Exercices 2023

I) ENS MP-MPI

Exercice 1 Soient S et T des ensembles finis non vides et f une application de S dans T. On pose $X = \{(x,y) \in S^2, f(x) = f(y)\}$. Montrer que $|X| \geq \max\left(\frac{|S|^2}{|T|}, \left(\left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil\right)^2 + |S| - \left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil\right)$.

Démonstration. Pour le terme de gauche, il s'agit de montrer que $\sum_y n_y^2 \geq \frac{\left(\sum_y n_y\right)^2}{\sum_y 1}$, c'est Cauchy-Schwarz.
Pour le terme de droite, c'est un principe des tiroirs, puis compter pour 1 les éléments qui ne sont pas dans le tiroir. □

Exercice 2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et S un sous-ensemble non vide de $1, n$ tels que $\left|m - \sum_{i \in S} x_i\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

Démonstration. S sera un sous-ensemble d'entiers consécutifs : considérer les sommes partielles $S_0, \ldots, S_n$. □

Exercice 3 Soit n un entier premier > 1. Montrer que -1 est un carré modulo n si et seulement si n est somme de deux carrés d'entiers.

Démonstration. Si p est somme de deux carrés d'entiers, $p \equiv 1[4]$, et a est un carré si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.
Réciproquement, si $n \mid m^2 + 1$, dur, dur.!! □

Exercice 4

1. Calculer $\sum\limits_{d \mid n} \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.
2. Calculer $\sum\limits_{d \mid n} \mu(d)$ où μ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1, \mu(p) = -1, \mu\left(p^k\right) = 0$ pour $k \geq 2$ si p est un nombre premier et $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ si $n \wedge m = 1$. On pose $F\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \left|\left\{\frac{p}{q} \in [0,1]; q \leq x\right\}\right|$.
3. Montrer que $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln x)$.

Démonstration.

1. $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$
2. $\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0$, ou 1 pour $n = 1$.
3. Par inversion de Möbius, on a $\varphi(d) = \sum\limits_{d' \mid d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) d'$. □

Exercice 5 Soient p, q deux nombres premiers distincts. On note $v_p(n)$ la valuation p-adique d'un entier n. On pose, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $N(m) = (1-q)\left(1-q^2\right)\ldots(1-q^m)$. Trouver une constante $c > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $v_p(N(m)) \leq cm\ln(m)$.

Démonstration. Relier à 423 (LTE).
On a $v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(n)$ (pour $p \neq 2$).
Donc $v_p(N(m)) = \sum_{k=1}^m v_p(1-q) + v_p(m!)$, plus formule de Legendre. □

Exercice 6 Si X est un ensemble fini, on note $X^* = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^k$, $c\colon \left(X^*\right)^2 \to X^*$ la concaténation et $\ell\colon X^* \to \mathbb{N}$ la longueur. Soient A et B deux ensembles finis et $\varphi\colon A^* \to B^*$ telle que, pour tous $a, a' \in A$, $\varphi\left(c\left(a, a'\right)\right) = c\left(\varphi(a), \varphi\left(a'\right)\right)$.

1. On pose $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{0, 1\}$. Étudier l'injectivité des applications définies sur les lettres de A puis étendues sur A^* par $\varphi\colon A \to B^*$ telles que $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 01, \varphi(c) = 10, \varphi(d) = 10011$, et $\psi\colon A \to B^*$ telle que $\psi(a) = 01, \psi(b) = 10, \psi(c) = 11, \psi(d) = 00$.
2. Montrer que, si φ est injective, alors $\sum_{a \in A} |B|^{-\ell(\varphi(a))} \leq 1$.

Démonstration.

1. La première est non injective : 0100110 peut être lu de deux façons.
   La seconde l'est.
2. On note C_N le nombre de choix possibles, de mots, dont la longueur totale N.
   On doit avoir $C_N \leq |B|^N$. Mais C_N vérifie une relation de récurrence : $C_N = \sum_{a \in A} C_{N-\ell(a}$.
   Donc les racines de cette récurrence doivent être $\leq |B|$, ce qui implique qu'en $|B|$ la valeur est négative, d'où le résultat. □

Exercice 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition $(1\,2)$ et le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.
2. La transposition $(1\,3)$ et le cycle $(1\,2\,3\,4)$ engendrent-ils $\mathcal{S}_4$?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq a < b \leq n$ tels que $\tau = (ab)$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{S}_n$. Montrer que $b - a$ et n sont premiers entre eux.
4. Montrer la réciproque de la propriété précédente.

Démonstration.

1.
2. Non.
3. Si $p \mid b - a \wedge n$, alors $\sigma(a) - \sigma(b) \equiv a - b[p]$.
4. Facile de se ramener à un cycle $(u\, u+1)$ □

Exercice 8 Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, on pose $X^{-1} = \left\{x^{-1}, x \in X\right\}$ et $XY = \{xy, (x,y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.

1. On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
2. On suppose que $\left|XX^{-1}\right| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

Démonstration. □

Exercice 9 Soit p un nombre premier. On admet qu'il existe un anneau commutatif A dans lequel $p^2.1_A = 0_A$ et il existe un élément inversible x tel que :

- tout élément de A s'écrive $P(x)x^{-k}$ pour un $P \in \mathbb{Z}[X]$ et un $k \in \mathbb{N}$;
- pour deux polynômes P, Q dans $\mathbb{Z}[X]$ et deux entiers naturels k, l, l'égalité $P(x)x^{-k} = Q(x)x^{-l}$ équivaut à ce que $X^k Q$ et $X^l P$ aient même réduit modulo p^2 (autrement dit, tous les coefficients de $X^k Q - X^l P$ sont des multiples de p^2).

1. Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Caractériser l'inversibilité de $P(x)x^{-k}$ dans A.
2. Montrer que le groupe multiplicatif \$A^×\$ne possède pas de partie génératrice finie.

Démonstration. □

Exercice 10 Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$. On pose $S_q = \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ a \wedge q = 1}} \sum_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi a f(n)}{q}}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $q \wedge q' = 1$, alors $S_{qq'} = S_q S_{q'}$.

Démonstration. □

Exercice 11 On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{C}$ est intégrable si : $\forall (x,y) \in X^2, |x-y| \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble intégrable X composé de n points tous sur un même cercle.

Démonstration. □

Exercice 12 Soit $n = 2m+1 \geq 1$ un entier impair. Expliciter un polynôme P_m de degré $2m$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sin(nx) = (\sin x)^n P_m(\operatorname{cotan} x)$.

1. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Démonstration. □

Exercice 13 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$.

1. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, nP(x)P''(x) \leq (n-1)P'(x)^2$.
2. Donner un polynôme ne vérifiant pas le résultat de la question précédente, puis un polynôme non scindé le vérifiant.

Démonstration. □

Exercice 14 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^{n+1}$ tel que, pour tout $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$, le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. □

Exercice 15 Deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont entrelacées si

- $-P$ et Q sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$,
- P et Q n'ont aucune racine réelle commune,
- entre deux racines consécutives de P (respectivement Q) il y a une unique racine de Q (respectivement P).

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, $\lambda P + \mu Q$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P et Q sont entrelacés.

Démonstration. □

Exercice 16 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. On note D_r le disque complexe ouvert de centre 0 et de rayon r. Montrer que $D_{1/n} \subset P\left(D_1\right)$.

Démonstration. $X + X^2 Q(X) - z_i = 0$ avec $|z_i| < \frac{1}{n}$ admet toujours une racine, < 1.
Vient des relations coefficients-racines. □

Exercice 17 On considère $\varphi : \left(\mathbb{R}^4\right)^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui à (u,v) associe la matrice dont le coefficient en (i,j) vaut $\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$.

1. Que peut-on dire si $\varphi(u,v) = \varphi\left(u', v'\right) \neq 0$?
2. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que A s'écrit comme $\varphi(u,v)$ avec (u,v) libre si et seulement si $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$ et $A \neq 0$.
4. Décrire l'image et le noyau d'une telle matrice.

Démonstration. □

Exercice 18 Soient a, b, m, p des entiers naturels tels que $a^2+b^2-pm=-1$. On pose $A=\begin{pmatrix} p & a+ib \\ a-ib & m \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(i))$ telle que $A=B^* B$ où $B^*=\bar{B}^T$. Même question avec B dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Démonstration. □

Exercice 19 Soient $n \in \mathbb{N}^*, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^2$. Pour $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $f_g:(x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n \mapsto \varphi_1\left(g\left(x_1\right)\right) \times \cdots \times \varphi_n\left(g\left(x_n\right)\right)$, application de $\left(\mathbb{R}^2\right)^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

- il existe une suite $\left(g_k\right)_{k \geq 1}$ d'éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}^2$, $f_{g_k}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \underset{k \rightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- il existe une droite vectorielle L telle que $\left|\left\{i, L \subset \operatorname{Ker}\left(\varphi_i\right)\right\}\right|>\frac{n}{2}$.

Démonstration. □

Exercice 20 Soit G l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $ad-bc=1$ et $a \equiv d \equiv 1-c \equiv 1 \bmod 3$. Montrer que G est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Démonstration. □

Exercice 21 Soient A et B deux matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec A et B. Montrer que $BA=\pm AB$.

Démonstration. □

Exercice 22 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $m, x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $\left(f^k(x)\right)_{0 \leq k \leq m-1}$ est libre. On note V le sous-espace de E engendré par cette famille.
2. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi\left(f^{m-1}(x)\right) \neq 0, W$ le sous-espace de E^* engendré par $\left(\varphi \circ\ f^i\right)_{0 \leq i \leq m-1}, W^{\perp}$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $\forall \psi \in W^{\perp}, \psi(y)=0$. Montrer que $W^{\perp}$ est un supplémentaire de V dans E stable par f.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme J_k avec $k \in \mathbb{N}^*$, où $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la sur-diagonale qui sont égaux à 1.

Démonstration. □

Exercice 23 Soient $r \in \mathbb{N}^*, d_1, \ldots, d_r$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $d_1\left|d_2\right| \ldots \mid d_r$. Déterminer le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contienne un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$.

Démonstration. □

Exercice 24 Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, h_1 et h_2 deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une norme sur E pour laquelle h_1 et h_2 sont des isométries et que $[h_1, h_2]=h_1 h_2 {h_1}^{-1} {h_2}^{-1}$ commute avec h_1 et h_2. Montrer que l'espace des vecteurs de E fixes par h_1 et h_2 admet un supplémentaire dans E stable par h_1 et h_2.

Démonstration. □

Exercice 25 Soient $(E,\langle\rangle,) unespaceeuclidien, m \in \mathbb{N}^*, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ des vecteurs de E tels que, pour tout $(i, j) \in 1, m^2, \left\langle u_i, v_j\right\rangle=\delta_{i,j}$. On note p le projecteur orthogonal de E sur $\operatorname{Vect}\left(u_1, \ldots, u_m\right)$. Montrer que $\forall x \in E, \sum_{i=1}^n \left\langle u_i, x\right\rangle\left\langle x, p\left(v_i\right)\right\rangle=\|p(x)\|^2$.

Démonstration. □

Exercice 26 Soient $(E,\langle\rangle,) unespaceeuclidien, m \in \mathbb{N}^*, u, u_1, \ldots, u_m$ des vecteurs de E. Montrer que $u \in \mathbb{R}^+ u_1+\cdots+\mathbb{R}^+ u_m$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\left\{x \in E ; \forall i \in 1, m,\left\langle u_i, x\right\rangle \leq 0\right\} \subset\{x \in E ;\langle u, x\rangle \leq 0\}$.

Démonstration. □

Exercice 27 Soient $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de réflexion dans $\mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. On pose $A'=M\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Calculer $\chi_{A'}(1)$ en fonction de la première colonne de M et de χ_A.

Démonstration. □

Exercice 28 Soient A, B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'ont pas -1 pour valeur propre et telles que AB n'ait pas 1 pour valeur propre. Montrer que $\left(A-I_n\right)\left(BA-I_n\right)^{-1}\left(B-I_n\right)$ est antisymétrique.

Démonstration. □

Exercice 29 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A non nécessairement distinctes. Montrer que $\forall k \in \left[1, n, \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^k \lambda_{n+1-i}\right.$.

Démonstration. □

Exercice 30 1. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ Montrer que AB est diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles.

2. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $f_{A,B} : X \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(AX) + \mathrm{Tr}\left(BX^{-1}\right)$. Montrer que $f_{A,B}$ admet un minimum $\mu_{A,B}$ atteint en une unique matrice $M_{A,B}$. Expliciter $\mu_{A,B}$ et $M_{A,B}$.

Démonstration. □

Exercice 31 Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonné de M.

1. On considère $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. Montrer que, si $i + j < n + 2$ alors $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) < 0$.
2. Généraliser à $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1 + \cdots + A_d \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. telle que $B = P^T AP$.

Démonstration. □

Exercice 32 1. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^T AP$.

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Proposer une définition naturelle de $f(A)$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Pour A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on pose $d(A, B) = \left\|\ln\left(\sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}\right)\right\|$. Justifier la définition, et montrer que d est une distance sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $d\left(P^T AP, P^T BP\right) = d(A, B)$.

Démonstration. □

Exercice 33 On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associée à la norme $X \mapsto \sqrt{\bar{X}^T X}$.

1. Soient A, B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left\|e^{iA} - e^{iB}\right\| \leq \|A - B\|$.
2. Démontrer le même résultat sous l'hypothèse que A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\bar{A}^T = A$ et $\bar{B}^T = B$.

Démonstration. □

Exercice 34 Peut-on écrire $]0{,}1[$ comme réunion dénombrable disjointe de segments d'intérieurs non vides ?

Démonstration. Non. Par l'absurde, on fait de la dichotomie, entre des segments, dont la distance tend vers 0, alors la limite n'appartient à aucun segment. □

Exercice 35 Pour tout réel x dans $[0{,}1[$, on note $0, x_1x_2x_3\ldots$ le développement décimal propre de x. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i$. Soit a un réel tel que $0 < a < 9$. On définit $P_n = \{x \in [0{,}1[; S_n(x) \leq na\}$ et $P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$. Montrer que P est compact, non vide, d'intérieur vide et sans point isolé.

Démonstration. □

Exercice 36 Soit $d \geq 1$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{R}[X]$.

1. On pose $A = \{(P, x) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}; P(x) = 0\}$ et $P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de A dans $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}$.
2. On pose $B = \{P \in \mathcal{P}; \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \neq 0$ ou $P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de B dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Démonstration. □

Exercice 37 Soient $(M_k)_{k\geq 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables les unes aux autres, \|\| une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\|M_k\| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\frac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|} \to N$.

Démonstration. □

Exercice 38 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module < 1. Montrer qu'il existe une norme \|\| sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour la norme d'opérateur associée, on ait $\|A\| < 1$.

Démonstration. □

Exercice 39 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de lignes $L_1, \ldots, L_n$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que, pour tout $i \in 1, n$, $\|L_i\|_2 = 1$ et la distance euclidienne canonique de L_i au sous-espace engendré par les L_j, pour $j \neq i$, est supérieure ou égale à ε. Montrer que A est inversible et que $\sup\left\{\left\|A^{-1}x\right\|_2; x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = 1\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Démonstration. □

Exercice 40 Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles de limite 1 et (u_n) une suite réelle strictement positive telle que, pour tout $n, u_{n+2} = a_{n+1}u_{n+1} + b_{n+1}u_n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \frac{\ln(u_n)}{n}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent.

Démonstration. □

Exercice 41
1. Si $n \geq 2$ est un entier, montrer que $\sum_{k=2}^{n} \lfloor \log_k(n) \rfloor = \sum_{j=2}^{n} \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor$.
2. Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=2}^{n} \lfloor \log_k(n) \rfloor$.

Démonstration. □

Exercice 42 On considère une suite $a \in \{2,3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n-ième occurrence de 2 et la $(n+1)$-ième occurrence de 2 soit égal à a_n. Montrer qu'il existe un unique irrationnel α tel que les indices $n \geq 1$ tels que $a_n = 2$ soient exactement les entiers de la forme $\lfloor m\alpha \rfloor + 1$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. □

Exercice 43 Une suite réelle (x_n) est dite équirépartie modulo 1 si elle vérifie, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$, $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2ik\pi x_n} = 0$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(n\alpha)$ est équirépartie modulo 1.
2. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_{n+h} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie ; on veut montrer que (x_n) est équirépartie modulo 1.
   (a) Soit (a_n) une suite de complexes de module ≤ 1. Montrer, pour tous $N, H \in \mathbb{N}^*$: $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq \left|\frac{1}{H}\sum_{h=0}^{H-1} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_{n+h}\right| + \frac{2H}{N}$.
   (b) Montrer que $\left|\frac{1}{H}\sum_{h=0}^{H-1} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_{n+h}\right| \leq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=0}^{H-1} \frac{a_{n+h}}{H}\right|^2}$.
   (c) Conclure.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et de coefficient dominant irrationnel. Montrer que $(P(n))_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1.
4. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle équirépartie modulo 1, et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$.
5. On reprend les hypothèses de la question ***c***). Montrer que la distance de $P(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$ est nulle.

Démonstration. □

Exercice 44 Montrer la convergence et calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \right\rfloor$.

Démonstration. □

Exercice 45 On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$. On se donne une suite presque nulle $v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ainsi qu'une suite $(u_k)_k$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ (l'élément u_k est donc noté $(u_{k,i})_{i\in\mathbb{N}}$). On suppose que, pour tout entier $p \geq 2$, la suite de terme général $w_k = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{k,n})^p$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} (v_n)^p$. Montrer que $\inf_{\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(u_{k,\sigma(n)} - v_n\right)^2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. □

Exercice 46 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et telle que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

Démonstration. □

Exercice 47 Soient I un intervalle ouvert, $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable et $[a,b] \subset I$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que la tangente au graphe de f en c passe par le point $(a, f(a))$.

Démonstration. □

Exercice 48 Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geq 2$, f^n (puissance) soit polynomiale.

Démonstration. □

Exercice 49 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$.

1. Montrer que le nombre de racines de P de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité n'est autre que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}P'(e^{it})}{P(e^{it})}\, \mathrm{d}t$
2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$ et tel que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$. Montrer que P et Q ont même nombre de racines de module strictement inférieurs à 1 comptées avec multiplicité.

Démonstration. □

Exercice 50 Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et presque périodique c'est-à-dire telle que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x+nT) - f(x)| \leq \epsilon$. Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et presque périodique.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t f$ possède une limite quand $t \to +\infty$.

Démonstration. □

Exercice 51 Soit $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(n) = \ln(p)$ si $n = p^k$ avec p premier et $k \in \mathbb{N}^*$, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.
2. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right) \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^s}$.
3. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} \underset{s\to 1+}{=} \frac{1}{s-1} + O(1)$.
4. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \underset{s\to 1^+}{=} \ln\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1)$. Qu'en déduire ?

Démonstration. □

Exercice 52 Soient $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle en $+\infty$ et $g \colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$. Quelle est la limite de g en 0^+ ?

Démonstration. □

Exercice 53 Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-R, R[$ telles que $\forall x \in]-R, R\left[, \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t =\right.$
Montrer que l'une au moins des deux fonctions f et g est identiquement nulle sur $]-R, R[$.

Démonstration. □

Exercice 54 Existe-t-il une partie A de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n\in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$? Montrer que $\{a \in \mathbb{U}; \exists b \in \mathbb{C}, z \mapsto az + b \in G\}$ est fini.

Démonstration. □

Exercice 55 Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ tel que $\forall x \in [0, 1], 1 + ax + bx^2 \geq 0$.

1. Si $a \in \mathbb{R}^+$, montrer que $n \int_0^1 \left(1 + ax + bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Si $a \in \mathbb{R}^{-*}$, montrer que $n \int_0^1 \left(1 + ax + bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{a}$.

Démonstration. □

Exercice 56 Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{e^{2x}\cos^2(t) + e^{-2x}\sin^2(t)}}$. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq (ax + b)e^{-x}$.

Démonstration. □

Exercice 57 Soit I un (vrai) intervalle de $\mathbb{R}$. Si $r \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$, on pose $W_r(f_1, \ldots, f_r) = \det\left(\left(f_j^{(i-1)}\right)_{1\leq i,j\leq r}\right)$.
Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$. Montrer que $W_r(gf_1, \ldots, gf_r) = g^r W_r(f_1, \ldots, f_r)$.
2. On suppose que, pour tout $k \in 1, r$, $W_k(f_1, \ldots, f_k)$ ne s'annule pas. Montrer que, pour tout $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ non nul, la fonction $a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$ s'annule au plus $(r-1)$ fois sur I.
3. On suppose que $W_r(f_1, \ldots, f_r)$ est identiquement nul sur I et que $W_{r-1}(f_1, \ldots, f_{r-1})$ ne s'annule pas. Montrer que $(f_1, \ldots, f_r)$ est liée.

Démonstration. □

Exercice 58 Soient f une application différentiable convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq 0$.
2. On suppose que l'application ∇f est L-lipschitzienne.

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq \frac{1}{L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$. unité fermée de cet espace. Soient f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(u, v) \in B^2$, $\|-f(0) + v - df_u(v)\| \leq \frac{1}{2}$. Montrer que f s'annule exactement une fois sur B.

Démonstration. □

Exercice 59 Soit G un groupe d'isométries affines de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout point x, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$. Montrer que G contient une translation autre que l'identité de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. □

Exercice 60 Soit S le groupe (pour la composition) des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe de S vérifiant les conditions suivantes :

- si $g \in G$, $g(0)$ est nul ou de module supérieur ou égal à 1 ;
- l'ensemble des $b \in \mathbb{C}$ tels que $z \mapsto z + b$ appartienne à G contient deux éléments $\mathbb{R}$ linéairement indépendants.

Montrer que l'ensemble $\{a \in \mathbb{U} \mid \exists b \in \mathbb{C},\ z \mapsto az + b \in G\}$ est fini.

Démonstration. □

Exercice 61 Soient $m \geq 1$ et $r \geq 1$ deux entiers. On munit l'ensemble des morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de la loi uniforme. Donner une expression simple de la probabilité de l'événement «le morphisme φ est surjectif».

Démonstration. □

Exercice 62 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{E}(X) = 1$, $\mathbf{E}\left(X^2\right) = 2$ et $\mathbf{E}\left(X^3\right) = 5$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{P}(X = 0)$?

Démonstration. □

Exercice 63 Dans tout l'exercice, les variables aléatoires considérées sont supposées réelles, discrètes et à loi de support fini. Pour deux telles variables X et Y, on note $X \leq_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leq \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Soient X une variable aléatoire vérifiant les conditions de l'exercice et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(f(X))$.
2. Donner un exemple de couple (X, Y) pour lequel $X \leq_c Y$ mais $X \neq Y$.
3. Montrer que si $X \leq_c Y$ alors $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X) \leq \mathbf{V}(Y)$.
4. Montrer que $X \leq_c Y$ si et seulement si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geq x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. □

Exercice 64 On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. On choisit de façon équiprobable $u_1 \in 1, N$, puis $u_2 \in 1, u_1 - 1$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $u_\ell = 1$ avec nécessairement $\ell \leq N$. On note $E_N = \{u_j, 1 \leq j \leq \ell\}$.

1. Calculer $\mathbf{P}\left(k \in E_N\right)$ pour $1 \leq k \leq N$.
2. Calculer $\mathbf{P}\left(2 \in E_N \mid 3 \notin E_N\right)$.
3. Calculer $\mathbf{E}\left(|E_N|\right)$ et $\mathbf{V}\left(|E_N|\right)$.

Démonstration. □

Exercice 65 Soient E un ensemble fini, $V : E \to \mathcal{P}(E)$ une fonction de E vers les parties de E et $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction. Un point $a \in E$ est un minimum local si $f(a) \leq f(b)$ pour tout $b \in V(a)$. Soit M un entier tel que $M \geq \sqrt{|E|}$. Soient $b_1, \ldots, b_M$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans E. Soit k tel que $f\left(b_k\right) = \min_{1 \leq i \leq M} f\left(b_i\right)$. Soit $\left(u_n\right)_{n \geq 0}$ une suite de E telle que $u_0 = b_k$ et, pour tout $n \geq 0$:

- si u_n est un minimum local, alors $u_{n+1} = u_n$;
- sinon $u_{n+1} \in V\left(u_n\right)$ et $f\left(u_{n+1}\right) < f\left(u_n\right)$.

Montrer que u_M est un minimum local avec probabilité au moins $1/2$.

Démonstration. □

Exercice 66 Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 3$. On pose $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S = \{\pm e_i, 1 \leq i \leq d\}$, où e_i désigne l'élément de G dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème, égale à $\overline{1}$. Soient enfin $f\colon G \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et X une variable aléatoire uniformément distribuée sur G.
Montrer que $\mathbf{E}(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))|) \leq \frac{nd}{2} \max_{s \in S} \mathbf{E}(|f(X) - f(X+s)|)$.

Démonstration. □

II) Écoles Normales Supérieures - PC

Exercice 67 Soit A une partie de cardinal n de $\mathbb{R}$. On pose $B = A + A = \{a + a', a, a' \in A\}$. Montrer que $2n - 1 \leq \operatorname{card}(B) \leq \frac{n(n+1)}{2}$. Généraliser à $B = kA = A + A + \cdots + A(k \text{ fois})$.

Démonstration. □

Exercice 68 Soient $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il n'existe aucun voisinage ouvert de 0 sur lequel on ait simultanément i) $\forall x < 0, P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$ ii) $\forall x > 0, P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$.

Démonstration. □

Exercice 69 Soit $\left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right) \mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) \neq 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que \$P$\Bigl(4.\$divise\ S_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.

Démonstration. □

III) École Polytechnique - MP - MPI

Exercice 70 1. Montrer que l'équation $a^2 - 2b^2 = 1$ admet une infinité de solutions $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. 277* $\star\, a$ éterminer l'ensemble des solutions.

2. Que dire de l'ensemble des solutions de $a^2 - 2b^2 = -1$?

Démonstration. □

Exercice 71 Soit G un groupe fini de neutre 1. Soit φ un automorphisme de G sans point fixe c'est-à-dire tel que : $\forall x \in G, \varphi(x) = x \Rightarrow x = 1$. On note n l'ordre de φ ; c'est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^n = \mathrm{id}$.

1. Montrer que $\forall x \in G, x\varphi(x)\varphi^2(x)\cdots\varphi^{n-1}(x) = 1$.
2. Si $n = 2$, que peut-on dire du groupe G ? Donner un exemple.
3. Si $n = 3$, montrer que, pour tout $x \in G$, x et $\varphi(x)$ commutent.

Démonstration. 1. Cet élément est fixé par φ.

2. On a $x\varphi(x) = 1$, donc $\varphi(x) = x^{-1}$. Cela implique que G est commutatif, et qu'aucun élément n'est inverse de lui-même, donc G commutatif, de cardinal impair.
3. Écrire $x\varphi(x)\varphi^2(x) = 1$, $\varphi(x)\varphi^2(x)x = 1$ et $\varphi^2(x)\varphi(x)x = 1$. □

Exercice 72 Soit p un nombre premier. On suppose que, pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A, il existe un endomorphisme u_A de A de sorte que, pour tout couple (A, B) de $\mathbb{F}_p$-algèbres et tout morphisme τ de $\mathbb{F}_p$-algèbres de A dans B, on ait $\tau \circ u_A = u_B \circ \tau$. Que dire des u_A ?

Démonstration. Pour tout isomorphisme $\tau\colon A \rightarrow$, u_A commute avec τ. □

Exercice 73 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $p, u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que p est un projecteur et que $pu + up = u$. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

Démonstration. On a $u(\operatorname{Ker} p) \subset \operatorname{Im} p$ et $u(\operatorname{Im} p) \subset \operatorname{Ker} p$. □

Exercice 74 Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
2. Montrer que $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q + (\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p)$.
3. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
4. Montrer que le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0, 1]$.

Démonstration. □

Exercice 75 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\right\}$ où \|\| désigne la norme euclidienne canonique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes.

- $\alpha = 2$.
- $\forall n \geq 1, \forall\,(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n) \in \left(S^2\right)^{3n}, \exists p \in S^2$ tel que
$$\sum_{i=1}^{n} \|p - a_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \|p - b_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \|p - c_i\|^\alpha$$

Démonstration. □

Exercice 76 Soit $t_1, \ldots, t_n$ des réels.

1. Montrer que la matrice $A = (t_i t_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. On suppose $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$. Montrer que la matrice $B = (\min(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. On suppose $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$. Montrer que $M = B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration. 1. $X^T A X = () \sum t_i x_i)^2$

2. $\int \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i}\right)^2$
3. Il s'agit de montrer que $\int_0^1 \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i}\right)^2 \geq (\sum t_i x_i)^2$, c'est-à-dire $\int h^2 \geq \left(\int h\right)^2$, car l'intégrale est sur $[0, 1]$. □

Exercice 77 Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un convexe fermé non vide.

1. On suppose K borné. Montrer que K s'écrit comme intersection de carrés fermés.
2. On suppose K non borné et $K \neq \mathbb{R}^2$. Donner des exemples de tels convexes. Montrer que si K contient deux droites, celles-ci sont parallèles.
3. On suppose toujours K non borné. Montrer que K contient une demi-droite.

Démonstration. 1. Si $x \notin K$, on peut trouver une droite séparant x de K, donc un carré contenant K et non x.

2. Si K contient deux droites non parallèles, $K = \mathbb{R}^2$. La partie au dessus du graphe de $x \mapsto e^x$.
3. Fixer $y \in K$, et une suite $(x_n) \in K$ qui tend vers ∞, et prendre une valeur d'adhérence des segments $[y, x_n]$. □

Exercice 78 On dit qu'une famille \$$\Big(D_{\mathrm{t})_{t \in \mathbb{R}^{*}_{+}}}$\$$dedisquesfermsde\mathbb{R}^2$ vérifie $(\mathcal{P})$ sipour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ distincts, D_s et D_t ont des centres distincts, pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ tels c

3. *Démonstration.* 1. Cercles de centre $(x, 0)$, de rayon x.

2. Prendre D_t de rayon la longueur de la courbe de $A(0)$ à $A(t)$.
3. Prendre une fonction non réglée.

□

Exercice 79 Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^4 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{N}$.

Démonstration. Dérivée discrète. □

Exercice 80 Soient (a_n) et (b_n), deux suites réelles positives telles que la série de terme général b_n converge, que la série de terme général na_n diverge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k}$.
2. Montrer que (u_n) est bornée.
3. Montrer que, si (u_n) converge, alors sa limite est 0.

Démonstration. Cf une année précédente. □

Exercice 81 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Démonstration. La série $\sum \frac{1}{f(n)}$ a la même nature que $\int \frac{1}{f}$. On peut raccorder f de manière $\mathcal{C}^1$, puis on pose $u = f(t)$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(t)} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{uf'(f^{-1}(u))} \, \mathrm{d}u,$$

puis IPP. □

Exercice 82 Que dire d'une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique ?

Démonstration. □

Exercice 83 Soit $f \colon x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f(x) < \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que $f(x) > \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}$ pour tout $x > 0$.
3. Donner un développement limité à quatre termes de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Démonstration. □

Exercice 84 Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Pour $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{|u|, |v|\}$, calculer $I_r(u, v) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(u - re^{i\theta})(v - re^{i\theta})}$.

Démonstration. □

Exercice 85 Soit $P = a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{Z}[X]$ avec a_1 impair.

1. Montrer l'existence d'une suite réelle $(b_k)_{k \geq 0}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(P(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$.
2. Montrer que les b_k sont tous non nuls.

Démonstration. □

Exercice 86 Soient $p \in [0, 1/2]$, $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p$. On cherche p tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = 0\right) \geq \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = b\right)$.

1. Montrer que $p \leq 1/3$, puis que $p < 1/3$ et enfin que $p \leq 1/4$.
2. Si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_X : \theta \mapsto \mathbf{E}\left(e^{iX\theta}\right)$. Exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de Φ_X.
3. En déduire que $p \leq 1/4$ est une condition suffisante.

Démonstration. □

Exercice 87 Soient $n \geq 1$ et A, B, C des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{0, 1\}^n$.

1. Pour $n \geq 2$, calculer la probabilité p_n que ABC soit un triangle équilatéral.
2. Déterminer un équivalent de p_n.

Démonstration. □

IV) École Polytechnique - PSI

Exercice 88 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer qu'il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\sqrt{n} - \sqrt{m} \in]a, b[$.

Démonstration. □

Exercice 89 Soit \$f: $[0, +\infty [\to [0, +\infty [\ldots \$ de classe C^1$ et strictement croissante. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $\sum \frac{1}{f(n)}$ converge si et seulement si $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge.

Démonstration. □

V) École Polytechnique - ESPCI - PC

Exercice 90 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ tels que $n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k k^2$.

Démonstration. □

Exercice 91 Existe-t-il une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels non nuls telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ soit scindé à racines simples dans $[0, 1]$?

Démonstration. □

Exercice 92 Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont somme de deux matrices diagonalisables de rang 1.

Démonstration. □

Exercice 93 Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $(n\{an!\})_{n\in\mathbb{N}}$ converge où on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \in \mathbb{Q} + \mathrm{e}\mathbb{N}$.

Démonstration. □

Exercice 94 Soit (u_n) une suite bornée. Montrer qu'il y a équivalence entre : (i) $\frac{1}{n} \sum_{k<n} |u_k| \to 0$, (ii) il existe $A \subset \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} |A \cap [0, n-1]| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\lim_{n\notin A} u_n = 0$.

Démonstration. □

Exercice 95 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est croissante,
- pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, pour tout $x_0 \in I$, si $f - \varphi$ admet un minimum local en x_0, alors $\varphi'(x_0) \geq 0$.

Démonstration. □

Exercice 96 On pose, pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$, $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

1. Montrer que, pour tout \$x ∈]-1,1$\Big[.\$, on a \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k$.
2. En déduire la valeur de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (\zeta(2k) - \zeta(2k+1))$.

Démonstration. □

VI) Mines - Ponts - MP - MPI

Exercice 97 Déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $3^m = 8 + n^2$.

Démonstration. □

Exercice 98 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer qu'il existe $k \in 0, n$ tel que $|P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}$.

Démonstration. □

Exercice 99 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$?
2. À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?
3. À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$?

Démonstration. □

Exercice 100 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\det((i \wedge j)_{1\leq i,j\leq n})$. Ind. On rappelle que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $N = \sum_{d|N} \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

Démonstration. □

Exercice 101 Soient $(E, \langle\rangle,) unespaceeuclidiendedimensionn, v_1, \ldots, v_{n+2}$ des vecteurs de E. Montrer qu'on ne peut avoir : $\forall i \neq j, \langle v_i, v_j\rangle < 0$.

Démonstration. □

Exercice 102 Soient E un espace euclidien, A une partie de E et $B = \left\{\langle x, y\rangle ; (x, y) \in A^2\right\}$. Montrer que A est fini si et seulement si B est fini.

Démonstration. □

Exercice 103 Soient $n \geq 2$ et $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{a\})$ est compact. Montrer que f admet un extremum global. Que se passe-t-il si $n = 1$?

Démonstration. □

Exercice 104 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\text{\$D}_{\text{n}}\text{= \textbackslash d} \in \text{N; d} \mid n.\text{\$}et\ \sqrt{\frac{n}{2}} \leq d \leq \sqrt{2n}\right\}$ et $d_n = |D_n|$.

1. La suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?
2. La suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est-elle bornée ?

Démonstration. □

Exercice 105 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$. Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration. □

Exercice 106 Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $120 \left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \int_0^1 \left(f''\right)^2$.

Démonstration. □

Exercice 107 Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que : i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n, df(x)$ est injective ; ii) $\|f(x)\| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g \colon x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

1. Calculer dg.
2. Montrer que g admet un minimum.
3. En déduire que f est surjective.

Démonstration. □

VII) Mines - Ponts - PSI

Exercice 108 Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, F est sousespace vectoriel de E tel que $u(F) \subset F$. On suppose que $E = F + \operatorname{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

Démonstration. □

VIII) Centrale - MP - MPI

Exercice 109 On admet le théorème suivant : Pour S une série entière de rayon de convergence infini dont la somme ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, il existe une série entière L de rayon de convergence infini telle que $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(L(z)) = S(z)$.

1. (a) Rappeler tous les modes de convergence d'une série entière sur son disque ouvert de convergence.
   (b) Soient $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence infini et $G(z) = \operatorname{Re}(F(z))$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\int_0^{2\pi} F\left(re^{it}\right) \mathrm{d}t = 2\pi a_n R^n$, puis que $\int_0^{2\pi} G\left(Re^{it}\right) e^{-int} \mathrm{d}t = \pi a_n R^n$ et $\int_0^{2\pi} G\left(Re^{it}\right) \mathrm{d}t = 2\pi \operatorname{Re}(a_0)$.
2. Montrer que, s'il existe p et q réels strictement positifs tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |G(z)| \leq p|z| + q$, alors F est un polynôme de degré au plus 1.
3. Montrer que l'application $z \mapsto z \exp(z)$ est une surjection de $\mathbb{C}$ sur lui-même.

Démonstration. □