seulement s'il existe $t \in I$ tel que $x = P(t)$ et $y = Q(t)$? Et a l'aide de polynômes a coefficients complexes ?

d) Probabilités

Exercice 241 [ENS PC 2023 # 263] On retourne une par une les cartes d'un jeu de 52 cartes. Trouver l'espérance du nombre de cartes retournées avant d'obtenir le premier as (on demande un raisonnement intuitif sans calcul de la loi).

Exercice 242 [ENS PC 2023 # 264] On considère deux capteurs indépendants, qui detectent chacun en moyenne 5000 évènements par an. Quelle est la probabilité que les deux detecteurs detectent un évènement pendant la meme seconde ?

Exercice 243 [ENS PC 2023 # 265] Soient σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $A \subset [\![1,n]\!]$. On pose $k = |A|$. Calculer $\mathbf{P}(A = \{\sigma(1),\ldots,\sigma(k)\})$.

Exercice 244 [ENS PC 2023 # 266] Soient X, Y deux variables aléatoires a valeurs dans $\{1,2,3\}$ telles que Y suive la loi uniforme sur $\{1,2,3\}$ et $\mathbf{P}(X=1) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(X=2) = \mathbf{P}(X=3) = \frac{1}{4}$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{E}((X-Y)^2)$?

Exercice 245 [ENS PC 2023 # 267] Existe-t-il des variables aléatoires X, Y telles que $X \sim \mathcal{B}(p)$, $Y \sim \mathcal{P}(p)$ et telles que l'on ait $\mathbf{P}(X=Y) = 1 - p + pe^{-p}$?

Exercice 246 [ENS PC 2023 # 268] On considère X de loi $\mathcal{B}(p)$ et Y de loi $\mathcal{P}(p)$ avec $p \in [0,1]$. Majorer $\mathbf{P}(X=Y)$ et trouver des variables X et Y pour lesquelles cette majoration est atteinte.

Exercice 247 [ENS PC 2023 # 269] Soient X, Y deux variables aléatoires entières indépendantes qui suivent la meme loi.

- On suppose que X suit une loi géométrique commencant a zero, c'est-a-dire qu'il existe $p \in \,]0\,;1\,[$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = (1-p)^k p$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![0\,;\,n]\!]$, $\mathbf{P}(X=k \mid X+Y=n) = \frac{1}{n+1}$.

- Prouver la réciproque.

Exercice 248 [ENS PC 2023 # 270] On considère $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$, ou X et Y indépendantes avec X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y de loi $\mathcal{G}(p)$.

- Déterminer la probabilité que M soit inversible.
- Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable. Dans ce cas, preciser spectre et espaces propres.
- Déterminer la probabilité que $M^8 = I_2$.
- Déterminer la probabilité qu'il existe une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ admettant un minimum local strict en $(0,0)$ et dont la matrice Hessienne en $(0,0)$ est M.

Exercice 249 [ENS PC 2023 # 271] ★ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires a valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 1) \neq 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\mathbf{P}(4 \text{ divise } S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.

Exercice 250 [ENS PC 2023 # 272] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On considère dans le plan un graphe non oriente aléatoire de n sommets. On note $X_{i,j} = 1$ si les points d'indices i et j sont relies, et 0 sinon. On suppose les $X_{i,j}$ indépendantes et de meme loi $\mathcal{B}(p)$. On note T_n le nombre de triangles formes par ces n points. On pose $a_n = \binom{n}{3}p^3$.

Calculer $\mathbf{E}(T_n)$ et montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$.

Exercice 251 [ENS PC 2023 # 273] On considère une matrice aléatoire $M = (m_{i,j})$ de taille $n \times n$ qui est symétrique, ou chaque variable aléatoire $m_{i,j}$ suit la loi uniforme sur $\{-1,1\}$ et ou les variables aléatoires $(m_{i,j})_{1\le i\le j\le n}$ sont indépendantes.

- Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M))$, $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M^2))$ et $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M^3))$.
- Montrer que $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M^4)) = \mathcal{O}(n^3)$.
- On note λ_1 la plus grande valeur propre de M.

Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbf{P}(\lambda_1 \ge n\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 252 [ENS PC 2023 # 274] On note $\langle\ \rangle$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

- Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit λ_1 la plus grande valeur propre de A. Si $\langle Ax, x\rangle \ge a\,\|x\|^2$, montrer que $\lambda_1 \ge a$.
- Soit $M = (m_{i,j})$ une variable aléatoire a valeurs dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que les $m_{i,j}$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et telle que les $(m_{i,j})_{1\le i\le j\le n}$ soient indépendantes. Soit λ_1 la plus grande valeur propre de M.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\Big(\lambda_1 \ge \frac{n}{2}(1-\varepsilon)\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

II) X **XENS**

1) Algèbre

Exercice 253 [X MP 2023 # 275] On note $p(n)$ le nombre de partitions de n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Monter que $p(n) \le 2^{n-1}$. SUP

Démonstration. On a $p(n) \le p(n-1) + p(n-2) + \cdots + p(1) + 1$, en considérant le (un) plus grand élément de la partition. Formellement, on a une surjection $\sqcup_{k=0}^{n-1}\mathcal{P}_k \to \mathcal{P}_n \quad (X,k) \mapsto X + (n-k)$. ☐

Exercice 254 [X MP 2023 # 276] Soient $e_r > \cdots > e_2 > e_1 \ge 0$ des entiers, $n = \sum_{k=1}^{r} 2^{e_k}$ et $X = \{s \in \mathbb{N};\ 2^s \mid n!\}$. SUP

- Montrer que $\max X = n - r$.
- Montrer que le nombre d'entiers k tels que $\binom{n}{k}$ est impair est 2^r.

Démonstration.

- Formule de Legendre.
- Relié à Lucas. ☐

Exercice 255 [X MP 2023 # 277]

- Montrer que l'équation $a^2 - 2b^2 = 1$ admet une infinite de solutions $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer l'ensemble des solutions.
- Que dire de l'ensemble des solutions de $a^2 - 2b^2 = -1$?

Exercice 256 [X MP 2023 # 278] Si G est un groupe, les éléments d'ordre fini forment-il un sous-groupe ?

Démonstration. Non : cf le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: l'ensemble des mots sur $\{A,B\}$ où deux A d'affilée se simplifient, munit de la concaténation. Cf # 281 ☐

Exercice 257 [X MP 2023 # 279]

- Trouver deux groupes G_1 et G_2 non isomorphes de cardinal $2023 = 7.17^2$.
  - ▷ Soit p premier. Montrer qu'un groupe de cardinal p^2 est isomorphe a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou â $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
  - ▷ Soient G, H deux groupes finis et $\psi\colon G \to H$ un morphisme surjectif.

Montrer que $|G| = |H| \times |\operatorname{Ker}\psi|$.

- On suppose que G est un groupe de cardinal 2023, que $H = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et que $\varphi\colon G \to H$ est un morphisme surjectif. Montrer que G est isomorphe a $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \operatorname{Ker}\varphi$.
- Montrer que tout groupe de cardinal 2023 est isomorphe a G_1 ou G_2.

Exercice 258 [X MP 2023 # 280] Soit G un groupe fini de neutre 1. Soit φ un automorphisme de G sans point fixe c'est-à-dire tel que : $\forall x \in G$, $\varphi(x) = x \Rightarrow x = 1$. On note n l'ordre de φ ; c'est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^n = \mathrm{id}$.

- Montrer que $\forall x \in G,\, x\,\varphi(x)\,\varphi^2(x)\,\cdots\,\varphi^{n-1}(x) = 1$.
- Si $n = 2$, que peut-on dire du groupe G ? Donner un exemple.
- Si $n = 3$, montrer que, pour tout $x \in G$, x et $\varphi(x)$ commutent.

Exercice 259 [X MP 2023 # 281] Soient G un groupe et T l'ensemble des éléments de G d'ordre fini.

- En général, T est-il un sous-groupe de G ?
- Soit S une partie finie de G stable par conjugaison munie d'une relation d'ordre totale $\leq$. Montrer que, pour tous $s_1,\ldots, s_r \in S$, il existe $s'_1,\ldots, s'_r \in S$ tels que $s'_1 \leq s'_2 \cdots \leq s'_r$ et $s_1 s_2 \cdots s_r = s'_1 s'_2 \cdots s'_r$.
- Avec la question précédente, montrer que, si T est fini, alors T est un sous-groupe de G.

Démonstration.
- Non : cf le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: l'ensemble des mots sur $\{A, B\}$ où deux A d'affilée se simplifient, munit de la concaténation.
- Pour deux éléments : on peut écrire $s_1 s_2 = s_2\big(s_2^{-1} s_1 s_2\big)$: on a mis le second en premier. On peut recommencer tant que le premier est plus grand, on obtient une suite strictement décroissante, qui s'arrête car S fini.

  Puis récurrence sympa.
- Si T est fini, si $ab \notin T$, alors on obtient une infinité de puissances, qui sont distinctes, mais d'après la question précédentes, elle s'écrivent comme un produit croissant, qui n'a qu'un nombre fini de possibilités. □

Exercice 260 [X MP 2023 # 282]
- Soit $s\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ t \mapsto t^{-1}$. Déterminer le groupe engendré par s.
- On définit les applications $s_1 : (t, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto (t^{-1}, tu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et

  Montrer que le sous-groupe qu'elles engendrent est isomorphe a $\mathcal{S}_3$.
- Retrouver le résultat de la question précédente en considérant le quotient A de $(\mathbb{R}^*)^3$ par la relation de colinearite, la bijection $f : A \to (\mathbb{R}^*)^2$ qui associe a la classe de (x_1, x_2, x_3) le couple $(x_1/x_2, x_2/x_3)$, et enfin les permutations de A induites par $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1, x_3)$ et $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3, x_2)$.
- Soit $n \geq 3$. Déterminer le groupe engendre par les bijections $(s{-}1 \leq i \leq n$ de $(\mathbb{R}^*)^n$ définies par $s_i(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{i-2}, t_{i-1} \times t_i, t_i^{-1}, t_i \times t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_n)$ si $1 < i < n$, $s_1(t_1, \ldots, t_n) = (t_1^{-1}, t_1 \times t_2, t_3, \ldots, t_n)$ et $s_n(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1} \times t_n, t_n^{-1})$.

  Ind. Considèrer $f : (\mathbb{R}^*)^{n+1} \to (\mathbb{R}^*)^n$ définie par $f(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \left(\dfrac{t_2}{t_1}, \ldots, \dfrac{t_{n+1}}{t_n}\right)$ et chercher des bijections simples s'_i de $(\mathbb{R}^*)^{n+1}$ telles que $s_i \circ f = f \circ s'_i$.

Exercice 261 [X MP 2023 # 283] Soit G un groupe fini d'ordre n. On note, pour tout diviseur positif d de n, $n_d(G)$ le nombre d'éléments de G d'ordre d.

- Montrer que $n = \sum_{d|n} n_d(G)$.
- Calculer les $n_d(G)$ lorsque G est cyclique.
- Montrer que, si pour tout diviseur positif d de n, $|\{x \in G,\ x^d = 1\}| \leq d$, alors G est cyclique. - Soient $\mathbb{K}$ un corps et G un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$. Montrer que G est cyclique.

Exercice 262 [X MP 2023 # 284] On pose $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib\ ;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
- Déterminer les éléments de $\mathbb{Q}[i] \setminus \{0\}$ qui sont d'ordre fini.

Exercice 263 [X MP 2023 # 285]
- Soient $\mathbb{K}$ un corps, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $P = X^2 - aX - b$. On considère la $\mathbb{K}$-algèbre A admettant une base sur $\mathbb{K}$ de la forme $(1, x)$ avec $x^2 = ax + b$. À quelle condition cette algèbre est-elle un corps ?
  - ▹ On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ ou p est un nombre premier. Combien de $\mathbb{F}_p$-algèbres non isomorphes peut-on obtenir ainsi ?

Exercice 264 [X MP 2023 # 286] Soit p un nombre premier. On suppose que, pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A, il existe un endomorphisme u_A de A de sorte que, pour tout couple (A, B) de $\mathbb{F}_p$-algèbres et tout morphisme τ de $\mathbb{F}_p$-algèbres de A dans B, on ait $\tau \circ u_A = u_B \circ \tau$. Que dire des u_A ?

Démonstration. Pour tout isomorphisme $\tau\colon A \to$, u_A commute avec τ. □

Exercice 265 [X MP 2023 # 287] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$. **SUP**

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_k = 2^{n-1} P_n\left(\frac{X+1}{2}\right)$.

Démonstration. Revient à l'identité $\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=p+1}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{p}$, qui peut se démontrer par des récurrence, en appliquant successivement la formule de Pascal. Faire le dessin.

Interprétation probabiliste : on divise par 2, à gauche, on a la probabilité de tirer une partie de taille $> p$. À droite, si on imagine des tirages pile/face successif, c'est la probabilité d'obtenir le $p + 1$-ème élément au rang $k + 1$ exactement. □

Exercice 266 [X MP 2023 # 288]
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $S_n \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\forall N \in \mathbb{N},\ S_n(N) = \sum_{k=0}^{N-1} k^n$. Dans la suite, on note b_n le coefficient de S_n devant X.
- Donner une relation de recurrence exprimant b_n en fonction de $b_0, \ldots, b_{n-1}$.
- Pour $n \geq 1$, donner une relation entre S_n'' et S'_{n-1}.
- En déduire une expression explicite des coefficients de S_n en fonction de $b_0, \ldots, b_n$.

Exercice 267 [X MP 2023 # 289] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$. **SUP**

On pose $F\colon z \in \mathbb{C}^* \mapsto \prod_{k=1}^{n} (1 + q^{2k-1} z)(1 + q^{2k-1} z^{-1})$.

- Montrer qu'il existe une unique liste $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ F(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z^k + z^{-k})$$

.

- Donner une relation de recurrence entre c_k et c_{k+1}, et en déduire une expression de c_k a l'aide d'un produit.
  Ind. Exprimer $F(q^2 z)$ en fonction de $F(z)$.

Démonstration. • Existence claire, unicité via l'unicité polynomiale.

- On a $F(q^2 z)$. □

Exercice 268 [X MP 2023 # 290] Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(X+Y)^n$ soit congru a $X^n + Y^n$ modulo p.

Démonstration. Pour $n = p$ ok. Sinon, cf Lucas pour les coefficients binomiaux, on veut que n divise tous les $\binom{n}{k}$. □

Exercice 269 [X MP 2023 # 291] Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(0) \neq 0$. Soit $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que X^n divise $P^k - f$.

Démonstration. C'est des DLs. □

Exercice 270 [X MP 2023 # 292] Soit p un nombre premier. Pour deux polynômes P, Q dans $\mathbb{Z}[X, Y]$, on note $P \equiv Q\ [p]$ pour signifier que $P - Q$ a tous ses coefficients (devant les $X^k Y^l$) divisibles par p. On adopte une définition similaire pour les polynômes a une indéterminée.

- Exhiber un polynôme $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$, $P \not\equiv T\ [p]$ et $P \not\equiv 0\ [p]$.
- Exhiber un polynôme $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$, $P(X+Y) \equiv P(X) + P(Y)\ [p]$, $P \not\equiv T\ [p]$ et $P \not\equiv 0\ [p]$.
- Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{Z}[T]$ tels que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$ et $P(X+Y) \equiv P(X) + P(Y)\ [p]$.

Démonstration. • T^p

- T^p
- □

Exercice 271 [X MP 2023 # 293] Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des complexes deux a deux distincts. Soient $n_1, \dots, n_r$ dans $\mathbb{N}^*$ et $H_1, \dots, H_r$ dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un $H \in \mathbb{C}[X]$ tel que $(X - \alpha_i)^{n_i}$ divise $H - H_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Démonstration. Interpolation de Hermite. □

Exercice 272 [X MP 2023 # 294] • Soient $N_1, \dots, N_r$ des entiers premiers entre eux deux a deux, et $f_1, \dots, f_r$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier F tel que $F \equiv f_i\ [N_i]$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

- Soient $N_1, \dots, N_r$ des éléments de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux deux a deux, et $f_1, \dots, f_r$ des éléments de $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe $F \in \mathbb{C}[X]$ tel que N_i divise $F - f_i$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.
- Soient f, g deux éléments de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $h \in \mathbb{C}[X]$ tel que g divise $h^n - f$.

Démonstration. •

-
- Se ramener au cas de $g = X^n$, via ce qui précède, peut-être. □

Exercice 273 [X MP 2023 # 295] Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $X^{n+1} - nX^n + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Démonstration. !! Pour $n = 2$, 1 est racine :) □

Exercice 274 [X MP 2023 # 296] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire dont les racines complexes ont un module inférieur ou égal a 1. Montrer que les racines de P sont des racines de l'unite.

Exercice 275 [X MP 2023 # 297] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ possedant n racines distinctes $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$. On écrit $P^2 + 1 = Q_1 \dots Q_r$ ou les Q_i sont dans $\mathbb{Z}[X]$. On pose $R = \sum_{i=1}^{r} {Q_i}^2 - r$. **sup**

- Montrer que les x_k sont racines au moins doubles de R.
- En déduire qu'il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\deg(Q_i) \geq 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Démonstration. •

- C'est juste le degré de R. □

Exercice 276 [X MP 2023 # 298] On se propose de donner une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss. **sup**

- Montrer qu'il suffit de montrer le théorème pour les polynômes a coefficients réels. Dans la suite, on écrira le degré d'un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ sous la forme $2^n q$, ou $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ est impair. La preuve se fait par recurrence sur n.
- Montrer le théorème dans le cas ou $n = 0$.
  Dans la suite, on suppose le résultat vrai jusqu'au rang n, ou $n \geq 1$ est fixe.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2^n q$, ou $n \geq 1$. On admet l'existence d'une extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ sur laquelle P est scinde, et on note $x_1, \dots, x_d$ ses racines dans $\mathbb{K}$, distinctes ou non. Ayant fixe $c \in \mathbb{R}$, on pose $y_{ij}(c) = x_i + x_j + c x_i x_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq d$.

- ▷ Montrer que le polynôme $Q_c = \prod_{i\leq j}(X - y_{ij}(c))$ est a coefficients réels.
- ▷ Montrer que l'un des $y_{ij}(c)$ est élément de $\mathbb{C}$.
- ▷ Montrer finalement que l'un des x_i est élément de $\mathbb{C}$.

Démonstration. • Considérer $Q\overline{Q}$.

- Tout polynôme de degré impair admet une racine.
- ▷ Propriété de symétrie : prendre son conjugué.
  ▷ Découle de la première question.
  ▷ Pour tout $c \in \mathbb{R}$, un des $x_i + x_j + cx_ix_j$ est dans $\mathbb{R}$. Si $i = j$ c'est bon. Sinon, pour une infinité de c, c'est le même couple, donc $x_i + x_j \in \mathbb{C}$, et $x_ix_j \in \mathbb{C}$. □

Exercice 277 [X MP 2023 # 299] Soient $F \in \mathbb{C}(X)$ et $q \in \mathbb{C}^*$. SUP

- On suppose que q n'est pas une racine de l'unite. Montrer qu'il existe au plus deux fractions rationnelles $G \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F = 1 + G(qX)\,G(q^{-1}X)\,F(q^{-2}X)$, et que s'il y en a deux alors elles sont opposées l'une de l'autre.
- Montrer que le résultat precedent peut tomber en defaut si l'on ne suppose plus que q n'est pas une racine de l'unite.

Démonstration. • On a $G(qX)G(q^{-1}X) = \frac{F-1}{F(q^{-2}X)}$.

Si x_i sont les poles/racines de G, les poles/racines de $G(qX)G(q^{-1}X)$ sont les qx_i et les $q^{-1}x_i$, de multiplicités $m(y_i) = m_{q^{-1}y_i} + m_{qy_i}$.
Ces multiplicités déterminent entièrement les multiplicités d'origine, car q n'est pas une racine de l'unité (… technique à écrire).
Si on a l'égalité $G(qX)G(q^{-1}X) = G'(qX)G(^{-1}X)$, on a les mêmes poles/racines, et quitte à les retirer, on a la même constante, à $\pm$ près. □

Exercice 278 [X MP 2023 # 300] Soit G un groupe, $\mathcal{M}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^G$.

Exercice 279 [X MP 2023 # 301] On note C l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont non nuls. Pour $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2} \in C$, on pose $J(M) = \left(\frac{1}{m_{i,j}}\right)_{1\leq i,j\leq 2}$. Soit $\varphi : C \to C$ qui a M associe $J(M^{-1})$. Montrer que φ est bien définie et trouver a quelle condition sur $M \in C$ la suite $(\varphi^n(M))_{n\geq 1}$ est stationnaire, ou bien périoddique a partir d'un certain rang.

Démonstration. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (ad - bc)\begin{pmatrix} 1/d & -1/b \\ -1/c & 1/a \end{pmatrix}$ Si on est un point fixe, on vérifie $a/b = -\frac{1/d}{1/b}$, c'est-à-dire $b^2 = -ad$ et $c^2 = -ad$. Donc $b = \pm c$, mais si $b = -c$, $ad - bc = 0$, donc $b = c$.
et $ad - bc = 2ad = -2b^2$
Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$, donc pas de point fixe.

Si on applique une deuxième fois l'application, comme $\varphi(cx) = c\varphi(x)$, on obtient $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (ad - bc)\left(\frac{1}{da} - \frac{1}{bc}\right)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Donc on est point fixe si et seulement si $(ad - bc)(bc - ad) = adbc \Leftrightarrow (ad - bc)^2 = -adbc \Leftrightarrow X^2 + Y^2 = 3XY$. M'enfin, si c'est le cas, c'est directement le cas je dirais, peut-être. □

Exercice 280 [X MP 2023 # 302] Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ non nulle et $M = I_n + 3R$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k \neq I_n$.

Exercice 281 [X MP 2023 # 303] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $p, u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que p est un projecteur et que $pu + up = u$. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = 0$. SUP

Démonstration. On a $u(\mathrm{Ker}\, p) \subset \mathrm{Im}\, p$ et $u(\mathrm{Im}\, p) \subset \mathrm{Ker}\, p$. □

Exercice 282 [X MP 2023 # 304] Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi_{A,B} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. SUP
Soit $T = \{\varphi_{A,B},\ (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.

- L'ensemble T est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
- Montrer que l'espace vectoriel engendré par T est $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Démonstration. • Non.

- On prend les $E_{ij}ME_{k\ell}$, ils forment une famille libre. □

Exercice 283 [X MP 2023 # 305] Pour une matrice de projecteur $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $R_P = \det(I_n + (X - 1)P)$. SUP

- Calculer R_P en fonction de P.
- Soient P, Q des matrices de projecteur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $PQ = QP = 0$. Montrer que $R_PR_Q = R_{P+Q}$.
- Soit φ un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - ▷ Montrer que $\varphi(E_{i,i})$ est un projecteur de rang 1, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
  - ▷ Que dire du rang de $\varphi(E_{i,j})$, pour i, j dans $[\![1, n]\!]$?
  - ▷ Montrer que $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Im}\,\varphi(E_{i,1})$.

Démonstration. • $R_P = X^r$

- C'est-à-dire que $\operatorname{rang}(P+Q) = \operatorname{rang} P + \operatorname{rang} Q$.
- Pas de rapport avec ce qui précède.

  ▷ □

Exercice 284 [X MP 2023 # 306] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une application $q : V \to \mathbb{C}$ telle que $u^2 = q(u)\,\mathrm{id}$ pour tout $u \in V$.

- Monter que, pour tous $u, v \in V$, il existe $B(u,v) \in \mathbb{C}$ tel que $uv + vu = 2B(u,v)\,\mathrm{id}_E$.
- Montrer que B est une forme bilineaire.
- Soient $d \geq 1$ et $u_1, \ldots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $(u_1, \ldots, u_d)$ est libre.
- Soient $d \geq 2$ et $u_1, \ldots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que les u_i sont de trace nulle, et que $\dim E$ est paire.

Exercice 285 [X MP 2023 # 307] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On suppose que $\varphi(I_n)$ est inversible et que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(A)\,\varphi(B)$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(A) = PAP^{-1}$.

Exercice 286 [X MP 2023 # 308]
- Caracteriser les endomorphismes φ de $\mathbb{C}(X)$ vérifiant $(*)$: $\forall F_1,\, F_2 \in \mathbb{C}(X), \varphi(F_1F_2) = \varphi(F_1)\,\varphi(F_2)$.
- Déterminer les automorphismes de $\mathbb{C}(X)$ vérifiant $(*)$.

Exercice 287 [X MP 2023 # 309] Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i, j, m_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$.

- Montrer que 1 est valeur propre de M et que tout valeur propre de M est de module ≤ 1.
- On note $\mu = \min_{1\leq i\leq n} m_{i,i}$. Montrer que le spectre de M est inclus dans le disque de centre μ et de rayon $1 - \mu$.
- On suppose que $\mu > 0$ et que 1 est valeur propre de multiplicité 1 dans χ_M. Montrer que $(M^p)_{p\geq 1}$ converge vers une matrice de rang 1 dont toutes les lignes sont égales.
- On se donne trois réels strictement positifs p, q, r tels que $p + q + r = 1$. On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $b_{i,i} = r$, $b_{i,i+1} = q$ si $i > 2$, $b_{1,2} = p + q$, $b_{i+1,i} = p$ si $i < n - 1$, $b_{n,n-1} = p + q$, et tous les autres coefficients sont nuls. Montrer que 1 est valeur propre simple de B, et expliciter la limite de $(B^k)_{k\geq 0}$.

Exercice 288 [X MP 2023 # 310] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, F un sous-espace de E stable par f. Montrer que l'induit par f sur F est cyclique.

Exercice 289 [X MP 2023 # 311] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $a, b \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ telles que $ab - ba = fv$.

- Que peut-on dire de $\det(ab - ba)$?
- Montrer que a et b sont cotrigonalisables.
- À quelle condition sur $u \in \mathcal{L}(E)$ existe-t-il $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uw - wv$ soit de rang 1 ?

Démonstration.
- fv est un endomorphisme de rang 1, on note son image $\mathrm{Vect}(t)$.
- Si $\operatorname{Ker} b$ non stable par a, alors il existe x tel que $-b(a(x)) \in \operatorname{Vect} t$, donc $t \in \operatorname{Im} b$. Alors $\operatorname{Im} b$ est stable par a.

  En appliquant ça à des $b - \lambda I_n$ répétitivement, on trouve un vecteur propre commun.
- Si u a deux valeurs propres distinctes, en diagonalisant u par blocs et en prenant une matrice v avec un unique 1 à l'intersection, on obtient une matrice de rang 1.

  Si u a une unique valeur propre, on peut supposer u nilpotente. Alors, si u est non nulle, on peut prendre v de rang 1, qui envoie un élément de l'image de u sur un élément du noyau de u, et on obtient $uv - vu$ de rang 1. □

Exercice 290 [X MP 2023 # 312] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout vecteur $x \in E$, l'ensemble $\{f^n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

- Montrer que, si $f \in \mathrm{GL}(E)$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = \mathrm{Id}$.
- On revient au cas général. Montrer l'existence de $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $f^{p+k} = f^p$.

Démonstration.
- Les valeurs propres sont des $\mathbb{U}_k$, et si elle n'était pas diagonalisable… □

Exercice 291 [X MP 2023 # 313] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de permutation associée a σ. Montrer que, si σ et σ' sont dans $\mathcal{S}_n$, σ et σ' sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

Exercice 292 [X 2023 # 314] Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
2. Montrer que $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q + (\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p)$.
3. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
4. Montrer que le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0, 1]$.

Démonstration. □

Exercice 293 [X MP 2023 # 315] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $L_n = D^n((X^2 - 1)^n)$, ou D designe l'operateur de derivation des polynômes.

- Déterminer le degré de L_n. Montrer que $\int_{-1}^1 L_n(t)\,P(t)\,dt = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Montrer que L_n est scinde a racines réelles simples $x_1 < \cdots < x_n$ avec $x_1 > -1$ et $x_n < 1$.
- Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_{-1}^1 P(t)\,dt = \sum_{k=1}^n a_k P(x_k)$.

Exercice 294 [X 2023 # 316] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes.

- $\alpha = 2$.
- $\forall n \geq 1, \forall (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n) \in (S^2)^{3n}, \exists p \in S^2$ tel que
$$\sum_{i=1}^{n} \|p - a_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \|p - b_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \|p - c_i\|^\alpha$$

Démonstration. Pour $\alpha = 2$, on veut montrer que si on prend $3n$ points dans la sphère unité, il existe un point tel que la somme des distances au carré soient égales.
Pour $n = 1$: c'est l'intersection de la droite passant par l'origine et le centre du cercle circonscrit au triangle.
!! Pour $n = 2$, On peut $P_a(x) + P'_a(y) = P_b(x) + P'_b(y) = \ldots$ □

Exercice 295 [X MP 2023 # 317] Existe-t-il $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{Q})$ telle qu'il n'existe pas $B \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{Q})$ vérifiant $B^2 = A$?

Démonstration. S'il en existe une, son opposé marche aussi. On a $\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$, si on pouvait appliquer ça à chaque fois, problème de taille du dénominateur. □

Exercice 296 [X MP 2023 # 318] Soient E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{S}(E)$, $\Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \|f(v)\|^2 - \langle f(v), v\rangle^2 \end{array}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ admette un extremum.

Démonstration. Si λ est valeurs propres, $\Phi(tv_\lambda) = \lambda^2 t^2 - \lambda t^2 = (\lambda^2 - \lambda)t^2$. Il est donc nécessaire, ou bien que toutes les valeurs propres sont $\in [0, 1]$, ou bien toutes dans le complémentaire. □

Exercice 297 [X MP 2023 # 319] On considère dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

- Soit $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $K^2 = -I$. Montrer que $K^T J \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $J = K^T J K$.
- On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telles que $K^2 = -I$ et $K^T J \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $K \in \mathcal{C}$. Montrer que $K + J$ est inversible et que $(K + J)^{-1}(K - J)$ est symétrique.
- Soit $K \in \mathcal{C}$. On pose $S = (K + J)^{-1}(K - J)$. Montrer que $SJ + JS = 0$.

Exercice 298 [X MP 2023 # 320] Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2, \det(A + B) \geq \max(\det(A), \det(B))$.

Démonstration. Simple ? Écrire $A = PDP^T$ et $B = PP^T$, si $\det B > 0$. □

Exercice 299 [X MP 2023 # 321] Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\operatorname{tr}\left(e^A e^B\right) > 0$.
- Montrer que $\operatorname{tr}\left(e^{A+B}\right) \leq \operatorname{tr}\left(e^A e^B\right)$.

Exercice 300 [X 2023 # 322] Soit $t_1, \ldots, t_n$ des réels.

1. Montrer que la matrice $A = (t_i t_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. On suppose $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$. Montrer que la matrice $B = (\min(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. On suppose $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$. Montrer que $M = B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration. 1. $X^T A X = (\sum t_i x_i)^2$
2. $\int \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i}\right)^2$
3. Il s'agit de montrer que $\int_0^1 \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i}\right)^2 \geq (\sum t_i x_i)^2$, c'est-à-dire $\int h^2 \geq \left(\int h\right)^2$, car l'intégrale est sur $[0, 1]$. □

Exercice 301 [X MP 2023 # 323] On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire standard et on note $\|A\| = \sup_{X \in B_f(0,1)} \|AX\|$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $|||\,|||$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $|||A||| = \sup_{(X,Y) \in B_f(0,1)^2} |\langle AX, Y\rangle|$.
- On prend $A = \left(\dfrac{1}{i + j + 1}\right)_{0 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_0 \cdots x_n)^T$ et $Y = (y_0 \cdots y_n)^T$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, donner une interpretation de $\langle AX, Y\rangle$ a l'aide d'une intégrale faisant intervenir $P : t \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{k=0}^n x_k e^{ikt}$ et $Q : t \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{k=0}^n y_k e^{ikt}$.
- En déduire que $|||A||| \leq 2\pi$.
- Montrer que l'on a meme $|||A||| \leq \pi$.

2) Analyse

Exercice 302 [X MP 2023 # 324] Trouver $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, discontinue en $(0,0)$, dont la restriction a toute droite passant par $(0,0)$ est continue.

Démonstration. $f(x,y) = \frac{x^4}{y^2+x^6}$ □

Exercice 303 [X 2023 # 325] Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un convexe fermé non vide.

1. On suppose K borné. Montrer que K s'écrit comme intersection de carrés fermés.
2. On suppose K non borné et $K \neq \mathbb{R}^2$. Donner des exemples de tels convexes. Montrer que si K contient deux droites, celles-ci sont parallèles.
3. On suppose toujours K non borné. Montrer que K contient une demi-droite.

Démonstration.
1. Si $x \notin K$, on peut trouver une droite séparant x de K, donc un carré contenant K et non x.
2. Si K contient deux droites non parallèles, $K = \mathbb{R}^2$. La partie au dessus du graphe de $x \mapsto e^x$.
3. Fixer $y \in K$, et une suite $(x_n) \in K$ qui tend vers ∞, et prendre une valeur d'adhérence des segments $[y, x_n]$. □

Exercice 304 [X MP 2023 # 326] Déterminer les endomorphismes continus du groupe $\mathbb{C}^*$.

Exercice 305 [X MP 2023 # 327] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de la structure euclidienne canonique. On définit une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ en posant, pour $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sup\left\{\|Mx\|\ ;\ x \in \mathbb{R}^d,\ \|x\| = 1\right\}$.

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.
- Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On suppose que la série de terme général $|u_n - 1|$ converge.
  Montrer que la suite de terme général $\prod_{k=0}^{n} u_k$ converge.

Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On suppose que la série de terme général $\|M_n - I_d\|$ converge. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_n$.

- Montrer que la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ converge.
- Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la suite de terme général $M_{\sigma(0)} \times \cdots \times M_{\sigma(n)}$?
- Soit $E = \left\{\prod_{k=0}^{+\infty} M_{\sigma(k)},\ \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})\right\}$. Existe-t-il une suite de matrices pour laquelle E n'est pas ferme ?
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Existe-il $(M_n)_{n\geq 0} \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que E possede exactement k composantes connexes ?

Démonstration. !! □

Exercice 306 [X MP 2023 # 328] On définit la longueur d'un intervalle borne I de bornes a et b par $\ell(I) = |b-a|$. - Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $I_1, \ldots, I_N$ des intervalles bornes de $\mathbb{R}$ tels que $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{N} I_i$. Que peut-on dire de $\sum_{i=1}^{N} \ell(I_i)$?

- Soit $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p = 1$, $t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $x_{q-1} \leq t_q \leq x_q$ et $x_q - x_{q-1} \leq \delta(t_q)$.
- Soit $(I_n)_{n\geq 1}$ une suite d'intervalles bornes de $\mathbb{R}$ telle que $[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Que peut-on dire de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n)$?

Démonstration. •

- Incompréhensible. Quel sens pour x_1 ? Il faudrait que δ soit continue ?
- Si $\sum \ell(I_n) < 1$, on montre que ce n'est pas possible. On considère une suite (ε_n) telle que $\sum \ell(I_n) + \varepsilon_n < 1$.
  On choisit $x_0 = 0$, puis le plus grand intervalle restant qui contient (n'existe pas …) x_0, puis $\ell(I_{n_0}) < x_1 < \ell(I_{n_0}) + \varepsilon_{n_0}$, puis le plus grand qui le contient etc. □

Exercice 307 [X MP 2023 # 329] Dans $\mathbb{R}^2$, on note D le disque unite ferme pour la norme infinie, C la sphere unite pour la norme infinie. On cherche a montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $r : D \to C$ telle que la restriction de r a C soit l'identite.

- On considère une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, antisymmetrique (i.e. $f(x,y) = -f(y,x)$), et $A = (a_{i,j})_{i,j\leq n}$ une matrice réelle telle que : $\forall i, j \in [\![1, n-1]\!]$,

$f(a_{i,j}, a_{i+1,j}) + f(a_{i+1,j}, a_{i+1,j+1}) + f(a_{i+1,j+1}, a_{i,j+1}) + f(a_{i,j+1}, a_{i,j}) = 0.$
Montrer que :
$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i,1}, a_{i+1,1}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{n,j}, a_{n,j+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1,n}, a_{i,n}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{1,j+1}, a_{1,j}) = 0$

- Soit $M \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & & & & 3 \\ \vdots & & M' & & \vdots \\ 1 & & & & 3 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ ou $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

est a coefficients dans $\{1,2,3\}$. Montrer qu'au moins un des petits carrés de M comporte trois valeurs differentes.

- Montrer qu'on dispose d'un $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in D$ vérifiant $\|x-y\|_\infty \leq \eta$, on a $\|r(x) - r(y)\| \leq \frac{1}{10}$.
- Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{n-1} \leq \eta$. Pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, on pose

$v_{i,j} = \left(1 - 2\frac{i-1}{n-1}, 1 - 2\frac{j-1}{n-1}\right)$.
Montrer que, pour tous $i, j \in [\![1, n-1]\!]$, $v_{i,j}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}, v_{i,j+1}$ sont contenus dans une boule de rayon $1/10$.

- En utilisant une fonction bien choisie de C dans $\{1, 2, 3\}$, aboutir a une contradiction et conclure.
- Utiliser ce résultat pour montrer que toute fonction continue de D dans D admet un point fixe.

Exercice 308 [X 2023 # 330] On dit qu'une famille $(D_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de disques fermés de $\mathbb{R}^2$ vérifie $(\mathcal{P})$ si

- pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ distincts, D_s et D_t ont des centres distincts,
- pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ tels que $s < t, D_s \subset D_t$.

1. Existe-t-il une telle famille ?
2. Soit $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ une fonction C^1 et injective. Existe-t-il une famille $(D_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ vérifiant $(\mathcal{P})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+, A(t)$ soit le centre de D_t ?
3. Le résultat subsiste-t-il si A est seulement supposée continue ?

Démonstration. 1. Cercles de centre $(x, 0)$, de rayon x.
2. Prendre D_t de rayon la longueur de la courbe de $A(0)$ à $A(t)$.
3. Prendre une fonction non réglée. □

Exercice 309 [X MP 2023 # 331] Dans tout l'enonce, $\mathbb{K}$ designe $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne une $\mathbb{K}$-algèbre A de dimension finie, et on identifie $\mathbb{K}$ a une sous-algèbre de A via $\lambda \mapsto \lambda.1_A$. On suppose donnée sur A une norme multiplicative $\|\ \|$, autrement dit une norme vérifiant $\forall(a, b) \in A^2,\ \|ab\| = \|a\|\,\|b\|$. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Soit $x \in A$. Montrer qu'il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ \|z_0 - x\| \leq \|z - x\|$.
- On suppose $\|a\| = 2$ pour $a = z_0 - x$. Montrer que $\|a - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\| \geq 2$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
- En déduire que $\|a - 1\| = 2$.
- En déduire que $A = \mathbb{C}$.
- Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant des polynômes annulateurs.

Dans la suite, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Est-ce que A est nécessairement égale a $\mathbb{R}$?
- On admet qu'il existe une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ ayant une base de la forme $(1, i, j, k)$ ou i, j, k anticommutent deux a deux et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. On considère la symétrie $x \mapsto \overline{x}$ par rapport a $\mathbb{R}$ parallélément a $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$, et on considère la norme $N : q \mapsto \sqrt{\overline{q}q}$. Montrer que N est bien définie, est effectivement une norme, et qu'elle est multiplicative.
- Montrer que A est isomorphe, en tant que $\mathbb{R}$-algèbre, a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Exercice 310 [X 2023 # 332] Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^4 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{N}$.

Démonstration. Dérivée discrète. □

Exercice 311 [X MP 2023 # 333] Pour $n \geq 2$, on note $\ell_n = \min\left\{k \in [\![1, n]\!] \mid \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{1}{2}\right\}$.

- Montrer que $\ell_n = o(n)$.
- Donner un équivalent de ℓ_n.

Démonstration.
- C'est montrer que $\forall c,\ \prod_{i=1}^{cn} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{1}{2}$ APCR. Ou bien par comparaison $\sum / \int$, ou somme de Riemann un peu technique.
- La comparaison $\sum / \int$ devrait marcher… □

Exercice 312 [X 2023 # 334] Soient (a_n) et (b_n), deux suites réelles positives telles que la série de terme général b_n converge, que la série de terme général na_n diverge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = b_n + \sum_{k=0}^n u_k a_{n-k}$.
2. Montrer que (u_n) est bornée.
3. Montrer que, si (u_n) converge, alors sa limite est 0.

Démonstration. Cf une année précédente. □

Exercice 313 [X MP 2023 # 335] On considère la suite réelle définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que $x_n \sim C^{2^n} n^2$ quand $n \to +\infty$.

Démonstration. !! □

Exercice 314 [X MP 2023 # 336] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par $a_0 = 1, a_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = 2a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2}$. Donner un équivalent de a_n.

Exercice 315 [X MP 2023 # 337] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 = \pi/2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sin(a_n)$. Nature de la série de terme général a_n^2 ?

Démonstration. On a $a_{n+1} - a_n \sim a_n^3$, donc $\sum a_n^3$ converge. Il faut trouver un équivalent de a_n, via la méthode usuelle. □

Exercice 316 [X MP 2023 # 338] Soit $\sum u_n$ une série convergente de réels positifs. Existe-t-il une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs tendant vers $+\infty$ telle que la série $\sum u_n v_n$ converge ?

Exercice 317 [X MP 2023 # 339] Soit (x_n) une suite réelle. On suppose que $(x_n y_n)$ est sommable pour toute suite réelle (y_n) de carré sommable. Montrer que (x_n) est de carré sommable.

Exercice 318 [X MP 2023 # 340] Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 319 [X MP 2023 # 341] Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{\sin(\ln n)}{n}$.

Exercice 320 [X MP 2023 # 342] On pose $u_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $n \geq 1$.

- Montrer que u converge vers une limite ℓ.
- Montrer que $\ell = -(\sqrt{2}+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.
- Montrer que $u_n = \ell + \frac{1}{2n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
- Montrer que $\ell = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2}$.
- Étudier les variations de u.
- Déterminer un développement asymptotique similaire pour la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
- Soit $\alpha \in]0,1[$. Donner un développement asymptotique à trois termes pour $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 321 [X 2023 # 343] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Démonstration. La série $\sum \frac{1}{f(n)}$ a la même nature que $\int \frac{1}{f}$. On peut raccorder f de manière $\mathcal{C}^1$, puis on pose $u = f(t)$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{uf'(f^{-1}(u))}\,\mathrm{d}u,$$

puis IPP. □

Exercice 322 [X MP 2023 # 344]

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{m}}{(m+n)\sqrt{n}} \leq \pi$.

  Ind. : Dans $\mathbb{R}^2$, considérer les points $x_n = (\sqrt{m}, \sqrt{n})$ et l'intersection r_n du cercle $C(0, \sqrt{m})$ avec le segment $[0, x_n]$.
- Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites de carré sommable et a termes positifs. On note $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ et $B = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$. Montrer que $\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi\sqrt{AB}$.

Démonstration.

- Se fait par comparaison intégrale.

  Méthode géométrique : $\frac{1}{m+n}$ est l'inverse de la longueur de l'hypothénuse. IDK
- ! ! À Relier, Carlemann. □

Exercice 323 [X MP 2023 # 345]

- Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(xy) = f(x)\,f(y)$.
- Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall x \neq y \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$.

Démonstration.

-
- ! ! □

Exercice 324 [X 2023 # 346] Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique ?

Démonstration. Easy. □

Exercice 325 [X MP 2023 # 347] Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $|f'| + |f+1| \leq 1$.

Démonstration. ? ? On obtient $f \leq 0$, $f = 0 \to f' = 0$, la fonction est coincée entre -2 et 0.
On peut juste poser $g = f + 1$, auquel cas $|g| + |g'| \leq 1$. La fonction g peut osciller tranquillement… □

Exercice 326 [X MP 2023 # 348] Pour $x \geq 1$, on note $\Theta(x) = \sum_{p\in\mathcal{P},\ p\leq x} \ln(p)$. Montrer que $\Theta(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x)$. **SUP**

Démonstration. Utiliser $\binom{2n}{n}$. □

Exercice 327 [X MP 2023 # 349] Soit F un ferme de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

Démonstration. $e^{-1/d(x,F)}$ □

Exercice 328 [X MP 2023 # 350] Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de $[0,1]^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, il existe une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]^2$ et une suite strictement croissante $(t_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $[0,1]$ telle que $f(t_n) = x_{\sigma(n)}$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 329 [X MP 2023 # 351] Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$.

Exercice 330 [X MP 2023 # 352] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n la derivée n-ième de $(X^2-1)^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} PL_n = 0$.
- Montrer que L_n possede n racines distinctes $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ dans $]-1,1[$.
- Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(x_i)$.

Exercice 331 [X MP 2023 # 353] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^3$.

- On suppose n impair. Montrer que $I_n = 0$.
- On suppose n multiple de 4. Montrer que $I_n > 0$.
- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{4^{3n-1}}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2n}(x)\, \sin^{2n}(y)\, \sin^{2n}(x+y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

.

Démonstration.

- Changement de variable, à extraire ?
- Il suffit $\binom{n}{k}^3 \leq \frac{1}{2}\left(\binom{n}{k-1}^3 + \binom{n}{k+1}^3\right)$, $\frac{1}{k^3(n-k)^3} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-k)^3(n-k+1)^3} + \frac{1}{k^3(k+1)^3}\right)$ Par l'AM-GM, il suffit $\frac{1}{k^3(n-k)^3} \leq \frac{1}{(n-k+1)^3(k+1)^3}$, ce qui est faux. ! !
-

$\square$

Exercice 332 [X MP 2023 # 354]

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que$H_n : (a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \int_0^{2\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) - f(t)\right)^2 dt$ admet un minimum, atteint en un unique point, et donner une expression simple de ce point en fonction de f.
  - ▷ Déterminer la limite de $\min H_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 333 [X MP 2023 # 355] Justifier l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{dt}{2+\lfloor \frac{1}{t} \rfloor}$.

Exercice 334 [X 2023 # 356] Soit $f \colon x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f(x) < \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que $f(x) > \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}$ pour tout $x > 0$.
3. Donner un développement limité à quatre termes de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Démonstration. $\square$

Exercice 335 [X 2023 # 357] Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Pour $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{|u|, |v|\}$, calculer $I_r(u,v) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(u-re^{i\theta})(v-re^{i\theta})}$.

Démonstration. $\square$

Exercice 336 [X MP 2023 # 358] Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ intégrable, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$. On suppose que f' s'annule en un unique $M \in \mathbb{R}$.

- Donner le tableau de variations de f. Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^{m} f(t) dt = \frac{1}{2}$.
- Montrer que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 < M < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2) = \ell$.
- Supposons que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$, $f'(x_1) + f'(x_2) > 0$. Montrer que $m > M$.

Démonstration.

- f est croissante, puis décroissante, puisque sa limite est nulle en $\pm\infty$.
-
- Revient à montrer que $\int_{-\infty}^{M} f(t)\, \mathrm{d}t < \int_{M}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$, via un changement de variable. $\square$

Exercice 337 [X MP 2023 # 359]

- Soient a et b deux suites réelles telles que $b - a$ converge vers 0. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $m \geq 0$, il existe un entier N_m tel que $\forall n \geq N_m,\ a_m \leq f_n \leq b_m$. Montrer que (f_m) converge uniformément vers une fonction constante.
- On note H l'ensemble des fonctions continues $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes et telles que $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que H forme un groupe pour la composition des fonctions.
- Soit $f \in H$. Montrer que $\sup\{f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}\} < 1 + \inf\{f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration.

- Suite de Cauchy. $\square$

Exercice 338 [X MP 2023 # 360] On note F l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$, C l'ensemble des fonctions continues de F. On note aussi $I = \{f \in F\ ;\ \forall a \in [0,1],\ \{x \in [0,1],\ f(x) \leq a\}$ est ferme$\}$ et $S = \{f \in F\ ;\ \forall a \in [0,1],\ \{x \in [0,1],\ f(x) \geq a\}$ est ferme$\}$.

Pour $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $L_n(f) : x \in [0,1] \mapsto \inf_{y \in [0,1]} (f(y) + n|x-y|) \in [0,1]$.

- Montrer que $C = I \cap S$.
- Montrer que, si $f \in F$, $L_n(f)$ est une suite croissante d'applications continues.
- Soit $f \in F$. Montrer que $f \in I$ si et seulement s'il existe une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions de C telle que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$.

Démonstration. ! ! $\square$

Exercice 339 [X MP 2023 # 361] Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ de classe C^1 telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \sim \dfrac{a}{x}$ quand $x \to +\infty$.

- Rappeler le théorème d'intégration des relations de comparaison.
- Donner un équivalent de $\ln f(x)$ quand $x \to +\infty$.

- Déterminer le domaine de définition de la fonction $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)e^{-nx}$.
- Déterminer les limites de u aux bornes de son intervalle de définition.
- Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \sim \dfrac{C}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 340 [X MP 2023 # 362] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{n+4}{n+1}a_{n+1} + \frac{3n+7}{n+2}a_n.$$

- Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif.
- Déterminer la valeur de ce rayon de convergence.

Démonstration.
- On $a_{n+2} \leq Ca_{n+1} + Da_n$.
- On a $a_{n+2} \geq a_{n+1} + 3a_n$, et pour tout ε, $a_{n+2} \leq (1+\varepsilon)a_{n+1} + (3+\varepsilon)a_n$. □

Exercice 341 [X MP 2023 # 363] Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ sous reserve de convergence.

- Déterminer le domaine de définition de f.
- Étudier la continuité puis la dérivabilité de f.
- Donner un équivalent simple de f en 1^-.
- Montrer que f est développable en série entière, et preciser le développement associé.

Démonstration.
- $]-1,1[$
- pas de soucis.
- Comparaison $\sum / \int$. □

Exercice 342 [X MP 2023 # 364]
- Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ somme d'une série entière. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(z) = O(z^k)$ quand z tend vers 0. Montrer que, pour r voisin de 0^+, il existe au moins $2k$ nombres complexes z de module r tels que $f(z)$ soit un nombre réel.
- Soient A et B deux polynômes a coefficients réels dont toute combinaison lineaire a coefficients réels est scindée ou nulle. Soient $x < y$ deux racines de A. Montre que $[x, y]$ contient au moins une racine de B.

Exercice 343 [X MP 2023 # 365] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal a 1 et de somme f.

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall r \in [0, 1[$, $\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| d\theta \leq C$.

Montrer que $\int_0^1 |f(t)| dt < +\infty$.

Démonstration. Formule de Cauchy donne $(a_k k)$ bornée, donc $\sum |a_k|/k$ converge. □

Exercice 344 [X 2023 # 366] Soit $P = a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{Z}[X]$ avec a_1 impair.

1. Montrer l'existence d'une suite réelle $(b_k)_{k\geq 0}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(P(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$.
2. Montrer que les b_k sont tous non nuls.

Démonstration.
1.
2. Quand on dérive successivement e^P, on trouve une quantité qui vaut toujours 1 modulo 2. □

Exercice 345 [X MP 2023 # 367] Pour x et q dans $]0, 1[$, on pose $(x, q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - q^k x)$.

- Montrer que la suite de terme général $(x, q)_n$ converge vers un réel $(x, q)_\infty > 0$.
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{(x,q)_n}{(q,q)_n} z^n$. On notera $f_{x,q}$ sa somme sur le disque ouvert de convergence, et D son disque ouvert de convergence.
- Etablir l'identife $f_{x,q}(z) - f_{x,q}(qz) = (1-x)zf_{x,q,q}(z)$ pour tout $z \in D$.
- Etablir l'identife $f_{x,q}(z) = \frac{1-xz}{1-z} f_{x,q}(qz)$ pour tout $z \in D$.
- Démontrer que $f_{x,q}(z) = \frac{(zx,q)_\infty}{(z,q)_\infty}$ pour tout $z \in D$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Déterminer, pour tout $z \in D$, la limite de $f_{q^\alpha,q}(z)$ quand q tend vers 1^-.

Exercice 346 [X MP 2023 # 368]
- Pour $x \geq 0$ on pose $f(x) = \text{card}\left\{(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, n^2 + m^2 \leq x\right\}$. Trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
   - ▷ On pose $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2}$. Trouver un équivalent de g en 1^- en utilisant g^2.

Démonstration.
-
- Considérer $(\sum t^n)g(t)$. □

Exercice 347 [X MP 2023 # 369] Soit p un nombre premier. Pour tout $F \in \mathbb{F}_p[X]$, on pose $|F| = p^{\deg F}$.

- Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}\, s > 1$. Montre que la famille $\left(|F|^{-s}\right)$, indexée par les polynômes $F \in \mathbb{F}_p[X]$ unitaires, est sommable et calculer sa somme, qu'on notera $z(s)$.
- On note A l'ensemble des polynômes unitaires de $F \in \mathbb{F}_p[X]$ sans facteur carré, c'est-a-dire tels que : $\forall D \in \mathbb{F}_p[X]$, $D^2|F \Rightarrow \deg D = 0$. Montre que $\sum_{F\in A} |F|^{-s} = \frac{z(s)}{z(2s)}$.

- En déduire, pour tout $d \in \mathbb{N}$, la proportion de polynômes sans facteur carré parmi les polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{F}_p[X]$.

Démonstration. !! todo □

Exercice 348 [X MP 2023 # 370] Soit f continue sur $[0,1]$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{1+xt} dt$ pour $x \geq 0$. On suppose $f(0) \neq 0$.

- Donner un équivalent de g lorsque $x \to +\infty$.
- On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Majorer l'ecart avec l'équivalent trouve.
- Que peut-on dire de plus si f est de classe $\mathcal{C}^2$?

Démonstration. • CVD □

Exercice 349 [X MP 2023 # 371] • Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2x} \, dt$.

▷ Montrre, pour tout réel $x > 0$, l'égalité $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{u \exp\left(-u^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{1-e^{-u^2}}} du$.

Exercice 350 [X MP 2023 # 372] • Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) \, dt$ pour tout réel x.

- On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\,(1+t^2)} \, dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\forall x > 0,\ F^{''}(x) = F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$
- Donner une expression simplifiée de F.

Exercice 351 [X MP 2023 # 373] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ de carré intégrable. On pose $S_f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y} dy$.

- Justifier la bonne définition de S_f.
- Montrer que S_f est de carré intégrable.

Démonstration. • CS

- Relier à des semblables. □

Exercice 352 [X MP 2023 # 374] Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t-xt^\alpha} \, dt$.

- Déterminer la limite et un équivalent de I en $+\infty$.
- Donner un développement asymptotique de I a tout ordre.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce développement soit la somme partielle d'une série convergente pour tout $x > 0$.

Exercice 353 [X MP 2023 # 375] • Soient K un segment et $f : K \to K$ une fonction continue croissante. Montrer que f admet un point fixe.

▷ On considère l'équation différentielle non lineaire $(E) :\ x' = \cos(x) + \cos(t)$. On admet que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution φ_a de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(0) = a$, et que, pour tous a, b réels distincts, les fonctions φ_a et φ_b ne coincident en aucun point. Montrer que (E) possede une solution 2π-périoddique.

Exercice 354 [X MP 2023 # 376] Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $a \in [0,1]$.

- Justifier qu'il existe une unique fonction $x_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x'(t) = f(t) - (f(t) + g(t))\, x(t)$ et $x(0) = a$.
- On suppose que f et g ont une limite finie strictement positive en $+\infty$. Montrer que x_a tend vers 0 en $+\infty$.
- Montrer que f et g peuvent être choisies de telle sorte que x_a n'ait pas de limite en $+\infty$.
- On suppose que l'une des fonctions f et g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $x_1 - x_0$ tend vers 0 en $+\infty$.

Démonstration. 1. On peut exprimer la solution, via $\exp$.
2. Utiliser l'expression.
3. Prendre $f + g$ constante, et f qui oscille.
4. Expression intégrale. □

Exercice 355 [X MP 2023 # 377] Soient $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact et $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = v(t)$ dont on note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions.

- Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $f^+_{a,b}$ (resp. $f^-_{a,b}$) de (E) telle que $f^+_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ pour tout t dans un voisinage de $+\infty$, (resp. $f^-_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ pour tout t dans un voisinage de $-\infty$.
- Montrer que $\mathcal{S}_E = \{f^+_{a,b}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{f^-_{a,b}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
- On pose $c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\cos(\omega t)\, dt$ et $s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\sin(\omega t)\, dt$, et on définit l'application $S_\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par : $f^-_{a,b} = f^+_{S_\omega(a,b)}$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Expliciter l'application S_ω en fonction de $c(\omega)$ et $s(\omega)$.
- On suppose que $S_\omega = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ pour tout $\omega > 0$. Montrer que v est identiquement nulle.

Démonstration. 1. Appliquer les conditions aux bords du compact.
2. Pas de difficulté.
3. Méthode de variation de la constante je pense, à écrire. □

Exercice 356 [X MP 2023 # 378] Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \leq q_2$. On considère l'équation différentielle $(E_i) : y^{''} + q_i(t)\, y = 0$ pour $i \in \{1,2\}$.

- Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros de y_1. Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
- Soient $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, m, M deux réels strictement positifs tels que $m \leq q \leq M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs d'une solution non nulle x de $y'' + q(t)\, y = 0$.
- Montrer que les zeros de x fortner une suite strictement croissante $(t - n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq t_{n+1} - t_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 357 [X MP 2023 # 379]
- Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $pu+up = u$. Montrer que $\operatorname{tr}(u) = 0$.
- Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. On note G l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E de rang r. Soit $p \in G$. Déterminer l'espace vectoriel tangent à G en p.

Démonstration.
- $pup = 0$
- u symétrique + $pu + up = u$ (puisque c'est le noyau de l'application linéaire).

  En conjuguant par une matrice orthogonale, on se ramène à $u = J_r$.

  On considère $\mathcal{G} = \{S \in \mathcal{S}_n \mid J_r S + S J_r = S\}$. Matriciellement, $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} O & U \\ U^T & O \end{pmatrix} \right\}$.

  On a l'inclusion de l'espace tangent dans $\mathcal{G}$.

  Réciproquement, J_r est la projection sur $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$.

  Étant donné des coefficients u_{ij}, et $t \in \mathbb{R}$, on peut considérer $F_t = \operatorname{Vect}(e_1 + \sum_{j \geq r+1} u_{1j} e_j, \dots, e_r + \sum_{j \geq r+1} u_{rj} e_j)$, et P_t la projection orthogonale sur F_t.

  En utilisant l'expression de la matrice de P_t via des produits scalaires, on obtient (?). □

Exercice 358 [X MP 2023 # 380] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considère le carré de coins $\{0,1\} \times \{0,1\}$. On choisit trois points A, B et C sur ce carré. **SUP**

- Montrer qu'il existe une disposition des points A, B et C maximisant l'aire du triangle ABC.
- Caracteriser une telle disposition.

Démonstration.
-
- Si A n'est pas dans un coin, il faut nécessairement que le côté BC soit parallèle au côté sur lequel A est. □

3) Géométrie

Exercice 359 [X MP 2023 # 381] Pour $n \geq 2$, on note P_n le perimêtre d'un polygone regulier a 2^n cotes inscrit dans le cercle unite.
- Calculer P_n et étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n \geq 2}$.
- Etablir une relation de recurrence entre P_n et P_{n+1}.
- Estimer l'erreur $2\pi - P_n$.
- Proposer une methode d'approximation de π par exces.

Exercice 360 [X MP 2023 # 382] On se donne un triangle direct ABC du plan complexe. On note respectivement a, b, c les mesures principales des angles orientes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On note P l'unique point tel que $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB})$; Q l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AC})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ})$; R l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ et $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BA})$. L'objectif est de montrer que le triangle PQR est equilateral.
- On note f, g, h les rotations de centres respectifs A, B, C et d'angles de mesures respectives $\frac{2a}{3}$, $\frac{2b}{3}$ et $\frac{2c}{3}$. Montrer que P est l'unique point fixe de $g \circ h$.
- Montrer que $(f^3 \circ g^3 \circ h^3)(z) = z$ pour tout nombre complexe z.
- On note $f : z \mapsto a_1 z + b_1$, $g : z \mapsto a_2 z + b_2$ et $h : z \mapsto a_3 z + b_3$. Experimer P, Q, R en fonction des a_i et des b_i.
- Conclure.

4) Probabilités

Exercice 361 [X MP 2023 # 383] Déterminer le nombre moyen de 2-cycles, de 3-cycles, de p-cycles, d'une permutation de $[\![1, n]\!]$.

Exercice 362 [X MP 2023 # 384]
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle partition de n toute liste decroissante $(\lambda - 1 \leq k \leq n$ d'entiers naturels non nuls de somme n. On note $P(n)$ le nombre de telles listes.

  Montrer que $P(n) \leq 2^{n-1}$.
- On fixe $n \geq 1$ et on considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur l'ensemble des partitions de n. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$. On pose $N_k = |\{i \in [\![1, n]\!] : X_i = k\}|$.

  Exprimer $\mathbf{P}(N_k \geq j)$ comme un quotient $\frac{P(a)}{P(b)}$ pour des entiers a et b a preciser.
- Calculer $\sum_{i=1}^{n} i N_i$.

Démonstration. !! todo □

Exercice 363 [X MP 2023 # 385] On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

- Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$.
- On lance une piece non truquée. Déterminer la loi de la variable aléatoire X qui donne l'instant de premiere apparition du motif Face-Face.
- Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
- Donner un équivalent de $\mathbf{P}(X = n)$.

Exercice 364 [X MP 2023 # 386] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{S}_n$ de la loi uniforme, et on note N la variable aléatoire associant a tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ le nombre de ses orbites.

- Calculer $\mathbf{P}(N = 1)$ et $\mathbf{P}(N = n)$.
- Donner une formule simple pour la fonction génératrice de N.
- Donner un équivalent de $\mathbf{E}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.
- Donner un équivalent de $\mathbf{V}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 365 [X MP 2023 # 387] Soient $n \geq 2$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $f_{(X_1,\ldots,X_n)}$ la variable aléatoire a valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ telle que, pour tout i, $f_{(X_1,\ldots,X_n)}(e_i) = e_{X_i}$.

- Déterminer $\mathbf{E}\left(\mathrm{rg}\left(f_{(X_1,\ldots,X_n)}\right)\right)$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, soit μ_z la multiplicité de z comme valeur propre de $f_{(X_1,\ldots,X_n)}$. Calculer $\mathbf{E}(\mu_z)$.

Exercice 366 [X MP 2023 # 388] Soient $b, n \in \mathbb{N}^*$. On considère $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![0, b-1]\!]$. On note S l'ensemble des descentes de la suite B c'est-a-dire $S = \{i \in [\![1, n]\!] \mid B_i > B_{i+1}\}$.

- Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, calculer $\mathbf{P}(B_i > B_{i+1})$.
- Soit $j \in [\![1, n-j-1]\!]$. Calculer $\mathbf{P}(B_1 > B_2 > \cdots > B_{j+1})$.
- Pour $I \subset [\![1, n]\!]$, on pose $\alpha(I)$ (resp. $\beta(I)$) le nombre de suites a n éléments à valeurs dans $[\![0, b-1]\!]$ qui vérifient $S \subset I$ (resp. $S = I$). Exprimer α en fonction de β, puis β en fonction de α.

Exercice 367 [X MP 2023 # 389] Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ et $k \in \{1, \ldots, 2n\}$, on note $s(\sigma, k)$ le segment de $\mathbb{C}$ qui joint les points $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ et $e^{\frac{i\sigma(k)\pi}{n}}$. On note $b(\sigma)$ le nombre de segments qui ne croisent aucun autre segment (ou on dit que deux segments se croisent s'ils ont un point d'intersection qui n'est pas une extremite).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_{2n}$. Déterminer $\mathbf{E}(b(\sigma_n))$ et en donner un équivalent.

Exercice 368 [X 2023 # 390] Soient $p \in [0, 1/2]$, $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p$. On cherche p tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i = 0\right) \geq \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i = b\right)$.

1. Montrer que $p \leq \frac{1}{3}$, puis que $p < \frac{1}{3}$ et enfin que $p \leq \frac{1}{4}$.
2. Si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_X : \theta \mapsto \mathbf{E}\left(e^{iX\theta}\right)$. Exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de Φ_X.
3. En déduire que $p \leq \frac{1}{4}$ est une condition suffisante.

Démonstration. 1. On regarde les probabilités, jusqu'à $n = 3$.

2. $\Phi_X(\theta) = \sum P(X = k) e^{ikt}$ et formule de Cauchy.
3. □

Exercice 369 [X MP 2023 # 391] Soient n et d des entiers tels que $1 \leq d < n$, et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[\![0, d]\!]$. On note S_n la classe de $X_1 + \cdots + X_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- La variable aléatoire S_n est-elle uniformément distribuée sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- Calculer la loi de S_n.

Démonstration. • Non, cf $d = 1$, c'est une loi binomiale.

- Fonction génératrice. □

Exercice 370 [X MP 2023 # 392] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1, d]\!]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

- Soient Y une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{Z}$, $r \in [\![0, d-1]\!]$, $\omega = e^{2i\pi/n}$.
  Montrer que $\mathbf{P}(Y \equiv r\,[d]) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\omega^{kr}} \mathbf{E}\left(\omega^{kY}\right)$.
- Soit $[\![0, d-1]\!]$. Donner une expression de $\mathbf{P}(S_n \equiv r\,[d])$.
- Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathbf{P}(S_n \equiv 0[d])$.

Exercice 371 [X MP 2023 # 393] Soit $n \geq 1$.

- On se donne deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^2$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Déterminer la probabilité $u_n(r)$ pour que X_n et Y_n soient deux points distincts et le coefficient directeur de la droite $(X_n Y_n)$ soit égal a r. Donner un équivalent de $u_n(r)$ lorsque $n \to +\infty$.
- On se donne quatre variables aléatoires indépendantes X_n, Y_n, A_n, B_n suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^2$. On note p_n la probabilité pour que $X_n \neq Y_n$, $A_n \neq B_n$ et les droites $(X_n Y_n)$ et $(A_n B_n)$ soient parallèles. Montrer que $p_n = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Démonstration. !!

- C'est la probabilité que $\frac{a_n-b_n}{c_n-d_n}=\frac{p}{q}$, c'est-à-dire $p(c_n-d_n)=q(a_n-b_n)$. Les différences suivent des lois $\square$

Exercice 372 [X MP 2023 # 394] • Soit $a\in[1,2]$. On pose $f_a : x\mapsto |1+x|^a-|2x|^a-ax$. Montrer : $\forall x\in\mathbb{R}, f_a(x)\leq 1$.

- Soit X une variable aléatoire réelle centrée et admettant un moment d'ordre 2. Montrer : $\forall c\in\mathbb{R}, \mathbf{E}\left(|c+X|^a\right)\leq 2^a\mathbf{E}(|X|^a)+|c|^a$.
- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires centrées admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^a\right)\leq 2^a\sum_{i=1}^n\mathbf{E}(|X_i|^a)$.

Exercice 373 Urne de Polya [X MP 2023 # 395] Une urne contient a boules jaunes et b boules rouges. On effectue une succession de tirages d'une boule dans l'urne avec remise. À chaque tirage, on ajoute une boule de la couleur de celle tirée dans l'urne. On note X_n le nombre de boules jaunes dans l'urne apres n tirages et T_n l'évènement «tirer une boule jaune au n-ième tirage».

1. s Calculer $P(T_1\mid T_2)$.
2. Déterminer la loi de X_n.
3. Calculer $P(T_n)$.
4. Pour $n_1,...,n_p,m_1,...,m_q$ tous distincts, calculer $P(T_{n_1}\cap\cdots\cap T_{n_p}\cap\overline{T_{m_1}}\cap\cdots\cap\overline{T_{m_q}})$.

Démonstration.
1.
2. $P(X_n=a)=\frac{b}{a+b}\frac{b+1}{a+b+1}\cdots\frac{b+n-1}{a+b+(n-1)}$
   $P(X_n=a+1)=n\frac{b}{a+b}\frac{b+1}{a+b+1}\cdots\frac{b+n-2}{a+b+(n-2)}\frac{a}{a+b+(n-1)}$.
   En général, $P(X_n=a+k)=\binom{n}{k}\frac{(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!}\frac{(b+n-k-1)}{(b-1)!}\frac{a+k-1!}{(a-1)!}$.
3. dur dur, $E(X_n)$
4. $\square$

Exercice 374 [X 2023 # 396] Soient $n\geq 1$ et A,B,C des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{0,1\}^n$.

1. Pour $n\geq 2$, calculer la probabilité p_n que ABC soit un triangle équilatéral.
2. Déterminer un équivalent de p_n.

Démonstration. Relier à un précédent.

1. On prend $A=\vec{0}$. Alors on veut B,C avec autant de termes 1, et autant de différences entre les deux.
   On considère les ensembles $B\subset[\![1,n]\!]$, $C[\![1,n]\!]$, et $B\oplus C$.
   Les parties $U=B\setminus C$, $V=C\setminus B$ et $W=B\cap C$ vérifient $u+w=v+w=u+v$, donc ils sont de même cardinaux, et disjoints. $\square$

Exercice 375 [X MP 2023 # 397] On munit l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $[1,n]$ de la probabilité uniforme. Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire $\sigma\in\mathcal{S}_n$.

- Calculer $\mathbf{P}(X_n=0)$.
- Déterminer la loi de X_n.
- Étudier la convergence en loi de la suite $(X-n\in\mathbb{N}^*$.
- Calculer les espérance et variance de la variable aléatoire X_n.

Exercice 376 [X MP 2023 # 398] Soit $M=\begin{pmatrix}a&-b&-c&-d\\b&a&d&-c\\c&-d&a&b\\d&c&-b&a\end{pmatrix}$ une matrice aléatoire ou $(a+1)\sim\mathcal{P}(\alpha)$, $(b+1)\sim\mathcal{P}(\beta)$, $(c+1)\sim\mathcal{P}(\gamma)$ et $(d+1)\sim\mathcal{P}(\delta)$.

- Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible.
- Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible et diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 377 [X MP 2023 # 399] Soient X et Y deux variables aléatoires a valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbf{P}(X\geq Y)=1$, et, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $i\in[\![0,n]\!]$, $\mathbf{P}(X=n)>0$ et $\mathbf{P}(Y=i|X=n)=\dfrac{1}{n+1}$.

- Montrer que, si $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X=i,Y=j)=\mathbf{P}(X=i,X-Y=j)$, puis que $X-Y\sim Y$.
- Montrer que $\mathbf{P}(Y=0)>0$.
- On suppose que $X-Y$ et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de Y, puis celle de X.

Exercice 378 [X MP 2023 # 400] Soit $n\geq 3$ un entier. Si $k\in\mathbb{Z}$, on note $\overline{k}$ la reduction de k modulo n. Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes a valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, X_k suit la loi uniforme sur $\{\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$. Soit F l'application aléatoire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-meme telle que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $F(\overline{k})=\overline{k}+X_k$. Calculer la probabilité que F soit bijective.

Exercice 379 [X MP 2023 # 401] On cherche a collectionner N jouets. À chaque achat, chaque jouet a une probabilité uniforme d'être obtenu. Pour $i\in[\![1,N]\!]$, on note T_i le temps d'attente pour obtenir i jouets différents.

- Calculer l'espérance de T_N.
- Calculer la variance de T_N.
- Montrer que $\forall\varepsilon>0, \mathbf{P}\left(\left|\frac{T_N}{N\ln N}-1\right|\geq\varepsilon\right)\longrightarrow 0$ quand $N\to+\infty$.

Exercice 380 [X MP 2023 # 402] Soit $(X - n \in \mathbb{N}^*$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles centrées.
On suppose que $\mathbf{E}(X_1^4) < +\infty$.

- Montrer que $\mathbf{E}\left((X_1 + \cdots + X_n)^4\right) = O(n^2)$.
- Pour $\varepsilon > 0$, quelle est la nature de la série de terme général $\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} > \varepsilon\right)$?

Exercice 381 [X MP 2023 # 403] Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X - k \geq 1$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{P}(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $S_n = \sum_{k=1}^n X_k, T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

- Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geq x)dx = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.
- On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(T_n \geq x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$. Retrouver la formule de Stirling.

5) X PSI **AUTRE**

a) Algèbre

Exercice 382 [X PSI 2023 # 404] Pour $n \geq 2$ on pose $P_n = (X+1)^n + X^n + 1$ et $Q(X) = (X^2 + X + 1)^2$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que Q divise P.

Exercice 383 [X PSI 2023 # 405] Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

Exercice 384 [X PSI 2023 # 406] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E diagonalisable. Montrer que f possede n valeurs propres distinctes si et seulement s'il existe $v \in E$ tel que $(v, f(v) \cdots, f^{n-1}(v))$ soit libre.

Exercice 385 [X PSI 2023 # 407] Trouver $\mathrm{Vect}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 386 [X PSI 2023 # 408]

- Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$. Montrer que $\det(A+B) \geq \max(\det(A), \det(B))$. - Trouver une condition nécessaire d'égalité lorsque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 387 [X PSI 2023 # 409] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. - A-t-on nécessairement $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$? - Trouver une condition nécessaire supplementaire pour avoir $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Analyse

Exercice 388 [X PSI 2023 # 410] Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer qu'il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\sqrt{n} - \sqrt{m} \in]a, b[$.

Exercice 389 [X PSI 2023 # 411]

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire, avec $n \geq 2$. Montrer que P est scinde dans $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^{\deg P}$.
- Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisables dans $\mathbb{R}$ est un ferme.

Exercice 390 [X PSI 2023 # 412] Soit $\alpha > 0$. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha}(b_n + c_n)$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha}(a_n + c_n)$, $c_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha}(a_n + b_n)$. Étudier leur comportement asymptotique.

Exercice 391 [X PSI 2023 # 413] Étudier la série $\sum (-1)^n \dfrac{\sin(\ln(n))}{n}$.

Exercice 392 [X PSI 2023 # 414] Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ de classe C^1, strictement croissante avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $\sum \dfrac{1}{f(n)}$ converge si et seulement si $\sum \dfrac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge.

Démonstration. écrit quelque part…
Comparaison série intégrale, puis changement de variable. □

Exercice 393 [X PSI 2023 # 415] Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y)$.

Exercice 394 [X PSI 2023 # 416] Pour $a \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n(a) = \int_0^1 \dfrac{1}{1 + (at) + \cdots + (at)^n} dt$.
Déterminer $\lim_{n \to +\infty} (\lim_{a \to 1} I_n(a))$ et $\lim_{a \to 1} (\lim_{n \to +\infty} I_n(a))$.

Exercice 395 [X PSI 2023 # 417] Soient a, b, c trois réels strictement positifs.
On pose $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1\right\}$. On suppose que A, B, C sont trois points distincts de E tels que le plan tangent a E en A est parallele a (BC), le plan tangent a E en B est parallele a (CA), le plan tangent a E en C est parallele a (AB).
Calculer le volume du parallelepipede engendre par les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

c) Géométrie

Exercice 396 [X PSI 2023 # 418] Soient abc un vrai triangle du plan complexe, α (resp. β, resp. γ) a rotation de centre a (resp. b, resp. c) et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

- Montrere que le centre de $\alpha \circ \beta$ appartient a l'intersection des trisectrices du triangles.
- Montrere que $\alpha^3 \circ \beta^3 \circ \gamma^3$ est l'identite du plan.
- Montrere que les points d'intersection des trisectrices forment un triangle equlateral.

d) Probabilités

Exercice 397 [X PSI 2023 # 419] Déterminer la loi d'une variable aléatoire X a valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbf{P}(X > k+\ell \mid X > k) = \mathbf{P}(X > \ell)$.

Exercice 398 [X PSI 2023 # 420] Une entreprise qui commercialise des éeufs en chocolat met dans chaque ceuf un jouet. Au total il y a N jouets differents. On suppose qu'a chaque achat d'ceuf la probabilité de tomber sur un jouet donne est identique pour chaque jouet. On note T_N le nombre d'eufs achetes jusqu'a obtenir la collection complete.

Montrer que $\mathbf{E}(T_N) = N \times H_N$ avec $H_N = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 399 [X PSI 2023 # 421] On pose$M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d des variables aléatoires a valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que $a+1, b+1, c+1, d+1$ suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d$. Calculer la probabilité de l'évènement $*M$ est inversible $\Rightarrow$.

Exercice 400 [X PSI 2023 # 422] On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes a valeurs dans $[\![0, n]\!]$ qui suivent la meme loi. Trouver les lois de X possibles pour que $X+Y$ suive la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Exercice 401 [X PSI 2023 # 423] On dispose de n objets differents. On effectue des tirages aléatoires indépendants avec remise. On note N_n le nombre de tirages qu'il a fallu pour avoir les n objets differents.

- Calculer $\mathbf{E}(N_n)$ et $\mathbf{V}(N_n)$.
- Montrere que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\dfrac{N_n}{n\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$.

6) X PC **AUTRE**

a) Algèbre

Exercice 402 [X PC 2023 # 424] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ tels que $n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k k^2$.

Exercice 403 [X PC 2023 # 435] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice qui n'est pas une homothetie. On suppose que M est une matrice qui commute avec PAP^{-1} pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est une homothetie. Meme question pour A et M matrices réelles.

Exercice 404 [X PC 2023 # 436] Soit $n \geq 2$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, déterminer les valeurs possibles du cardinal de l'ensemble $\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A = B^2\}$.

Exercice 405 [X PC 2023 # 437] Trouver les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^p = A$, ou p est un entier ≥ 2.

Exercice 406 [X PC 2023 # 438] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AP = PB$.

Exercice 407 [X PC 2023 # 439] Caracteriser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'ensemble des matrices semblables a A engendre l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 408 [X PC 2023 # 440] Soit G une partie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui contient I_2 et qui est stable par produit et passage a l'inverse. On note $\mathrm{Vect}(G)$ l'ensemble des combinaisons lineaires d'éléments de G. Montrer que $\mathrm{Vect}(G) \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $M \in G$, la matrice $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure,

(ii) il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $M \in G$, la matrice $P^{-1}MP$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.

Exercice 409 [X PC 2023 # 441] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ ou les λ_i sont distincts et ou λ_i est de multiplicité $m_i \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + N_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{m_r} + N_r \end{pmatrix}$$

Exercice 410 [X PC 2023 # 442] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB^2 - B^2A = B$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^{2p} \neq 0$ et $B^{2p+1} = 0$.

Exercice 411 [X PC 2023 # 443] Soient $n \in \mathbb{N}$ impair, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $AB + BA = A$.

- Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
- Que dire si n est impair.

Exercice 412 [X PC 2023 # 444] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres non nulles distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. - Montrer qu'il existe des nombres complexes $c_{i,j}$, avec $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n-1$, tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} c_{i,j} \lambda_i^k A^j$.

- Montrer l'unicite des $c_{i,j}$.
- On suppose de plus A inversible. Montrer que la formule reste vraie si $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 413 [X PC 2023 # 445] Caracteriser les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont somme de deux matrices diagonalisables de rang 1.

Exercice 414 [X PC 2023 # 446] Déterminer les entier n tels qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^2 - A + I_n = 0$.
Ind. Commencer par $n \leq 3$.

Exercice 415 [X PC 2023 # 447] Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\ \det(M) = 1\}$. On note $\operatorname{ord}(A) = \inf\{n > 0,\ A^n = I\}$.

- Montrer que si $\operatorname{ord}(A) < +\infty$ alors $\operatorname{ord}(A)$ divise 12.
- Soient $A, B \in G$. On suppose que $\operatorname{ord}(A) = \operatorname{ord}(B) < +\infty$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ tel que $PAP^{-1} = B$. Peut-on toujours prendre P dans G ?

Exercice 416 [X PC 2023 # 448] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si λ est un réel strictement negatif qui est valeur propre de la matrice $A\overline{A}$, alors la dimension du sous-espace propre associe est paire.

Exercice 417 [X PC 2023 # 449] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ \|x\| = 1\right\}$ ou $\|\ \|$ designe la norme euclidienne canonique. Montrer l'equivalence entre les propositions suivantes.
(i) $\alpha = 2$.
(ii) $\forall n \geq 1, \forall\,(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) \in (S^2)^{3n}, \exists p \in S^2$ tel que
$\sum_{i=1}^n \|p - a_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|p - b_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|p - c_i\|^\alpha$.

Exercice 418 [X PC 2023 # 450] Soit n un entier ≥ 2. Pour quelles valeurs du réel α existe-t-il $n+1$ vecteurs unitaires $u_0, u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\forall (i,j) \in \{0, 1, \dots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j\rangle = \alpha$?
Ind. Considèrer la matrice $A = (\langle u_i, u_j\rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 419 [X PC 2023 # 451] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $n \geq 2$. Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est somme d'un nombre fini d'isometries.

Exercice 420 [X PC 2023 # 452]

- Est-il vrai que pour tout n et tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices AB et BA sont semblables ?
- Montrer que AA^T et A^TA sont semblables.
- Soient F, G des sous-espaces de dimension m de $\mathbb{R}^n$, p_F et p_G les projections orthogonales respectivement sur F et G. Montrer que $\mathrm{sp}(p_F \circ p_G) = \mathrm{sp}(p_G \circ p_F) \subset [0, 1]$.

Exercice 421 [X PC 2023 # 453] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique positive non nulle. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des réels $b_{i,k}$, avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq r$, tels que $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{i,j} = \sum_{k=1}^r b_{i,k} b_{j,k}$. Quel est la plus petite valeur possible de r ?

Exercice 422 [X PC 2023 # 454] Soit $A = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leq i,j \leq n}$. Montrer que les valeurs propres de A sont dans $]0, \pi[$ et que la plus petite valeur propre est inférieure ou égale a $\frac{1}{2n+1}$.
On pourra montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_{-1}^1 P(t)\,dt + \int_0^\pi P(e^{i\theta}) ie^{i\theta}\,d\theta = 0$.

Exercice 423 [X PC 2023 # 455] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et A^T commutent si et seulement si $AA^TA = A^2A^T$.

Exercice 424 [X PC 2023 # 456] Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ non nulle, $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^m$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de leurs normes euclidiennes canoniques. Considérons les assertions :
(i) $\forall Z \in \mathbb{R}^n$, $\|AX - Y\| \leq \|AZ - Y\|$;
(i)' $A^TAX = A^TY$;
(ii) X est de norme minimale pour la propriété (i) ;
(ii)' $X \perp \operatorname{Ker} A^TA$.

- Montrer que (i) $\Longleftrightarrow$ (i)'.
- On suppose (i) vérifie. Montrer qu'alors (ii) $\Longleftrightarrow$ (ii)'.
- Montrer l'unicite de X vérifiant (i) et (ii). Notons BY ce vecteur.
- Montrer que B est lineaire. Montrer que, pour tout $Y \in \mathbb{R}^m$, $\|BY\| \leq \frac{\|Y\|}{\sqrt{\lambda_1}}$ ou λ_1 est la plus petite valeur propre non nulle de A^TA, et qu'il y a des cas d'égalité non triviaux.

Exercice 425 [X PC 2023 # 457] Donner une condition sur $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour que l'application qui a $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ associe $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} u_{i,j}$ atteigne son maximum en un unique U.

Exercice 426 [X PC 2023 # 458] Soit $\alpha \in]0, 1[$.

- Montrer que l'existence de $c_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda > 0$, $c_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\alpha}}{\lambda + t} dt = \lambda^{-\alpha}$.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On définit : $A^{-\alpha} = c_\alpha \int_0^{+\infty} t^{-\alpha}(A + tI_n)^{-1} dt$. Expliquer le sens de cette expression, montrer que l'intégrale converge et que $\left(A^{-1/2}\right)^2 = A^{-1}$.
- Montrer que si $B - A$ est positive alors $A^{-1/2} - B^{-1/2}$ l'est aussi.

Exercice 427 [X PC 2023 # 459] Soit $f : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme lineaire. Montrer l'equivalence des trois assertions suivantes :

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f\left(AA^T\right) \geq 0$;

ii) $\exists B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(A) = \mathrm{Tr}(AB)$;
iii) $\exists m \in \mathbb{N},\ \exists (X - i \in [\![1\ :\ m]\!] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^m,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(A) = \sum_{i=1}^m \mathrm{Tr}\left(X_i^T A X_i\right)$.

Exercice 428 [X PC 2023 # 460] Sont $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b) Analyse

Exercice 429 [X PC 2023 # 461] Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $|I|$ sa longueur. Montrer qu'il existe une famille $(I - j \in A$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, non reduits a un point, deux a deux disjoints et tels que
$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{j\in A} I_j$ et $\sum_{j\in A} |I_j| = 42$.

Exercice 430 [X PC 2023 # 462] On pose : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{P \in E,\ P = P^T = P^2\}$. Soit $(P, Q) \in F^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f : [0, 1] \to F$ continue telle que $f(0) = P$ et $f(1) = Q$.

Exercice 431 [X PC 2023 # 463] Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue telle que $A(0) = A(1) = I_n$ et $A(s + t) = A(s)A(t)$ pour tous s, t.

- Donner des exemples non triviaux de telles applications.
- Montrer qu'il existe P inversible et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ tels que :

$\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = P\mathrm{diag}(e^{i2\pi\lambda_1 t}, \dots, e^{i2\pi\lambda_n t})P^{-1}$.

Exercice 432 [X PC 2023 # 464] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit une suite de matrices par $M_0 = A$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_{k+1} = M_k - M_k^2$. On etudie la convergence eventuelle de $(M - k \geq 0$.

- Étudier le cas ou A admet une valeur propre réelle $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$.
- Étudier le cas ou A est nilpotente.
- Étudier le cas ou $A = \lambda I + N$ avec $N \neq 0$, $N^2 = 0$ et $0 < \lambda < 1$.
- Étudier le cas ou $A = \lambda I + N$ avec $N^2 \neq 0$, $N^3 = 0$ et $0 < \lambda < 1$.

Exercice 433 [X PC 2023 # 465] Soit E un espace vectoriel de dimension finie inclus dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que E est stable par translation, c'est-a-dire que $\forall f \in E, \forall a \in \mathbb{R}, (x \mapsto f(x + a)) \in E$. Montrer que $\forall f \in E, f' \in E$.

Exercice 434 [X PC 2023 # 466] Soit E un espace vectoriel norme de dimension finie. Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p^2 = p$ et $q^2 = q$. On suppose que $\forall x \neq 0$, $\|(p - q)(x)\| < \|x\|$.

- Montrer que p et q ont le meme rang.
- Montrer que $u = pq + (\mathrm{id} - p)(\mathrm{id} - q)$ est inversible et que $p = uqu^{-1}$.

Exercice 435 [X PC 2023 # 467] Soit $x \geq 0$. Donner un équivalent de la suite de terme général $u_n = \prod_{i=1}^n (x + i)$.

Exercice 436 [X PC 2023 # 468] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} |\cos(k)| \geq \frac{4n}{10}$.

Exercice 437 [X PC 2023 # 469] Soit c_n le nombre de listes $(a_1, \dots, a_n)$ d'entiers telles que $\{a_1, \dots, a_n\} = \{1, \dots, n\}$ et $\forall i \in \{1, \dots n - 1\}, a_{i+1} \neq a_i + 1$.

- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, on a $c_n = (n - 1)c_{n-1} + (n - 2)c_{n-2}$.
- Montrer que la suite $\left(\frac{c_n}{n!}\right)$ converge vers une limite non nulle.

Exercice 438 [X PC 2023 # 470] Soit $C = 0,1234567891011121314\dots$ (on écrit les écritures decimales de tous les entiers naturels a la suite). Montrer que C est irrationnel.

Exercice 439 [X PC 2023 # 471] Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $(n\,\{an!\})_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montr er que $a \in \mathbb{Q} + \mathrm{e}\mathbb{N}$.

Exercice 440 [X PC 2023 # 472] • On fixe $x \geq 0$. Déterminer un équivalent simple de $u_n = (x + 1)\cdots(x + n)$ de la forme $C(x)v_n(x)$ ou $C(x)$ est une constante qu'on ne cherchera pas a calculer et $v_n(x)$ est explicite.

▷ Calculer $C(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, et la limite de $C(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 441 [X PC 2023 # 473] Soit u_n le maximum de la fonction $x \mapsto (n - x)\ln(x)$ sur $[0, n]$.

- Trouver un équivalent de u_n.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \geq 3$, $v_n = u_n - n\ln(n) + n + n\ln(\ln(n)) + \lambda n$. Montr er que $v_n \to +\infty$ si $\lambda \geq 0$ et $v_n \to -\infty$ sinon.

Exercice 442 [X PC 2023 # 474] Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n - e^{-1/u_n}$.

- Déterminer la limite de (u_n).
- Montr er que, pour tout $\alpha > 0$ on a $n^\alpha u_n \to +\infty$.

Exercice 443 [X PC 2023 # 475] Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots + (n - 1)\sqrt{1 + n}}}}$.

Ind. Étudier si $n \geq m$, $a_{m,n} = \sqrt{1 + m\sqrt{1 + (m + 1)\sqrt{1 + \cdots + (n - 1)\sqrt{1 + n}}}}$, et considèrer $a_{m,n}^2 - (m + 1)^2$.

Exercice 444 [X PC 2023 # 476] Soit (u_n) une suite bornée. Montr er qu'il y a equivalence entre :
(i) $\frac{1}{n}\sum_{k<n} |u_k| \to 0$,
(ii) il existe $A \subset \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n}\,|A \cap [0, n - 1]| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\lim_{n\notin A} u_n = 0$.

Exercice 445 [X PC 2023 # 477] Étudier la convergence de la série de terme général $|\sin(2\pi n!e)|^\alpha$ selon les valeurs du réel $\alpha > 0$.

Exercice 446 [X PC 2023 # 478] • Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée telle que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{u_{n2^p}}{2^p} = 1$.
Que peut-on en dedaire sur la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?

- Soit $(v - n \in \mathbb{N}$ une suite réelle bornée. On suppose $\lim_{n\to+\infty} \left(v_n - \frac{1}{2}v_{2n}\right) = \frac{1}{2}$. Que dire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 447 [X PC 2023 # 479] • Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montr er qu'il existe des entiers c_j, avec $0 \leq j \leq a-1$, tels que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!^a} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sum_{j=0}^{a-1} c_j k^j}{k!^a}$.

▷ Montr er que les c_j sont uniquées (on traitera d'abord le cas $a = 2$).

Exercice 448 [X PC 2023 # 480] Soient $a \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - (1-a^k)^n\right)$.

- Montrer que la somme est bien définie.
- Donner un équivalent de S_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 449 [X PC 2023 # 481] Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et croissantes. Soit $\lambda > 0$. Montrer qu'il existe un unique couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda u + f(u-v) = \lambda v + g(v-u) = 0$.

Exercice 450 [X PC 2023 # 482] Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 451 [X PC 2023 # 483] Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f' + af$ s'annule sur $]0,1[$.

Exercice 452 [X PC 2023 # 484] • Soit $f \colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. Montrer que pour tout $n > 0$ et pour tout $x > 0$ il existe $c \in]x, x+n[$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (-1)^{n-k} f(x+k) = f^{(n)}(c)$.

▷ Soit $\lambda > 0$ tel que $n^\lambda \in \mathbb{N}$ pour tout n. Montrer que $\lambda \in \mathbb{N}$.

Exercice 453 [X PC 2023 # 485] On appelle polynôme trigonometrique réel toute fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par une formule $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et des constantes $a_k \in \mathbb{C}$. Trouver tous les couples (f,g) de polynômes trigonometriques réels tels que $f^2 + g^2 = 1$.

Exercice 454 [X PC 2023 # 486] Soient a, b deux réels strictement positifs. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.

- Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
- On prolonge f en 0 en posant $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$? de classe $\mathcal{C}^\infty$?
- Soit $g : x \mapsto f(1/x)$. Trouver une fonction $x \mapsto h(x)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x) - h(x) \underset{x \to 0^+}{=} o(x^n)$.

Exercice 455 [X PC 2023 # 487] Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est croissante,
- pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, pour tout $x_0 \in I$, si $f - \varphi$ admet un minimum local en x_0, alors $\varphi'(x_0) \geq 0$.

Exercice 456 [X PC 2023 # 488] Soit $g \in \mathcal{C}^3([0,2], \mathbb{R})$ telle que $g(0) = g(1) = g(2) = 0$.

- Montrer : $\forall x \in [0,2], \exists c \in [0,2], g(x) = \dfrac{1}{6} x(x-1)(x-2) g^{(3)}(c)$.
- Montrer que $\int_0^2 |g(x)|\,dx \leq \dfrac{1}{12} \|g^{(3)}\|_\infty$.
- Montrer que $\left|\int_0^2 g(x)\,dx\right| \leq \dfrac{1}{24} \left[\sup\left(g^{(3)}\right) - \inf\left(g^{(3)}\right)\right]$.

Exercice 457 [X PC 2023 # 489] Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}^{+*})$.

On pose $m = \inf\limits_{[a,b]} \dfrac{f}{g}$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} \dfrac{f}{g}$. Montrer que $\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq \dfrac{(M+m)^2}{4Mm} \left(\int_a^b fg\right)^2$.

Exercice 458 [X PC 2023 # 490] Soient \$ K :[0, 1] $^{2 \to \mathbb{R}}\$etf, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que :
$\forall x \in [0,1]$, \$ f$(x) = \int_0$^{1}K(x,z)g(z)\,dz\$ et \$ g$(x) = \int_0$^{1}K(x,z)f(z)\,dz\$. Montrer que \$ f=g\$.

Exercice 459 [X PC 2023 # 491] Soit E l'espace des fonctions \$ f∈ C^2(R,R)\$ telles que
$\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left(1 + x^2\right) \left(|f(x)| + |f'(x)| + \left|f''(x)\right|\right) < +\infty$.
Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, on définit \$ A$_t$(f)(x)=txf(x)+f'(x)\$ et \$ A$_t^*$(f)(x)=txf(x)-f'(x)\$.
Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in E, \int_{-\infty}^{+\infty} A_t^*(A_t(f))(x)\, f(x)\,dx \geq 0$.

Exercice 460 [X PC 2023 # 492] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

- Soient \$ f$_{1,...,fn\in R}$$^{[a,b]}$\$. Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe \$ x$_{1,...,xn\in}$[a,b]\$ tels que la matrice $(f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible.
- Soit $E = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$. Montrer que toute limite simple de fonctions de E est encore dans E.
- La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 461 [X PC 2023 # 493] Posons \$ A=Q∩[0 ; 1] $\$. Existe-t-ilunesuite(f_n)$ de fonctions de A dans A, continues sur A et qui converge simplement sur A vers une fonction f qui n'est continue en aucun point de A ? La convergence peut-elle être uniforme ?

Exercice 462 [X PC 2023 # 494] On considère l'ensemble E des applications continues \$ f: R↦ R$\$tellesqu'ilexiste\$M > 0\$vrifiant \forall x, y \in$ $\mathbb{R}, |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq M$.

- Montrer que E est un espace vectoriel contenant le sous-espace des applications lineaires et celui des applications bornées.
- Soit \$ f∈ E\$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose \$ g$_n$:x∈R↦ 2^{-n} $f(2^{nx})\$.Montrerquelasuite(g_n)$ converge uniformément vers une application lineaire g. En déduire que f s'écrit, de facon unique, comme somme d'une application lineaire et d'une application bornée.

Exercice 463 [X PC 2023 # 495] On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $[0,1]$ vers une application continue f.

- On suppose les f_n de classe C^1 et de derivées uniformément bornées, c'est-a-dire qu'il existe $ C≥ 0$ tel que $\forall n,\ \ \|f_n'\|_\infty \leq C$. Montrer que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur $[0,1]$.
- On suppose maintenant les f_n de classe C^k pour un entier $ k∈N^*$ et de derivées k-ièmes uniformément bornées. La convergence de la suite (f_n) est-elle toujours uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 464 [X PC 2023 # 496] Pour $ n∈N^*$ et $ x∈R^+$, on pose $ f_n(x)=cos$\left(\frac{x}{\{}\sqrt{n}\}\right)\backslash,1_\{\left[1,\ ^{\{}\pi\sqrt{n}\}\{2\}\}(x)$$.

Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction $ f$ que l'on precisera. - Montrer qu'il existe $C>0$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ |f_n(x)-f(x)|\leq\frac{C}{\sqrt{n}}$.

Exercice 465 [X PC 2023 # 497] Soit $(f-n\in\mathbb{N}$ une suite de fonctions appartenant a $\mathcal{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et C une constante réelle positive. On suppose : (i) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n^{(3)}\|_\infty\leq C$, (ii) $\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty=0$.

- Montrer que $\lim\|f_n'\|_\infty=\lim\|f_n^{''}\|_\infty=0$.
- Les résultats precedents restent-ils vrais si on ne fait plus l'hypothese (i) ?

Exercice 466 [X PC 2023 # 498] On note $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f\in E$, on définit la fonction $T(f)$ par $T(f)(0)=f(0)$ et $ T(f)(x)=1$_{x\int}$ 0^xf(t)dt$ pour $x\in]0,1]$.

On définit par recurrence sur $n\in\mathbb{N}$, $T^{n+1}(f)=T(T^n(f))$.

- Montrer que T est bien définie comme fonction de E dans lui-meme.
- Soit $f\in E$. On suppose qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $f(x)=0$ si $x\in[0,\varepsilon]$. Montrer que T^nf converge uniformément vers la fonction nulle quand $n\to+\infty$.
- Étudier le comportement de $(T^n(f))_{n\geq 0}$ quand $n\to+\infty$ pour tout f continue.

Exercice 467 [X PC 2023 # 499] Soit $ F :x↦ $\sum_{\text{k=0}}{}^{+\infty(-1)^{\text{kx}2^{\text{k}}}}$ $.

Déterminer le domaine de définition de F.

Trouver une relation entre $F\left(x\right)$ et $F\left(x^2\right)$.

On pose $ G :x↦ $\sum_{\text{k=0}}{}^{+\infty x^{4^{\text{k}}}\left(1-x^{4^{\text{k}}}\right)}$ $.

Montrer que $ G(x) $convergepourtoutx\in]0,1[$.

Trouver une relation entre F et G.

Exercice 468 [X PC 2023 # 500] Soient $\alpha>0$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $ f_n :x↦ $\frac{\sin nx}{\{}n^\alpha\}\$.Lasrie\sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? Pour quels α a-t-on convergence uniforme ?

Exercice 469 [X PC 2023 # 501] On pose $ g :x↦ $\frac{1}{x}-\sum_{\text{n=1}}{}^{+\infty\frac{2x}{n^2-x^2}}$ $.

Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Montrer que g est 1-périoddique.

Etablir une relation entre $ g$\left(\frac{x}{2}\right)$ $, $$g\left(\frac{x+1}{2}\right)\$et\$g(x)\$desquelestermesfontsens.Endduireque\pi\cotan(\pi x)=g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Exercice 470 [X PC 2023 # 502] Soit (a_n) une suite de réels positifs tels que $\sum a_n$ diverge.

- Montrer que, pour tout intervalle de longueur non nulle I, il existe $x\in I$ tel que la série $\sum a_n\cos(nx)$ ne converge pas absolument. On pourra d'abord montrer que, pour tout $ a< b$ et tout N il existe $M\in\mathbb{N}$ et $ x∈[a,b]$ tel que $\sum_{n=0}^M a_n\cos^2(nx)>N$. - Existe-t-il des exemples ou la série converge sur un intervalle non trivial ?

Exercice 471 [X PC 2023 # 503] Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}=\frac{n+3}{n+2}a_{n+1}+\frac{3n+7}{n+1}a_n$. Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_nz^n$ est strictement positif et trouver un minorant de ce rayon.

Exercice 472 [X PC 2023 # 504] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $s_n=a_0+\cdots+a_n$ et $\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n s_k$. On considère les assertions :

(i) la suite (σ_n) converge,

(ii) $f(x)=\sum a_nx^n$ a un rayon de convergence ≥ 1, et $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ existe (et est finie).

A-t-on (i) $\Longrightarrow$ (ii) ? A-t-on (ii) $\Longrightarrow$ (i) ?

Exercice 473 [X PC 2023 # 505] Étudier la limite de $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kx^{k!}$ lorsque x tend vers 1^-.

Exercice 474 [X PC 2023 # 506] On pose, pour $k\in\mathbb{N}$ avec $k\geq 2$, $\zeta(k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$.

- Montrer que, pour tout $x\in]-1,1[$, on a $\int_0^1\frac{1-t^x}{1-t}\,dt=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k$.
- En déduire la valeur de $S=\sum_{k=1}^{+\infty}(\zeta(2k)-\zeta(2k+1))$.

Exercice 475 [X PC 2023 # 507]
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Déterminer s'il existe $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ développable en série entière telle que $xy^{''}+(1-x)y'-\lambda y=0$.

▷ On suppose $\lambda = 2$. Expliciter les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ (on admet que sur chacun des deux intervalles l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2).

▷ Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 476 [X PC 2023 # 508] Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})$.

On note $W_n(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$.Ind. On admettra que, si $a_0, \dots, a_{n-2}$ sont des fonctions continues sur I, alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ est un espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Exercice 477 [X PC 2023 # 509] Soient $\lambda > 0$ et $x, y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, $x' = -xy$ et $y' = xy - \lambda y$.

- Montrer que x et y admettent des limites en $+\infty$. Ces limites sont-elles nulles ?
- Montrer qu'il existe $K > 0$ et $\mu > 0$ tels que $y(t) \sim Ke^{-\mu t}$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 478 [X PC 2023 # 510] Déterminer les extrema de $f\colon (x, y) \mapsto 3x^2 + 2xy + 2y^2 - x^4$ sur le disque unité fermé et les points en lesquels ils sont atteints.

c) Probabilités

Exercice 479 [X PC 2023 # 511] On a un de equilibre a N faces numerotées de 1 a N, et on effectue une suite de lancers indépendants. Le jeu s'arrete lorsque le résultat du lancer $n + 1$ est strictement inférieur a celui du lancer n.

- Calculer la probabilité π_k que le jeu s'arrete apres le rang k.
- Montrer que π_k tend vers 0 pour $k \to +\infty$.

Exercice 480 [X PC 2023 # 512] Soient $a \in \mathbb{R}$, $q \geq 3$ et (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et uniformes sur $\left\{\frac{k}{q},\ k = 0, \dots, q-1\right\}$. On définit la suite (T_n) par : $T_0 = 0$ et $\forall n, T_{n+1} = T_n + a + \sin(2\pi(T_n - X_n))$. Déterminer l'espérance de T_n.

Exercice 481 [X PC 2023 # 513] On dispose de N pieces equilibrées. On lance les N pieces de maniere indépendante. On note X_1 le nombre de < < pile > > obtenus. On relance ces X_1 pieces et on note X_2 le nombre de < < pile > > obtenus…

- Calculer la fonction génératrice de X_2.
- Calculer la fonction génératrice de X_k, pour $k \geq 3$.
- Soit T l'instant ou l'on n'a plus de piece. Calculer $\mathbf{E}(T)$ dans le cas ou $N = 4$.

Exercice 482 [X PC 2023 # 514] Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que Y prenne un nombre fini de valeurs, et $\mathbf{E}(Y) = 0$. On suppose que $|X|$ admet une espérance. Montrer que $\mathbf{E}(|X - Y|) \geq \mathbf{E}(|X|)$.

Exercice 483 [X PC 2023 # 515] On tire une piece n fois indépendamment avec probabilité de faire pile $1/n$. Soit p_n la probabilité d'obtenir un nombre impair de fois pile. Étudier le comportement de p_n.

Exercice 484 [X PC 2023 # 516] • Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \leq e^{x^2/2}$.

▷ Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbf{P}(S_n \geq \lambda) \leq e^{-\lambda^2/2n}$.Algèbre_

III) Mines

1) Algèbre

Exercice 485 [Mines 2023 # 517] Déterminer les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 486 [Mines 2023 # 518] Soient p un nombre premier et C_p l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $z^{p^n} = 1$.

- Montrer que C_p est un sous-groupe infini de $\mathbb{C}^*$.
- Déterminer les sous-groupes de C_p.

Exercice 487 [Mines 2023 # 519] Déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $3^m = 8 + n^2$.

Démonstration. Nécessairement, m pair, donc cela s'écrit $3^{2m} - n^2 = 8$. □

Exercice 488 [Mines 2023 # 520] Soient p, q deux entiers supérieurs ou egaux a 2.

- Montrer que si $q^p - 1$ est premier, alors $q = 2$ et p est premier.
- On suppose que p est premier et l'on note $k \in \mathbb{N}^*$ un diviseur de $2^p - 1$. Montrer que : $k \equiv 1\,[2p]$.

Exercice 489 [Mines 2023 # 521] Soit $A = \{n \in \mathbb{N},\ 2^n + 1 \equiv 0\,[n]\}$.

- Montrer que 3 est l'unique nombre premier appartenant a A.
- Montrer que A contient toutes les puissances entières de 3.

Exercice 490 [Mines 2023 # 522] • Soit $n > 6$ un entier. Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2$ tel que $a + b = n$ et $a \wedge b = 1$.

- ▷ Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $p_1 \cdots p_k \geq p_{k+1} + p_{k+2}$. Ind. Utiliser la premiere question avec $n = p_1 \cdots p_k$.

Exercice 491 [Mines 2023 # 523] On écrit $n \in \mathbb{N}$ en base $p \in \mathcal{P}$: $n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k p^k$ et l'on pose $S_p(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$.

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que : $v_p\binom{n}{k} = \frac{S_p(k)+S_p(n-k)-S_p(n)}{p-1}$.
- Exprimer $v_p\binom{n}{k}$ en fonction des retenues dans l'addition de $n-k$ et k en base p.
- Est-ce que 7 divise $\binom{1000}{500}$?
- Montrer que 2 divise $\binom{2n}{n}$. Étudier la divisibilité par 4 pour $n \geq 2$.

Exercice 492 [Mines 2023 # 524] Soient G un groupe et $k \in \mathbb{N}$.
On suppose que : $\forall i \in [\![k, k+2]\!], \forall (a,b) \in G^2, (ab)^i = a^i b^i$. Montrer que G est abelien.

Exercice 493 [Mines 2023 # 525] Soit G un groupe commutatif de cardinal pq avec p, q deux nombres premiers distincts. Montrer que G est cyclique. Trouver un contre-exemple dans le cas ou G n'est pas commutatif.

Exercice 494 [Mines 2023 # 526]
- Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que H est cyclique d'ordre divisant n. Soit d un diviseur de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d.
- On note φ l'indicatrice d'Euler. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n. Montrer l'égalité $n = \sum_{d \in \mathcal{D}(n)} \varphi(d)$.
- Montrer que si p, $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, alors $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de la decomposition en facteurs premiers de n.

Exercice 495 [Mines 2023 # 527]
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $a\mathbb{Z} = \{ax,\ x \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
  - ▷ Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non reduit a $\{0\}$.
  - ▷ Montrer que $a = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$ existe.
  - ▷ On suppose $a \neq 0$. Montrer que $G = a\mathbb{Z}$.
  - ▷ On suppose $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 496 [Mines 2023 # 528] Soit p un nombre premier impair.

- D enombrer les carrés de $\mathbb{F}_p$.
- Montrer que -1 est un carré de $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1[4]$.

Exercice 497 [Mines 2023 # 529] Soient A un anneau commutatif integre et $(a_0, \dots, a_n)$ une famille non nulle d'éléments de A. Montrer que l'équation $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ admet au plus n solutions dans A.

Exercice 498 [Mines 2023 # 530] On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau integre et déterminer ses inversibles.

Exercice 499 [Mines 2023 # 531] en Soit A un anneau commutatif.
Si I est un ideal de A, on note $R(I) = \{x \in A\ ;\ \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \in I\}$.

- Montrer que $R(I)$ est un ideal de A contenant I.
- Soient I et J deux ideaux de A. Montrer :

$R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)\,;\, R(I) + R(J) \subset R(I + J)$.

- Pour cette question, $A = \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des entiers naturels non nuls tels que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la decomposition primaire ne comporte aucun facteur premier d'exposant au moins égal a 2.

Exercice 500 [Mines 2023 # 532] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes non nuls de meme module tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\sum_{k=1}^n z_k| = |\sum_{k=1}^n z_k - z_i|$. Calculer $\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}\right)$.

Exercice 501 [Mines 2023 # 533]
- Montrer qu'il existe une unique suite (P_n) de polynômes a coefficients dans $\mathbb{Z}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$.
  - ▷ Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$. Montrer que : $2\cos(a\pi) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 502 [Mines 2023 # 534]
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}(\theta)} = P_n(\mathrm{cotan}^2\theta)$.
  - ▷ Déterminer les racines de P_n et calculer leur somme.
- ▷ Montrer que, pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{cotan}^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \mathrm{cotan}^2\theta + 1$. Dduire de ce qui precede la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 503 [Mines 2023 # 535] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $|P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}$.

▷ *Démonstration.* Interpolation de Lagrange. □

Exercice 504 [Mines 2023 # 536] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

- À quelle condition P realise-t-il une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$?
- À quelle condition P realise-t-il une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?
- À quelle condition P realise-t-il une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 505 [Mines 2023 # 537] On pose $B_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \frac{1}{k!} X(X-1)\dots(X-k+1)$.

- Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(B_0, ..., B_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $\exp(2i\pi P(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P(n) - \lfloor P(n) \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 506 [Mines 2023 # 538] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Soit $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ polynôme de degré n tel que $(X-1)^k | P$. On note $\mu(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P. On veut montrer que $\mu(P) \geq k+1$. On raisonne par l'absurde et on pose $A = \{i \in [\![0, n]\!],\ a_i \neq 0\}$.

- On pose $P_0 = 1$ et $P_s = \prod_{j=0}^{s-1}(X-j)$ pour $s \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\forall s \in [\![0, k-1]\!],\ P^{(s)}(1) = \sum_{i\in A} a_i P_s(i)$.

- En déduire que $\forall i \in A$, $a_i = 0$, et conclure.
- L'inégalité démontrée est-elle optimale ?

Exercice 507 [Mines 2023 # 539] • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scinde sur $\mathbb{R}$ et non constant. Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' - \lambda P$ est simplement scinde sur $\mathbb{R}$.

▷ Le résultat de la question précédente s'etend-il a $P'' - \lambda P$? Comment le généraliser ?

Exercice 508 [Mines 2023 # 540] • Soit P un polynôme irreductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que les racines complexes de P sont simples.

▷ Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{Q}[X]$ non constant avec $\deg(P) \leq 2k-1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité k. Montrer que α est rationnel.

Exercice 509 [Mines 2023 # 541] Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec : $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$.

- Montrer que les racines complexes de P sont de module supérieur ou égal a 1.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$. Montrer $\min_{k\in[0,n-1]} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq |z| \leq \max_{k\in[0,n-1]} \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

Exercice 510 [Mines 2023 # 542] • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $\left(P^{(k)}(x)\right)_{k\in[0,n]}$.

On note $v(x)$ le nombre de changements de signe stricts :

Soit $a < b$ tel que $P(a)P(b) \neq 0$. Montrer que si l'on note $\mu(a, b)$ le nombre de racines comptées avec multiplicité sur $[a, b]$ de P comptées avec multiplicité, alors :

$\mu(a, b) \leq v(a) - v(b)$ et $\mu(a, b) \equiv v(a) - v(b)[2]$.

- Soit $P = a_0 + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On pose $V(P)$ le nombre de changements de signe stricts de la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $\mu(P)$ le nombre de racines strictement positives comptées avec multiplicité. Montrer que $\mu(P) \leq V(P)$ et $\mu(P) \equiv V(P)[2]$.

Exercice 511 [Mines 2023 # 543] • Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Decomposer P'/P en éléments simples.

▷ On note $a_1, ..., a_n$ les racines de P. Soit a une racine de P'. Montrer qu'il existe des réels positifs $t_1, ..., t_n$ tels que $t_1 + \cdots + t_n = 1$ et $t_1a_1 + \cdots + t_na_n = a$.

Exercice 512 [Mines 2023 # 544] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$, ayant n racines réelles distinctes et non nulles $a_1 < ... < a_n$. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)}$ et $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_iP'(a_i)}$.

Exercice 513 [Mines 2023 # 545] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses racines comptées avec multiplicité. On suppose que P est a coefficients entiers.

Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $P_q = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i^q)$ est a coefficients entiers.

Exercice 514 [Mines 2023 # 546] Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une base de $\mathbb{K}$.

Exercice 515 [Mines 2023 # 547] Quelle est la dimension du $\mathbb{Q}$-sous-espace de $\mathbb{R}$ engendre par $\mathbb{U}_5$?

Exercice 516 [Mines 2023 # 548] Soient x, y, z des rationnels non nuls. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2y & z & 2x \\ z & x & 2y \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 517 [Mines 2023 # 549] Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}$. Montrer que $D = 0$ si et seulement si $x = y$.

Exercice 518 [Mines 2023 # 550] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes. Soit B la matrice dont les colonnes sont $C'_1, \ldots, C'_n$ avec : $C'_j = \sum_{i\neq j} C_i$. Déterminer $\det B$ en fonction de $\det A$.

Exercice 519 [Mines 2023 # 551] • Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls et $b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{R}$ avec $b_1 < \cdots < b_p$. Montrer que $f_p : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=1}^{p} a_i e^{b_i x}$ s'annule au plus $p-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ et $\beta_1 < \cdots < \beta_n$ des réels. Montrer que : $\det \left(e^{\alpha_i\beta_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} > 0$.

Exercice 520 [Mines 2023 # 552] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ou E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$ si et seulement si $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 521 [Mines 2023 # 553] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer l'equivalence entre les trois propriétés suivantes :
  - ▷ $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$
  - ▷ $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$
  - ▷ $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.
- Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant ces propriétés.
- L'equivalence est-elle vraie en dimension infinie ? Montrer que (i) et (ii) equivaut a (iii).

Exercice 522 [Mines 2023 # 554] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $h \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle et $a \in E$ non nul tels que : $\forall x \in E,\, h(x) = x + \varphi(x)a$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u - \mathrm{id}) = 1$ et $(u - \mathrm{id})^2 = 0$. Montrer que u est une transvection. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 523 [Mines 2023 # 555] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que toutes les matrices semblables a A appartiennent au commutant de M. Déterminer M. Meme question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 524 [Mines 2023 # 556] Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On note x_1, x_2 et x_3 les racines (non nécessairement distinctes) du polynôme $X^3 + pX + q$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $N_j = x_1^j + x_2^j + x_3^j$.
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant de la matrice $M_n = (N_{i+j-2})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 525 [Mines 2023 # 557] ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\det((i \wedge j)_{1 \leq i,j \leq n})$.
Ind. On rappelle que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $N = \sum_{d|N} \varphi(d)$ ou φ est l'indicatrice d'Euler.

Exercice 526 [Mines 2023 # 558] Soient $K_1, \ldots, K_n$ des segments non triviaux disjoints.

- Montrer que, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifie $\int_{K_j} P = 0$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, alors $P = 0$. - Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $\int_{K_j} P = 0$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$.

Exercice 527 [Mines 2023 # 559] • Déterminer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de A.

  - ▷ Calculer $\mathrm{Com}\,(\mathrm{Com}(A))$ lorsque $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
  - ▷ Montrer que si X est un vecteur propre de A associe a une valeur propre non nulle, alors X est un vecteur propre de $(\mathrm{Com}(A))^T$.

Exercice 528 [Mines 2023 # 560] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit D l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $m_{i,j} = 0$ si i et j sont de parites differentes.

- Montrer que D est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $M \in D \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Com}(M) \in D$.
- Traiter le cas ou M n'est pas inversible.

Exercice 529 [Mines 2023 # 561] Trouver les solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 530 [Mines 2023 # 562] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.
Montrer $\forall k \geq 1,\, \mathrm{tr}(A^k) + \mathrm{tr}(B^k) = \mathrm{tr}\left((A+B)^k\right)$.

Exercice 531 [Mines 2023 # 563] • Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\right)$ vérifiant : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle a la trace.

  - ▷ Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ un endomorphisme d'algèbre. Montrer que $\mathrm{tr} \circ g = \mathrm{tr}$.

Exercice 532 [Mines 2023 # 564] Soit $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow f(A) \neq 0$.

Exercice 533 [Mines 2023 # 565] Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$ si et seulement s'il existe P inversible telle que $B = PA$.

Exercice 534 [Mines 2023 # 566] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'equivalence entre : i) $u^2 = 0$ et $\exists v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v + v \circ u = \mathrm{id}$, ii) $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$.

Exercice 535 [Mines 2023 # 567] Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = A - I_n$.

Soit (E) l'équation matricielle $X^2 = A$.

- Quelles sont les matrices qui commutent avec N ? - Montrer que les solutions de (E) sont de la forme $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il y a au plus deux solutions.

- Rappeler le développement limite a l'ordre n de $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Résoudre (E).

Exercice 536 [Mines 2023 # 568] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

- Calculer $\det(A + I_n)$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA$. Calculer $\det(A + M)$. On commencera par le cas ou $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Le résultat est-il toujours vrai si $AM \neq MA$?

Exercice 537 [Mines 2023 # 569] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

- Montrer que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
- Soient F un sous-espace vectoriel de E, G et H deux supplementaires de F. On note p (resp. q) la projection sur F (sur H) parallélément a G (a F).

Montrer que $\operatorname{rg}(p + q) = \operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q$.

Exercice 538 [Mines 2023 # 570] Déterminer les parties G de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $(G, \times)$ soit un groupe multiplicatif et G ne soit pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 539 [Mines 2023 # 571] Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\sum_{M \in G} \operatorname{Tr}(M)$ est un entier divisible par le cardinal de G.

Exercice 540 [Mines 2023 # 572]

- Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{g \in G} \operatorname{tr} g = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.
  - ▹ Soient G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par tous les éléments de G. Montrer que V admet un supplementaire stable par tous les éléments de G.

Exercice 541 [Mines 2023 # 573] Déterminer les ideaux bilateres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-a-dire les sous-groupes additifs stables par multiplication a gauche et a droite par n'importe quel élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 542 [Mines 2023 # 574] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ tels que $fg - gf = \mathrm{id}_E$.

- Montrer que E est de dimension infinie ou nulle.
- Montrer que f n'est pas nilpotent.
- Donner un exemple de triplet (E, f, g) vérifiant les conditions précédentes.

Exercice 543 [Mines 2023 # 575] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $|\det A| \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \right)$.
- Lorsque $\det A \neq 0$, étudier le cas d'égalité.

Exercice 544 [Mines 2023 # 576] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie S de $\mathcal{L}(E)$ est dite dense si, pour tout $n \geq 1$, toute famille $(b_1, \dots, b_n)$ de vecteurs de E et toute famille libre $(a_1, \dots, a_n)$ de vecteurs de E, il existe $f \in S$ tel que $f(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

- Quelles sont les parties denses de $\mathcal{L}(E)$ si E est de dimension finie ?
- Dans cette question, on suppose que E n'est pas de dimension finie.
- Montrer que $\{f \in \mathcal{L}(E),\ \operatorname{rg} f < +\infty\}$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$.
- Meme question avec $\{f \in \mathcal{L}(E);\ \operatorname{rg} f$ est fini et pair$\}$.
- Si S est dense dans $\mathcal{L}(E)$, déterminer $\{g \in \mathcal{L}(E)\ ; \forall f \in S,\ fg = gf\}$.

Exercice 545 [Mines 2023 # 577] Soit $(M_{i,j})$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall (i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4, M_{i,j} M_{k,\ell} = \delta_{j,k} M_{i,\ell}$.

- Montrer que $\operatorname{Im} M_{i,j}$ est indépendante de j. On la notera F_i.
- Montrer que $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.
- En déduire $\dim F_i$.
- Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, M_{i,j} = P E_{i,j} P^{-1}$.
- Expliciter les automorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 546 [Mines 2023 # 578] Soit U une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non vide, finie et stable par produit. Montrer qu'il existe $M \in U$ tel que $\operatorname{tr} M \in \{0, \dots, n\}$.

Exercice 547 [Mines 2023 # 579] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $A_x = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la structure de l'ensemble : $\{\exp(A_x),\ x \in \mathbb{R}\}$ et expliciter $\exp(A_x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 548 [Mines 2023 # 580] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec M est $\operatorname{Vect}(I_n, M, \dots, M^{n-1})$.

Exercice 549 [Mines 2023 # 581] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = \mathrm{id}$. Pour $b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre $x + \lambda u(x) = b$.

Exercice 550 [Mines 2023 # 582] Soit $Z = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer χ_{Z^2}. La matrice Z est-elle diagonalisable ?

Exercice 551 [Mines 2023 # 583] Soient $n \in \mathbb{N}^*, U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n},\ V = (v_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $u_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$, les autres coefficients étant nuls, $v_{i,j} = 1$ si $j > i$, les autres coefficients étant nuls.

- Calculer le polynôme minimal de U.
- Montrer que U et V sont semblables.

Exercice 552 [Mines 2023 # 584] Soient $a_1 < \ldots < a_n$ des réels et $M = \begin{pmatrix} a_1+1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_2+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & a_n+1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le polynôme caractéristique de M.
- Montrer que M est diagonalisable et que ses espaces propres sont des droites.

Exercice 553 [Mines 2023 # 585] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $P = X^2 + aX + b$. On suppose que P est irréductible sur $\mathbb{R}$ et annulateur de u.

- Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $F_x = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u.
- Soient F un sous-espace vectoriel stable par u et $x \in E \setminus F$. Montrer que $F \cap F_x = \{0\}$.
- Montrer que u est diagonalisable par blocs identiques de taille 2×2.

Exercice 554 [Mines 2023 # 586] Écrire l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisables comme reunion de deux plans vectoriels prives de leur droite d'intersection.

Exercice 555 [Mines 2023 # 587] Soient a, b dans $\mathbb{R}^*$ et A la matrice de taille $2n$ dont la diagonale contient des a, l'anti-diagonale des b et les autres coefficients sont nuls.

- La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.
- À quelle condition A est-elle inversible ?
- Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 556 [Mines 2023 # 588] Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que A et B sont inversibles et preciser le sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ engendre par ces matrices.
- Dans le cas $n = 3$, preciser les matrices de G qui sont diagonalisables.

Exercice 557 [Mines 2023 # 589] Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ défini par
$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = (X^2 - 1)P'' + 4XP'$.

- Montrer que le spectre réel de u est l'ensemble $\{n(n+3),\ n \in \mathbb{N}\}$, et que les espaces propres associes sont des droites vectorielles.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n l'unique polynôme unitaire générateur de la droite propre associée a $n(n+3)$. Trouver une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2} pour $n \geq 2$.

Exercice 558 [Mines 2023 # 590] Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $A \in E$ et $u_A : M \in E \mapsto AM$.

- Caracteriser les matrices A telles que u_A soit un automorphisme de E.
- Calculer déterminant et trace de l'endomorphisme u_A.
- Montrer que u_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 559 [Mines 2023 # 591]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulles et $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(AM)B$. - Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de f. - Étudier la diagonalisabilité de f.

Exercice 560 [Mines 2023 # 592]

Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$. On suppose que $MN = 0$ et que $M + M^T$ est inversible. - Montrer que M et N ont un vecteur propre commun. - Montrer que $N + N^T$ n'est pas inversible.

Exercice 561 [Mines 2023 # 593]

Soient $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PM - MP$. - L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? - Calculer la trace de f.

Exercice 562 [Mines 2023 # 594]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\Delta(M) = AM + MB$. Montrer que Δ est diagonalisable et preciser ses valeurs propres.

Exercice 563 [Mines 2023 # 595] Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $p(M) = M'$ avec : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m'_{i,j} = m_{i,j}$ si $i = \sigma(j)$ et $m'_{i,j} = 0$ sinon.

- Montrer que p est un projecteur. Déterminer son noyau et son image.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle. On définit deux applications φ et u_A par :
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{\sigma(k),k}$ et $u_A(M) = \varphi(M)A + \varphi(A)M$.

- Montrer que u_A est diagonalisable si et seulement si $\varphi(A) \neq 0$.
- L'endomorphisme u_A peut-il être un projecteur ?

Exercice 564 [Mines 2023 # 596] Soient E un $\mathbb{R}$-espace de dimension n, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

- Montrer que f est nilpotent.
- On suppose que g est diagonalisable et que $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. Déterminer g.

Exercice 565 [Mines 2023 # 597] Soient $n \geq 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

- Montrer que, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $AB^m - B^m A = mB^m$.
- En déduire que B est nilpotente.

Exercice 566 [Mines 2023 # 598] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Montrer que deux endomorphismes u et v de E qui commutent ont un vecteur propre en commun.
- Montrer qu'une famille finie F d'endomorphismes de E qui commutent admet une base de trigonalisation commune a ses éléments.

Exercice 567 [Mines 2023 # 599] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de f tel que 0 soit racine simple de P.

Montrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

On suppose dans la suite que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fg = 0$. Montrer que f et g sont cotrigonalisables.
- Soit $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. Montrer que $f_1, \ldots, f_p$ sont cotrigonalisables.
- Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents qui commutent. Calculer $f_1 \circ \cdots \circ f_n$.

Exercice 568 [Mines 2023 # 600] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si
$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A) \text{ nilpotent} \Rightarrow P(A) = 0$.

Exercice 569 [Mines 2023 # 601] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B diagonalisable. On suppose que $AB^3 = B^3 A$. Montrer que A et B commutent. Généraliser.

Exercice 570 [Mines 2023 # 602] Quels sont les $n \in \mathbb{N}$ tels qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 = I_n$?

Exercice 571 [Mines 2023 # 603] Déterminer les entiers $n \geq 1$ tels qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $f^3 + f^2 - \mathrm{id} = 0$ et $\operatorname{tr} f \in \mathbb{Q}$.

Exercice 572 [Mines 2023 # 604] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AMA^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Soit $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) \in (\mathbb{C}^n)^{2n}$. Montrer que $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont des bases de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si $\left(X_i Y_j^T\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Montrer que A est inversible si et seulement si f_A est inversible.
- On suppose A diagonalisable. Montrer que f_A est diagonalisable.
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de A et Y un vecteur propre associe. Montrer que le sous-espace vectoriel $F = \left\{XY^T,\ X \in \mathbb{C}^n\right\}$ est stable par f_A.
- Montrer que si f_A est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Exercice 573 [Mines 2023 # 605] Soit p une permutation de $[\![1, n]\!]^2$. On considère l'application $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par : $u(A) = (A_{p(i,j)})^2_{(i,j) \in [\![1,n]\!]}$. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-il diagonalisable ?

Exercice 574 [Mines 2023 # 606] • Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $CD = DC$.

Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

- Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer l'equivalence des enonces suivants :

1. λ est valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & A^{-1}C \\ I_n & A^{-1}B \end{pmatrix}$,

ii) il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que la fonction $t \mapsto e^{\lambda t} x$ soit solution de $Ay'' - By' - Cy = 0$.

Exercice 575 [Mines 2023 # 607] Donner une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables.

Exercice 576 [Mines 2023 # 608] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

Exercice 577 [Mines 2023 # 609] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{tr} A$ et $\operatorname{rg}(I_n - A) \leq \operatorname{tr}(I_n - A)$.

Exercice 578 [Mines 2023 # 610] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^n} = I_2$.

Montrer que $A^2 = I_2$ ou qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^k} = -I_2$.

Exercice 579 [Mines 2023 # 611] Soit u un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}^n$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

!! Page manquante

Exercice 580 [Mines 2023 # 621] Quelles sont les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, PA soit diagonalisable ?

Exercice 581 [Mines 2023 # 622] Quelles sont les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, PA soit trigonalisable ?

Exercice 582 [Mines 2023 # 623] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par
$\forall T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ u(T) = AT - TB$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ (resp. $\beta \in \mathbb{C}$) une valeur propre de A (resp. B). Montrer que $\alpha - \beta$ est valeur propre de u.
- Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u, et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associe.

Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)T = TP(\lambda I_n + B)$.

- Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$ telles que $\lambda = \alpha - \beta$.
- En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AT = TB$.

Exercice 583 [Mines 2023 # 624] • Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ existe-t-il $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = \lambda BA$?

▷ Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ est-il vrai que, pour tout $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = \lambda BA$, les matrices A et B sont diagonalisables ?

Exercice 584 [Mines 2023 # 625] On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des suites bornées de $(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}}$.
On s'interesse a l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathbb{B})$ qui a (u_n) associe (u_{n+1}).

- Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de T.
- Soit $S \subset \mathbb{B}$ un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{B}$ stable par T. On note $\widetilde{T}$ l'endomorphisme induit par T sur S. Montrer que l'on dispose de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ distincts tels que

$$S = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\left(\widetilde{T} - \lambda_i \mathrm{id}\right)$$

Exercice 585 [Mines 2023 # 626] • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable. Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}$?

▷ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Résoudre l'équation $e^M = A$.

Exercice 586 [Mines 2023 # 627] Soient $(E, \langle\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $v_1, \ldots, v_{n+2}$ des vecteurs de E. Montrer qu'on ne peut avoir : $\forall i \neq j,\ \langle v_i, v_j\rangle < 0$.

Exercice 587 [Mines 2023 # 628] Soient $(E, \langle\rangle)$ un espace euclidien, $c_1, c_2 \in E$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{+*}$.

- À quelle condition les boules fermées $B_f(c_1, r_1)$ et $B_f(c_2, r_2)$ se rencontrent-elles ?
- À quelle condition les spheres $S(c_1, r_1)$ et $S(c_2, r_2)$ se rencontrent-elles ?

Exercice 588 [Mines 2023 # 629] Soient E un espace prehilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E telle que $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2$. Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormalée de E. Le résultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus la famille libre, mais seulement constituée de vecteurs non nuls ?

Exercice 589 [Mines 2023 # 630] Soient E un espace euclidien, A une partie de E et $B = \left\{\langle x, y\rangle\ ;\ (x, y) \in A^2\right\}$. Montrer que A est fini si et seulement si B est fini.

Démonstration. Si B est fini, on prend une famille génératrice de Vect A. □

Exercice 590 [Mines 2023 # 631] Soient E un espace euclidien, A et B deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux. Montrer que les symétries orthogonales par rapport a A et par rapport a B commutent et que leur composée est la symétrie orthogonale par rapport a $(A + B)^{\perp}$.

Exercice 591 [Mines 2023 # 632] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $a \in E \setminus \{0\}$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\Phi_\lambda : x \mapsto x - \lambda \langle a, x\rangle a$.

- Déterminer les λ pour lesquels Φ_λ est inversible.
- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, calculer $\Phi_\lambda \circ \Phi_\mu$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de Φ_λ.

Exercice 592 [Mines 2023 # 633] Soit E un espace euclidien.

- Trouver les endomorphismes f de E tels que :

$\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$

- Pour un tel f, discuter de la nature de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

Exercice 593 [Mines 2023 # 634] • Enoncer le théorème de reduction pour une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

▷ Montrer que deux rotations de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ qui ont meme axe commutent.

▷ Montrer que deux demi-tours de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ d'axes orthogonaux commutent.

▷ Montrer que si deux rotations de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ commutent, alors on est dans l'un des deux cas precedents.

Exercice 594 [Mines 2023 # 635] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

- Montrer que $A(a, b, c)$ est dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme $X^3 - X^2 + t$ ou t appartient a un intervalle I que l'on déterminera.
- Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer une droite et un plan stables par $A(a, b, c)$.
- Si $A(a, b, c) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, caracteriser l'endomorphisme canoniquement associe.

Exercice 595 [Mines 2023 # 636] On travaille dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$. Pour P et Q dans E, on pose
$\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t} dt.$

- Montrer que Φ est correctement définie et munit l'espace E d'un produit scalaire.
- Calculer $\Phi(X^p, X^q)$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.
- Calculer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la famille $(1, X, X^2)$.
- Calculer la distance de X^3 a $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 596 [Mines 2023 # 637] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(P(x)+x^n\right)^2\, dx \geq (n!)^2$.

Exercice 597 [Mines 2023 # 638] Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.

- Montrer que l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur E,
- Déterminer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

Exercice 598 [Mines 2023 # 639] Calculer le minimum de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \int_0^1 (t\ln(t) - xt - y)^2 dt$.

Exercice 599 [Mines 2023 # 640] On fixe un entier $n \geq 0$, et on pose $Q_i = \left(X^i(1-X)^i\right)^{(i)}$ pour $i \in [\![0, n]\!]$. On munit également $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$.

- Montrer que $(Q_0, \ldots, Q_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- On fixe $k \in [\![0, n]\!]$ et on note $\mathcal{F}_{k,n}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le coefficient de X^k est égal a 1. Montrer que $\mathcal{F}_{k,n}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}_n[X]$, et preciser sa direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{k,n}$.
- Trouver $R_k \in \mathcal{F}_{k,n} \cap \overrightarrow{\mathcal{F}}_{k,n}^{\perp}$, et calculer $\int_0^1 R_k(t)^2\,dt$. Interpréter le résultat.

Démonstration.

- On a $\|Q_n\|^2 = \frac{(n!)^2}{2n+1}$
- La direction est $\mathrm{Vect}(X^i)_{i\neq k}$.
- Q_i est de degré i, de coefficient dominant $(-1)^i\frac{(2i)!}{i!}$, de coefficient de degré k : $\binom{i}{k}(-1)^k\frac{(k+i)!}{k!}$.
  Une base de $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{k,n}$ est $Q_0, \ldots, Q_{k-1}$ auquel on rajoute, pour $i > k$, les $Q_i - Q_k(-1)^k\frac{k!}{(2k)!}\binom{i}{k}(-1)^k\frac{(k+i)!}{k!}. = Q_i - Q_k\binom{i}{k}\frac{(k+i)!}{(2k)!}$.
  Plutôt : partir de $P_i = Q_k - (-1)^k\frac{(2k)!}{(k+i)!}\frac{1}{\binom{i}{k}}$, alors $\langle P_i, P_j\rangle = \|Q_k\|^2$. Cela permet de trouver un polynôme $L = \sum \lambda_i P_i$ tel que $\langle L, P_i\rangle$ soit une constante. Retirer alors un multiple de Q_k à ce polynôme. ☐

Exercice 600 [Mines 2023 # 641] Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles et $D : u \in E \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Vérifier que D est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? Surjectif ?
- Donner les éléments propres de l'endomorphisme D.
- Soit F l'espace des suites réelles de carré sommable.

Montrer que F est stable par l'endomorphisme D.

- On munit F de son produit scalaire $\langle\ \rangle$ usuel.

Décrire l'ensemble $H = \left\{\frac{\langle u, D(u)\rangle}{\|u\|^2},\ u \in F \setminus \{(0)_{n\in\mathbb{N}}\}\right\}$.

Exercice 601 [Mines 2023 # 642] Soient $(E, \langle\ \rangle)$, $p, q \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs orthogonaux.

- Vérifier que $\mathrm{Im}\, p$ est stable par pq et que l'endomorphisme induit est symétrique.
- Montrer que $\mathrm{Ker}(pq) = \mathrm{Ker}\, q \oplus (\mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p))$.
- Montrer que E est somme directe orthogonale de $(\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, q)$ et de $(\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, q)$.
- En déduire que pq est diagonalisable.
- Montrer que le spectre de pq est inclus dans $[0, 1]$.

Exercice 602 [Mines 2023 # 643] Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E. Montrer que $q \circ p$ est un projecteur si et seulement si p et q commutent.

Exercice 603 [Mines 2023 # 644] On munit $E = \mathbb{R}^n$ munit du produit scalaire usuel. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par A. Montrer que $F^\perp$ est stable par A^T.
- On suppose $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $A^T A = AA^T$. Montrer que A est diagonalisable ou A est semblable a une matrice de la forme $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \alpha & -\beta\\ 0 & \beta & \alpha\end{pmatrix}$ avec $\beta \neq 0$.

Exercice 604 [Mines 2023 # 645]

- Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?
- Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 605 [Mines 2023 # 646] Soit E un espace euclidien de dimension 4. Trouver les endomorphismes $f \neq 0$ de E tels que $\mathrm{tr}(f) = 0,\ f + f^4 = 0$ et $f^* = -f^2$.

Exercice 606 [Mines 2023 # 647] Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_k = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^k M^j$. Étudier la convergence de la suite $(C - k \in \mathbb{N}$.

Exercice 607 [Mines 2023 # 648] Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable a une matrice définie par blocs : $\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ou B est inversible de taille p. Montrer que p est pair.

Exercice 608 [Mines 2023 # 649] Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable a une matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux antisymétriques de taille au plus 2×2.

Exercice 609 [Mines 2023 # 650] Soient $A, M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que AA^T et A^TA sont diagonalisables.
- Montrer que MN et NM ont les memes valeurs propres et que, pour toute valeur propre non nulle, les sous-espaces propres associes sont de meme dimension.
- Montrer que A^TA et AA^T ont les memes valeurs propres avec les memes multiplicités.
- Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^TA = UAA^TU^{-1}$.

Exercice 610 [Mines 2023 # 651] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^TA = B^TB$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = QA$.

Exercice 611 [Mines 2023 # 652] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = AA^T$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 612 [Mines 2023 # 653] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que : $M^TM = MM^T$. Déterminer M^TM puis M.

Exercice 613 [Mines 2023 # 654] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\det(A) \geq 0$.
- Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on pose $A_p = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le p}$. Montrer que $\det(A_p) \geq 0$.

Exercice 614 [Mines 2023 # 655] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k \geq 1}$ converge vers $B = (b_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$. Montrer que $\sum_{1 \le i,j \le n} |b_{i,j}| \le n\sqrt{\operatorname{rg} B}$.

Exercice 615 [Mines 2023 # 656] Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}\right| \le n \le \sum_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}| \le n\sqrt{n}$.

Exercice 616 [Mines 2023 # 657] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)^2 \le \operatorname{rg}(A) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.

Exercice 617 [Mines 2023 # 658] Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Calculer $\max\{\operatorname{tr}(OS)\ ;\ O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice 618 [Mines 2023 # 659] Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ (resp. $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{O}(E)$) l'ensemble des endomorphismes antisymétriques (resp. symétriques, orthogonaux) de E.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'ensemble $T = \{\operatorname{tr}(uv)\ ;\ v \in \mathcal{O}(E)\}$ est majore.
- Montrer que si $u \in \mathcal{A}(E)$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tu) \in \mathcal{O}(E)$.
- On suppose que $\sup T$ est atteint en $v = \mathrm{id}$. Montrer que $u \in \mathcal{S}^+(E)$.
- Étudier la réciproque.

Exercice 619 [Mines 2023 # 660] Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ sont les valeurs propres de Aprises avec multiplicité. Montrer que A est diagonale.

Exercice 620 [Mines 2023 # 661]

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Montrer que $|x_j| \le \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} \|x\|_2$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
- Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.

  Montrer que $\left|\lambda - \frac{\operatorname{tr} A}{n}\right| \le \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} \left(\sqrt{\|A\|_2^2 - \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{n}}\right)$.

Démonstration.

- On a $|x_j| = \left|\sum_{i \ne j} x_i\right| \le \sqrt{n-1}\sqrt{\sum_{i \ne j} x_i^2}$.

  Donc $|x_j|^2 \le (n-1)(\|x\|_2^2 - |x_j|^2)$, d'où le résultat.
- On peut supposer que la trace de A est nulle, et on obtient le résultat. □

Exercice 621 [Mines 2023 # 662] Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, a\|X\|^2 \le \langle X, AX\rangle \le b\|X\|^2$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in [a, b], P(x) > 0$. Montrer que $P(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 622 [Mines 2023 # 663]

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle. Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.
- Montrer que $(I_n + A)(I_n - A)^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $Q \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $(I_2 + A)(I_2 - A)^{-1} = Q$, d'inconnue une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 623 [Mines 2023 # 664] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A^{-1}$.
- On pose $D = CBC$. Montrer que $\det(I_n + D)^{1/n} \geq 1 + \det(D)^{1/n}$.
- En déduire que $\det(A + B)^{1/n} \geq \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}$.
- Est-ce encore vrai si $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?

Exercice 624 [Mines 2023 # 665] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient a $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si, pour toute matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$.

Exercice 625 [Mines 2023 # 666] On considère la forme quadratique $q\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x+z)^2 + 2xy + 4yz$.

- Déterminer a, b, c tels que $q(x, y, z) = a(x+y+z)^2 + b(y-z)^2 + cz^2$.
- La forme quadratique q est-elle définie positive ?
- Trouver les plans de $\mathbb{R}^3$ sur lesquels la restriction de q est définie positive.

2) Analyse

Exercice 626 [Mines 2023 # 667] Soient E un espace vectoriel norme et A une partie de E. On considère l'ensemble des parties que l'on peut obtenir en appliquant successivement des passages a l'interieur ou a l'adherence a partir de A.

- Montrer qu'il y en a au plus 7.
- Donner une partie A telle qu'il y en ait exactement 7.

Exercice 627 [Mines 2023 # 668] Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel norme et A une partie non vide de E.
Soit $f : x \in E \mapsto d(x, A) = \inf\{\|x - a\|,\ a \in A\}$.

- Montrer que f est 1-lipschitzienne.
- Montrer que A est ferme si et seulement si $A = f^{-1}(\{0\})$.
- Montrer que tout ferme de E est intersection decroissante d'ouverts.
- Montrer que tout ouvert est union croissante de fermes.

Exercice 628 [Mines 2023 # 669] Soient E un espace vectoriel norme et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

- Montrer que : $\forall x \in E, \exists y \in F, d(x, F) = \|y - x\|$.
- On suppose que $F \neq E$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.
- En déduire que $B_f(0, 1)$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Exercice 629 [Mines 2023 # 670] Déterminer les sous-groupes compacts de $\mathbb{C}^*$.

Exercice 630 [Mines 2023 # 671] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image de tout ouvert par f est un ouvert.

Exercice 631 [Mines 2023 # 672]

- Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'equivalence entre :

(i) $|f(x)| \to +\infty$ lorsque $N(x) \to +\infty$;
(ii) l'image réciproque de tout compact par f est un compact.

- Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que l'image réciproque de tout compact par f est un compact. Montrer que l'image directe de tout ferme par f est un ferme.
- La réciproque du résultat precedent est-elle vraie ?

Exercice 632 [Mines 2023 # 673] On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \|_\infty$.
Si $f \in E$, on pose $u(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k f\left(\frac{1}{k}\right). \in \mathbb{R}$.

- Montrer que u est bien définie sur E.
- Montrer que u est continue sur E et déterminer sa norme subordonnée.

Exercice 633 [Mines 2023 # 674] Soient $L^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites sommables et $N : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$.

- Montrer que N est une norme.
- Soit A l'ensemble des suites de $L^1(\mathbb{R})$ nulle a partir d'un certain rang. Donner l'adherence et l'interieur de A. Ind. Remarquer que A est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 634 [Mines 2023 # 675] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $D = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \,;\, \sum x_i^2 < 1,\, \sum x_i > 1\right\}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$. Que dire de f ?

Exercice 635 [Mines 2023 # 676] Soient $(E, \| \|)$ un espace norme réel, $p \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$,.

- Montrer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre si et seulement si

$\inf\left\{\|\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\| \;;\; (\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\right\} > 0$.

- En déduire que l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ tels que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre est un ouvert de E^p. Retrouver ce résultat plus simplement si E est de dimension finie.

Exercice 636 [Mines 2023 # 677] Soient $n \geq 2$, K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Une partie $A \subset K$ est ε-separée si, pour tous $x, y \in A$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$, on a $x = y$.

- Montrer qu'il existe un entier $M(\varepsilon)$ tel que toute partie ε-separée de K est de cardinal inférieur a $M(\varepsilon)$ et il existe une partie ε-separée de K de cardinal $M(\varepsilon)$.
- Soit $f : K \to K$. On suppose que, pour tous $x, y \in K$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que f est surjective.

Exercice 637 [Mines 2023 # 678] Soient $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est compact. Montrer que f admet un extremum global. Que se passe-t-il si $n = 1$?

Exercice 638 [Mines 2023 # 679] Soient $(E, \| \|)$ un espace norme réel de dimension finie, $k \in]0, 1[$, f une application k-lipschitzienne de E dans E. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 639 [Mines 2023 # 680] Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Pour $f \in E$ on pose $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\, dt - \int_{-1}^0 f(t)\, dt$.

- Montrer que φ est une forme lineaire continue sur E et calculer $\|\varphi\|$.
- Existe-t-il f unitaire telle que $|\varphi(f)| = \|f\|$?

Exercice 640 [Mines 2023 # 681] On note E l'espace vectoriel des fonctions de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$ continues par morceaux, muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} fg$ et de la norme euclidienne associée $\|\ \|$.

On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0}\in E^{\mathbb{N}}$ converge fortement (resp. faiblement) vers $f\in E$ si $\|f_n-f\|\to 0$ (resp. $\langle f_n,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$ pour tout $\varphi\in C^1([-1,1],\mathbb{R})$).

- Montrer que la convergence uniforme implique la convergence forte. La réciproque estelle vraie ?
- Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
- Soit $(f_n)_{n\geq 0}\in E^{\mathbb{N}}$ convergent faiblement vers $f\in C^1([-1,1],\mathbb{R})$ et vérifiant de plus $\|f_n\|\to\|f\|$. Montrer qu'alors $(f_n)_{n\geq 0}\in E^{\mathbb{N}}$ converge fortement vers f.
- Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0}\in C^1([-1,1],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers φ et telle que $(\varphi'_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément. Soit par ailleurs $(f_n)_{n\geq 0}\in E^{\mathbb{N}}$ bornée et convergeant faiblement vers f. Montrer qu'alors $\langle f_n,\varphi_n\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$.
- On pose $f_n(x)=\sin(nx)$ pour $n\geq 0$ et $x\in[-1,1]$. - Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers la fonction nulle. - La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle fortement ?

Exercice 641 [Mines 2023 # 682] Soient $a_1<\cdots<a_p$ des réels et $P=\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)$.

On pose : $E=\Big\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ P(M)=0\Big\}$.

- Soit $M\in E$. Déterminer les valeurs possibles de $\operatorname{tr} M$.
- Déterminer les matrices $M\in E$ vérifiant $\operatorname{tr} M=na_1$.
- Montrer que la matrice a_1I_n est isolée dans E.
- La matrice $\operatorname{Diag}(a_2,a_1,\ldots,a_1)$ est-elle isolée ?
- Généraliser.

Exercice 642 [Mines 2023 # 683]

- Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que P est scinde sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z\in\mathbb{C}, |P(z)|\geq|\operatorname{Im}(z)|^n$.
  - ▷ Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisables est ferme.
  - ▷ Quelle est l'adherence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 643 [Mines 2023 # 684] Soient $n\geq 2$ et $r\in[1,n-1]$. L'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées de taille n et de rang r est-il ouvert ? ferme ? Déterminer l'interieur et l'adherence de $\mathcal{E}$.

Exercice 644 [Mines 2023 # 685] On munit l'espace $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini par

$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ et de la norme associée $\|\quad\|_2$. Soit F un sous-espace de E tel qu'il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que $\forall f\in F, \|f\|_\infty\leq C\|f\|_2$.

- Montrer que $F\neq E$.
- Soit $(f_1,\ldots,f_n)$ une famille orthonormale de F.

Montrer que $\forall a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}, |\sum_{i=1}^n a_if_i|\leq C\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

- En déduire que F est de dimension finie majorée par C^2.

Exercice 645 [Mines 2023 # 686] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si l'ensemble $\{PAP^{-1},\ P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ est ferme.

Exercice 646 [Mines 2023 # 687] Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Exercice 647 [Mines 2023 # 688] Soient $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il un sous-espace vectoriel ?
- Quel est le sous-espace vectoriel engendre par $\mathcal{D}$? par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\mathcal{D}$?
- L'ensemble $\mathcal{D}$ est il ouvert ? ferme ?

Exercice 648 [Mines 2023 # 689] On pose $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, pour $A\in E$, $\|A\|=\sup_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^n|a_{i,j}|$. - Montrer que $\|\ \|$ est une norme d'algèbre.

- Soit $A\in E$. Étudier la convergence de la série $\sum A^k$ si $\|A\|<1$.

Cette condition est-elle nécessaire pour que la série soit convergente ?

- Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $U_k=\left(I_n+\frac{A}{k}\right)^k$. Étudier la convergence et la limite de la suite (U_k).

Exercice 649 [Mines 2023 # 690] Lorsque J est un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $S_n(J)=\{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\ \ \mathrm{Sp}(M)\subset J\}$.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $S_n(I)$ est convexe.
- Montrer que $S_n(\overline{I})=\overline{S_n(I)}$.

Exercice 650 [Mines 2023 # 691]

- Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un ferme non compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  - ▷ Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
  - ▷ Soit $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O,S)\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M=OS$.
  - ▷ En déduire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

Exercice 651 [Mines 2023 # 692] Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n$.

Exercice 652 [Mines 2023 # 693] On pose $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$ pour tout $n\geq 1$.

- Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est divergente.
- Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 653 [MINES 2023 # 694] Soit $ f :[0,2]→R$ une fonction C^1. On pose $ u_n=1_{n\sum k=1}^{nf\,(\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}}$ $pour $n \geq 1$.

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 654 [MINES 2023 # 695] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $ u_n=$\sum_{k=1}^{nsin\,(\frac{\{}{\sqrt{k\}\{n\}}}$ $.$Dterminerunquivalentdeu_n$.

Exercice 655 [MINES 2023 # 696] Soit $\mathcal{B}$ le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ forme des suites $(u - n \in \mathbb{Z}$ bornées. Soit T l'endomorphisme de $\mathcal{B}$ qui a $(u - n \in \mathbb{Z}$ associe $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

- Montrer que T est lineaire. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
- Déterminer les sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{B}$ stables par T.

Exercice 656 [MINES 2023 # 697] Étudier les suites définies par u_1, v_1 réels et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $ u_{n+1}=u_n+v_{narctan\,(\frac{1}{n^2}}$ et $v_{n+1} = v_n - u_{narctan\,(\frac{1}{n^2})}$ $.

Exercice 657 [MINES 2023 # 698] $\ \ - La suite $(d_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ? - La suite $(d_n)_{n\geq 1}$ est-elle bornée ?

Exercice 658 [MINES 2023 # 699] Soit $(b - n \in \mathbb{N}$ une suite strictement positive, croissante et non majorée.

- Montrer que, si $(a - n \in \mathbb{N}$ est une suite réelle convergente de limite ℓ, alors

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

- Soit $(a - n \in \mathbb{N}$ une suite réelle. Montrer que, si la suite $\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.
- La réciproque de la propriété précédente est-elle vraie ?

Exercice 659 [MINES 2023 # 700] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle decroissante de réels strictement positifs, telle que $a_0 = 1$. On pose $b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k}$ pour tout $n \geq 1$.

- Montrer que $b_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geq 1$.
- On fixe $\ell \in [0, 1]$. Montrer que l'on peut choisir la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de telle sorte que $b_n \to \ell$.

Exercice 660 [MINES 2023 # 701] Soit $a \in]0, 1[$. On définit (u_n) par $u_0 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2 \ln(u_n)$.

- Montrer que (u_n) est définie et étudier sa convergence.
- On pose $F : x \mapsto \int_a^x \frac{dt}{t^2 \ln t}$. Montrer que $F(u_{n+1}) - F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- En déduire un équivalent de $F(u_n)$. Qu'en déduire sur u_n ?

Exercice 661 [MINES 2023 # 702] Soit $(u - n \in \mathbb{N}$ définie par $u_0 \in]0, \pi/2]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$. Étudier la convergence de (u_n). Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 662 [MINES 2023 # 703] Pour tout $n \geq 2$, on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0, 1]$.
- Étudier la monotonie de la suite (x_n). Montrer sa convergence.
- Déterminer la limite de la suite (x_n) et un équivalent simple de x_n.

Exercice 663 [MINES 2023 # 704] Détermine un développement asymptotique a deux termes de x_n.

Exercice 664 [MINES 2023 # 705] Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 \geq 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$.

- Si (u_n) converge, quelle est sa limite ?
- On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$. Montrer que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
- Étudier la convergence de (u_n) dans le cas général.

Exercice 665 [MINES 2023 # 705] Pour $n \geq 2$, on considère l'équation $\sin(x) = \frac{x}{n}$.

- Montrer que cette équation admet une unique solution sur $]0, \pi[$ qu'on notera x_n.

- Montrer que la suite $(x - n \geq 2$ converge. Quelle est sa limite ? - Donner un développement asymptotique de x_n a la precision o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.$

Exercice 666 [MINES 2023 # 706] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{i=0}^{n}(X - i)$.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! r_n \in \left]0, 1\right[, P_n'(r_n) = 0$.
- Déterminer un équivalent simple de r_n.

Exercice 667 [MINES 2023 # 707] Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geq 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$

- Montrer que $u_n \to +\infty$.
- Donner un développement asymptotique a trois termes de u_n.

Exercice 668 [MINES 2023 # 708] Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P)=$\supset_{t\in[0,1]}$|P(t)|.$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ et $a_n = \inf_{P\in E_n} N(P)$.

- Montrer que $a_n > 0$; calculer a_0 et a_1.
- Montrer que $(a - n \in \mathbb{N}$ est decroissante et de limite nulle.

Exercice 669 [Mines 2023 # 709] Limite et développement asymptotique en $o(1/n)$ de $u_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^{3/2}}\right)$.

Exercice 670 [Mines 2023 # 710] Soit (u_n) une suite réelle vérifiant : $∀(m,n)∈N^{2,u}$ n+m≤ um+un.$ Montrer que : $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf\left\{\frac{u_n}{n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 671 [Mines 2023 # 711] • Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ ($a \in \mathbb{R}$) ou dense dans $\mathbb{R}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{\pi}{\theta} \notin \mathbb{Q}$.

- ▷ Montrer que $A = \left\{p\theta + 2\pi q,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- ▷ Expliciter les valeurs d'adherence de la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.
- ▷ Expliciter les valeurs d'adherence de la suite $(\cos(\sqrt{n}\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 672 [Mines 2023 # 712] Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Convergence et somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

<u>Ind.</u> Montrer que $\tan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$.

Exercice 673 [Mines 2023 # 713] Soit (u_n) une suite réelle telle que $n(u_{n+1} - u_n) \to 1$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 674 [Mines 2023 # 714] Déterminer la convergence et la somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Exercice 675 [Mines 2023 # 715] Déterminer la nature de $\sum \frac{\cos(\ln n)}{\ln n}$.

Exercice 676 [Mines 2023 # 716] Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2$. Déterminer la nature de $\sum \dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 677 [Mines 2023 # 717] Nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - (-1)^n}$?

Exercice 678 [Mines 2023 # 718] Soit $\alpha > 0$ fixe. Nature de la série de terme général $\sum \dfrac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n^\alpha}$?

Exercice 679 [Mines 2023 # 719] Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in]0,1[$. Nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^{\lfloor n^\beta \rfloor}}{n^\alpha}$.

Exercice 680 [Mines 2023 # 720] • Montrer que $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$.

- ▷ Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right)$?

Exercice 681 [Mines 2023 # 721] Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$.

On pose $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b} u_n$.

- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.
- Dans ce cas, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} n(u_{n+1} - u_n)$.
- En déduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 682 [Mines 2023 # 722] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite decroissante de réels positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$. Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice 683 [Mines 2023 # 723] On pose $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx$. Quel est le signe de u_n ? Montrer que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

Exercice 684 [Mines 2023 # 724] Étudier $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{n}{k\sqrt{k^2-n^2}}$.

Exercice 685 [Mines 2023 # 725] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \dfrac{\cos(\ln(t))}{t}\,dt$ et $v_n = \dfrac{\cos\ln(n)}{n}$.

- Déterminer la nature de la série $\sum u_n$. - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $u_n - v_n = \int_n^{n+1} (t-n-1)\frac{\cos\ln(t)+\sin\ln(t)}{t^2}\,dt$.
- En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Exercice 686 [Mines 2023 # 726] Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Montrer que $\sum f(n)$ converge.

Exercice 687 [Mines 2023 # 727] On dit que la série de terme général u_n enveloppe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a - \sum_{k=0}^{n} u_k| \leq |u_{n+1}|$. On dit qu'elle enveloppe strictement $a \in \mathbb{R}^{+*}$ lorsqu'il existe une suite $(\theta_n) \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a - \sum_{k=0}^{n} u_k = \theta_{n+1} u_{n+1}$.

- Soit $a > 0$. Donner un exemple de série divergente qui enveloppe a.
- Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
- Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer que, si une série enveloppe strictement un réel $a > 0$, alors elle est alternée.

Exercice 688 [Mines 2023 # 728] • Soit $\sum u_n$ une série a termes positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge aussi.

- ▷ Soit $\sum y_n$ une série a termes complexes telle que, pour toute suite (x_n) qui tend vers 0, la série $\sum x_n y_n$ converge. Montrer que $\sum |y_n|$ converge.

Exercice 689 [Mines 2023 # 729] Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Construire $(v_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, croissante et de limite $+\infty$, telle que $\sum u_n v_n$ converge.

Exercice 690 [Mines 2023 # 730] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. pour toute série $\sum u_n$ convergente de terme général positif, la série $\sum f(u_n)$ est convergente ;

ii) l'application $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est bornée au voisinage de 0^+.

Exercice 691 [Mines 2023 # 731] Soit $\sum u_n$ une série convergente a termes strictement positifs.

- Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k u_k = o(n)$.
- Montrer que $\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$ est le terme général d'une série convergente.
- Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n+1} \left(n! \prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{1/n}$ est convergente et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(n! \prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{1/n} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

Exercice 692 [Mines 2023 # 732] Pour toute permutation f de $\mathbb{N}^*$, on note $E_f = \left\{\alpha \in \mathbb{R},\ \sum \frac{f(n)}{n^\alpha} < +\infty\right\}$.

- Montrer qu'il existe $f \in S(\mathbb{N}^*)$ tel que $E_f = \emptyset$.
- Soit $f \in S(\mathbb{N}^*)$. Montrer que si $E_f \neq \emptyset$, alors c'est un intervalle minore par 2 et non majore.
- Montrer que, si $\beta > 2$, alors il existe $f \in S(\mathbb{N}^*)$ tel que $E_f =]\beta, +\infty[$.

Exercice 693 [Mines 2023 # 733] Soit $f_n = x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

- Montrer que, pour n pair, f_n ne s'annule pas et que, pour n impair, f_n s'annule en un unique point r_n.
- Montrer que, pour n impair, $-2n - 3 < r_n < 0$.

Exercice 694 [Mines 2023 # 734] Soit α un réel non nul. On pose, pour $x \in [-1, 1]$, $g_\alpha(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$. À quelle condition sur α la fonction g_α est-elle polynomiale ?

Exercice 695 [Mines 2023 # 735] Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2, telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Exercice 696 [Mines 2023 # 736] Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que f est convexe si et seulement si : $\forall (x, y) \in I^2,\ \exists t \in]0, 1[,\ f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.

Exercice 697 [Mines 2023 # 737] Trouver les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)\cos(x)$.

Exercice 698 [Mines 2023 # 738] Soient $A, B \in \mathbb{R}^+$, $f\colon \mathbb{R} \to$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq A$ et $|f''(x)| \leq B$.

- Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}^{+*}$, $|f'(x)| < \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}$.
- Trouver la meilleure majoration de $|f'(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 699 [Mines 2023 # 739] Soit $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto x - \ln(1 + x)$.

- Montrer que f définit une bijection f_1 de $]-1, 0]$ sur $\mathbb{R}^+$ et une bijection f_2 de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.
- Déterminer un équivalent de f en 0. En déduire un équivalent de f_1^{-1} et f_2^{-1} en 0.
- Déterminer le développement asymptotique a l'ordre 2 de f_2^{-1} en 0.

Exercice 700 [Mines 2023 # 740] Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})$. Soit $g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], [-1, 1])$ strictement croissante et surjective. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ l'application qui a $f \in E$ associe $f \circ g$. Soit F un sous-espace de E de dimension finie stable par Φ. On note Φ_F l'endomorphisme de F induit par Φ sur F.

- Montrer que Φ_F est un automorphisme de F.
- Montrer que la seule valeur propre de Φ_F est 1.
- Soit $\Psi = \Phi_F - \mathrm{id}_F$. Montrer que Ψ est nilpotent.

Exercice 701 [Mines 2023 # 741] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable. Montrer l'equivalence entre les assertions suivantes : i) $f(0) = I_n$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(0)f(x)$,
ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \det(f(x)) \neq 0$.

Exercice 702 [Mines 2023 # 742] Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \in E \mapsto f'$. Montrer que D est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

Exercice 703 [Mines 2023 # 743] Soient $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$. On suppose que $f'(x)\, P(f(x)) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 704 [Mines 2023 # 744] Soient $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue, $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose : $h(x) \int_0^x h^n \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Déterminer un équivalent de h en $+\infty$.

Exercice 705 [Mines 2023 # 745] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
On pose $F = \left\{g \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})\ ;\ g(a) = g(b) = g'(a) = g'(b) = 0\right\}$.

- On fixe $f \in E$.

Montrer qu'il existe $g \in F$ tel que $f = g''$ si et seulement si $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b tf(t)dt = 0$.

- Soit $h \in E$ tel que $\forall f \in F$, $\int_a^b hg'' = 0$. Montrer que h est affine.

Exercice 706 [Mines 2023 # 746] Soient $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ et u l'application définie par : $\forall f \in E$, $\forall x \in [0,1]$, $u(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)\,dt$. Vérifier que u est un endomorphisme de E. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 707 [Mines 2023 # 747] Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x e^{t^2}\,dt = F(x)\,e^{x^2}$.

Exercice 708 [Mines 2023 # 748] Étudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\sqrt{1-t}}$.

Exercice 709 [Mines 2023 # 749] Calculer $I = \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}}+1}\,dx$.

Exercice 710 [Mines 2023 # 750] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],R)$, $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in [a,b]$, $P(x) \leq f(x) \leq Q(x)$ et $\int_a^b (Q-P) \leq \epsilon$. Est-ce toujours vrai si f est uniquement continue par morceaux ?

Exercice 711 [Mines 2023 # 751] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. - Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\int_0^1 f(t)\,t^k dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.

- On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)\,t^k dt = 0$. Montrer que f est nulle.

Exercice 712 [Mines 2023 # 752] Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que : $\forall(\alpha,\beta) \in [a,b]^2$, $\int_\alpha^\beta f = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 713 [Mines 2023 # 753] Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $F = \big\{g \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}),\ g(a) = g(b) = 0\big\}$. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall g \in F, \int_a^b fg = 0$.

Exercice 714 [Mines 2023 # 754] Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

Montrer : $120\Big(\int_0^1 f\Big)^2 \leq \int_0^1 (f'')^2$.

Exercice 715 [Mines 2023 # 755] Soient $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de $\|\|_\infty$ et B la boule unite fermée de E. Soit $f \in E$. Montrer que $\sup_{g\in B} \int_a^b fg = \int_a^b |f|$.

Exercice 716 [Mines 2023 # 756] Étudier la convergence et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$.

Exercice 717 [Mines 2023 # 757] Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t|\cos t|^{t^5}\,dt$.

Exercice 718 [Mines 2023 # 758] Nature de $\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^x\,dx$ puis de $\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^{x^\alpha}\,dx$ avec $\alpha \in]1,+\infty[$.

Exercice 719 [Mines 2023 # 759] Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\right) - 1\right)\,dx$.

Exercice 720 [Mines 2023 # 760] Nature suivant $a \in \mathbb{R}$ de $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x-\ln(1+x)}{x^a}\,dx$? Calculer $I(5/2)$.

Exercice 721 [Mines 2023 # 761]
- Soit $\sum u_n$ une série convergente a termes positifs. Nature de $\sum u_n^2$?
  - ▷ Soit f une fonction continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Nature de $\int_0^\infty f^2$?

Exercice 722 [Mines 2023 # 762] Soient $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$.

- Montrer que I_n et J_n sont bien définies. Montrer que (I_n) est constante.
- Montrer que $I_n - J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. - Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ et la calculer.

Exercice 723 [Mines 2023 # 763] Soit $a > 0$. Montrer que l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)+\arctan(x/a)}{1+x^2}\,dx$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 724 [Mines 2023 # 764] Soit $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

- Soient $I_1 = \int_0^1 (1 + \cotan^2(\pi t))f(t)^2\,dt$ et $I_2 = \int_0^1 f'(t)f(t)\cotan(\pi t)\,dt$. Montrer la convergence de I_1 et I_2. Trouver une relation entre I_1 et I_2.
- Montrer que $\int_0^1 f'(t)^2\,dt \geq \pi^2 \int_0^1 f(t)^2\,dt$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 725 [Mines 2023 # 765] Soit f continue et T-perioddique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'existence et l'unicite de λ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\,dt$ converge.

Exercice 726 [Mines 2023 # 766] Soit f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue decroissante.

- On suppose que f est intégrable sur $[0,+\infty[$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Étudier la réciproque.

Exercice 727 [Mines 2023 # 767] Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ telle que f' est bornée et $\int_\mathbb{R} f$ converge.
Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$.

Exercice 728 [Mines 2023 # 768] Étudier la convergence $\int_0^{+\infty} t|\cos(t)|^{t^5}\,dt$.

Exercice 729 [Mines 2023 # 769] Étudier la convergence et la convergence absolue de $\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\ln(x)}dx$.

Exercice 730 [Mines 2023 # 770]
- Soient f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f de signe constant. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c)\int_a^b f(t)dt$.

▷ Soit $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ continue telle que f admet la limite $\lambda \in \mathbb{R}$ en 0 et il existe $\mu \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)-\mu}{t}$ est d'intégrable convergente sur $[1, +\infty[$. Montrer que, pour tout $a < b$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t} dt$ existe et la calculer.

Exercice 731 [Mines 2023 # 771] Soit f une fonction continue par morceaux et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f$.

- Déterminer la limite de g en 0. - Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Exercice 732 [Mines 2023 # 772] Donner un équivalent, quand $x \to +\infty$, de $\int_1^x\!t^{tdt}\,$?

Exercice 733 [Mines 2023 # 773] Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et seulement sur cet ensemble.
- Étudier l'integrabilité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 734 [Mines 2023 # 774] Si $a > 0$ et $b > 0$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\ dt$.

Exercice 735 [Mines 2023 # 775] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction de classe C^1. On suppose que f'/f tend vers une limite $a \in \mathbb{R}^{-*}$ en $+\infty$.

- Montrer que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
- Donner un équivalent de $\int_x^{+\infty} f$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 736 [Mines 2023 # 776] Trouver une valeur approchée rationnelle a 10^{-3} pres de $\int_0^1 e^{-t} \ln(t)\, dt$.

Exercice 737 [Mines 2023 # 777] Quelles sont les fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $\mathbb{R}^+$ d'une suite d'applications polynomiales réelles ?

Exercice 738 [Mines 2023 # 778] Soient S un segment de $\mathbb{R}$ non reduit a un point, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, f une fonction de classe C^n de S dans $\mathbb{R}$ telle que $\|f^{(n)}\|_{\infty,S} < m$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - p\|_{\infty,S} < \varepsilon$ et $\|p^{(n)}\|_{\infty,S} < m$.

Exercice 739 [Mines 2023 # 779] Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ d'applications polynomiales réelles telle que $(p_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 740 [Mines 2023 # 780] Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $S = [a, b]$.

- On suppose que $S \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$. Expliciter une fonction continue f de S dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas limite uniforme sur S d'une suite d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$.
- On suppose $S \subset]0, 1[$. On définit une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes par $P_0 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = 2P_n(1 - P_n)$. Montrer que $(P_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur S vers la fonction constante égale a $\frac{1}{2}$.
- On suppose que $S \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Montrer que toute fonction continue f de S dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur S d'une suite d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 741 [Mines 2023 # 781] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n(1 - \sqrt{x})$.

- Déterminer le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum f_n$.
- Y a-t-il convergence normale sur D ? - Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

Exercice 742 [Mines 2023 # 782] Soit $\alpha > 0$. Étudier les modes de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ définie par $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.

Exercice 743 [Mines 2023 # 783] Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{x+n}$. Domaine de définition, continuité de f, équivalent de f aux extremites de son domaine de définition.

Exercice 744 [Mines 2023 # 784] Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(1+nx^2)}$. Domaine de définition, continuité, etude de la dérivabilité, équivalents en 0 et $+\infty$.

Exercice 745 [Mines 2023 # 785]

- Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{x\, e^{-nx}}{\ln(n)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ mais non normalement.

▷ Montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 746 [Mines 2023 # 786] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(n+x)}$.

- Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$. On note $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
- Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur les segments de la forme $[0, M]$ avec $M > 0$. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
- Étudier la continuité de f. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
- Soient $n \geq 1$ et $x_0 \geq n$. Montrer : $f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En déduire : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$.

Exercice 747 [Mines 2023 # 787] Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
On pose $f_0 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, b]$, $f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t)dt$.
Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ et calculer sa somme.

Exercice 748 [Mines 2023 # 788] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin(nx))^2}{n^2}$.

- Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 749 [Mines 2023 # 789] Soient $a > 0$ et $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{n^2x^2}\right)$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f.
- Déterminer un équivalent de f en 0, et en $+\infty$.

Exercice 750 [Mines 2023 # 790] • Justifier la convergence pour $x \in [0,1[$ de $f(x) = \prod_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right)^{x^n}$.

▷ Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, on a $\ln f(x) = \frac{x-1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ln(1+x^n) + \ln 2$.

▷ En déduire $\forall x \in [0,1[\,, \ln f(x) = \ln 2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m}\frac{x^m}{1+x+\cdots+x^m}$.

▷ Montrer que f possede une limite finie en 1^- et l'expliciter.

Exercice 751 [Mines 2023 # 791] Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

- Déterminer les domaines de définition des fonctions $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $g = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$.
- Trouver une équation fonctionnelle reliant f et g.
- Montrer que f est analytique. Qu'en est-il de g ?

Exercice 752 [Mines 2023 # 792] Rayon de convergence et somme de $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

Exercice 753 [Mines 2023 # 793] Rayon de convergence et somme de $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-5n+1}$.

Exercice 754 [Mines 2023 # 794] Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum z^{n+(-1)^n}$.

Exercice 755 [Mines 2023 # 795] Soit u qui a $P \in \mathbb{C}[X]$ associe $u(P) : z \mapsto e^{-z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n$. Montrer que u est bien définie, et que c'est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 756 [Mines 2023 # 796] Soient $q \in \,]-1,1[$ et $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x)$.

- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 757 [Mines 2023 # 797] Soient α et β deux réels strictement positifs.

- Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\alpha n+\beta}$ est convergente.
- On note S la somme de la série ci-dessus et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha k+\beta}$.
  Exprimer S et r_n sous forme intégrale.
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum r_n x^n$. Étudier son comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.

Exercice 758 [Mines 2023 # 798] Montrer qu'au voisinage de 0, la fonction $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \ln(1+xe^{-t})\,dt$ est développable en série entière et en donner les coefficients.

Exercice 759 [Mines 2023 # 799] Expliciter le développement en série entière de $\ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$ au voisinage de 0.

Exercice 760 [Mines 2023 # 800] Soient $\tau \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \arctan\left(\tau\frac{x-1}{x+1}\right)$. Montrer que f est développable en série entière en 0 et preciser le domaine exact de validite.

Exercice 761 [Mines 2023 # 801] Rayon de convergence, ensemble de définition et somme de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(n)}{n} x^{2n}$?

Exercice 762 [Mines 2023 # 802] Déterminer le développement en série entière en 0 de $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)$.

Exercice 763 [Mines 2023 # 803] On pose : $\forall n \geq 2, u_n = \sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(ij)^2}$ et $S : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n$.

- Déterminer un équivalent simple de u_n.
- Déterminer le rayon de convergence R de S et simplifier $S(x)$ sur $]-R,R[$.
- Étudier la bonne définition et la continuité de S en R et en $-R$.

Exercice 764 [Mines 2023 # 804] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$ et montrer que la somme de cette série s'écrit sous la forme $\frac{Q(x)}{R(x)}$ avec $Q, R \in \mathbb{R}[X]$.
- Soit $M = (P(i+j))_{1\leq i,j\leq p+1}$. Montrer que $\det(M) = 0$.
- Montrer que $\det(P(i+j))_{1\leq i,j\leq p} \neq 0$.

Exercice 765 [Mines 2023 # 805] Soit $f : x \mapsto (\arcsin(x))^2$.

- Montrer que f est solution d'une équation différentielle lineaire d'ordre 2, sur un intervalle que l'on precisera.
- Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Experimer les coefficients de ce développement en série entière et donner son rayon de convergence.

Exercice 766 [Mines 2023 # 806] On définit la suite (a_n) par : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq a_n \leq n^2$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
  On pose $f : x \in]-R,R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- Montrer que f est solution de $(1-x)y' - (1+2x)y = 0$.
- Expliciter f a l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 767 [Mines 2023 # 807] On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+in^2x}$.

- Montrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.
- Est-elle développable en série entière ?

Exercice 768 [Mines 2023 # 808] • Rappeler la formule de Stirling.

▷ Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$.

▷ Calculer la somme de cette série entière en -1 apres s'être assure de son existence.

▷ Calculer $\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x}\mathrm{d}x$.

Exercice 769 [Mines 2023 # 809] • Déterminer le rayon de convergence de $f : z \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} z^k$.

▷ Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Calculer $\exp(f(z))$. Ind. Considèrer $t \in [0,1] \mapsto \exp(f(tz))$.

▷ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que :

$∀ z∈C,\ |z|≤ $\alpha \Rightarrow$ det(I$_n$+zA)=exp ($\sum$$_{k=1}$$^{+∞}$$\frac{(-1)^k}{k}$\,tr($A^k$)\,z^k .$

Exercice 770 [Mines 2023 # 810] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. - Déterminer le rayon de convergence de la série $f(z) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \operatorname{tr}(A^p)z^p$ - Calculer $f(z)$ en fonction du polynôme caracteristique de A.

Exercice 771 [Mines 2023 # 811] Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum n|a_n|$ converge.

- Montrer que le rayon de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal a 1.
- On suppose $|a_1| \geq \sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|$ avec $a_1 \neq 0$. Montrer que $f : z \in \mathbb{D} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est injective.

Exercice 772 [Mines 2023 # 812] • Développere en série entière $\varphi : z \mapsto \frac{z}{(1-z)^2}$. Montrer que φ est injective sur $D_o(0,1)$.

On pose $f : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ avec (a_n) une suite réelle. On suppose que f est définie et injective sur $D_o(0,1)$. - Montrer que $f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$.

- En déduire que $\operatorname{Im} z \geq 0 \iff \operatorname{Im} f(z) \geq 0$.
- Soit $R \in]0,1[$. Calculer $\int_0^{\pi} \operatorname{Im} f(Re^{it})\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t$.
- Montrer que : $\forall n \geq 2, |a_n| \leq n$.

Exercice 773 [Mines 2023 # 813] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n \,\mathrm{d}\,t$.

- Trouver une relation de recurrence sur (I_n).
- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Donner une expression similaire pour I_{2n+1}.
- Donner un équivalent de I_n.

Exercice 774 [Mines 2023 # 814] Soit, pour $n \geq 2$, $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{1+t+\cdots+t^n}$. Déterminer de trois facons differentes la nature de $\sum I_n$.

Exercice 775 [Mines 2023 # 815] On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_1^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}\,x$. Justifier l'existence de (u_n). Étudier la convergence de la suite (u_n) et de la série $\sum u_n$.

Exercice 776 [Mines 2023 # 816] Développement asymptotique a deux termes de $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx}\ln(n+x)dx$?

Exercice 777 [Mines 2023 # 817] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on pose $u_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}\,x$. Déterminer un équivalent simple de u_n dans les cas $\alpha = 0$, $\alpha > 1$, $\alpha = 1$.

Exercice 778 [Mines 2023 # 818] • Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos\left(u^2\right)\mathrm{d}\,u$ converge.

- Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$. Trouver un équivalent de $I_n = \int_0^1 \cos\left(n\left(au^2+bu^3\right)\right)\mathrm{d}\,u$.

Ind. Poser $t = \sqrt{na}u$.

Exercice 779 [Mines 2023 # 819] Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{(1+t^{\alpha})^n}$.

- Justifier la convergence de $I_n(\alpha)$.
- Etablir une relation entre $I_{n+1}(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$. En déduire une expression de $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_1(\alpha)$ et de α.
- Déterminer la limite de la suite $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$.
- Montrer l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que $I_n(\alpha) \sim \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 780 [Mines 2023 # 820] On pose, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x-1}$.

- Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, qu'on appellera toujours f par la suite.
- Donner un équivalent de $\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.
- Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x^n)\,dx = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 781 [Mines 2023 # 821] Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continue par morceaux, intégrable, continue en 0. Montrer que $\int_0^1 x\,g(u)\,\mathrm{e}^{-xu}\,du \xrightarrow[x\to+\infty]{} g(0)$. On commencera par le cas ou g est bornée.

Exercice 782 [Mines 2023 # 822] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}-1}{t}e^{-t}dt$.

- Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|e^{iu}-1| \leq |u|$.
- En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis simplifier l'expression de f.

Exercice 783 [Mines 2023 # 823] On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

- Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ converge.

On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt$.

- Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
- En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+i}$.
- En déduire la valeur de I.

Exercice 784 [Mines 2023 # 824] On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x^2+2itx)}\, dx$. Montrer que l'intégrale $h(t)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ puis la calculer explicitement.

Exercice 785 [Mines 2023 # 825] On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x}\, dt$.

- Déterminer le domaine de définition de f.
- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et expliciter f'.
- On pose $g : x \mapsto f(x) + f(1/x)$. Simplifier $g(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 786 [Mines 2023 # 826] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\, dt$.

- Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$.
- Exprimer F a l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 787 [Mines 2023 # 827] On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\, dt$.

- Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F.
- En déduire F.

Exercice 788 [Mines 2023 # 828] Soit $f : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{tx-t^2}\, dt$.

- Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Quelle équation différentielle vérifie f ?
- Trouver les solutions du probleme de Cauchy $-2y'' + xy' + y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 789 [Mines 2023 # 829]

- Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$.
  - ▷ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
  - ▷ Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  - ▷ Donner une expression de f' puis de f.
  - ▷ En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Exercice 790 [Mines 2023 # 830] On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} |\sin(t)| e^{-xt} dt$. Déterminer le domaine de définition de la fonction f et montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Expliciter la valeur de $f(x)$.

Exercice 791 [Mines 2023 # 831] Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x \cos(x-y) f(y)\, dy$. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et trouver sa limite en 0. On suppose que f tend vers ℓ en $+\infty$. Étudier la limite de g en $+\infty$.

Exercice 792 [Mines 2023 # 832] Soient $C > 0$, $d > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^d e^{-tx^2} (C + x^2)^\alpha dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{C^\alpha}{\sqrt{t}}$.

Exercice 793 [Mines 2023 # 833] Soit $f : x \mapsto \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\, dt$.

- Déterminer le domaine de définition de f, étudier la continuité et les symétries.
- Expliciter $f(x)$.

Exercice 794 [Mines 2023 # 834] On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1-xt+xt^2}$.

- Déterminer le domaine de définition de f.
- Déterminer le développement de f en série entière sur un intervalle I centre en 0 que l'on precisera.

Exercice 795 [Mines 2023 # 835] On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \ln(1 + xe^{-t})\, dt$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter son développement.

Exercice 796 [Mines 2023 # 836] Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$.

- On suppose f bornée. Montrer que F est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- On suppose que f admet une limite finie non nulle ℓ en $+\infty$. Donner un équivalent de F en 0^+.
- On suppose f développable en série entière sur $\mathbb{R}^+$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et que la série $\sum n! a_n$ converge. Étudier le comportement de $F(1/x)$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.
- Donner des exemples de fonctions f telles que le domaine de définition de F soit $]0, +\infty[$, $]1, +\infty[$ ou $\emptyset$.

Exercice 797 [Mines 2023 # 837] On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{C}$ continues et intégrables, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{C}$ continues telles que, pour tout $s > 0$, la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s}$ est intégrable. Si $f \in \mathcal{E}$, on pose $\widehat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \dfrac{f(u)}{u+s}\, du$ pour tout $s > 0$.

- Quelles inclusions existent entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$?
- Dans cette question, on suppose que $f(u) = u^{\alpha-1}$, ou $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que $\widehat{f_\alpha}$ est proportionnelle a f_α.

- Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que $\widehat{f}$ est continue, et déterminer $\lim_{s\to+\infty} \widehat{f}(s)$.

Exercice 798 [Mines 2023 # 838] Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{\ln(t)}{1-t}\,dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \dfrac{\ln(1-t)}{t}dt$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n n^2}$.

Exercice 799 [Mines 2023 # 839] • Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sommable. Montrer $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{t^n}{n!}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

▷ Montrer le meme résultat en ne supposant que la convergence de la série $\sum a_n$.

Exercice 800 [Mines 2023 # 840] Soient $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{1-\sin\alpha\cos t}$:

- Expliciter une suite (a_n) telle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$.
- En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de : $\int_0^{\pi} \dfrac{\cos(nt)}{1-\sin\alpha\cos t}\,dt$.

Exercice 801 [Mines 2023 # 841] Soit $(\lambda - n \in \mathbb{N}$ une suite croissante de réels strictement positifs.
On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \exp(-\lambda_n x)$.

- Déterminer le domaine de définition de f.On suppose dans la suite que (λ_n) tend vers $+\infty$.
- Montr per que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge et la calculer.
- Traiter le cas particulier ou $\lambda_n = n+1$.

Exercice 802 [Mines 2023 # 842] Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et S l'ensemble des solutions de $y' = ay + b$. Montr per l'equivalence entre :

1. tous les éléments de S sont bornes, ii) a et b sont intégrables.

Exercice 803 [Mines 2023 # 843] Déterminer les fonctions y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que $y'(x) = y(\pi - x)$.

Exercice 804 [Mines 2023 # 844] Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = e^{-1/x^2}$.

- Montr per que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est-elle solution d'une équation différentielle lineaire homogéné ?

Exercice 805 [Mines 2023 # 845] Résoudre l'équation différentielle $y' + |y| = 1$.

Exercice 806 [Mines 2023 # 846] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Trouver les fonctions $y \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ solutions de $\sum_{k=0}^{n} y^{(k)}\omega^{n-k} = 0$.

Exercice 807 [Mines 2023 # 847] On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \exp(-x^{-2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montr per que f n'est solution d'aucune équation différentielle lineaire homogéné a coefficients constants (d'ordre quelconque).

Exercice 808 [Mines 2023 # 848] Résoudre le systeme différentiel \$ \\

Exercice 809 [Mines 2023 # 849] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note (S) le systeme différentiel : $\forall p \in [1, n], x_p^{(m)} = \sum_{q=1}^{n} a_{p,q} x_q(t)$.
Montr per que A est nilpotente si et seulement si toutes les solutions de (S) sont polynomiales.

Exercice 810 [Mines 2023 # 850] Résoudre les systemes : \$ \\

Exercice 811 [Mines 2023 # 851] Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation :
$2xy'' - y' + 2y = 0$. Les exprimer a l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 812 [Mines 2023 # 852] • Résoudre l'équation : $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en cherchant des solutions développables en série entière.

▷ Résoudre : $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = \frac{1}{1+t^2}$.

Exercice 813 [Mines 2023 # 853] On considère l'équation différentielle : $y'' - y = |\cos x|$. Existe-t-il des solutions positives ? Bornées ? Positives et bornées ?

Exercice 814 [Mines 2023 # 854] Soient a, b des fonctions continues et 2π-périoddiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit (E) l'équation différentielle $y' + a(x)y + b(x) = 0$. Soit $A : x \mapsto \int_0^x a(t)\,dt$ et $I = A(2\pi)$.

- Trouver une condition sur I pour que A soit 2π-périoddique.
- Montrer que si y est solution de (E), alors $x \mapsto y(x + 2\pi)$ est aussi solution de (E).
- Supposons $I \neq 0$. Montrer que (E) admet une unique solution 2π-périoddique.
- Que dire si $I = 0$?
- Donner un exemple pour illustrer chacune de ces situations.

Exercice 815 [Mines 2023 # 855] Soit $f : x \mapsto \int_0^{2\pi} e^{x\sin(t)}dt$.

- Montrer que f est solution de $(*) : xy'' + y' = xy$.
- Quelles sont les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ de $(*)$?

Exercice 816 [Mines 2023 # 856] • Soient $A \in \mathbb{R}^+$, $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues. On suppose que $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq A + \int_0^x f(t)\,g(t)dt$. Montrer que $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq A\exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$.

Soit $(*)$ l'équation différentielle $x''(t) + a(t)x(t) = b(t)$ avec a et b continues sur $\mathbb{R}^+$, b et $t \mapsto t\,a(t)$ intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Soit x solution de $(*)$.

- Montrer que

$\forall t \geq 1, x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)\, a(u)\, x(u) du + \int_1^t (t-u)\, b(u) du.$

- On pose, pour $t \geq 1$, $y(t) = \dfrac{|x(t)|}{t}$. Montrer l'existence de K tel que :

$\forall t \geq 1$, $y(t) \leq K\exp(\int_1^{t}u\,|a(u)|du \leq K \exp(\int_1^{+\infty}u\,|a(u)|du.$

Exercice 817 [Mines 2023 # 857] Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, A une application continue et T-périoddique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une application X de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t+T) = \lambda X(t)$.

Exercice 818 [Mines 2023 # 858] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$; Expliciter les solutions de $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 819 [Mines 2023 # 859] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. À quelle condition est-il vrai que toutes les solutions du systeme différentiel $X'(t) = AX(t)$ sont bornées sur $\mathbb{R}$?

Exercice 820 [Mines 2023 # 860] Soient $D = [0,1]^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = x(1-y)$ si $x \leq y$ et $f(x,y) = y(1-x)$ sinon. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur D et les déterminer.

Exercice 821 [Mines 2023 # 861] Étudier la differentiabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 822 [Mines 2023 # 862] On note T le triangle plein défini par les points $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Déterminer le minimum sur T de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(1-x-y)$.

Exercice 823 [Mines 2023 # 863] Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 1$ et $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- La fonction f admet-elle des derivées partielles en $(0,0)$?
- Étudier les variations de $g : x \mapsto f(x,0)$.
- Déterminer les extrema de f.

Exercice 824 [Mines 2023 # 864] Soit $f : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ sinon.

- Montrer que f est continue.
- Étudier les extrema de f.

Exercice 825 [Mines 2023 # 865] Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, f une forme lineaire sur E.

Montrer que l'application $g \colon x \in E \mapsto f(x)\, e^{-\|x\|^2}$ admet un minimum et un maximum, puis déterminer ce maximum et ce minimum.

Exercice 826 [Mines 2023 # 866] Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ vérifiant $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On pourra faire le changement de variables $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

Exercice 827 [Mines 2023 # 867] Soit $K \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions $f :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation $x\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) - y\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = K\, f(x,y)$.

Exercice 828 [Mines 2023 # 868] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On dit que f est homogéné de degré α si :

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, f(tx,ty,tz) = t^\alpha f(x,y,z)$. Montrer que f est homogéné de degré α si et seulement si $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = \alpha f$.

Exercice 829 [Mines 2023 # 869] Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Ind. Utiliser le changement de variable $(u,v) = (x+y,\ 2x+y)$.

Exercice 830 [Mines 2023 # 870]

- Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt$.

On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et

$D = \Big\{\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})\ ;\ \forall (f,g) \in E^2, \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\Big\}$.

- Montrer que la famille $(\varphi - 1 \leq i \leq n$ est libre, avec : $\varphi_i : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.
- Montrer que D est de dimension finie.

Exercice 831 [Mines 2023 # 871] Soient $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $k \in [0,1[$ tels que $\forall a \in \mathbb{R}^2$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \leq k$. Soit (u_n) définie par $(u_0,u_1) \in \mathbb{R}^2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \max(|u_{n+1} - u_n|, |u_{n+2} - u_{n+1}|)$.

Montrer $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^2)^2, \exists c \in \mathbb{R}^2, f(b) - f(a) = (b - a|\nabla f(c))$.

Montrer que $\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4, \left|f(x,y) - f(x',y')\right| \leq k \max(|x-x'|, |y-y'|)$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} \leq k a_n$, puis qu'il existe deux constantes q et C telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq Cq^n$.

Montrer que (u_n) est une suite convergente et donner une propriété vérifiée par sa limite.

Exercice 832 [Mines 2023 # 872] Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, K une partie compacte non vide de Ω, f une fonction de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$.

- On suppose que $\Delta f > 0$. Montrer que f n'admet pas d'extremum local.

- On suppose que $\Delta f \geq 0$. Montrer que $\max_K f = \max_{\mathbf{FT}(K)} f$.

Exercice 833 [Mines 2023 # 873] Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2 < R^2\}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complex telle que $\sum a_n z^n$ ait pour rayon de convergence R. Pour $(x,y) \in D_R$, on pose $f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy)^n$. Montrer que f est de classe C^2 et harmonique sur D_R.

Exercice 834 [Mines 2023 # 874] Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. On pose : $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^T AX - 2B^T X$.

- Calculer $\nabla f(X)$.
- Montrer que f admet un minimum global et le déterminer.
- Soit (X_k) une suite de vecteurs non nuls vérifiant

$\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = X_k - \frac{\|\nabla f(X_k)\|}{X_k^T AX_k} \nabla f(X_k)$. On suppose que la suite (X_k) est convergente.
Déterminer sa limite.

Exercice 835 [Mines 2023 # 875] Pour $x = (x_0, \ldots, x_n)$ et $y = (y_0, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, on pose
$f(x,y) = \left(\sum_{\substack{0\leq i,j \leq n \\ i+j=k}} x_i y_j \right)_{k\in[0,2n]} \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

- Soient $x, y \in (\mathbb{R}^{n+1}$ non nuls. Montrer que $f(x,y)$ est non nul.
- Soient u et v les applications de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ définies par $u : x \mapsto f(x,x)$ et $v : x \mapsto \frac{f(x,x)}{\|f(x,x)\|}$ ou $\| \ \|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^{2n+1}$. Calculer les différentielles de u et v.
- Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul. Calculer $\mathrm{rg}\,(\mathrm{d}v(x))$.

Exercice 836 [Mines 2023 # 876] ★ Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differentiable telle que : i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ est injective ; ii) $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

- Calculer $\mathrm{d}g$. - Montrer que g admet un minimum.
- En déduire que f est surjective.

Exercice 837 [Mines 2023 # 877] Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

- Montrre que f est convexe si et seulement si $f(y) - f(x) \geq df_x(y-x)$ pour tous $x, y \in U$. Que donne cette caracterisation dans le cas ou $n = 1$?
- Soient α et β des réels fixes. On note E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$. Soit $\Phi : f \in E \mapsto \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$. Montrre que Φ atteint sa borne inférieure en un unique élément de E, que l'on precisera.

Exercice 838 [Mines 2023 # 878] Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne canonique.
On pose $f : M \in E \mapsto \|M\|^2 = \mathrm{tr}(M^T M)$ et $g : M \in E \mapsto \det M - 1$. On note h la restriction de f a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

- Justifier que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer leur gradient en une matrice $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
- Montrre que f admet un minimum sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Soit M_0 une matrice ou il est ateint.
- Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale au gradient de g en M_0. Montrre qu'il existe un chemin γ de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, a valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = H$.
- Montrre que $(\nabla f_{M_0})^\perp = (\nabla g_{M_0})^\perp$.
- Calculer le minimum de h sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 839 [Mines 2023 # 879] Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $T_{I_n}\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, puis, si $M \in \mathrm{SO}_n(_R)$,$T_M\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

3) Probabilités

Exercice 840 [Mines 2023 # 880] On tire au hasard un élément A de $P([\![1,n]\!])$. Calculer la probabilité que $\mathrm{Card}\, A$ soit un entier pair.

Exercice 841 [Mines 2023 # 881] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leq \frac{n}{2}$. On se donne deux urnes contenant chacune des boules numerotées de 1 a n. On tire m boules dans chaque urne et l'on note X le nombre de doublons. Calculer la loi de X puis sa variance.

Exercice 842 [Mines 2023 # 882] Un couple met au monde quatre enfants. Chaque enfant a la probabilité $p \in]0,1[$ d'être une fille, et les naissances sont indépendantes. On considère les évènements A : le dernier est une fille, B : le couple a autant de filles que de garcons : C : les garcons naissent toujours apres une fille.

- Les évènements A et B (resp. A et C) sont-ils indépendants ?
- Les évènements A, B, C sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 843 [Mines 2023 # 883] Soit $p \in]0,1[$. Dans un sac contenant n jetons numerotes de 1 a n, on tire S jetons ou S est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et p. Quelle est la probabilité d'obtenir n jetons de numéros consécutifs ?

Exercice 844 [Mines 2023 # 884] On lance une piece jusqu'a obtenir deux piles de plus que de faces ou deux faces de plus que de piles. On note $p \in]0,1[$ la probabilité que la piece donne pile. On note X la variablealéatoire associée au nombre de lancers. Déterminer la loi de X et montrer que X est presque surement finie. La variable aléatoire X est-elle d'espérance finie ?

Exercice 845 [Mines 2023 # 885] Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules noires et $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches. On tire successivement et sans remise les boules. On note X la variable aléatoire qui donne le rang de la derniere boule blanche titée. Calculer la loi, l'espérance et la variance de X.

Exercice 846 [Mines 2023 # 886] On considère une urne qui contient une proportion $p \in]0,1[$ de boules blanches. On effectue un tirage avec remise des boules. Soit X_n la variable donnant le nombre de tirages successifs nécessaires pour obtenir n boules blanches. Donner la loi de X_1 ainsi que sa fonction génératrice $\mathcal{G}_{X_1}$. En déduire $\mathcal{G}_{X_n}$. Loi et espérance de X_n ?

Exercice 847 [Mines 2023 # 887] On considère une urne remplie avec des boules numerotées de 1 a $2n$. On procede a une suite de tirages sans remise.

- Calculer la probabilité que les boules impaires soient tires exactement dans l'ordre $1, 3, \ldots, 2n-1$.
- Soit X la variable correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir toutes les boules impaires. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 848 [Mines 2023 # 888] Soit $n \geq 2$. On place n boules numerotées de 1 a n dans une urne et l'on realise des tirages successifs avec remise. On note X le rang du tirage donnant pour la premiere fois un numero supérieur ou égal aux precedents.

- Déterminer la loi de X.
- Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 849 [Mines 2023 # 889] Une urne contient $n+1$ boules numerotées de 0 a n. On y effectue des tirages avec remise. On pose $X_1 = 1$. Pour $i \geq 2$, X_i est la variable de Bernoulli égale a 1 si le numero de la boule titée au i-eme tirage n'avait jamais ete obtenu avant. On pose, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = X_1 + \cdots + X_i$.

- Déterminer la loi des X_i.
- Calculer l'espérance et la variance de Y_i. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(Y_n)$.
- Pour $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $\mathbf{P}(X_i = 1, X_j = 1)$.
- Étudier l'indépendance des X_i.

Exercice 850 [Mines 2023 # 890] Soit $(J - n \in \mathbb{N}$ une suite de joueurs. Le joueur J_0 affronte le joueur J_1 ; le gagnant affronte J_2, puis le gagnant de ce nouveau match affronte J_3 et ainsi de suite. Lors d'un match, le joueur entrant a une probabilité $p \in]0,1[$ de remporter le match. Le jeu termine lorsqu'un meme joueur remporte trois victoires. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement < < le n-ième match est joue > > . Déterminer la limite de $\mathbf{P}(A_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 851 [Mines 2023 # 891] On suppose que lorsqu'un enfant natt, il a une chance sur deux d'être un garcon. Dans une famille donnée, le nombre d'enfants est la variable aléatoire Z et le nombre de filles est X.

- Montrer que : $\forall t \in [0,1], G_X(t) = G_Z\left(\frac{1+t}{2}\right)$.
- Expliciter la loi de X si Z suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 852 [Mines 2023 # 892] Une puce se trouve sur l'origine de $\mathbb{Z}^2$. À chaque etape, elle saute aléatoirement dans l'une des quatre directions. On note X_n l'abscisse de la puce a l'etape n. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_n^2)$.

Exercice 853 [Mines 2023 # 893] On munit $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme. Calculer la probabilité π_n que $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ait un cycle de longueur strictement supérieure a $\frac{n}{2}$ dans sa decomposition en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer un équivalent de π_n.

Exercice 854 [Mines 2023 # 894] Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $Y = |X_1 - X_2|$.

- Calculer $\mathbf{P}(Y = 0)$.
- Déterminer la loi de Y.
- Montrer que Y est d'espérance finie et calculer $\mathbf{E}(Y)$.
- Montrer que Y possede un moment d'ordre 2 et calculer $\mathbf{V}(Y)$.

Exercice 855 [Mines 2023 # 895] • Déterminer la loi de la somme de n variables géométriques de paramètre $p \in]0,1[$, indépendantes et identiquement distribuées.

  ▷ Soit $p \in]0,1[$. On lance des des tels que la probabilité de tomber sur 6 en jétant un de est p. Soit X la variable aléatoire égale au rang du n-ième 6. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 856 [Mines 2023 # 896] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Pour $m \in [\![1,n]\!]$, on note $X_m = \min\{k \in [\![1,n]\!],\ \sigma(k) \geq m\}$ et $Y_m = \max\{k \in [\![1,n]\!],\ \sigma(k) \geq m\}$. Calculer la loi de X_m et Y_m, et leur espérance.

Exercice 857 [Mines 2023 # 897] Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et Y le reste de la division euclidienne de X par b. Déterminer la loi de Y.

Exercice 858 [Mines 2023 # 898] Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X - k \in \mathbb{N}^*$ une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant :

$\mathbf{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_k = -1) = 1 - p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que $p = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \max_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}(S_{2n} = k) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$.

Exercice 859 [Mines 2023 # 899] Soient A, B, C des variables aléatoires indépendantes telles que A suive la loi de Rademacher, et B et C la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

- Calculer la probabilité que le trinome $AX^2 + BX + C^2$ admette deux racines réelles distinctes.
- Calculer la probabilité que le trinome $AX^2 + BX + C^2$ admette une unique racine réelle.
- Calculer la probabilité que le trinome $AX^2 + BX + C^2$ n'admette aucune racine réelle.
- Cette derniere probabilité peut-être égale a $\dfrac{1}{2}$? Dans ce cas, donner une valeur approchée de p a 10^{-1} pres.

Exercice 860 [MINES 2023 # 900] On considère une variable aléatoire X suivant la loi de poisson de paramètre λ et on pose $Y = X^2+1$. - Calculer l'espérance de Y.

- Calculer la probabilité de l'évènement $(2X < Y)$.
- Comparer les probabilités des évènements $(X \in 2\mathbb{N})$ et $(X \in 2\mathbb{N}+1)$.

Exercice 861 [MINES 2023 # 901] Soit X une variable aléatoire a valeurs dans $[a, b]$, d'espérance $\mathbf{E}(X) = m$.

- Montrere que $\mathbf{V}(X) \leq (m-a)(b-m)$.
- Montrere que cette inégalité est optimale.

Exercice 862 [MINES 2023 # 902] Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$ et on suppose que les racines du polynôme caracteristique de M ne sont pas toutes simples.

- Montrere que M admet un vecteur propre de la forme $V = (v_1, ..., v_n, 0)^T$.
- Montrere que $(v_1, ..., v_n)^T$ est vecteur propre de A et orthogonal a b.
- Soient $X_1, ..., X_5$ variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_5 & X_2 \\ 0 & X_5 & -1 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix}$. Montrere que la probabilité que le polynôme caracte-ristique de la matrice N n'ait que des racines simples est supérieure ou égale a $3p^3 - 2p^4$.

Exercice 863 [MINES 2023 # 903] Soit $p \geq 3$ premier. Soit $K = \{x^2,\ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.

- Denombrer le cardinal de K.
- Soient A, B deux variables aléatoires a valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit N variable aléatoire comptant le nombre de solutions de (E) : $X^2 + AX + B = 0$. Déterminer l'espérance et la variance de N.

Exercice 864 [MINES 2023 # 904] Caracteriser les couples (X, a) avec X variable aléatoire discrète complexe et $a \in \mathbb{C}$ tels que $X \sim aX$.

Exercice 865 [MINES 2023 # 905] Soit $\alpha > 1$. On munit $\mathbb{N}^*$ de la loi de probabilité $\mathbf{P}_\alpha$ définie par $\mathbf{P}_\alpha(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha}$ pour $n \geq 1$.

- Calculer $\mathbf{P}_\alpha(m\mathbb{N}^*)$ pour $m \geq 1$.
- On note $(p-k \geq 1$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrere que les $p_k\mathbb{N}^*$ sont mutuellement indépendants.
- En déduire la formule d'Euler $\zeta(\alpha) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{p_k^\alpha}\right)^{-1}$.

Exercice 866 [MINES 2023 # 906] Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes strictement positives, de meme loi et d'espérance finie. Montrere que $\mathbf{E}(X/Y) \geq 1$. Ind. Commencer par le cas où X et Y sont indépendantes.

Exercice 867 [MINES 2023 # 907] Soit $(X-n \in \mathbb{N}^*$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n), \alpha_n = \mathbf{E}(Y_n)$ et $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n), \beta_n = \mathbf{E}(Z_n)$.

- Étudier la monotonie des suites (α_n) et (β_n). - Exprimer α_n en fonction de n.
- Déterminer la limite de (β_n) puis un équivalent simple.

Exercice 868 [MINES 2023 # 908] Soient $p, q \in]0, 1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, suivant les lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Soit $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

Exercice 869 [MINES 2023 # 909] Soient $p \in]0, 1[$, X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. On pose $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$.

- Montrer que la variable Y suit une loi géométrique.
- Montrer que les variables Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Exercice 870 [MINES 2023 # 910] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![1, d]\!]$. Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $Y_j = |\{i \in [\![1, n]\!],\ X_i = j\}|$.

- Déterminer la loi de Y_j.
- Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et $k, \ell \in [\![1, n]\!]$. Calculer $\mathbf{P}(Y_i = k, Y_j = \ell)$.

Exercice 871 [MINES 2023 # 911] Soit X une variable aléatoire discrète a valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) < +\infty$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose : $F_X(t) = \mathbf{E}(e^{-tX})$.

- Montrer que F_X est bien définie (a valeurs réelles) et continue.
- Montrer la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} F_X(t)\, dt$.
- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+Y}\right)$.

- Généraliser a m variables i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p.

Exercice 872 [Mines 2023 # 912] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1,2\}$. On pose $S_0=0$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=X_1+\cdots+X_n$.
Pour $n\in\mathbb{Z}$, soit $A_n=(\exists k\geq 0,\ S_k=-n)$ et $p_n=\mathbf{P}(A_n)$.

- Exprimer $\mathbf{P}(\exists k>0,\ S_k=0)$ en fonction de p_{-1} et de p_2.
- Trouver une relation entre p_{n+2}, p_n et p_{n-1}.
- En déduire la valeur de p_n.

Exercice 873 [Mines 2023 # 913] Soient X une variable aléatoire a valeurs dans $\{-1,1\}$, $(X-k\geq 1$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour toute partie finie A de $\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(S_n\in A)<+\infty$.

Exercice 874 [Mines 2023 # 914] Soit (X_n) une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre $1/2$. - Donner la loi de $Z_n=\sum_{k=0}^n 2^{n-k}X_k$. - Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(Z_n\geq 3^n)$ et $\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(Z_n\geq 2^n)$.

Exercice 875 [Mines 2023 # 915] Soit X une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

- Montrer que $\mathbf{P}(X\geq x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
- On suppose que $\mathbf{E}(X)<+\infty$. Montrer que $\mathbf{P}(X\geq x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Soit (X_n) une suite i.i.d. de variables aléatoires. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $R_n=|\{X_1,\dots,X_n\}|$.
  - ▷ Donner un équivalent de $\mathbf{E}(R_n)$ lorsque les X_i suivent la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$.
  - ▷ Dans le cas général, montrer que $\mathbf{E}(R_n)=o(n)$.

Exercice 876 [Mines 2023 # 916] Soit $(X-i\geq 1$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On suppose que chaque variable aléatoire X_i+1 suit la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.

- Déterminer la loi de S_n.
- Déterminer $M_n=\max\{\mathbf{P}(S_n=k),\ k\in\mathbb{N}\}$ puis un équivalent simple de M_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 877 [Mines 2023 # 917] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Montrer l'existence de $\alpha>0$ que l'on déterminera tel que :
$\forall\epsilon>0, \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{\ln(n)}\max_{1\leq k\leq n}X_k-\alpha\right|\geq\epsilon\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Exercice 878 [Mines 2023 # 918] Soit $g\colon t\mapsto\frac{e^t}{(1+e)-t}$

- Montrer que g est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X a valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Soit $(X_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ une famille i.i.d. de variables aléatoires de meme loi que X. Déterminer la probabilité que

$$M=\begin{pmatrix}0 & X_{1,2} & \dots & X_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & X_{n-1,n}\\ 0 & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}$$

  ait un nombre fini de sous-espaces stables.

Exercice 879 [Mines 2023 # 919] Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $U=(X_1\ \cdots\ X_n)$ et $M=U^TU$.

- Déterminer la loi des variables aléatoires $\mathrm{tr}(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$.
- Calculer la probabilité que M soit une matrice de projection.

Exercice 880 [Mines 2023 # 920] Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, strictement positives, L^2 et telles que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{E}(X_n)=1$. On dit que (X_n) converge en probabilités vers 0 si : $\forall\alpha>0, \mathbf{P}(X_n\geq\alpha)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $P_n=\prod_{i=1}^n X_i$.

- Soient $\lambda\in[0,1]$ et $X\in L^2$ telle que $\mathbf{E}(X^2)>0$.

Montrer que : $\mathbf{P}(X\geq\lambda\mathbf{E}(X))\geq\dfrac{(1-\lambda)^2\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

- Montrer que $\mathbf{E}(\sqrt{P_n})\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ si et seulement si (X_n) converge vers 0 en probabilités.

Exercice 881 [Mines 2023 # 921]

- Soit $(X_1,\dots,X_n)$ une famille i.i.d. de variables aléatoires de Rademmacher, $S=\sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que, si $t\in\mathbb{R}^+$, $\mathbf{E}(e^{tS})\leq\exp\left(-\dfrac{nt^2}{2}\right)$. En déduire que, si $a\in\mathbb{R}^{+*}$, $\mathbb{P}(|S|\geq a)\leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.
  - ▷ Généraliser au cas ou les X_k sont des variables aléatoires discrètes i.i.d, a valeurs dans $[-1,1]$ et centres.

Exercice 882 [Mines 2023 # 922] Soit $(X-i\in\mathbb{N}^*$ une suite de variables aléatoires i.i.d. possedant un moment d'ordre 4. On pose : $m=\mathbf{E}(X_i)$ et $V_4=\mathbf{E}((X_i-m)^4)$.

- Justifier la bonne définition (dans $\mathbb{R}$) de m et V_4.

Pour $\epsilon > 0$, on pose : $A_n^\epsilon = \left(\left|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - m)\right| \geq \epsilon\right)$.

- Montrer que $\mathbf{P}(A_n^\epsilon) \leq \dfrac{3V_4}{n^2\epsilon^4}$.
- Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p^\epsilon\right) = 0$.
- Montrer que $\mathbf{P}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m\right) = 1$.

4) Mines PSI

a) Algèbre

Exercice 883 [Mines PSI 2023 # 923] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(k)$ est premier. Montrer que P est constant.

Exercice 884 [Mines PSI 2023 # 924] Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, \$ P(X+n)+$\sum_{\text{k=0}}^{\text{n-1}}a_{\text{kP}}$(X+k)=0\$.

Exercice 885 [Mines PSI 2023 # 925] Soit (P) le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2z - y = 0$ et u le vecteur $(1, 2, 1)^T$.

- Calculer la matrice de projection vectorielle sur (P) parallèlement a u.
- Calculer l'image par cette projection de la droite (D) : $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0. \end{cases}$

Exercice 886 [Mines PSI 2023 # 926] Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère les polynômes $E_k = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$.

- Montrer que $(E - 0 \leq k \leq n$ est une base de E.
- Calculer $\sum_{k=0}^n kE_k$ et $\sum_{k=0}^n k^2 E_k$.
- Comment aurait-on pu prévoir les résultats obtenus ?

Exercice 887 [Mines PSI 2023 # 927] Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation : $A^2 + (-1)^n \det(A) I_n = 0$.

Exercice 888 [Mines PSI 2023 # 928] Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible. Calculer alors M^{-1}.

Exercice 889 [Mines PSI 2023 # 929] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice n.

- Justifier l'existence d'un vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$. En déduire que la famille $(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0)$ est libre.
- Montrer que A est semblable a $J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) i) : Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\lambda(e^{J_n} - I_n)$ est nilpotente. Preciser son indice de nilpotence.

- Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = \lambda P^{-1} e^{J_n} P$.
- En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = e^B$.

Exercice 890 [Mines PSI 2023 # 930] ★ Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, F est sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) \subset F$. On suppose que $E = F + \mathrm{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

Exercice 891 [Mines PSI 2023 # 931] • Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, que l'on decompose en $P = Q + iR$ avec P et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $Q + \lambda R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- ▷ En déduire que deux matrices A et B réelles, semblables sur $\mathbb{C}$, sont semblables sur $\mathbb{R}$.
- ▷ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = B^3 = I_n$ et \$tr(A)=tr(B)\$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 892 [Mines PSI 2023 # 932] Diagonaliser \$A=

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\in$M$_{\text{n}}$(R)\$.

Exercice 893 [Mines PSI 2023 # 1201] On considère un de equilibre a n faces. Les lancers se modelisent par une suite $(X - i \geq 1$ i.i.d de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $T_k = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ |\{X_1, \dots, X_n\}| = k\}$.

- Déterminer la loi de T_k.
- Donner un équivalent, quand $n \to +\infty$, du nombre moyen M_n de lancers nécessaires pour obtenir toutes les faces.

Exercice 894 [Mines PSI 2023 # 1202] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N = n!$. Soient $p_1, \ldots, p_m$ les facteurs premiers distincts de N, Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![1\,;\,N]\!]$.

- Montrer que les évènements $(p_k|X_1)$: ◁p_k divise X_1 ↾ sont indépendants pour $k \in [\![1\,;\,m]\!]$.
- Pour $k \in [\![1\,;\,m]\!]$, calculer $\mathbf{P}(p_k|X_1 \text{ et } p_k|X_2)$.
- Calculer la probabilité de l'évènement ◁X_1 et X_2 sont premiers entre eux ↾.

Exercice 895 [Mines PSI 2023 # 1203] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $[\![1\,;\,n]\!]$ de la probabilité uniforme.

- Soit a un diviseur de n, on note $D(a)$ l'ensemble des multiples de a qui se trouvent dans $[\![1\,;\,n]\!]$. Calculer $\mathbf{P}(D(a))$.
- On note $p_1, \ldots, p_k$ les diviseurs premiers (distincts) de n. Montrer que $D(p_1), \ldots, D(p_k)$ sont mutuellement indépendants.
- Soit B l'ensemble des entiers dans $[\![1\,;\,n]\!]$ qui sont premiers avec n. Calculer $\mathbf{P}(B)$ a l'aide de $p_1, \ldots, p_k$.
- On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers dans $[\![1\,;\,n]\!]$ qui sont premiers avec n. Montrer que $\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ \text{p divise } n}} \frac{p-1}{p}$

Exercice 896 [Mines PSI 2023 # 1204] Soit X une variable aléatoire discrète a valeurs réelles. Soient $b > 0$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que $g(x) \geq b$ pour tout $x \in I$.

- Montrer que $\mathbf{P}(X \in I) \leq \frac{\mathbf{E}(g(X))}{b}$.
- On suppose que X a un ecart-type σ et que $\mathbf{E}(X) = 0$.

Montrer : $\forall t > 0,\ \mathbf{P}(X > t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$.
Ind. Utiliser une fonction $x \mapsto (x+c)^2$ pour un réel $c > 0$.

Exercice 897 [Mines PSI 2023 # 1205] Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes a valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, indépendantes et identiquement distribuées. Montrer que $\mathbf{E}(X/Y) \geq 1$. À quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 898 [Mines PSI 2023 # 1206] Les variables aléatoires A, B suivent la loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{P}([\![1\,;\,n]\!])$ et elles sont indépendantes. On pose $X = \mathrm{Card}(A \cup B)$. Calculer $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 899 [Mines PSI 2023 # 1207]

- Soit $(A - n \in \mathbb{N}^*$ une suite d'évènements. Montrer que B : ◁ Il existe un rang a partir duquel A_n est vraie ↾ est un évènement et que $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right)$.
  - ▷ Soient $(X - n \in \mathbb{N}^*$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles de meme loi que X.On suppose $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\mathbf{E}(X^4) < +\infty$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
  - ▷ Calculer $\mathbf{E}({S_n}^4)$ en fonction de n, $\mathbf{E}(X^2)$ et $\mathbf{E}(X^4)$.
  - ▷ En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k \geq n} \left(\left| \frac{S_k}{k} \right| \leq \varepsilon \right) \right) = 1$ et que, presque surement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0$.

Exercice 900 [Mines PSI 2023 # 1208] Soit $\alpha > 0$.

- Montrer l'existence d'une variable aléatoire X valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice \$ G$_X$ $(t = \frac{1}{\{} (2-t)^{\alpha}\}\$.Donnerunquivalentde\mathbf{P}$ quand $n \to +\infty$.
- Pour $\lambda > 0$, montrer que $\mathbf{P}\left(X \geq \lambda + \alpha\right) \leq \frac{2\alpha}{\lambda^2}$.

IV) Centrale

1) Algèbre

Exercice 901 [Centrale 2023 # 1209] On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathbb{N}^*$.
- Calculer $\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$.
- Donner tous les entiers tels que C_n soit pair. En déduire tous les entiers tels que C_n soit impair.

Exercice 902 [Centrale 2023 # 1210] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou egaux a n et $P_n = \prod_{p \in \mathcal{P}(n)} p$.

- Montrer que $\forall n \geq 2,\ \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n$.
- Montrer que $\forall n \geq 1,\ \binom{2n+1}{n} < 4^n$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{2n+1} < 4^n P_{n+1}$.

Exercice 903 [Centrale 2023 # 1211] Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini commutatif tel que le nombre d'automorphismes de G est 3.
a) i) : Donner la définition d'un automorphisme. Montrer que $\varphi : x \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G.

- Montrer que, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.
- Montrer que G possede un sous-groupe V d'ordre 4 et preciser les automorphismes de V.

Exercice 904 [Centrale 2023 # 1212] Soient p un nombre premier tel que $p \equiv 3[4]$ et $C = \{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ x = y^2\}$.

- Rappeler l'enonce du petit théorème de Fermat. Montrer que $-1 \notin C$.

On pose $\pi_x = \prod_{y \in C \setminus \{x\}} (x+y)$ pour $x \in C \setminus \{0\}$ et $\pi = \prod_{x \neq y \in C} (x+y)$.

- Déterminer le cardinal de C.

- Montrer que $\forall x \in C \setminus \{0\}, \pi_x = \pi_1$.
- Calculer π.

Exercice 905 [Centrale 2023 # 1213] On pose $u = 2 + \sqrt{3}, v = 2 - \sqrt{3}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = 2^n - 1$ et $s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$.

- Montrer que, si M_n est premier, alors n est premier.
- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n^2 - 2$. Qu'en déduire sur le suite $(s - n \in \mathbb{N}$?
- Soit q un nombre premier. On munit l'ensemble $B = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ des deux lois de composition interne définies par :

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' + 3yy', xy' + x^{'}y)$.

- Montrer que les deux lois précédentes muinssent B d'une structure d'anneau commutatif fini.
- Montrer que, si 3 n'est pas un carré modulo q, alors l'anneau precedent est un corps.
- On note $A = \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$. Montrer que l'application π définie par $\pi(a + b\sqrt{3}) = (\overline{a}, \overline{b})$ est bien définie et est un morphisme surjectif d'anneaux de A dans B.
- On suppose n premier. Montrer que, si M_n divise s_{n-2} alors M_n est premier.

Ind. On pourra raisonner par l'absurde en considérant le plus petit facteur premier q de M_n et déterminer l'ordre de $(\overline{2}, \overline{1})$ dans le groupe des éléments inversibles de l'anneau B.

Exercice 906 [Centrale 2023 # 1214] Soit A un anneau commutatif. On dit que A est noetherien lorsque tous ses ideaux sont engendres par une partie finie de A.

- Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont-ils noetheriens ?
- Montrer que A est noetherien si et seulement si toute suite croissante d'ideaux est stationnaire.
- Soit A un anneau non commutatif. On dit que $\mathcal{I}$ est un ideal a gauche de A lorsque $\mathcal{I}A \subset \mathcal{I}$ (définition similaire pour un ideal a droite). Soit A noetherien, c'est-a-dire que tous les ideaux, a droite ou a gauche, de A sont de type fini. Montrer que l'inversibilité a gauche equivaut a l'inversibilité a droite, i.e. $\forall a \in A, \Big(\exists b \in A,\ ab = 1 \iff \exists b \in A,\ ba = 1\Big)$.

Ind. Considèrer $\varphi : x \mapsto ax$.

Exercice 907 [Centrale 2023 # 1215] • Soit G un groupe commutatif fini. Si a et b sont deux éléments de G d'ordre premiers entre eux, quel est l'ordre de ab?

- ▷ Soit G un groupe commutatif fini. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.
- ▷ Soit p un nombre premier. Montrer que le groupe $\mathbb{F}_p^*$ est cyclique.

Exercice 908 [Centrale 2023 # 1216] Soit $(T - n \in \mathbb{N}$ la suite de polynômes réels définie par $T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. - Montrer que $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$ pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
- Montrre que, pour $n \geq m$, $2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$.

On considère l'équation différentielle $(E) : (1 - x^2)P^{'2} = n^2(1 - P^2)$.

- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, T_n et $-T_n$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
- Montrre que tout polynôme solution de (E) est de degré n, puis déterminer les polynômes solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 909 [Centrale 2023 # 1217] Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ et $b_1 < b_2 \cdots < b_p$ des réels et $M = (e^{a_i b_j})_{1 \leq i,j \leq p}$.

- Calculer $\det M$ lorsque $b_k = k - 1$ pour tout k.
- Montrre que M est inversible, puis que $\det M > 0$.

Exercice 910 [Centrale 2023 # 1218] • Rappeler la définition de l'indicatrice d'Euler, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de sa decomposition en facteurs premiers.

- ▷ Pour $n \geq 2$, calculer $\sum_{d|n} \varphi(d)$ (la somme étant restreinte aux diviseurs positifs).
- ▷ En déduire le déterminant de A, ou $A_{i,j} = i \wedge j$.

Exercice 911 [Centrale 2023 # 1219] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'on ait $(f(a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- À l'aide des matrices $U_{x,y} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$, montrer que f est injective.
- En utilisant l'ensemble $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$, en déduire que f est strictement monotone.
- On suppose que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$. Montrre qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, il existe $z_{x,y} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)f(y) = f(a)f(z_{x,y})$, et conclure a une absurdite.
- Traiter de meme le cas $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{-*}$.

Exercice 912 [Centrale 2023 # 1220] • Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport a une ligne ou une colonne. En déduire, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une relation entre $\mathrm{Com}\, A$, A et $\det A$.

- ▷ Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,i} = 2$, $a_{i,j} = -1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ dans tout autre cas. Calculer le déterminant de A.

▷ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres coefficients sont negatifs et telle que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0$ pour tout i. Montre que A est inversible.

▷ Montrre que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

Exercice 913 [Centrale 2023 # 1221] Soient $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $F : X \mapsto MXM^{-1}$ et $f : (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB)$.

- Montrre que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
- Trouver les endomorphismes h de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(F(A), B) = f(A, h(B))$.
- Dans cette question, on suppose que $n = 2$.Soit \$h :$\left(\quad \in \right.${M}$_2$(R)$\mapsto$ $\left(\quad \right)$.\$$Dterminerlesendomorphismesk$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $f(h(A), B) = f(A, k(B))$ pour tout \$(A,B)$\in${M}$_\mathrm{n}$(R)^2.\$ Parmi eux, preciser ceux qui sont trigonalisables, diagonalisables.

Exercice 914 [Centrale 2023 # 1222] • Enoncer et démontrer la caracterisation du rang par les matrices extraites.

▷ Soit $\Omega_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(_K)$ telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la matrice $M_k := (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ soit inversible. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, montrer que Ω_n est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

▷ Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(_K)$ appartient a $\Omega_n(\mathbb{K})$ si et seulement si M s'écrit TT' ou T (resp. T') est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure (resp. supérieure) inversible.

Exercice 915 [Centrale 2023 # 1223] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Donner la définition du polynôme minimal π_A. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
- Calculer $\det(A)$ et A^2.
- Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^2)$. Donner une condition sur les $a_1, \ldots, a_n$ pour que A soit diagonalisable.

Exercice 916 [Centrale 2023 # 1224] On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Montrer que toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.
- Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ et $D = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Montrer qu'il existe un polynôme f tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(\alpha_i)^2 = \alpha_i$. En déduire que $f(D)^2 = D$.

On considère la suite $(c - k$ définie par $c_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_{k+1} = \sum_{i=0}^k c_i c_{k-i}$ et le polynôme $\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^{k+1}$.

- Déterminer le reste de la division euclidienne de φ^2 par X^n.
- Trouver un polynôme g tel que, pour toute matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on ait $g(N)^2 = I_n + N$.
- Soit A une matrice inversible. Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{C}[A]$ telle que $R^2 = A$.

Exercice 917 [Centrale 2023 # 1225] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note E_i ses sous-espaces propres et $n_i = \dim E_i$.

- Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$.
- Soit g un endomorphisme de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
- g commute avec f, - pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $g(E_i) \subset E_i$.En déduire que la dimension du commutant de f est $\sum_{i=1}^r {n_i}^2$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que la dimension du commutant de A est supérieure ou égale a n.

Exercice 918 [Centrale 2023 # 1226] Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On note $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt[n]{|\operatorname{tr}(A^n)|}$.

- Si $\mathrm{Sp}(A)$ est un singleton, montrer que (u_n) converge vers $\rho(A)$.
- Donner un exemple de matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que (u_n) ne converge pas.

On suppose maintenant que A a au moins deux valeurs propres distinctes.

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que 1 est valeur d'adherence de (z^n). Montrer que $\rho(A)$ est valeur d'adherence de u_n.

Exercice 919 [Centrale 2023 # 1227] Soit E un espace-vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Pour toute partie $A \subset \mathcal{L}(E)$, on note $\mathcal{C}(A) = \{u \in \mathcal{L}(E) \ ; \ \forall v \in A, \ u \circ v = v \circ u\}$. L'objectif de l'exercice est d'étudier $\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\}))$.

- Montrer que $\mathcal{B}(f)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre contenant $\mathbb{K}[f]$.
- On suppose f nilpotente d'indice n. Montrer que $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.
- Soient G_1, G_2 deux sous-espaces vectoriels supplementaires stables par un $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f_i = f_{|G_i}$. On suppose que $\pi_{f_1} \wedge \pi_{f_2} = 1$. Montrer que $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Exercice 920 [Centrale 2023 # 1228] Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, $a \in E$ un vecteur unitaire, et H l'hyperplan orthogonal a la droite vectorielle dirigée par a. On note σ la symétrie orthogonale par rapport a l'hyperplan H, et p la projection orthogonale sur H.

- Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel F de E, $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$.
- Montrer que, pour $x \in E$, $p(x) = x - \langle a, x \rangle a$.
- Soit $\Omega = \{x \in E, \ \langle a, x \rangle \geq 0 \ \text{ et } \ \langle x, \sigma(x) \rangle \leq 0\}$.

Montrer les equivalences suivantes, pour $x \in E$:

- $x \in \Omega$ si et seulement si $\langle a, x \rangle \leq \|p(x)\|$,

- $x \in \Omega$ si et seulement si $\forall y \in \Omega,\ \langle x, y\rangle \leq 0$.

Exercice 921 [Centrale 2023 # 1229] Soit E un espace euclidien. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

- Rappeler l'identite du parallelogramme et les identites de polarisation.
- Montrer l'equivalence suivante :

1. $\exists c∈{R},\;∀(x,y)∈ E^2,\;⟨ s(x),s(y)⟩=c ⟨ x,y⟩,$

ii) $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \langle s(x), s(y)\rangle = 0$.

Exercice 922 [Centrale 2023 # 1230] • Montrer que $(P, Q) \mapsto \int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\int_0^1 x^k P(x)\,\mathrm{d}x = 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On pose $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$. - Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_i$, puis que $\int_0^1 f^2 \geq n^2$.

Exercice 923 [Centrale 2023 # 1231] • Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- ▷ Soit (E, φ) un espace euclidien et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que la matrice $(\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique définie positive.
- ▷ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $L_p = \frac{d^p}{dX^p}\left[X^p(1-X)^p\right] \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille (L_p) est orthogonale pour le produit scalaire de la question a. Est-elle orthonormale ?
- ▷ Soit $M = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n+1}$. Montrer que la matrice M est symétrique définie positive et calculer $\det M$.

Exercice 924 [Centrale 2023 # 1232] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

- Rappeler la définition d'une matrice définie positive. Donner des propriétés d'une telle matrice.
- Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $J(x) = \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$. Montrer que J est strictement convexe, c'est-a-dire que : $\forall x \neq y$, $\forall \lambda \in]0,1[$, $J(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y)$.
- Montrer que J atteint un minimum en un unique point de $\mathbb{R}^n$ et que ce vecteur est solution de l'équation $Ax = b$.

Exercice 925 [Centrale 2023 # 1233] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. On note $S_\alpha = \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \det M \geq \alpha\}$. Le but de cet exercice est de s'interesser, pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, a la quantite $m_\alpha(A) = \inf_{M\in S_\alpha} \operatorname{tr}(AM)$.

- Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles. Rappeler le théorème spectral. Justifier l'existence de $m_\alpha(I_n)$ puis la calculer.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$. Prouver l'unicite puis calculer $m_\alpha(A)$.
- Que se passe-t-il lorsque $\alpha = 0$?

Exercice 926 [Centrale 2023 # 1234] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a coefficients dans $\{0,1\}$ et de trace nulle. On suppose que $A^2 + A - (d-1)I_n = J_n$ ou J_n est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

- Montrer que chaque ligne de A contient d coefficients egaux a 1.
- Montrer que $AU = dU$ ou $U = (1 \cdots 1)^T$. En déduire que $n = d^2 + 1$.
- Montrer que la multiplicité de d est égale a 1.
- Montrer que les autres valeurs propres de M sont racines de $X^2 + X - d + 1 = 0$.
- Montrer qu'il existe deux entiers naturels m_1 et m_2 tels que $m_1 + m_2 = n-1$ et $d + m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$ ou r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation précédente.
- Montrer que si $m_1 = m_2$ alors $d = 2$. On suppose $d > 2$ dans la suite.
- Montrer qu'il existe un entier k tel que $4d - 3 = (2k+1)^2$ puis que $k^4 \equiv 1\ [2k+1]$.
- Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a $16k^4 \equiv 1\ [2k+1]$. En déduire qu'on a forcement $d \in \{2, 3, 7, 57\}$.

Exercice 927 [Centrale 2023 # 1235] Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^T & A_2 \end{pmatrix}$ une matrice symétrique définie positive avec $A_1 \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$.

- Montrer que A_1 et A_2 sont définies positives.
- Montrer qu'il existe R_1 et R_2 symétriques définies positives telles que $R_1^2 = A_1$ et $R_2^2 = A_2$.
- Montrer que $\det(A) \leq \det(A_1)\det(A_2)$.

Exercice 928 [Centrale 2023 # 1236] On considère la relation binaire pour $(A, B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 A \preceq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer qu'une partie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée pour $\preceq$.
- Montrer que toute suite croissante majorée pour $\preceq$ converge.
- Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $A \preceq B \implies B^{-1} \preceq A^{-1}$.

Exercice 929 [Centrale 2023 # 1237] Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(S) \leq \cdots \leq \lambda_n(S)$ le spectre ordonne de S. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique note $\langle\ \rangle$ et on note S^{n-1} la spere unite.

- Montrer que, si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1(S) = \min\{\langle Sx, x\rangle\ ;\ x \in S^{n-1}\}$.
- Si $d \in [\![1, n]\!]$, soit $\mathcal{V}_d$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension d de $\mathbb{R}^n$. Montrer que, si $k \in [\![1, n]\!]$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$\lambda_k(S) = \min_{V\in\mathcal{V}_k} \max\{\langle Sx, x\rangle\ ;\ x \in V \cap S^{n-1}\} = \max_{V\in\mathcal{V}_{n-k+1}} \min\{\langle Sx, x\rangle\ ;\ x \in V \cap S^{n-1}\}$.

- Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i+j \leq n+1$ et $(S,S') \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$, montrer que

$\lambda_{i+j-1}(S+S') \leq \lambda_i(S) + \lambda_j(S')$.

2) Analyse

Exercice 930 [Centrale 2023 # 1238] Soient $(E, \| \|)$ un espace norme, F un sous-espace vectoriel ferme strict de E et $\delta \in]0,1[$. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire u de E tel que $d(u,F) \geq \delta$.

Exercice 931 [Centrale 2023 # 1239] Soient (E,N) et (E',N') deux espaces vectoriels normes.

Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour $P(X) = p_0 + p_1 X + \cdots + p_d X^d \in \mathbb{R}_d[X]$ on pose $\|P\| = \max(|p_0|, ..., |p_d|)$.

- Vérifier que l'application $\| \|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.

b) i) Soit $(y - n \in \mathbb{N}$ une suite d'éléments de E, convergeant vers $\ell \in E$.

Montrer que l'ensemble $Y = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

- Soit $f : E \to E'$ continue telle que, pour tout compact K de E', $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que, si F est un ferme de E, alors $f(F)$ est un ferme de E'.
- Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ est une racine de P telle que $|x| > 1$, alors $|x| \leq \|P\| + 1$. En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindes de $\mathbb{R}_d[X]$ est ferme dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Exercice 932 [Centrale 2023 # 1240] • Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = -1$.

> ▷ Soit $f \colon \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $f(-z) = f(z)$. En déduire que, si A et B sont deux parties fermées de reunion $\mathbb{U}$, il existe deux points de $\mathbb{U}$ diametralement opposes tous deux dans A ou tous deux dans B. - Soient D le disque unite ferme du plan complexe et $g : D \to \mathbb{C}^*$ continue telle que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $g(-z) = -g(z)$. On admet qu'il existe h continue telle que $g = \exp \circ h$. Montrer qu'il existe $z \in D$ tel que $h(-z) = h(z)$.

Exercice 933 [Centrale 2023 # 1241] Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel norme. Pour $A \subset E$ non vide et $x \in E$, on note $d(x,A) = \inf\{\|x-a\|,\ a \in A\}$.

- On suppose A ferme. Soit $x \in E$. Montrer que $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in A$.
- Soient F un sous-espace vectoriel ferme de E et $\delta \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $x \in E$ unitaire vérifiant $d(x,F) \geq \delta$.
- On suppose E de dimension infinie et on admet que les sous-espaces vectoriels de dimension finie sont fermes. Montrer que la sphere unite n'est pas un compact de E.

Exercice 934 [Centrale 2023 # 1242] Soit φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) = -t\ln(t)$ pour $t \in]0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose S_n l'ensemble des vecteurs $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $p_1 + ... + p_n = 1$ et $p_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On pose enfin $H_n(p) = \sum_{i=1}^n \varphi(p_i)$ pour $p \in S_n$.

- - Donner la définition d'une partie compacte d'un espace vectoriel norme, et en donner une caracterisation en dimension finie.
- Montrer que S_n est une partie compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$.
- - Montrer que H_n est continue.
- Montrer que H_n atteint sur S_n un maximum en un unique point p_0, et expliciter p_0.

Soit $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $f_v(p) = H_n(p) + \sum_{i=1}^n p_i v_i$ pour $p \in S_n$.

On pose $f_v^* = \sup_{p \in S_n} f_v(p)$ et $E_v = \{p \in S_n,\ f_v(p) = f_v^*\}$.

- Montrer que E_v est non vide. Déterminer f_v^* et E_v.

Exercice 935 [Centrale 2023 # 1243] Soient $(E, \| \|)$, $(E', \| \|)$ deva espaces vectoriels normes de dimension finie, A un ferme non vide de E, B une partie non vide de E'. Soit $f : A \to B$ continue bijective telle que l'image réciproque par f de toute partie bornée de B est bornée. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice 936 [Centrale 2023 # 1244] Un espace norme réel est dit separable lorsqu'il contient une partie denombrable dense.

- L'espace $\mathbb{R}$ est-il separable ?
- Montrer qu'un espace norme de dimension finie est separable.
- Soit E un espace prehilbertien réel de dimension infinie. Montrer que E est separable si et seulement s'il existe une suite orthonormalée $(e_n)_{n \geq 0}$ telle que $\mathrm{Vect}\,(e_n)_{n \geq 0}$ soit dense dans E.

Exercice 937 [Centrale 2023 # 1245] Soit E l'espace des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on note $\varphi(f)$ la primitive de f d'intégrale nulle sur l'intervalle $[0,1]$.

- Justifier la définition de φ puis etablir qu'il s'agit d'une application lineaire sur E.

On munit E de la norme $\| \|_\infty$ sur $[0,1]$.

On note $\|\varphi\|_{\text{op}} = \sup\left\{ \frac{\|\varphi(f)\|_{\infty,[0,1]}}{\|f\|_{\infty,[0,1]}},\ f \in E \setminus \{0_E\} \right\}$.

- Montrer que $\|\varphi\|_{\text{op}}$ est correctement définie et en trouver un majorant. - Soient $f \in E$ et G la primitive de $F = \varphi(f)$ nulle en 0. Etablir que, pour tout $x > 0$,

$$G(x) = xF(x) - \int_0^x tf(t)dt = (x-1)F(x) - \int_x^1 (1-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

- Déterminer la norme $\|\varphi\|_{\text{op}}$.

Exercice 938 [Centrale 2023 # 1246] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f_A(x) = (A + xI_n)^{-1}A$ pour x réel convenable.

- Montrer que la fonction f_A est définie au voisinage epointe de 0.
- Étudier le comportement de la fonction f_A en 0 dans le cas ou A est inversible, puis dans le cas ou A est nilpotente.
- Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Im}(u^p) \oplus \mathrm{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^n$.

En déduire l'existence de deux supplementaires F et G dans $\mathbb{R}^n$, stables par u, tels que u induit sur F un automorphisme et induit sur G un endomorphisme nilpotent.

- Caracteriser les matrices A pour lesquelles f_A a une limite en 0.

Exercice 939 [Centrale 2023 # 1247] Soient (a_n) une suite a termes réels positifs et (b_n) une suite a termes complexes. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge et que $b_n \sim a_n$. On note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

- Montrer que la série $\sum b_n$ diverge et que les sommes partielles des deux séries sont équivalentes.
- On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\frac{S_n}{na_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Déterminer la limite de $\frac{1}{n^2 a_n}\sum_{k=0}^n k a_k$.

Exercice 940 [Centrale 2023 # 1248] • Rappeler la regle de d'Alembert pour une série numerique a termes positifs.

- ▷ On considère une suite croissante $(q_n)_{n\geq 1}$ d'entiers ≥ 2.
- ▷ Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{q_1\cdots q_n}$?
- ▷ Montrer que si la suite (q_n) est stationnaire alors le réel \$ x=$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{q_1\cdots q_n}$ \$appartient a $\mathbb{Q}\cap]0,1]$.
- ▷ On admet réciproquement que si (q_n) tend vers $+\infty$ alors $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que les réels e, $\mathrm{ch}(\sqrt{2})$ et $e^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.
- ▷ Montrer la réciproque admise ci-dessus.

Exercice 941 [Centrale 2023 # 1249] Soit $I =]-1,+\infty[$. On dit que $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ vérifie $(*)$ si et seulement si :
$\forall x, y \in I,\, f(x)+f(y) = f(x+y+xy)$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{(n+2)(2n+1)}$ et $y_n = \frac{n}{n+1}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

- Simplifier $x_n + y_n + x_n y_n$. Montrer que la série de terme général \$ f(xn)\$ converge et exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$ en fonction de $f(1)$.
- Montrer que f est dérivable. - Trouver toutes les fonctions continues vérifiant $(*)$.

Exercice 942 [Centrale 2023 # 1250] Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ trois fois dérivable telle que $ff^{(3)} = 0$.

- Montrer que, si f' est strictement monotone sur un intervalle I, alors f prend une meme valeur au plus deux fois sur I.
- On pose $\Gamma = \{x \in I, f''(x) = 0\}$. Montrer que, si Γ est non vide, alors Γ n'est ni majore, ni minore.
- Montrer que Γ est un intervalle et en déduire f.

Exercice 943 [Centrale 2023 # 1251] • Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que g est strictement monotone.
On cherche les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g^2(x) = 2g(x) - x$.

- Montrer qu'une telle fonction est bijective et strictement croissante.
- Exprimer g^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis conclure.

Exercice 944 [Centrale 2023 # 1252] • Rappeler la définition d'une fonction lipschitzienne. Montrer qu'une fonction lipschitzienne est continue. Soient $\alpha \in]0,1]$ et
$H_\alpha = \left\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, \exists L > 0,\, \forall (x,y) \in [0,1],\, |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha\right\}$.

- Montrer H_α est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, que si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, alors $H_\beta \subset H_\alpha$. Vérifier que $x \mapsto x^\alpha \in H_\alpha$.
- Montrer que, pour $0 < \alpha < \beta \leq 1$, H_β est strictement inclus dans H_α.
- Montrer que $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \subset H_\alpha \subset \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et que ces inclusions sont strictes.

Exercice 945 [Centrale 2023 # 1253] • Soient a, b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$ et f $:]a,b[\to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f admet la meme limite finie ℓ en a et en b. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

- ▷ Soit $f : x \in]-1,1[\mapsto e^{\frac{1}{x^2-1}}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{2n}} f(x)$. Quel est le degré de P_n ?
- ▷ Combien $f^{(n)}$ a-t-elle de zeros ?

Exercice 946 [Centrale 2023 # 1254] • Donner la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme puis sa caractérisation a l'aide des derivées successives du polynôme.

- ▷ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Exprimer P'/P a l'aide des racines de P.
- ▷ Soit $r > 0$. On suppose que P ne s'annule pas sur le cercle $C(0,r)$ du plan complexe. On pose $N_r(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it}\, dt$. Montrer que $N_r(P)$ est égal au nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) dans le disque $D(0,r)$.

Exercice 947 [Centrale 2023 # 1255] Soit E l'ensemble des fonctions $f \in C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telles que $\int_0^{+\infty} f^2 < \infty$. Soit $f \in E$.
On pose $\|f\| = \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}$ et on définit l'application Tf par : $Tf(0) = f(0)$ et, pour tout $x > 0$, $Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^{x'} f$.a) i)_ : Rappeler le théorème concernant la dérivabilité des fonctions $x \mapsto \int_a^x f$. - Montrer que Tf est continue. - Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $Tf(x)^2 \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)^2\, dt$.

- Soit $A > 0$. Montrer que $\int_0^A Tf(x)^2\, dx \leq 2\int_0^A \frac{f(x)}{x}\left(\int_0^x f\right) dx$. En déduire que $Tf \in E$ et que $\|Tf\| \leq 2\|f\|$
- Montrer que la constante 2 est optimale dans l'inégalité $(*)$. On pourra considérer les fonctions $f_a : t \mapsto t^{-a}$.

Exercice 948 [Centrale 2023 # 1256] Soient (a_n) une suite réelle telle que $(\sum_{k=0}^n a_k)$ est bornée, (b_n) une suite réelle decroissante de limite nulle et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sin(nx)$.

- Montrer qu'une série absolument convergente est convergente.
- Montrer que la série de terme général $a_n b_n$ converge.
- Montrer que la série de fonctions de terme général $b_n f_n$ converge.

Exercice 949 [Centrale 2023 # 1257] Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ croissante telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a}{x}$ ou $a > 0$.

- Citer le théorème d'intégration des relations de comparaison, puis trouver un équivalent de $\ln(f(x))$ quand $x \to +\infty$.
- Donner le domaine de définition de $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\, e^{-nx}$. Déterminer les limites de u aux bornes de son domaine de définition.
- Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \sim \frac{C}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 950 [Centrale 2023 # 1258] Soient $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha \geq 2$ et $\beta \in]1, +\infty[$. Soit $f : t \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{\cos(2\pi\alpha^n t)}{\beta^n}$.

- Montrer que f est définie et continue. Si $\alpha < \beta$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- On suppose $\alpha \geq \beta$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 951 [Centrale 2023 # 1259] Soit $f \colon x \mapsto \sum_{n\geq 1} \sin(nx)\, e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ puis développable en série entière au voisinage de l'origine.

Exercice 952 [Centrale 2023 # 1260] On considère la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ou $a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\, dt$ avec $a_0 = 1$.

- Montrer que le rayon de convergence R est ≥ 1.
- Calculer $S(x)$ pour $|x| < 1$ puis montrer que $R = 1$.
- Déterminer un équivalent de a_n.

Exercice 953 [Centrale 2023 # 1261] On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

- Donner le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Exprimer le développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ (avec $f(0) = 1$) a l'aide des c_n.
- Soit r un rationnel que l'on peut écrire $r = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ avec $b \wedge d = 1$. Montrer que r est entier. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \in \mathbb{N}$.
- Donner la valeur de $\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$ en fonction de c_{n+1}.

Exercice 954 [Centrale 2023 # 1262] Pour $n \geq 1$, on note t_n le nombre de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. On convient que $t_0 = 1$,

- Montrer que la série entière $\sum \frac{t_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence ≥ 1.
- Calculer t_1, t_2, t_3. Montrer que, si $n \geq 2$, $t_n = t_{n-1} + (n-1)t_{n-2}$.
- Déterminer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} x^n$ pour $x \in]-1, 1[$. En déduire une expression de t_n sous forme de somme. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{t_n}{n!}$.

Exercice 955 [Centrale 2023 # 1263] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes P a coefficients dans $\{0, 1, 2\}$ tels que $P(2) = n$, et $a_n = |\mathcal{P}_n|$. On note s_n la somme des chiffres de l'écriture binaire de l'entier n, et pour $k \in [\![0, 7]\!]$, on pose $b_{n,k} = |\{i \in [\![0, n]\!],\ s_i - s_{n-i} \equiv k\ [8]\}|$.

- Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.
- Montrer que $\mathcal{P}_n$ est fini.
- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = a_n$ et que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = a_n + a_{n-1}$.

Ind. Pour la premiere égalité, on pourra exhiber une bijection entre $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{2n+1}$.

- Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal a 1.

On note $A(x)$ la somme de cette série.

- Montrer que, pour $x \in]-1, 1[$, $A(x) = (1 + x + x^2)A(x^2)$.

En déduire que $\forall x \in]-1, 1[$, $A(x) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k} + x^{2^{k+1}})$.

- On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Établir que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$,

$$\prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k} + x^{2^{k+1}}) = \left(\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} (-j)^{n-s_k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} (-\bar{j})^{n-s_k} x^k\right).$$

- Que peut-on en déduire sur (a_n) ?

Exercice 956 [Centrale 2023 # 1264]

- Rappeler la définition de partie dense dans $\mathbb{R}$ et en donner une caractérisation sequentielle.
- Trouver toutes les fonctions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.

On dit qu'une suite réelle $(a - n \in \mathbb{N}$ vérifie la propriété (P) si :1. La série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal a 1,

1. La somme S_a de cette série entière admet une limite réelle en 1^-.
2. - Montrer que, si la série $\sum a_n$ converge absolument, alors la suite $(a - n \in \mathbb{N}$ vérifie (P),

3. Étudier la réciproque.
4. Trouver toutes les suites $(a-n \in \mathbb{N}$ périodiques qui vérifient (P).

Exercice 957 [Centrale 2023 # 1265] Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de carré sommable et $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$.

- Preciser le domaine de définition de f.
- Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
- Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2, 1/2]$ alors la suite (a_n) est nulle.

Exercice 958 [Centrale 2023 # 1266] • Rappeler la définition d'une fonction f développable en série entière en 0 et preciser une expression de $f^{(k)}(0)$ en fonction des coefficients pour $k \in \mathbb{N}$.

- ▷ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 pour laquelle il existe $\alpha > 0, M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \forall k \in \mathbb{N},\ |f^{(k)}(x)| \leq M a^k k!$.

Montrer que f est développable en série entière en 0.

- Soit f une fonction développable en série entière en 0. Montrer l'existence de $\alpha > 0, M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \forall k \in \mathbb{N},\ |f^{(k)}(x)| \leq M a^k k!$.

Exercice 959 [Centrale 2023 # 1267] On admet le théorème suivant :Pour S une série entière de rayon de convergence infini dont la somme ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, il existe une série entière L de rayon de convergence infini telle que $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(L(z)) = S(z)$.

- - Rappeler tous les modes de convergence d'une série entière sur son disque ouvert de convergence.
- Soient $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence infini et $ G(z)=Re(F(z))$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\int_0^{2\pi} F(re^{it})dt = 2\pi a_n R^n$, puis que
$\int_0^{2\pi} G(Re^{it})e^{-int}dt = \pi a_n R^n$ et $\int_0^{2\pi} G(Re^{it})dt = 2\pi \mathrm{Re}(a_0)$.

- Montrer que, s'il existe p et q réels strictement positifs tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ |G(z)| \leq p|z| + q$, alors F est un polynôme de degré au plus 1.
- Montrer que l'application $z \mapsto z\exp(z)$ est une surjection de $\mathbb{C}$ sur lui-meme.

Exercice 960 [Centrale 2023 # 1268] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $t \in]-r, r[,\ \det(\mathrm{id} - tu) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k\,\mathrm{tr}(u^k)}{k}\right)$.

Exercice 961 [Centrale 2023 # 1269.] • - Rappeler la définition de fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. - _Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)$ si $x \in [0, n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

Montrer que la suite $(f-n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f a preciser et que $\int_{\mathbb{R}^+} f_n \not\longrightarrow \int_{\mathbb{R}_+} f$ quand $n \to +\infty$.

- Rappeler le théorème de convergence dominée.

Le démontrer sous l'hypothèse supplémentaire d'une convergence uniforme sur tout segment.

- Soit $(f-n \in \mathbb{N} \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $\mathbb{N}$ vers une suite $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose l'existence d'une suite sommable positive $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leq \varphi(t)$.

Montrer que les suites f_n et f sont sommables et que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 962 [Centrale 2023 # 1270] Pour tout réel a, on pose $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$.

- On fixe un entier $n \geq 1$. Montrer que la fonction $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \left\{\frac{1}{x}\right\}^n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ est convergente.
- Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\frac{(-1)^i i}{(i+1)k^{i+1}}\right)_{\substack{i\geq 1\\ k\geq 2}}$ est sommable et exprimer sa somme S sous la forme d'une série faisant intervenir la fonction ζ.
- Exprimer I_1 en fonction de S.

Exercice 963 [Centrale 2023 # 1271] • Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.

- ▷ Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b, \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue, on pose $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$. Meme définition lorsque f est a valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note, pour $r > 0$, $\gamma_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto re^{it}$.

Soit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. Montrer que $f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$.

- En déduire, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand (à preciser), l'égalité $\exp(M) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} e^z(zI_n - M)^{-1}\,dz$.

Exercice 964 [Centrale 2023 # 1272] Soient $E = \mathcal{C}^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E,\ f(0) = f(\pi) = 0\}$. Soient $\varphi, q \in E$, la fonction q étant positive. On note α une primitive de φ. On pose $D(y) = y'' + \varphi y' - qy$ et $L(y) = -e^\alpha D(y)$ pour tout $y \in E$, et $\langle y, z\rangle = \int_0^\pi y(x)L(z)(x)\,dx$ pour tous $y, z \in F$.

- Rappeler le théorème de Cauchy-Lipschitz.
- Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur F.
- Soit $h \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f_0 \in F$ telle que $D(f_0) = h$.

Exercice 965 [Centrale 2023 # 1273] • Soient E un espace euclidien, U un ouvert de E, et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Rappeler la définition de la différentielle $df(a)$ de f en $a \in U$ et du gradient $\nabla f(a)$, ainsi que l'expression de $\nabla f(a)$ en base orthonormale.

- On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
  Montrer que $\nabla(\det)(A) = \mathrm{Com}(A)$.
- Quel est le coefficient de X dans χ_A ?
- Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Exercice 966 [Centrale 2023 # 1274] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

- Montrer que J est strictement convexe.
- Montrer que $J(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.
- En déduire que J admet un minimum.
- Calculer ∇J et conclure quant au minimum de J.

Exercice 967 [Centrale 2023 # 1275] Soient $(E, \langle\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

- Pour tout $x \in E$, exprimer la projection orthogonale de x sur F a l'aide d'une base orthonormale de F. Justifier la formule.
- On définit la fonction $d_F : E \setminus F \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, F)$. Montrer que d_F est differentiable, et calculer sa différentielle.

3) Probabilités

Exercice 968 [Centrale 2023 # 1276] On note d_n le nombre de dérangements de n objets, c'est-à-dire le nombre de permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sans point fixe.

_a) i)$_{\text{Soit}}$ $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$.

- Montrer que la série entière $\sum \frac{d_n}{n!}\, t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal a 1.

On note $D(t)$ la somme de cette série.

- Calculer $e^t D(t)$.
- En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la probabilité p_n qu'un élément de $\mathcal{S}_n$ soit un derangement.

_c) i)$_{\text{Pour}}$ n et p entiers naturels, on note $s_n(p)$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[1, p]$.
Montrer que $p^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} s_n(k)$.

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $\left(s_n(p)\frac{x^p}{p!}\ \frac{y^n}{n!}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Sa somme est notée $S(x, y)$.

- Calculer $e^x S(x, y)$. - En déduire la valeur de $s_n(p)$ dans le cas $n = p$, puis dans le cas général $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 969 [Centrale 2023 # 1277] On melange les cartes d'un jeu de $2n$ cartes.
Avec quelle probabilité les cartes de numero impair sont-elles correctement ordonnées ?

Exercice 970 [Centrale 2023 # 1278] Pour $A_1, ..., A_n$ parties finies d'un ensemble E, on admet que
$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}|$.

- Expliciter la formule précédente pour $n = 2$ et $n = 3$.

La démontrer pour $n = 2$.

- On définit une fonction μ sur $\mathbb{N}^*$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ si l'entier $n \ge 2$ s'écrit $n = p_1...p_k$ ou $p_1,..., p_k$ sont k nombres premiers distincts et $\mu(n) = 0$ sinon.

Calculer la probabilité que deux entiers choisis aléatoirement dans l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ soient premiers entre eux a l'aide de la fonction μ.

Exercice 971 [Centrale 2023 # 1279] Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $T_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

- Déterminer la loi de S_n. Qu'en déduire sur T_n ?
- Montrer que $\sum_{k\ge 0} \dfrac{k(n^k - 1)}{(n+k)!}$ converge et calculer la somme.
- Calculer $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \ge x)\, dx$.

Exercice 972 [Centrale 2023 # 1280.] • Rappeler les formules des probabilités totales et composées.
On fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(U_n)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[\![1, d]\!]$. Soit $N_d = \inf\{n \ge 2,\ U_n \in \{U_1, \ldots, U_{n-1}\}\}$.

- Quelles sont les valeurs prises par N_d ?
- Montrer que $\mathbf{P}(N_d > k) = \dfrac{d!}{d^k(d-k)!}$ pour tout $k \in [\![0, d]\!]$.

- Pour tout réel $x>0$, calculer $\lim_{d\to+\infty} \mathbf{P}\left(\dfrac{N_d}{\sqrt{d}}>x\right)$.

Exercice 973 [Centrale 2023 # 1281.] • Soient $x>0$ et X_x une variable de Poisson de paramètre x. Calculer l'espérance de X_x. Montrer que $\mathbf{P}(|X_x-\mathbf{E}(X_x)|\geq \varepsilon x)=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand $x\to+\infty$.

Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $u_\alpha : x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^\alpha}{n!}x^n$.

- Déterminer le domaine de définition de u_α.
- Déterminer u_1 et u_2.
- Montrer que, pour tout $\alpha<0$, $u_\alpha(x)=o\left(\mathrm{e}^x\right)$ quand $x\to+\infty$.
- Montrer que, si $\alpha\in]-1,0[$, $u_\alpha(x)\sim x^\alpha e^x$ quand $x\to+\infty$.

4) Centrale - PSI

a) Algèbre

Exercice 974 [Centrale - PSI 2023 # 1282] Soit $A=\begin{pmatrix}0&c&b\\-c&0&a\\-b&-a&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Trouver α pour que $A^3=\alpha A$. Calculer A^n en fonction de α.

Exercice 975 [Centrale - PSI 2023 # 1283] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a\neq b$ tels que : $(f-a\,\mathrm{id})\circ(f-b\,\mathrm{id})=0$.

- Déterminer $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda(f-a\,\mathrm{id})$ et $\mu(f-b\,\mathrm{id})$ soient des projecteurs.
- Montrer que $\mathrm{Ker}(f-a\,\mathrm{id})=\mathrm{Im}(f-b\,\mathrm{id})$.
- Déterminer f^n pour $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 976 [Centrale - PSI 2023 # 1284] Soit $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

- On suppose A inversible. Montrer que $A^{-1}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A)\in\{-1,1\}$.
- On suppose qu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^p=I_2$. Montrer que A est inversible, et que A^{-1} est a coefficients entiers. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de polynômes caractéristiques possibles pour A.

Exercice 977 [Centrale - PSI 2023 # 1285] Soit $A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$.

- Montrer que A a une valeur propre double $a>0$ et une simple $b>0$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_f\in\mathbb{R}_2[X]$ tel que : $P_f(a)=f(a), P_f(b)=f(b), P_f'(a)=f'(a)$.
- Pour toute fonction $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$, on pose $f(A)=P_f(A)$. Calculer $f(A)$ dans les cas ou $f:x\mapsto x^2$, puis $f:x\mapsto x^3$.
- Desormais on prend $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}$. Conjecturer la valeur de $Af(A)$ et prouver cette conjecture.

Exercice 978 [Centrale - PSI 2023 # 1286] Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales.
Si $P\in E$, on pose $L(P): x\mapsto e^{-x}\int_{-\infty}^x P(t)\,e^t\,\mathrm{d}t$.

- Montrer que L est un endomorphisme de E.
- Trouver les éléments propres de L.

Exercice 979 [Centrale - PSI 2023 # 1287] On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u=(a,b,c)^T$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. On note D=Vect(u) et p la projection orthogonale sur D.

- Experimer $p(v)$ pour tout vecteur $v=(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3$

V) Autres écoles

Exercice 980 Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $f\circ f=\tilde{0}$. Montrer que $\operatorname{rang} f\leq 2$.

Exercice 981
1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et u,v deux endomorphismes nilpotents non nuls de $\mathbb{R}^n$ qui commutent. Montrer que $\operatorname{rang}(u\circ v)<\operatorname{rang} v$.
2. Montrer que la composée de n endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux est nulle.

Exercice 982 Convergence de $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha}+(-1)^n}}$.

Exercice 983 Soit $S\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que S est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Calculer $S(1)$ et en déduire que $\forall x>0,\ xS(x)=\frac{1}{e}+S(x+1)$.
3. Montrer que $S(x)\sim\frac{1}{x}$, quand $x\to 0$.

Exercice 984 Soit A une matrice 2×2 dont les quatre coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Calculer la probabilité que A soit inversible, puis que A soit de rang 1.

On rappelle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.