

Table des matières

I) De Christophe

XENS

1

I) De Christophe

XENS

Exercice 1 [ENS SR 2026] On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme $\|\cdot\|$. On note $B = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$ et

$$\Delta_3(B) = \sup_{x,y,z \in B} \min(\|x-y\|, \|y-z\|, \|x-z\|)$$

1. Montrer que $\Delta_3(B)$ est atteint.
2. Montrer que $\Delta_3(B) \leq 2$.
3. Calculer $\Delta_3(B)$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 2 [ENS SR 2026] Soit $a > 0$. On considère l'équation différentielle

$$y_a''(t) = \frac{1}{2y_a(t)^{1+a}}, y_a(0) = 1, y_a'(0) = 0$$

On suppose qu'il existe T_a et $y_a \in C^2([0, T_a[, \mathbb{R}^+)$ solution telle que $T_a = +\infty$ ou $y_a(t) + \frac{1}{y_a(t)} \xrightarrow[t \rightarrow T_a]{} +\infty$.

1. Trouver une relation entre $(y_a')^2$ et y_a .
2. Montrer que le cas $\frac{1}{y_a(t)} \xrightarrow[t \rightarrow T_a]{} +\infty$ est impossible pour T_a fini.
3. Montrer que le cas $y_a(t) \xrightarrow[t \rightarrow T_a]{} +\infty$ est impossible pour T_a fini.
4. Montrer que y_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et de limite $+\infty$ en $+\infty$.
5. Donner un équivalent de y_a en $+\infty$.
6. Question bonus : lemme de Gronwall

Exercice 3 [ENS U 2026] 1. On considère un sous-groupe G de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un morphisme de groupe. Montrer qu'il existe un morphisme $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\forall x \in G, \psi(x) = \varphi(x)$.

2. Soit $(G, +)$ un groupe fini, commutatif. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in G, nx = 0$ et n minimal pour la division. Montrer qu'il existe un sous-groupe H de G tel que $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus H$.

Exercice 4 [ENS PSLR 2026] 1. Soit $(c_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1 - c_i) \leq e^{-\sum_{i=0}^{n-1} c_i}$$

2. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ et $m \geq \alpha$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, H_f(x) - \alpha I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } mI_n - H_f(x) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

Montrer que $\exists! x^* \in \mathbb{R}^2, \nabla f(x^*) = 0$.

3. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $s > 0$. On définit $\forall n \geq 0, x_{n+1} = x_n - s \nabla f(x_n)$ Montrer que

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \max((1 - \alpha s)^2, (1 - ms)^2) \|x_n - x^*\|^2$$

Exercice 5 [ENS 2026 L] Soit $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $[0, 1]$, et soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p_k . Montrer que, pour toute distribution de probabilité $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$, il existe une suite de fonctions $f_n : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite de variables aléatoires $(f_n(X_1, \dots, X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X de loi (q_i) si et seulement si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k(1 - p_k)$ diverge.

Exercice 6 [ENS U 2026] Soient m et N dans $\mathbb{N}^*$. On considère $X_1, \dots, X_m$ variables aléatoires mutuellement indépendantes, respectivement à valeurs dans $E_1, \dots, E_m$ qui sont des parties de $\mathbb{R}$. On suppose que $X_1 + \dots + X_m$ suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Les X_i suivent-ils une loi uniforme?

Exercice 7 [X 2026] Soit $(A, +, \times)$ un anneau qui n'est pas un corps et vérifiant

$$\forall x \in A \setminus A^\times, \exists n_x \in \mathbb{N}^*, x = \sum_{k=2}^{2^{n_x}} x^k$$

1. Montrer que $\forall x \in A \setminus A^\times, x + x = 0_A$. On pourra considérer $y_x = \sum_{k=1}^{2^{n_x}-1} x^k$.
2. Montrer que $1_A + 1_A = 0_A$.
3. Montrer que $\forall x \in A \setminus A^\times, x = x^2$. On pourra d'abord montrer que $x = x^{2^{n_x}+1}$.

Exercice 8 [X 2026] On pose $E = \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tous r, s de $\mathbb{N}$,

$$\varphi_1(X^r, X^s) = (-X^{r+2}, X^s + X^{r+1}) \text{ et } \varphi_2(X^r, X^s) = (X^{s+1} + X^r, -X^{s+2})$$

1. Déterminer les spectres de φ_1 et φ_2 .
2. φ_1 et φ_2 sont-ils des automorphismes de E ?
3. Mêmes questions avec $E = \mathbb{C}(X) \oplus \mathbb{C}(X)$.
4. On pose $B_n = \{\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}, i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le cardinal de B_1, B_2, B_3 .

Exercice 9 [X 2026] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\det(M^{2024} + I_2) = \det(M^{2024} - I_2) \text{ et } \det(M^{2026} + I_2) = \det(M^{2026} - I_2)$$

Montrer que

$$\forall n \geq 1, \det(M^n + I_2) = \det(M^n - I_2)$$

Exercice 10 [ENS SR 2026] On note $\mathbb{H}$ l'algèbre des quaternions sur $\mathbb{R}$. C'est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4 muni d'une base canonique $(1, i, j, k)$ dont la multiplication est régie par : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Pour tout quaternion $z = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, on définit son conjugué par $\bar{z} = a - bi - cj - dk$. On admet que $\overline{wz} = \bar{z}\bar{w}$.

1. Inversibilité dans $\mathbb{H}$. Montrer que tout élément non nul $z \in \mathbb{H}$ admet un inverse pour la loi de multiplication, et exprimer explicitement z^{-1} en fonction de $\bar{z}$ et $N(z)$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif.
2. Anneaux de Lipschitz et de Hurwitz. On note $\mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$. On pose $\delta = \frac{1+i+j+k}{2}$ et on définit $A = \mathbb{H}(\mathbb{Z}) + \mathbb{Z}\delta$. Montrer que $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ et A sont des sous-anneaux de $\mathbb{H}$.
3. Lien avec la somme de quatre carrés. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que n s'écrit comme la somme de quatre carrés d'entiers si et seulement s'il existe un quaternion de Hurwitz $z \in A$ tel que $n = N(z)$.
4. Structure euclidienne et application au théorème de Lagrange. a. Démontrer que l'anneau A est euclidien (à droite) pour la norme N . b. Soit p un nombre premier impair. On admet qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Montrer que p n'est pas irréductible dans A , puis qu'il existe $z \in A$ tel que $p = N(z)$. c. En déduire le théorème des quatre carrés de Lagrange.

Exercice 11 [X 2026] Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de var telle que u_1 suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$ ($N \in \mathbb{N}^*$ fixé) et pour $n \geq 1$, u_{n+1} suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, u_n \rrbracket$. On pose $E_N = \{u_i, i \geq 1\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(1 \in E_N) = 1$. Indication : montrer que $\mathbb{P}(u_{i+1} \geq 2) \leq \mathbb{P}(u_i \geq 2)(1 - \frac{1}{N})$.
2. Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on pose $p_{N,k} = \mathbb{P}(k \in E_N)$. Calculer $p_{N,k}$.

Exercice 12 [ENS SR 2026] Soit $T > 0$ et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $u : [a, b] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^4 solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 & \text{pour } (x, t) \in]a, b[\times]0, T[\\ u(a, t) = 0 \text{ et } u(b, t) = 0 & \text{pour tout } t \in [0, T] \end{cases}$$

où $\nu > 0$. On définit un maillage régulier : $\Delta x = \frac{b-a}{M+1}$ et $\Delta t = \frac{T}{N}$. On note u_j^n l'approximation de $u(x_j, t_n)$ par le schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

1. En définissant $U^n = (u_1^n, \dots, u_M^n)^\top \in \mathbb{R}^M$, montrer que $U^{n+1} = AU^n$.
2. On définit l'erreur de troncature ε_j^n . Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que $\max |\varepsilon_j^n| \leq C(\Delta t + (\Delta x)^2)$.

Exercice 13 [X 2026] Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $|a| > \sqrt{3}$ et $b \neq 0$ et $n \geq 3$ un entier. On note $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ et pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $A_k = \text{diag}(I_{k-1}, B, I_{n-k-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soient $k, k' \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Donner l'ordre du sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ engendré par A_k et $A_{k'}$.
2. Trouver un vecteur propre commun à tous les A_k .

Exercice 14 [ENS PLSR 2026] Soit $n \geq 1$ un entier. On considère $G_n = \{\frac{j}{2^n} \mid j \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}\}$. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables indépendantes uniformes sur $G_1, \dots, G_n$. Pour $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on définit $\hat{\varphi}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i)$. Soit $\mathcal{L}_1$ l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sup_{\varphi \in \mathcal{L}_1} |\hat{\varphi}_n - \int_0^1 \varphi(x) dx| \geq \frac{1}{2^{n+2}}$.
2. Soit $M \geq 1$. Montrer que $\sup_{\varphi \in \mathcal{L}_1} |\hat{\varphi}_n - \int_0^1 \varphi(x) dx| \leq \frac{2}{M} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{n} \text{Card}\{i \mid X_i \in B_m\} - \frac{1}{M}$.

Exercice 15 [X 2026] Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2f(x) + f(x^2)$.

1. On suppose g continue en 0 et f bornée au voisinage de 0. Montrer que f est continue en 0.
2. Donner un exemple où g est continue en 0 et f discontinue en 0.

Exercice 16 [X 2026] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 0 \implies \text{Im}(z) > 0$. On écrit $P = A + iB$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que A et B sont scindés sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 [ENS L 2026] Soit $f : x \mapsto x(1 + \ln |1 - |x||)$.

1. Étudier f .

2. Soit (x_n) définie par $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Trouver les x_0 tels que (x_n) soit 3-périodique.

Exercice 18 [ENS PLSR 2026] Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{C}, f(x) = \lambda x$. Que dire de f ?
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice M de f vérifie $\forall i, M_{i,i+1} \neq 0$.

Exercice 19 [ENS PLSR 2026] Soit V un espace euclidien. Pour $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V , on note $L = \text{vect}_{\mathbb{Z}}(e_1, \dots, e_n)$.

1. Montrer que $L = \{\sum_{i=1}^n m_i e_i, m_i \in \mathbb{Z}\}$.
2. Soit B' une autre base. Montrer qu'elle engendre L ssi la matrice de passage est dans $GL_n(\mathbb{Z})$ avec un déterminant ± 1 .
3. Justifier que $\lambda_1(L) = \min\{\|x\|, x \in L \setminus \{0\}\}$ est bien défini.
4. Montrer qu'il existe une base (b_1, b_2) de $\mathbb{R}^2$ qui engendre L avec $\|b_1\| = \lambda_1(L)$ et $\frac{|(b_1|b_2)|}{\|b_1\|^2} \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 20 [X 2026] Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $J_n(x) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{i(n\theta + x \cos \theta)} d\theta$.

1. Montrer que $J_n(x) \in \mathbb{R}$ et relier J_n et J_{-n} .
2. DSE et équation différentielle vérifiée par J_0 .

Exercice 21 [X 2026] Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var iid telle que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et T_n le nombre minimal d'expériences pour avoir n échecs.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (S_n \geq k) = (T_{n+1-k} \geq n+1)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq k) = \binom{n}{n-k} p^k q^{n-k+1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(n+1)\dots(n+\ell)}{(k+1)\dots(k+\ell)} p^\ell$.
3. Soit $j \geq 3$. On suppose $p = 1/2$. Montrer que $\mathbb{P}(S_{nj} \leq n) \sim 2^{-jn} \binom{jn}{n}^{\frac{j-1}{j-2}}$.

Exercice 22 [X 2026] Soit $S \subset \mathbb{N}$. On définit (a_n) et (b_n) par $a_0 = b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \max\{a_i, i < n\} \cup \{b_i, i < n\} \text{ et } b_n = a_n + n$$

(Note : il semble manquer une partie de la définition de a_n dans l'énoncé manuscrit reproduit). Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lfloor n\varphi \rfloor, b_n = \lfloor n\varphi^2 \rfloor$ où $\varphi^2 = \varphi + 1, \varphi > 1$.