Exercices 2024

Table des matières

I) ENS MP 2024 — XENS

1) Algèbre

Exercice 1 [ENS MP 2024 # 1] Soit E un ensemble fini non vide. Pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in E^3$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, on note $\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$. Soit $E^{3*} = \{(x, y, z) \in E^3 \ ; \ x, y, z \text{ sont distincts}\}$. Soit $S \subset E^{3*}$ tel que

- $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_3$, si $\varepsilon(\sigma) = -1$ alors $\sigma \cdot (S) = \{\sigma \cdot x \ ; \ x \in S\} = E^{3*} \setminus S$,
- $\forall a, b, c, d \in E$, si $(a, b, c) \in S$ et $(a, c, d) \in S$, alors $(a, b, d) \in S$ et $(b, c, d) \in S$.

Montrer qu'il existe $g\colon E \to \mathbb{R}$ injective telle que $\forall (a, b, c) \in E^3$, $g(a) < g(b) < g(c) \Rightarrow (a, b, c) \in S$.

Exercice 2 Théorème d'Ostrowski [ENS MP 2024 # 2] Soit N une application de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

- $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,
- pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
- il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N(n) > 1$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in]0, 1]$ tel que $N(x) = |x|^\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3 [ENS MP 2024 # 3] On etend de facon naturelle la valuation 2-adique v_2 à $\mathbb{Q}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Calculer $v_2(H_n)$.

Exercice 4 [ENS MP 2024 # 4] Congruences sur les coefficients binomiaux Soit $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, avec p premier supérieur ou egal à 5, m et p premiers entre eux.

- Montrer que $\binom{np}{m} \equiv 0 \, [p]$.
- Montrer que $\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^p \binom{p(n-1)}{mp-k} \binom{p}{k}$.
- Montrer que $\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \, [p^2]$.
- On veut montrer que $\binom{2p}{p} \equiv 2 \, [p^3]$.
  - ▷ Montrer que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1 [p]$.
  - ▷ Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k}\right)^2 \equiv 0 [p]$.
  - ▷ Conclure

Exercice 5 Détermination de $\left(\frac{2}{p}\right)$ [ENS MP 2024 # 5] Soit p un nombre premier impair.

- Déterminer $\operatorname{Card}\{x^2, \ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*\}$.
- Démontrer l'équivalence : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ si et seulement si a est un carré non nul modulo p.
- On pose $a = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (2k)$. Montrer que
  - ▷ Si $p \equiv 1 [4]$, alors $a \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! [p]$
  - ▷ Si $p \equiv -1 [4]$, alors $a \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! [p]$
- CNS pour que 2 soit un carré modulo p.

Exercice 6 [ENS MP 2024 # 6] On considère l'équation $2^a + 3^b = 5^c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$.

- Résoudre l'équation dans le cas $a = b = c$.
- Traiter le cas b impair.

- Traiter le cas c impair.
- Traiter le cas général.

Exercice 7 [ENS MP 2024 # 7] Soit p un nombre premier impair. TODO

- Quel est le cardinal du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
- Montrer que l'équation $x^2 = 1$ possède exactement deux solutions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- En déduire $\mathrm{Card}\{x^2,\ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.
- Soit $\chi\colon \mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ telle que : $\chi(n) = 1$ si $n \wedge p = 1$ et si n est un carré modulo p ; $\chi(n) = -1$ si $n \wedge p = 1$ et si n n'est pas un carré modulo p ; $\chi(n) = 0$ si $p \mid n$.
  - ▷ 7 Déterminer $\sum_{k=0}^{p-1} \chi(k)$.
  - ▷ – s Montrer que le produit d'un carré et d'un non carré est un non carré.
    – En utilisant le caractère bijectif de $x \mapsto ax$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.
  - ▷ Déduire de une majoration de $\left|\sum_{k=0}^{N} \chi(k)\right|$ pour $N \in \mathbb{N}$.
  - ▷ On pose $\xi = e^{2i\pi/p}$. Montrer que
$$\chi(n) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{a=0}^{p-1} \chi(a) \xi^{k(a-n)}.$$
- Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on note $S_k(N) = \sum_{n=0}^{N} \xi^{-kn}$.
  - ▷ Montrer que $\forall N \geq 0$, $|S_k(N)| \leq \frac{1}{|\sin(k\pi/p)|}$.
  - ▷ En déduire que, pour $k < p/2$, $|S_k(N)| \leq p/2k$.
  - ▷ Trouver une majoration similaire pour $k > p/2$.
- On pose $G_k = \sum_{a=0}^{p-1} \chi(a) \xi^{ka}$.
  - ▷ Montrer que, pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, $|G_k| = \sqrt{p}$.
  - ▷ Montrer que G_k est réel ou imaginaire pur.
  - ▷ On suppose que G_1 est réel, montrer que $G_1 \geq 0$.?? Trouver des questions pour finir…

Exercice 8 Anneaux euclidiens [ENS MP 2024 # 8] On dit que A est un anneau euclidien si A est un anneau intègre (donc commutatif) et qu'il existe $t\colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ vérifiant :

- pour tout $(a,b) \in A \times (A \setminus \{0\})$, il existe $(q,r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ avec $r = 0$ ou $t(r) < t(b)$,
- $\forall (a,b) \in (A \setminus \{0\})^2, t(ab) \geq t(a)$.
- Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont-ils euclidiens ? Montrer qu'un corps est un anneau euclidien.
- Soient A un anneau euclidien et I un idéal de A. Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $I = xA$. Y a-t-il unicité de x ?
- Dans cette question, on se donne A un anneau euclidien tel que $t(1) = 1$. Soit $x \in A$. Montrer que x est inversible si et seulement si $t(x) = 1$.

Exercice 9 [ENS MP 2024 # 9] Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.
Pour $f, g \in A$, on pose $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g(n/d)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif intègre.
- Caractériser les inversibles de l'anneau A.
- Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans l'anneau A avec a et $b^2 - 4ac$ inversibles.

Exercice 10 [ENS MP 2024 # 10]
- Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont cycliques.
- Alice et Barbara jouent à un jeu. Elles choisissent à tour de role un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sans remise qu'elles ajoutent à un ensemble S. Le jeu s'arrête quand S engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et la joueuse ayant tiré le dernier numéro perd. Selon n, y a-t-il une stratégie gagnante pour la première joueuse ?
- Même question si à chaque étape, on ne peut pas retirer un élément de $\langle S \rangle$.
- Reprendre 10 avec le groupe $\mathcal{S}_n$.

Exercice 11 [ENS MP 2024 # 11]
- Soient $\sigma \in S_n$ et $c_1 \circ \cdots \circ c_r$ sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Calculer l'ordre de σ dans le groupe S_n.
- On note $g(n)$ l'ordre maximal d'une permutation de S_n. Montrer que g est croissante et $n \leq g(n) \leq n!$
- Trouver n minimal tel que $g(n) > n$.
- On note $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que :
$n \geq \sum_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \implies g(n) \geq \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.
- On suppose que $g(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Montrer que : $n \geq \sum_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.
- Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(n) \leq Ce^{\varepsilon n}$.

Exercice 12 [ENS MP 2024 # 12] Lorsque $\sigma \in S_n$, on note $n_k(\sigma)$ le nombre de k-cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints. Ainsi $n_1(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ. On note egalement $m(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} n_k(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.

- Soient $i, k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de i dans $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma, \tau \in S_n$. On dit que σ et τ sont conjuguées s'il existe $\varphi \in S_n$ tel que $\sigma = \varphi\tau\varphi^{-1}$.

Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall k \in [\![1, n]\!], n_k(\sigma) = n_k(\tau)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\det \left(i \wedge j\right)_{1 \leq i,j \leq n^*}$.

Ind. Considérer les matrices $A = (1\!\!1_{i|j})$ et $B = (\varphi(j) 1\!\!1_{j|i})$.

- Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall i \in [\![1, n]\!], m(\sigma^i) = m(\tau^i)$.
- Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutation P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 13 [ENS MP 2024 # 13] Soient G un groupe, A une partie finie non vide de G. Montrer que $|A| = |AA|$ si et seulement si $A = xH$ avec $x \in G$ et H sous-groupe de G tel que $x^{-1}Hx = H$.

Exercice 14 [ENS MP 2024 # 14] Soient G un groupe et $A \subset G$ fini non vide tel que $|AA| < \frac{3}{2}|A|$. Montrer que $A^{-1}A$ est un sous-groupe de G.

Exercice 15 Groupe dihédral [ENS MP 2024 # 15]
- Soient $n \geq 3$ et $\mathcal{Q}$ un polygone régulier à n côtés. Montrer que l'ensemble des isométries affines du plan préservant $\mathcal{Q}$ est un groupe à $2n$ éléments.
- s On note maintenant $n = q$, nombre premier impair, et D_{2q} le groupe précédent. Montrer que tout groupe de cardinal $2q$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ ou à D_{2q}.

Exercice 16 [ENS MP 2024 # 16]
- Trouver tous les groupes d'ordre 8 dont l'ordre maximal des éléments est 4.
- Trouver tous les groupes d'ordre 8 à isomorphisme pres.

Exercice 17 [ENS MP 2024 # 17]
- Donner des exemples de groupes d'ordre 12 commutatifs ainsi qu'un exemple non commutatif.
- Montrer que tout groupe d'ordre 12 admet un élément d'ordre 2.
- Trouver à isomorphisme prêt les groupes commutatifs d'ordre 12.
- Montrer que tout groupe d'ordre 12 admet un élément d'ordre 3.
- Trouver tous les groupes d'ordre 12 à isomorphisme pres.

Exercice 18 [ENS MP 2024 # 18] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F}_3)$. On admet que $A^{13} = -I_3$.

- Quels calculs auriez-vous fait pour justifier que $A^{13} = -I_3$?
- Montrer que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ et que A est d'ordre 26 dans ce groupe.
- On note G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A, et on pose $V = G \cup \{0\}$. Montrer que $V = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.
- On pose $W = \mathrm{Vect}(I_3, A)$. Montrer que, pour tout $M \in G$, il existe $N, P \in W \setminus \{0\}$ telles que $M = P^{-1}N$.
- On note H le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A^2. Montrer que H est isomorphe à $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, puis que $|H \cap W| = 4$.

Exercice 19 [ENS MP 2024 # 19]
- Montrer que toute rotation du plan complexe est composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites.
- Montrer que toute permutation d'un ensemble fini non vide X est produit de deux éléments d'ordre au plus 2 du groupe des permutations de X.
- Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si X est infini ?

Exercice 20 [ENS MP 2024 # 20] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $|z| < 2$.

Exercice 21 [ENS MP 2024 # 21] Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, ..., a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$.
On pose $f(X, Y) = a_0X^m + a_1X^{m-1}Y + a_2X^{m-2}Y^2 + ... + a_mY^m$ et on suppose que le polynôme $f(X, 1) \in \mathbb{R}[X]$ est scindé.
Montrer que, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, le polynôme $\frac{\partial^{n+p} f}{\partial X^n \partial Y^p}(X, 1)$ est nul ou scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 [ENS MP 2024 # 22] Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \in [1/C, C]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^n (X - x_{k,n})$, ou l'on a note $x_{k,n}$ les racines complexes de P_n.

- Montrer que $\{x_{k,n} \,;\, n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![1, n]\!]\}$ est borné.
- Montrer que $\sum_{k=1}^n x_{k,n}^2 = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n}{a_n^2}$ pour tout $n \geq 2$.
- Montrer que, pour n suffisamment grand, P_n n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23 [ENS MP 2024 # 23]
- Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ unitaire de degre $n \geq 2$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, avec $a_{n-1} \in \mathbb{R}_+$. Montrer, pour $M = \max(|a_0|, \ldots, |a_{n-2}|)$, que toute racine z de P vérifie $\mathfrak{Re}(z) \leq 0$ ou $|z| \leq \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4M}}{2}$.
- Soit p un nombre premier et $b \geq 3$ un entier. On écrit $p = \overline{c_n c_{n-1} \cdots c_0}^b$ en base b. Montrer que $\sum_{k=0}^n c_k X^k$ est irreductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 24 [ENS MP 2024 # 24] Soit P un polynôme à n indéterminées $X_1, X_2, \ldots, X_n$. On dit que P est symétrique si, pour toute permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a $P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. On dit que P est homogène de degre $k \in \mathbb{N}$ s'il est somme de mo- nomes de la forme $cX_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}$ avec $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$.

- Montrer qu'il existe une famille presque nulle $(e_i(X_1, X_2, \ldots, X_n))_{i \geq 0}$ de polynômes à n indéterminées symétriques et homogènes tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(1 + tX_1)(1 + tX_2) \cdots (1 + tX_n) = \sum_{i \geq 0} e_i(X_1, X_2, \ldots, X_n) t^i$.

- Montrer qu'il existe une famille $(h_i(X_1, X_2, \ldots, X_n))_{i\geq 0}$ de polynômes à n indéterminées symétriques et homogènes tels que, pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0,
$\dfrac{1}{(1-tx_1)(1-tx_2)\cdots(1-tx_n)} = \sum_{i=0}^{+\infty} h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)t^i.$

On pose $\mathcal{P}_n = \{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n,\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \}$ et, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on pose $\Lambda(\alpha)$ le n-uplet obtenu en ordonnant les entiers de α par ordre decroissant, puis pour tout $\lambda \in \mathcal{P}_n$, $m_\lambda = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\, \Lambda(\alpha)=\lambda} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}$.

- Calculer m_λ avec $\lambda = (2, 1, 0, 0)$ et λ le n-uplet contenant r fois 1 et $n - r$ fois 0.
- Pour $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$, on note $M_{\lambda,\mu}$ le nombre de matrices dont les coefficients valent 0 ou 1 et telles que la somme des coefficients de la i-ieme ligne vaut toujours λ_i et celle des coefficients de la j-ieme colonne vaut toujours μ_j. Montrer que $\prod_{i=1}^n e_{\lambda_i}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\mu\in\mathcal{P}_n} M_{\lambda,\mu} m_\mu$.

Exercice 25 Théorème de Liouville [ENS MP 2024 # 25] Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ non tous constants et premiers entre eux deux à deux.

- On veut montrer que si $A + B = C$ alors $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) \leq M(ABC) - 1$ ou $M(P)$ est le nombre de racines distinctes du polynôme P.
  Si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, on note $W_{P,Q} = PQ' - P'Q$.
  - ▷ Montrer que $W_{A,B} = W_{C,B} = W_{A,C} \neq 0$.
  - ▷ Montrer que $\deg(A \wedge A') + \deg(B \wedge B') + \deg(C \wedge C') \leq \deg(W_{A,B})$.
  - ▷ Conclure.
- Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Donner un exemple de $(A, B, C) \in \mathbb{C}[X]^3$ avec $\deg(A) = d$ et pour lequel $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) = M(ABC) - 1$.
- Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux dans leur ensemble et tels que $A^n + B^n = C^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n \leq 2$. Montrer qu'il existe des solutions pour $n = 2$.

Exercice 26 [ENS MP 2024 # 26] Soit $\mathbb{R}\left[X, X^{-1}\right]$ l'ensemble des fractions rationnelles dont le dénominateur est une puissance de X.

- Montrer que $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}(X)$. En est-ce un sous-corps ? Quels sont ses éléments inversibles ?
- Déterminer les automorphismes de l'anneau $\mathbb{R}$.
- Déterminer les automorphismes de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$.
- Déterminer les automorphismes de l'anneau $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$.

Exercice 27 [ENS MP 2024 # 27] Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaires. On dit que P et Q sont entrelacés lorsqu'entre deux racines consécutives de l'un (en tenant compte des multiplicités) il y a exactement une racine de l'autre. On suppose que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$, que Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et que P et Q n'ont aucune racine commune. On pose enfin $F = \dfrac{P}{Q}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
Montrer l'équivalence entre :

- P est scindé sur $\mathbb{R}$ et P et Q sont entrelacés,
- $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$

Exercice 28 [ENS MP 2024 # 28] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Exprimer $\det(A + uv^T)$. Dans le cas ou celui-ci est non-nul, exprimer $(A + uv^T)^{-1}$.

Exercice 29 [ENS MP 2024 # 29] Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Que dire de f si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée ?
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{tr}\, A = 0$. Montrer que A est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

Exercice 30 [ENS MP 2024 # 30]

- Calculer $\det\left(i^j\right)_{1\leq i,j\leq n}$.
- Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$P_i = \prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} (X - a_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} X^{k-1}$$

  Calculer $\det(\alpha_{i,k})_{1\leq i,k\leq n}$.

Exercice 31 [ENS MP 2024 # 31] Soient $n, r, k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq r \leq n$ et $r + k \leq n$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Montrer que M est de rang $r + k$ si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est de rang k.

Exercice 32 [ENS MP 2024 # 32] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, m un entier supérieur ou egal à 2. Montrer que la reduction modulo m définit un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, puis que ce morphisme est surjectif.

Exercice 33 Sous-algèbre transitive [ENS MP 2024 # 33] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\{Mv\ ;\ M \in \mathcal{M}\} = \mathbb{C}^n$. Montrer que $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 34 [ENS MP 2024 # 34] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 + B^2 = AB$ et $AB - BA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que n est divisible par 3. TODO

Exercice 35 [ENS MP 2024 # 35] Soient $\chi\colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes non constant. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de la forme $(a + b\chi(r) + c\overline{\chi(s)} + d\chi(r)\overline{\chi(s)})_{r,s\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}$ avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}$.

- Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Pour $\xi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes, calculer $\sum_{r\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} \xi(r)$.
- Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par produit matriciel et que la $\mathbb{R}$-algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (on exhibera un isomorphisme).

Exercice 36 [ENS MP 2024 # 36] On s'intéresse aux parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont des groupes pour le produit matriciel.

- Donner des exemples de tels groupes, dont certains ne soient pas des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$, où B est inversible et N nilpotente.
- Caractériser ces groupes.

Exercice 37 [ENS MP 2024 # 37] Pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, soit $\mathrm{Pf}(A) = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3}$.

- Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$.
- On admet que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ et tout $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}(BAB^T) = \det(B)\mathrm{Pf}(A)$.
- Soit $R \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. On pose $A = R - R^T$. Montrer l'équivalence entre :
  - ▷ R n'a pas de valeur propre réelle,
  - ▷ $\mathrm{Pf}(A) \neq 0$,
  - ▷ A est inversible.
- Soient $R_1, R_2 \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, $A_1 = R_1^T - R_1$ et $A_2 = R_2^T - R_2$. On suppose $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $\mathrm{Pf}(A_1) = \mathrm{Pf}(A_2) \neq 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ telle que $R_1 = PR_2P^T$.

Exercice 38 [ENS MP 2024 # 38] Déterminer l'image de $\varphi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M^{2n+1}$.

Exercice 39 [ENS MP 2024 # 39] À quelle condition sur la matrice A, la comatrice de A est-elle diagonalisable ?

Exercice 40 [ENS MP 2024 # 40] Pour $i \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $c_i(A)$ le coefficient numéro i du polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de la matrice A.

- Montrer que $c_i(AB) = c_i(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $i \in \mathbb{N}$.
- Le résultat reste-t-il valable pour des matrices à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ quelconque ?

Exercice 41 [ENS MP 2024 # 41] Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\zeta = e^{2i\pi/n}$ et $S = \left(\zeta^{(r-1)(s-1)}\right)_{1\leq r,s\leq n}$.

- s Calculer S^2.
- Donner une expression simple de $|\det(S)|$.
- On pose $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik^2\pi}{n}}$. Donner une expression simple de $|G_n|^2$ par un calcul direct.
- s On suppose que n est impair. Déterminer le spectre de S et la multiplicité de chacune de ses valeurs propres.

Exercice 42 [ENS MP 2024 # 42]

- Rappeler l'ordre d'un élément k de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Montrer que deux permutations de $\mathcal{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si elles ont pour tout k, le même nombre de cycles de longueur k dans leurs décompositions en produit de cycles à supports disjoints.
- Soit c un cycle de longueur k. Déterminer le nombre de cycles dans la décomposition de c^i en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 43 [ENS MP 2024 # 43] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $v, w \in \mathcal{L}(E)$. On note $u = vw - wv$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on note $F_u(\lambda) = \bigcup_{m\geq 1} \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})^m$

- Montrer que $F_u(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel stable par u et qu'il admet un supplémentaire stable par u.
- On écrit $\pi_u = (X - \lambda)^p Q$ avec $(X - \lambda) \wedge Q = 1$. Montrer que $E = F_u(\lambda) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u)$.
- E On suppose de plus que u commute avec v. On note p_λ le projecteur sur $F_u(\lambda)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, Q(u)$.
- Montrer que p_λ commute avec v.
- Montrer que $\mathrm{tr}(up_\lambda) = \lambda\,\mathrm{rg}(p_\lambda) = 0$.
- En déduire que u est nilpotent.
- On suppose desormais que $vw^2 - w^2v = w$. Montrer qu'il existe un entier d impair tel que $\pi_w = X^d$.

Exercice 44 [ENS MP 2024 # 44] Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. **TODO**

- Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{tr}(M^k) = 0$.
- On suppose que $A(AB - BA) = 0$. Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.
- On suppose que $A(AB - BA) = (AB - BA)A$. Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.

Exercice 45 [ENS MP 2024 # 45] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_A = \prod_{i=1}^r \underbrace{(X - \lambda_i)^{\alpha_i}}_{=P_i}$.

- Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur $\mathrm{Ker}\, P_i(A)$.
- Montrer qu'il existe D diagonalisable et N nilpotente telles que $A = D + N$ et $ND = DN$.
- Si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Comm}_X : M \mapsto MX - XM$. On reprend les notations précédentes. Montrer que $\mathrm{Comm}_A = \mathrm{Comm}_D + \mathrm{Comm}_N$, que Comm_D et Comm_N commutent et sont respectivement diagonalisable et nilpotente.

Exercice 46 [ENS MP 2024 # 46] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite toute puissante (TP $\mathbb{K}$) si, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = B^p$. - Trouver les matrices TP $\mathbb{K}$ pour $n = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\chi_A = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ ou les λ_i sont distincts dans $\mathbb{K}$ et les α_i sont des entiers naturels non nuls.
- Montrer qu'il existe $N_1, \ldots, N_k$ nilpotentes telles que A soit semblable à une matrice diagonale par blocs avec comme blocs diagonaux $\lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k$.
- Montrer que A est TP $\mathbb{K}$ si et seulement si les $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ le sont. On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unipotente si $M - I_n$ est nilpotente et on note $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$, on pose $\ln(A) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(A - I_n)^p$.

- Justifier la définition de $\ln(A)$ pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp$ est une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur l'ensemble $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$.
- Montrer que les matrices unipotentes sont TP $\mathbb{K}$.
- Déterminer finalement les matrices toutes-puissantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 47 [ENS MP 2024 # 47] Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considére l'équation $(E)\colon X - AXB = C$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ les spectres complexes de A et B.

- On suppose que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, $\alpha\beta \neq 1$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution.
- Que se passe-t-il dans le cas general ?

Exercice 48 [ENS MP 2024 # 48] Combien y-a-t-il de classes de similitude de $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ constituées de matrices M telles que $M^3 = 0$?

TODO

Exercice 49 [ENS MP 2024 # 49] Déterminer les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que M soit semblable à $2M$.

Exercice 50 [ENS MP 2024 # 50] Déterminer les matrices $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $k \geq 2$, on dispose de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A = M^k$.

Exercice 51 [ENS MP 2024 # 51] Montrer que toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ admet une racine carrée.

Exercice 52 [ENS MP 2024 # 52]
- Montrer que toute $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de facon unique UD ou $U \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente, $D \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable et $UD = DU$.
- Soit ρ un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$ tel que les coefficients de $\rho(M)$ soient des fonctions polynomiales de ceux de M. Montrer que ρ respecte la décomposition de la question précédente.

Exercice 53 [ENS MP 2024 # 53]
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. à quelle condition existe-t-il $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales ?
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A s'écrit de maniere unique $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\pi_A = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\beta_i}$ son polynôme minimal et $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(A)$ est diagonalisable si et seulement si $P^{(j)}(\lambda_i) = 0$ pour tous $i \in [\![1, r]\!]$ et $j \in [\![1, \beta_i - 1]\!]$.

Exercice 54 [ENS MP 2024 # 54]
- Soient u, v deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, tels que $uv = vu$. Montrer que u et v sont codiagonalisables.
- Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que u admet au plus une décomposition de la forme $u = d + n$, ou $(d, n) \in \mathbb{K}[u]^2$, l'endomorphisme d est diagonalisable, l'endomorphisme n est nilpotent et $dn = nd$.

Exercice 55 [ENS MP 2024 # 55] Soient $n \in \mathbb{N}$ et w une fonction continue positive non identiquement nulle de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, $\int_0^1 f_k f_\ell w = \delta_{k,\ell}$. Montrer que $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.
- Montrer qu'il existe une unique suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $\int_0^1 p_k p_\ell w = \delta_{k,\ell}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k soit polynomiale de degre k à coefficient dominant positif.
- Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, p_n à n racines simples dans $]0, 1[$ que l'on note $x_{1,n} < \cdots < x_{n,n}$.
- Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{n,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_0^1 pw = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} p(x_{k,n})$.

Exercice 56 [ENS MP 2024 # 56] Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E tels que $\langle e_i, e_j \rangle \leq 0$ pour tous i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre si et seulement s'il existe une forme lineaire f sur E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) > 0$.

Exercice 57 [ENS MP 2024 # 57] Soient $n, m \geq 1$ des entiers. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle_E)$ et une application $f\colon \mathbb{R}^n \to E$ (non linéaire) tels que, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, x' \rangle^m = \langle f(x), f(x') \rangle_E$.

Exercice 58 [ENS MP 2024 # 58] Trouver un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ et $f\colon \mathbb{R} \to E$ tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2}\right) = \langle f(x), f(y) \rangle$.

Exercice 59 [ENS MP 2024 # 59] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$. On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on considére r vecteurs de $\mathbb{R}^m$ notes $x_1, \ldots, x_r$.

- Montrer qu'il existe une matrice $U_0 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^{r} \|x_i - UU^T x_i\|_2^2$ parmi toutes les matrices $U \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telles que $U^T U = I_n$.
- Montrer que $\min_{U \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{r} \|x_i - UU^T x_i\|_2^2 = \min_{U,V \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{r} \|x_i - UV^T x_i\|_2^2$.

Exercice 60 [ENS MP 2024 # 60] Soient $(\lambda_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante vérifiant $\lambda_0 = 0$ et k dans $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

- Calculer $I_{n,k} = \inf_{(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}} \int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=0}^n a_i t^{\lambda_i}\right)^2 dt$.

On admettra que le déterminant de la matrice de coefficient general $m_{i,j} = \dfrac{1}{1+x_i+y_j}$ vaut $\dfrac{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{1\le i,j\le n}(1+x_i+y_j)}$.

- En déduire une condition suffisante sur (λ_n) pour que $F = \mathrm{Vect}(t\mapsto t^{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ soit dense dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme $f\mapsto \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$.

Exercice 61 [ENS MP 2024 # 61] Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\langle\ ,\ \rangle_1$ et $\langle\ ,\ \rangle_2$ deux produits scalaires tels que $\forall (x,y)\in V^2$, $\langle x,y\rangle_1 = 0 \iff \langle x,y\rangle_2 = 0$

- Soient $x,y\in V$. Montrer que si $\|x\|_1 = \|y\|_1$ alors $\|x\|_2 = \|y\|_2$.
- En déduire qu'il existe $C>0$ tel que $\forall x\in E$, $\|x\|_1 = C\|x\|_2$.
- Soit $u\in\mathcal{L}(V)$ qui préserve l'orthogonalité : si $\langle x,y\rangle = 0$ alors $\langle u(x),u(y)\rangle = 0$. Montrer qu'il existe $C\in\mathbb{R}^+$ tel que $u\circ u^* = C$ id.

Exercice 62 [ENS MP 2024 # 62] Soient E un espace euclidien de dimension n et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On pose $\Lambda = \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i,\ (\lambda_i)_{1\le i\le n}\in\mathbb{Z}^n\right\}$.

- Soit $r\in\mathcal{O}(E)$ tel que $r(\Lambda)\subset\Lambda$. Montrer que $r(\Lambda)=\Lambda$.
- Montrer que $G_\Lambda = \{r\in\mathcal{O}(E), r(\Lambda)=\Lambda\}$ est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(E)$.
- Ici $n=3$. Montrer que tous les éléments de G_Λ ont un ordre qui divise 12.

Exercice 63 [ENS MP 2024 # 63] Soient E un espace euclidien de dimension n, G un groupe fini et ρ un morphisme injectif de G dans $\mathrm{GL}(E)$ tel que, pour tout $g\in G$, $\rho(g)\in\mathcal{S}(E)$. Montrer que les éléments de G sont d'ordre 1 ou 2, puis que $|G|$ divise 2^n.

Exercice 64 [ENS MP 2024 # 64]

- Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a\in\mathbb{R}$ pour que la matrice $\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$ soit positive, puis définie positive.
- Soit $(a,b,c)\in[-1,1]^3$. On suppose que $1+2abc\ge a^2+b^2+c^2$. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1+2(abc)^n\ge a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$.

Exercice 65 [ENS MP 2024 # 65]

- s Soit $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Montrer qu'il existe un vecteur propre de A dont tous les coefficients sont >0.
- Soit $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients >0. Montrer que A possède un vecteur propre à coefficients >0.
- Soient $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{N}^*$, $M_i = \begin{pmatrix}a_i & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ pour $1\le i\le n$. Montrer que $M_1\times\cdots\times M_n$ est à spectre inclus dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Exercice 66 Réduction des endomorphismes normaux [ENS MP 2024 # 66]

- Rappeler la définition de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
- Soient E un espace euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que u et u^* commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux etant soit de taille 1, soit de taille 2 et de la forme $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$.

Exercice 67 [ENS MP 2024 # 67] Montrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 68 [ENS MP 2024 # 68] On admet l'existence d'une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ d'unite 1 admettant une base de la forme $(1,i,j,k)$ avec $i^2=j^2=k^2=-1$ et $ij=k=-ji, jk=i=-kj, ki=j=-ik$. Montrer que le groupe des automorphismes de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ est isomorphe à $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 69 [ENS MP 2024 # 69] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^TB)$.
Soient $A,B\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\inf\limits_{\|G\|=1}\|AG-GB\| = \min\limits_{(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathrm{Sp}(A)\times\mathrm{Sp}(B)}|\lambda_1-\lambda_2|$.

Exercice 70 [ENS MP 2024 # 70] Soient X un ensemble et $K\colon X\times X\to\mathbb{R}$. On suppose que, pour tous $n\ge1$ et $x_1,\dots,x_n\in X$, $(K(x_i,x_j))_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $x\in X$, on note $K_x\colon y\mapsto K(x,y)$. Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^X$ engendré par les fonctions $(K_x)_{x\in X}$.
Soit $a,b\in E$. Par définition de E, il existe $(\lambda_x)_{x\in X}$ et $(\mu_x)_{x\in X}$ dans $\mathbb{R}^X$ n'admettant qu'un nombre fini de coefficients non nuls tels que $a=\sum_{x\in X}\lambda_xK_x$ et $b=\sum_{x\in X}\mu_xK_x$ et on pose

$$\langle a,b\rangle = \sum_{x,y\in X}\lambda_x\mu_yK(x,y).$$

- Montrer que cela définit bien un produit scalaire sur E.
- Montrer qu'il existe $f\colon X\to E$ telle que $\forall x,y\in X, K(x,y)=\langle f(x),f(y)\rangle$.

Exercice 71 [ENS MP 2024 # 71] Soient $p\ge1$ et $A,B\in\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\mathrm{Tr}\left(I_p - A^{-1}B\right)\le\ln\left(\frac{\det A}{\det B}\right)$.
- Soient $n\ge1$, $u_1,\dots,u_n\in\mathbb{R}^p$ et $\lambda>0$. Pour $1\le m\le n$, on pose $A_m=\sum_{k=1}^m u_k\,u_k^T$ et $B_m=\lambda I_p + A_m$. Montrer que, pour $1\le m\le n$, B_m est symétrique définie positive.
- Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A_n.
Montrer que $\sum_{m=1}^n\left\langle u_m, B_m^{-1}u_m\right\rangle\le\sum_{i=1}^p\ln\left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)$.

Exercice 72 [ENS MP 2024 # 72] Si G est un groupe, on note $Z(G)$ son centre. On pose $U_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,,\ A^*A = I_n\}$ ou $A^* = \overline{A}^T$, l'ensemble des matrices unitaires.

- Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G et que $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne, c'est-a-dire telle que $A^* = A$. Démontrer qu'il existe $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ telle que P^*AP soit diagonale.
- Démontrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit comme combinaison lineaire d'au plus quatre matrices unitaires.
- Déterminer $Z\left(\mathcal{U}_n(\mathbb{C})\right)$.

2) Analyse

Exercice 73 [ENS MP 2024 # 73] Soit F l'application qui à une norme N sur $\mathbb{R}^n$ associe la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour N.

- L'application F est-elle injective ?
- Quelle est l'image de F ?

Exercice 74 [ENS MP 2024 # 74] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi : E \to \mathbb{R}^+$ une application telle que

- pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)$.

On note $C = \{x \in E,\ \varphi(x) \leq 1\}$.

- Montrer que φ est une norme si et seulement si C est convexe.
- Soit K un partie de E convexe, compacte, d'intérieur non vide et symétrique par rapport à l'origine. Montrer que K est un voisinage de l'origine.
- Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Posons $I(x) = \{\lambda > 0\,;\ \exists k \in K,\ x = \lambda k\}$. Montrer que $I(x)$ est un convexe ferme, non vide.

Exercice 75 [ENS MP 2024 # 75] Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}^n, +)$ dans lequel 0 est un point isolé. Montrer qu'il existe une famille libre $(u_1, \ldots, u_p)$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $G = \{\sum_{k=1}^{p} a_k.u_k,\ (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Z}^p\}$.

Exercice 76 [ENS MP 2024 # 76] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E l'ensemble des pavés de $\mathbb{R}^n$, c'est-a-dire des parties de la forme $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ avec $a_1 \leq b_1$,…, $a_n \leq b_n$. Pour toute partie finie $G \subset \mathbb{R}^n$, on note $f(G) = \{F \cap G,\ F \in E\}$. Déterminer $\sup\{k \in \mathbb{N}\ ;\ \exists G \subset \mathbb{R}^n,\ |G| = k,\ f(G) = \mathcal{P}(G)\}$.

Exercice 77 [ENS MP 2024 # 77]

- Soient E un espace vectoriel normé et K un compact convexe non vide de E. Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions affines, continues, qui commutent deux à deux et telles que $f_i(K) \subset K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que les fonctions f_i ont un point fixe commun.
- Le résultat précédent reste-t-il valable pour une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions indexées par un ensemble non dénombrable ?

Exercice 78 [ENS MP 2024 # 78] Soient H le groupe (pour la composition) des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, H^+ le sous-groupe des homéomorphismes croissants.

- Caractériser les groupes finis isomorphes à un sous-groupe de H.
- Montrer qu'on peut munir tout sous-groupe G de H^+ d'une relation d'ordre totale telle que $\forall f, g, h \in G,\ f \leq g \implies h \circ f \leq h \circ g$.
- Réciproquement, montrer que tout groupe dénombrable pouvant être muni d'un tel ordre est isomorphe à un sous groupe de H^+.

Exercice 79 [ENS MP 2024 # 79] Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$, F une partie finie de $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$, f une application 1-lipschitzienne (pour les normes euclidiennes canoniques) de F dans $\mathbb{R}^m$.

1. sV2 On suppose que $\forall x \in F,\ \|f(x)\| > \|x\|$, montrer que 0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $f(F)$.
2. Montrer que l'on peut prolonger f en une application 1-lipschitzienne de $F \cup \{x\}$ dans $\mathbb{R}^m$.

Exercice 80 [ENS MP 2024 # 80] Soient $\gamma, \tau \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$D_N = \left\{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \|k\| \leq N \Rightarrow |\langle x, k\rangle| \geq \frac{\gamma}{\|k\|^\tau}\right\} \quad \text{et} \quad D = \bigcap_{N \geq 1} D_N.$$

Montrer que D est fermé et d'intérieur vide. Qu'en est-il de D_N ?

Exercice 81 [ENS MP 2024 # 81] Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f\colon E \to F$ telle que : $\forall r \in\ ]0,1]$, $\forall x \in E,\ B\left(f(x), \frac{r}{2}\right) \subset f(B(x,r)) \subset B(f(x), 2r)$.

- Montrer que f est continue et surjective.
- Que peut-on dire de l'image par f d'un ouvert ? D'un fermé ?
- Soit γ un chemin continu de $[0,1]$ dans F. Montrer qu'il existe un chemin c continu de $[0,1]$ dans E tel que $f \circ c = \gamma$.

Exercice 82 [ENS MP 2024 # 82]

- Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non vide. Soit $f : X \to X$. On suppose qu'il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in X, \|f(x) - f(y)\| \leq \theta\|x - y\|$. Montrer que f possède un unique point fixe c et que, pour tout $x \in X$, $f^m(x) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} c$.
- Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un compact non vide. Soit $f\colon X \to X$. On suppose que $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.
  - ▷ Soient Y, Z deux compacts non vides tels que $f(Y) \subset Y$ et $f(Z) \subset Z$. Montrer que $Y \cap Z$ est non vide.
  - ▷ En déduire que f possède un unique point fixe.

Exercice 83 [ENS MP 2024 # 83] On se place dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ munis d'une norme.

- Montrer qu'il existe $C > 0$ et $R_0 \geq 0$ tels que, pour tout $r \geq R_0,\ \mathrm{card}\{x \in \mathbb{Z}^n\ ;\ \|X\| \leq r\} \leq Cr^n$.
- On appelle plongement grossier $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ une fonction qui vérifie :
  - ▷ $\forall a \geq 0,\ \exists b \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}^n,\ \|x - y\| \leq a \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq b$,
  - ▷ $\forall b \geq 0,\ \exists a \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}^n,\ \|f(x) - f(y)\| \leq b \Rightarrow \|x - y\| \leq a$.

  Soit $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ un prolongement grossier.
  - ▷ Montrer qu'il existe $\rho\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $\mu > 0$ tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} \rho(x) = +\infty$ et
  $$\forall x, y \in \mathbb{Z}^n,\ \rho(\|x - y\|) \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \mu \|x - y\|.$$
  - ▷ Montrer que $m \geq n$.
- Adapter pour $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Exercice 84 [ENS MP 2024 # 84] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme. Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on pose :
$L_f(x, r) = \sup\left\{\|f(x) - f(y)\|\ ;\ y \in \mathbb{R}^2,\ \|x - y\| \leq r\right\}$,
$\ell_f(x, r) = \inf\left\{\|f(x) - f(y)\|\ ;\ y \in \mathbb{R}^2,\ \|x - y\| \geq r\right\}$.

- Montrer que :

$L_f(x, r) = \sup\left\{\|f(x) - f(y)\|\ ;\ y \in \mathbb{R}^2,\ \|x - y\| = r\right\}$,
$\ell_f(x, r) = \inf\left\{\|f(x) - f(y)\|\ ;\ y \in \mathbb{R}^2,\ \|x - y\| = r\right\}$. - Pour x fixe, montrer que $r \mapsto L_f(x, r)$ et $r \mapsto \ell_f(x, r)$ sont croissantes.
On dit que f est quasi-conforme s'il existe $K_f > 0$ tel que :
$\forall (x, r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*}$, $L_f(x, r) \leq K_f \ell_f(x, r)$.

- On suppose f quasi-conforme. Montrer qu'alors $L_f(x, 2r) \leq (1 + K_f) L_f(x, r)$.
- Montrer que f est quasi-conforme si et seulement si f^{-1} est quasi-conforme.

Exercice 85 [ENS MP 2024 # 85] Soient $n \geq 2$ et e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $a_{v,M} \in \mathbb{R}$, tel que la suite $(M^k v)_{k \geq 1}$ tende vers $a_{v,M} e_1$, avec de plus $v \mapsto a_{v,M}$ non identiquement nulle.
Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $f_v : M \in \mathcal{A} \mapsto a_{v,M}$ est continue.

Exercice 86 [ENS MP 2024 # 86] Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour $X \subset E$ et $x \in E$, on note $d(x, X) = \inf_{y \in X} \|y - x\|$ et $\Pi_X(x) = \{y \in X\ ;\ \forall z \in X,\ \|y - x\| \leq \|z - x\|\}$.

- Pour quels ensembles $Y \subset E$ existe-t-il $X \subset E$ et $x \in E$ tels que $Y = \Pi_X(x)$?
- Soient $X \subset E$ et $x \in E \setminus X$ tels que $d(x, X) = 0$. Montrer que $\Pi_X(x) = \emptyset$.
- Existe-t-il $X \subset E$ et $x \in E \setminus X$ tels que $d(x, X) > 0$ et $\Pi_X(x) = \emptyset$?
- On suppose qu'il existe un produit scalaire $\langle\ \rangle$ tel que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in E$, que E est de dimension finie et que $X \subset E$ est un ensemble convexe ferme et borne. Montrer que $\Pi_x(X)$ est un singleton.

Exercice 87 [ENS MP 2024 # 87] Soit $n \geq 1$ un entier, $L \in]0, 1[$, $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application L-lipschitzienne pour $\|\ \|_\infty$, et $x_* \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x_*) = x_*$.

- Soit $(x_k)_{k \geq 1}$ définie par $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \geq 1$, $x_{k+1} = F(x_k)$. Montrer que $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x_*$.
- Pour $I \subset \{1, \ldots, n\}$, on note $F^{|I}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $1 \leq i \leq n$, par $F^{|I}(x)_i = \begin{cases} F(x)_i & \text{si } i \in I \\ x_i & \text{si } i \notin I \end{cases}$.

Montrer que $F^{|I}$ est 1-lipschitzienne pour $\|\ \|_\infty$.

- Soit $(I_k)_{k \geq 1}$ une suite de sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ telle que chaque indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ appartienne à une infinite de ces ensembles. Soient $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et, pour $k \geq 1$, $x_{k+1} = F^{|I_k}(x_k)$. Montrer que cette suite converge vers x_*.

Exercice 88 [ENS MP 2024 # 88] On munit l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées de la norme $\|\ \|_\infty$.

- Soit (a_n) une suite réelle sommable. Montrer que l'application $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ définit une forme lineaire continue sur l'espace ℓ^∞.
- On suppose l'existence d'une partie $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que : (i) pour tous $A, B \in F$, $A \cap B \in F$, (ii) pour $A \in F$, F contient toute partie B de $\mathbb{N}$ qui contient A, (iii) F ne contient que des ensembles infinis, (iv) si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors $A \in F$ ou $\mathbb{N} \setminus A \in F$.
  - ▷ Soit $x \in \ell^\infty$.
  Montrer qu'il existe un unique réel x^∞ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in F, \forall n \in A, |x_n - x^\infty| \leq \varepsilon$.
  - ▷ En déduire l'existence d'une forme lineaire continue sur ℓ^∞ qui n'est pas de la forme donnée en question -.
- On note c_0 le sous-espace de ℓ^∞ des suites réelles de limite nulle. Montrer que toute forme lineaire continue sur c_0 est de la forme donnée en question -.

Exercice 89 [ENS MP 2024 # 89] Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, E une partie de $\mathbb{R}^2$ couplant toute boule de rayon r (pour la norme euclidienne canonique), $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ s'annulant sur E. Montrer que $P = 0$.

Exercice 90 [ENS MP 2024 # 90] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$, C un convexe ouvert de E ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une droite vectorielle ne couplant pas C.

Exercice 91 [ENS MP 2024 # 91] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^+)^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique point $\pi(x) \in \Delta$ tel que $\forall z \in \Delta$, $\langle z - \pi(x), x - \pi(x)\rangle \leq 0$.

- Soient $x, u \in \mathbb{R}^n$ et $x' = \pi(x+u)$.
  Montrer que, pour tout $z \in \Delta$, $2\langle u, z - x\rangle \leq \|z - x\|_2^2 - \|z - x'\|_2^2 + \|u\|_2^2$.
  Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $x_1, y_1 \in \Delta$ et $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ une suite strictement positive. Pour $k \geq 2$, on définit par récurrence $x_{k+1} = \pi(x_k + \gamma_k A y_k)$ et $y_{k+1} = \pi(y_k - \gamma_k A^T x_k)$.
- Montrer qu'on peut choisir la suite $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ de sorte que

$$\max_{x\in\Delta} \sum_{k=1}^{N} \langle x, Ay_k\rangle - \min_{y\in\Delta} \sum_{k=1}^{N} \langle x_k, Ay\rangle \leq o(N).$$

- En déduire que $\max_{x\in\Delta} \min_{y\in\Delta} \langle x, Ay\rangle = \min_{y\in\Delta} \max_{x\in\Delta} \langle x, Ay\rangle$.

Exercice 92 [ENS MP 2024 # 92] Soient E euclidien et $T : E \to E$. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$\forall (x,y) \in E^2,\ \big|\|T(x) - T(y)\| - \|x - y\|\big| \leq C$.
L'objectif est de montrer qu'il existe $h \in \mathbb{R}^+$ et un unique $u \in \mathcal{O}(E)$ tels que
$\forall x \in E,\ \|T(x) - u(x)\| \leq h$.

- Conclure dans le cas ou $C = 0$.
- Prouver l'unicité de u.
- Pour tout x de E, on pose $u_0(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{T(2^n x)}{2^n}$. Montrer que u_0 est bien définie, lineaire et conserve la norme.
- Conclure.

Exercice 93 [ENS MP 2024 # 93] Soient $(E, \langle\ \rangle)$ un espace préhilbertien, $F : E \to E$ et $G = \dfrac{1}{2}(\mathrm{id} - F)$.

- Montrer que, F est 1-lipschitzienne pour $\|$ si et seulement si

$\forall x, x' \in E,\ \langle G(x') - G(x), x' - x\rangle \geq \|G(x') - G(x)\|^2$.

- On suppose que F est 1-lipschitzienne pour $\|$ et qu'il existe $x_* \in E$ tel que $F(x_*) = x_*$ (autrement dit x_* est un point fixe de F). Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_1 \in E$ et, pour $n \geq 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + F(x_n)}{2}$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\|F(x_n) - x_n\| \leq \dfrac{2\|x_1 - x_*\|}{\sqrt{n}}$.
- En déduire que, si E est un espace euclidien, $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers un point fixe de F.

Exercice 94 [ENS MP 2024 # 94] Soient $n \geq 2$ et $I_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Im}(A) \subset E_\lambda(A)\}$, ou $E_\lambda(A)$ est le sous-espace propre de A associe à la valeur propre λ.

- Montrer que $I_n(\mathbb{R})$ est stable par similitude.
- Soient $A, B \in I_n(\mathbb{R})$.Montrer que A et B sont semblables si et seulement si $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$ et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.
- On note $I_n^*(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Im}(A) = E_\lambda(A)\}$. Étudier la connexite par arcs de $I_n(\mathbb{R})$ et de $I_n^*(\mathbb{R})$.
- Déterminer les classes de similitude incluses dans $I_2(\mathbb{R})$.

Exercice 95 [ENS MP 2024 # 95] Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe une norme stricte sur $\mathbb{R}^n$ pour laquelle les éléments de G sont des isométries.
- On suppose que les éléments de G stabilisent un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ note K. Montrer que les éléments de G ont un point commun dans K.
- Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel les éléments de G sont des isométries.

Exercice 96 [ENS MP 2024 # 96] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour tous $g \in G$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $g \cdot A = gAg^T$.

- Donner un exemple de produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la norme N_0 euclidienne associée.
- Soit $N : A \mapsto \sup\limits_{g\in G} N_0(g \cdot A)$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $K = \{gg^T, g \in G\}$. Montrer qu'il existe un compact convexe C vérifiant : $K \subseteq C$, $\{g \cdot A,\ (g, A) \in G \times C\} \subseteq C$ et $C \subseteq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Montrer qu'il existe un produit scalaire G invariant pour $\cdot$.
- La borne supérieure $\sup\limits_{A\in C} \sup\limits_{B\in C} \|A - B\|$ est-elle atteinte ? Si oui, est-elle atteinte en un unique A_0 ?

Exercice 97 [ENS MP 2024 # 97] Déterminer les valeurs d'adherence des suites $(\cos n)$ et $(\cos^n n)$.

Exercice 98 [ENS MP 2024 # 98] [PSLR] Soit S une partie de $\mathbb{N}^*$ infinie et stable par produit. On range les éléments de S en une suite strictement croissante $(s_n)_{n\geq 1}$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n\geq 1}$ admet une limite dans $[1, +\infty[$.

Exercice 99 [ENS MP 2024 # 99] Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $z_{n+1}=z_n e^{-i\,\mathrm{Im}(z_n)}$. Pour quelles valeurs de z_0 cette suite est-elle convergente ? **TODO**

Exercice 100 [ENS MP 2024 # 100] Trouver un équivalent de $S_n=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{k^n}{2^k}$ quand $n\to+\infty$.

Exercice 101 [ENS MP 2024 # 101] On fixe un entiers $n\geq 2$ et $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ une famille d'éléments de $]0,1[$. Soit pour $i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(x_k^i)_{k\geq 0}$ une suite réelle. On suppose que, pour tout $i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $x_{k+1}^i=(1-t_i)x_k^i+t_i x_k^{i+1}$. Montrer que les n suites $(x_k^i)_{k\geq 0}$ pour $i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ convergent vers une même limite.

Exercice 102 [ENS MP 2024 # 102] Soient $m\in\mathbb{N}^*$, $z_1,\ldots,z_m\in\mathbb{U}$ distincts et $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{C}$. On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{m}a_k z_k^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Montrer que $a_1=\cdots=a_m=0$.

Exercice 103 [ENS MP 2024 # 103] Soit $(a_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $\forall h\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k a_{k+h}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. **TODO**

Exercice 104 [ENS MP 2024 # 104] Pour $x_0>0$, on définit par récurrence $x_{n+1}=x_n+\int_{x_n}^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Étudier la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Donner un équivalent de x_n puis un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 105 [ENS MP 2024 # 105] Soit $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe une unique suite $(n_i)_{i\geq 1}\in(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, $n_{i+1}\geq {n_i}^2$ et que $\alpha=\sum_{i=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n_i}\right)$.

Exercice 106 [ENS MP 2024 # 106] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive.
On note, pour $\alpha\geq 0$, $\mathcal{R}_\alpha=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in[0,1]^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}}u_n a_n\leq\alpha\right\}$.
Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive sommable. Pour tout $\alpha>0$, construire une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{R}_\alpha$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n b_n=\max_{(u_n)\in\mathcal{R}_\alpha}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n b_n\right\}$.

Exercice 107 [ENS MP 2024 # 107] Soient $p\in]1,+\infty[$ et $q\in\mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

- Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ des suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que $\sum {a_n}^p$ et $\sum {b_n}^q$ convergent. Montrer que $\sum a_n b_n$ converge.
- Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sum a_n$ converge et $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}a_k$. Déterminer la nature de $\sum\frac{a_n}{{R_n}^\alpha}$.
- Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$. On suppose que, pour toute suite $(b_n)_{n\geq 0}$ d'ellements de $\mathbb{R}^+$ telle que $\sum {b_n}^q$ converge, $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $\sum {a_n}^p$ converge.

Exercice 108 [ENS MP 2024 # 108] On admet l'irrationalite de π. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha+\cos(n)}$.

- Montrer que $\sum u_n$ converge si $\alpha>\frac{1}{2}$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\sum u_n$ converge.

Exercice 109 [ENS MP 2024 # 109]

- Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_1,\ldots,a_n)\in{\mathbb{R}^+}^n$, $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$.
- Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}<e\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.
- Montrer que la constante e est optimale.

Exercice 110 [ENS MP 2024 # 110] Soit $(a_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $H_{0,n}=a_0+\cdots+a_n$ et, pour $\alpha\in\mathbb{N}^*$, $H_{\alpha,n}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}H_{\alpha-1,k}$. Si $(H_{\alpha,n})_{n\geq 0}$ converge, on dit que (a_n) est H_α-sommable.

- Soit $\alpha\in\mathbb{N}$. Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est H_α-sommable, montrer qu'elle est $H_{\alpha+1}$ sommable.
- On suppose $(H_{0,n})_{n\geq 0}$ periodique. Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ est H_α-sommable pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^*$.
- Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que $\sum a_n$ diverge. Montrer que, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas H_α-sommable.
- Soit $\alpha\in\mathbb{N}$. Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est H_α-sommable, montrer que $a_n=o(n^\alpha)$.
- Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 0}$ qui n'est pas H_α-sommable mais qui est $H_{\alpha+1}$-sommable.

Exercice 111 [ENS MP 2024 # 111]

- Montrer que : $\cos(k\theta)$, $\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}$, $\frac{\cos((k+1/2)\theta)}{\cos(\theta/2)}$ et $\frac{\sin((k+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}$

sont des polynômes en $\cos\theta$.

- Soient $a_0,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ des réels.

On suppose que : $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $g(\theta)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(k\theta)+b_k\sin(k\theta))\geq 0$. Montrer qu'il existe un polynôme complexe P tel que : $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $g(\theta)=|P(e^{i\theta})|^2$.

Exercice 112 [ENS MP 2024 # 112]

- Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n,p,u_{n+p}\leq u_n+u_p+C$, ou C est une constante réelle. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge ou tend vers $-\infty$.
- Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ continue et croissante, telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+1)=f(x)+1$. On note f^n la composée iterée de f (n fois).

Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left(\frac{f^n(x)-x}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers une limite qui ne depend pas de x.

Exercice 113 [ENS MP 2024 # 113] Soient $(a_1,\ldots,a_n)$ et $(b_1,\ldots,b_n)$ dans $(\mathbb{R}^{+*})^n$.
On note $a\geq b$ si : $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^{k}a_i\geq\sum_{i=1}^{k}b_i$ et $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$. Montrer que $a\geq b$ si
et seulement si, pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in(\mathbb{R}^{+*})^n$, $\sum_{i=1}^{n}x_i^{a_{\sigma(i)}}\geq\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^{n}x_i^{b_{\sigma(i)}}$.

Exercice 114 [ENS MP 2024 # 114]

- Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x \in [0, 2\pi]$ tel que $f(x) \geq \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$.
- Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Montrer qu'il existe une partie I de $[\![1, n]\!]$ telle que $\left|\sum_{j\in I} z_j\right| \geq \dfrac{1}{\pi}\sum_{j=1}^n |z_j|$.

Exercice 115 [ENS MP 2024 # 115] Soient $a < b$. Une dissection du segment $[a, b]$ est une suite finie $(t - 0 \leq k \leq n$ strictement croissante telle que $t_0 = a$ et $t_n = b$. Pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on définit la variation de f sur $[a, b]$ par $V(f, [a, b]) = \sup_{\substack{t \text{ dissection} \\ \text{def } [a,b]}} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$.

- Calculer $V(f, [a, b])$ dans le cas ou f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
- Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Montrer que $V(f, [0, 1]) < +\infty$ si et seulement s'il existe g et h croissantes telles que $f = g - h$.

Exercice 116 [ENS MP 2024 # 116] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $S_- = \{x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0\}$.

- L'ensemble S_- peut-il être fini non vide ?
- On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts tels que $S_- \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell(I_n) \leq \varepsilon$ (ou $\ell(I_n)$ designe la longueur de I_n). Montrer que f est croissante (donc $S_- = \emptyset$).

Exercice 117 [ENS MP 2024 # 117] Soient E un espace vectoriel, $C \subset E$ un ensemble convexe non vide, $a < b$ deux réels, et F l'ensemble des fonctions $f : C \to [a, b]$ convexes. Soit $x, y \in C$ fixes. Déterminer $\sup_{f\in F} (f(y) - f(x))$. Déterminer les cas ou la borne supérieure est atteinte.

Exercice 118 [ENS MP 2024 # 118] Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on note $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq +\infty\}$. Si $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$, on définit $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par \$f^*(y)=⊃$_{x\in R}$ \xy-f(x)\,\$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$. Montrer que $\mathrm{dom}(f^*)$ est un ensemble convexe et que f^* est convexe sur $\mathrm{dom}(f^*)$.
- Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable.

On pose $E = \{(y, a) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \forall x \in \mathbb{R},\ xy - a \leq g(x)\}$.

- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sup_{(y,a)\in E} (xy - a)$.
- En déduire que $(g^*)^* = g$.
- Etendre au cas ou g n'est pas dérivable.

Exercice 119 [ENS MP 2024 # 119] Soient I un intervalle réel contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose qu'il existe $A, C > 0$ telles que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq C|f(x)| + A$.

Montrer que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leq |f(0)|e^{C|x|} + \dfrac{A}{C}\left(e^{C|x|} - 1\right)$.

Exercice 120 [ENS MP 2024 # 120] Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue et dont une primitive est bornée. On suppose que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq \dfrac{2}{x^2}\int_0^x (x - y)\,|f(y)|dy$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelles généralisations peut-on étudier ?

Exercice 121 [ENS MP 2024 # 121] On note $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Une application $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}^{+^*}$ est appelée une jauge. Soit $D = ((a - 0 \leq i \leq n, (x - 0 \leq i \leq n - 1)$ une subdivision pointée de $[a, b]$, c'est-a-dire $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ et $\forall i \in [\![0, n - 1]\!],\ x_i \in [a_i, a_{i+1}]$. On dit que D est δ-fine lorsque pour tout i, $|a_{i+1} - a_i| \leq \delta(x_i)$.

- Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ telles que $\forall x, y \in [a, b], y \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
- Si δ est une jauge, montrer qu'il existe une subdivision pointée δ-fine.
- Redémontrer le theoreme de Heine pour f continue.
- Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et I un réel. On dit que f est HK-intégrable, d'intégrale I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ telle que, pour toute subdivision pointée $((a - 0 \leq i \leq n, (x - 0 \leq i \leq n - 1)$ δ-fine, on a $\left|\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)f(x_i) - I\right| \leq \varepsilon$.

Montrer que I est unique. On la note $\int_{HK} f$.

- Montrer que, si f est dérivable, f' est HK-intégrable et $\int_{HK} f' = f(b) - f(a)$.

Exercice 122 [ENS MP 2024 # 122] Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $P(0) \neq 0$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $z_1, \dots, z_p$ les racines de module strictement inférieur à r de P comptées avec multiplicité. Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(|P(re^{it})|)dt = \ln(|P(0)|) + \sum_{k=1}^p \ln\left(\dfrac{r}{|z_k|}\right)$.

Exercice 123 [ENS MP 2024 # 123] Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On dit qu'un endomorphisme u de E est positif si, pour tout $f \in E$, $f \geq 0$ implique $u(f) \geq 0$. On pose, pour $i \in \mathbb{N}$, $e_i : x \in [0, 1] \mapsto x^i$.

- Soit u un endomorphisme positif de E. Montrer que pour tout $f \in E$, $|u(f)| \leq u(|f|)$.
- Soit $f \in E$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall x, y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \dfrac{2\,\|f\|_\infty}{\delta^2}(x - y)^2$.
- Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite d'endomorphismes positifs de E. On suppose que, pour $i \in \{0, 1, 2\}$, la suite $(T_n(e_i))$ converge uniformément vers e_i sur $[0, 1]$. Montrer que, pour tout $f \in E$, la suite $(T_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
- Démontrer le theoreme de Weierstrass.

Exercice 124 [ENS MP 2024 # 124] Soit $s > 1$. On dit que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est s-Gevrey s'il existe $R, C > 0$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq CR^k (k!)^s$.

- Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+in^s x}$. Justifier que f est bien définie et s-Gevrey.
- Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\, e^{-1/x}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2-Gevrey.

Exercice 125 [ENS MP 2024 # 125] Pour $x > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on pose : $F_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^\alpha (1+t)^\beta \, \mathrm{d}t$.

- Pour quels (α, β) l'intégrale $F_{\alpha,\beta}(x)$ converge-t-elle absolument ?
- Pour un tel couple (α, β), étudier la régularite de $F_{\alpha,\beta}$.
- On pose $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ et $g : x \in]0,1[\mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Exprimer f et g en fonction des $F_{\alpha,\beta}$.
- Déterminer un développement asymptotique de $F_{\alpha,\beta}$ en $+\infty$.

Exercice 126 [ENS MP 2024 # 126] Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \Gamma(1/2)$.
- Montrer que, pour $x, y > 0$ et $\lambda \in [0,1]$, $\Gamma((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \Gamma(x)^{1-\lambda} \Gamma(y)^\lambda$.
- En déduire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n+1/2)^2 \leq \Gamma(n)\,\Gamma(n+1)\,; \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1)^2 \leq \Gamma(n+1/2)\Gamma(n+3/2)$.

- Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. Démontrer que la suite $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers Γ.

Exercice 127 [ENS MP 2024 # 127] Soient $x, y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $x'(t) = \sin(y(t))$ et $y'(t) = \cos(x(t))$.

- Montrer que $f : t \mapsto \sin(x(t)) + \cos(y(t))$ est constante.
- Soit $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2}\left(x(t) + y(t) - \frac{\pi}{2}\right)$. Montrer que les points $(\sin(\varphi(t)), \varphi'(t))$ sont situes sur un même cercle dont on déterminera le rayon.

Exercice 128 [ENS MP 2024 # 128] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, E l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Pour $u \in E$, soit X_u l'unique application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $X_u(0) = x$ et $\forall t \in [0,1], X_u'(t) = AX_u(t) + Bu(t)$. Montrer que $\{X_u(1)\ ;\ u \in E\} = \mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice $(A|AB|\ldots|AB^{n-1})$ de $\mathcal{M}_{n,n^2}(\mathbb{R})$ est de rang n.

Exercice 129 [ENS MP 2024 # 129]

- Que dire du spectre complexe d'une matrice symétrique réelle ? d'une matrice antisymétrique réelle ?
- Soient $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ vérifiant : $A' = AB - BA$. On suppose que : $\forall t \in \mathbb{R}, A(t) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B(t) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = P(t)^{-1}A(0)P(t)$.
- On se place dans le cas $n = 2$ avec : $A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ a_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}$ et (S) : $a_1' = a_1(b_2 - b_1)$, $b_1' = 2a_1'$, $b_2' = -2a_1'$, $b_1(0) + b_2(0) = 0$ et $a_1(0), b_1(0) \geq 0$.
- Calculer $AB - BA$.
- Trouver une solution particuliere de (S) au voisinage de 0.

Exercice 130 [ENS MP 2024 # 130] Pour $k \geq 3$, on note $G_k : z \mapsto \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m+nz)^k}$.

- Montrer que $G_k(z)$ est bien défini pour tout complexe z tel que $\operatorname{Im} z > 0$ et que la fonction $(x,y) \mapsto G_k(x+iy)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer que $G_k(iy)$ admet une limite quand $y \to +\infty$.
- Étudier l'existence des limites suivantes :

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m+in)^2} \text{ et } \lim_{M \to \infty} \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m+in)^2}, \text{ oi dans les deux cas la somme}$$

exclut $(n,m) = (0,0)$. Ces limites sont-elles égales ?

Exercice 131 [ENS MP 2024 # 131] Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3$. Démontrer que $(x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

Exercice 132 [ENS MP 2024 # 132] Soit $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (t,x) \mapsto F(t,x)$ continue et decroissante par rapport à x. Soient u et v appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ 1-periodiques par rapport à x.

- On suppose que $\frac{\partial u}{\partial t} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \leq 0 \leq \frac{\partial v}{\partial t} + F\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$.

Démontrer que $\sup_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}}(u - v) = \sup_{\{0\} \times \mathbb{R}}(u - v)$.

- On suppose que $\frac{\partial u}{\partial t} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$. Montrer que u est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Exercice 133 [ENS MP 2024 # 133] Soient $a > 0$, $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n > 0$. Calculer $\inf\limits_{\substack{y_1, \ldots, y_n > 0 \\ y_1 + \cdots + y_n \leq}} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i^a}$.

Exercice 134 [ENS MP 2024 # 134] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

On considére $n+1$ vecteurs $v_1, \ldots, v_{n+1}$ engendrant positivement $\mathbb{R}^n$, c'est à dire tels que $\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i,\ (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}\right\} = \mathbb{R}^n$.

Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue croissante telle que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\langle v_i, x \rangle)$.

- Montrer qu'il existe bien $n+1$ vecteurs $v_1, \dots, v_{n+1}$ engendrant positivement $\mathbb{R}^n$.
- Montrer que g atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$.
- On suppose que f est intégrable en $-\infty$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} f(\langle v_i, x\rangle)v_i = 0$.

Exercice 135 [ENS MP 2024 # 135] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

- Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que vaut $d(A, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$?
- On note $S = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $M_0 \in S$ telle que $d(A, S) = \|A - M_0\|$.
- Rappeler le résultat sur les extrema sous contrainte. Que peut-on en déduire sur la matrice M_0 définie ci-dessus ?

Remarque •

- 0
- S est fermé.
- On travaille sous $\det M = 0$, est la différentielle du déterminant est $H \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}\, M_0^T H)$, donc $\mathrm{Com}\, M_0^T$ est colinéaire à $A - M_0$.

3) Géométrie

Exercice 136 [ENS MP 2024 # 136] • Montrer que, si $n \geq 2$, le groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$ préservant les points dont les affixes sont les racines n-iemes de l'unite est un groupe d'ordre $2n$ que l'on note $\mathcal{D}_{2n}$.

- Soient p un nombre premier, G un groupe fini d'ordre $2p$. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ou à $\mathcal{D}_{2p}$.

Exercice 137 [ENS MP 2024 # 137] • On note G le groupe (pour la composition) des deplacements du plan, i.e. des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Montrer que, si H est un sous-groupe de G, H est discret si et seulement si l'orbite de tout $z \in \mathbb{C}$ sous l'action de H n'a pas de point d'accumulation.

- Le résultat subsiste-t-il si on remplace G par le groupes des similitudes directes du plan, i.e. des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$?

4) Probabilités

Exercice 138 [ENS MP 2024 # 138] Soit E un espace vectoriel normé et soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. On considére des variables aléatoires $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ i.i.d telles que $\mathbf{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$. Si $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$, on pose $N(v_1, \dots, v_n) = \mathbf{E}\left(\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k\|\right)$. Démontrer que, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [-1, 1]^n,\ N(\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_n u_n) \leq N(u_1, \dots, u_n)$.

Exercice 139 [ENS MP 2024 # 139] On considére une pièce equilibrée et ε_n la valeur du n-ieme lancer que l'on considére à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Soient $X_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ et $\tau = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 0\}$. Déterminer $\mathbf{P}(\tau = n)$ ainsi qu'un équivalent de cette quantite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 140 [ENS MP 2024 # 140] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi de Poisson de paramêtre $\lambda > 0$, et Y la loi geometrique de paramêtre $p \in]0, 1]$.

- Montrer que $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = k)$. On pose $A = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.
- Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{rg}(A))$.
- Calculer $\mathbf{P}(A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ puis $\mathbf{P}(A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}))$.
- Déterminer la probabilité pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- On pose $B = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ X-Y & Y \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{P}(B \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$.
- Soient Z une variable aléatoire réelle et $C = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ Z & Y \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{P}(C \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$. - Soit M une matrice aléatoire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la famille des coefficients est i.i.d., chaque coefficient suivant la loi uniforme sur $\{0, -1, 1\}$. Déterminer $P(M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 141 [ENS MP 2024 # 141] On note $E = [\![1, n]\!]$ et Δ la différence symétrique. Soit $p \in [0, 1]$ et X et Y deux variables aléatoires i.i.d de Ω dans $\mathcal{P}(E)$ telles que, pour tout $i \in E,\ \mathbf{P}(i \in X) = p$.

- Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{card}(X\Delta Y))$.
- On note $D(n)$ le cardinal maximal d'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ telle que, pour toutes parties A et B distinctes de $\mathcal{A}$, $|A\Delta B| \geq n/3$. Calculer $D(n)$.

Exercice 142 [ENS MP 2024 # 142] Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Si N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $X_{N+n}(\omega) = X_{N(\omega)+n}(\omega)$.

- Existe-t-il N tel que $\mathbf{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_{N+n} = 1) = 1/2$?
- Existe-t-il N tel que $\mathbf{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\mathbf{P}(X_{N+n} = 1) = 1/2$?

Exercice 143 [ENS MP 2024 # 143] Soient $E = [\![1, n]\!]$ et $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ telle que $\forall i \in E,\ \mathbf{P}(i \in X) = p$ et, pour $i \neq j \in E$, $(i \in X)$ et $(j \in X)$ sont indépendants.

Pour Y variable aléatoire de même loi que X et indépendante de X, calculer $\mathbf{E}(|X\Delta Y|)$.

Exercice 144 [ENS MP 2024 # 144] Soient G un groupe fini de cardinal N, et A une partie de G aléatoire, ou l'on prend chaque élément de G indépendamment avec probabilité $p > 0$.

On note $\mathrm{AA} = \{xy,\ (x,y) \in A^2\}$.

- Montr per que $\mathbf{P}(1 \in \mathrm{AA})$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini.
- Montr per que $\mathbf{P}(\mathrm{AA} = G)$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini.

Exercice 145 [ENS MP 2024 # 145] • Soit X une variable aléatoire réelle positive L^2. Montrer que, pour $\lambda \in]0,1[$, $\mathbf{P}(X \geq \lambda \mathbf{E}(X)) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

- Soit (u_n) une suite de variables aléatoires positives indépendantes. Montrer que la série $\sum u_n$ converge presque surement si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}(\min(u_n, 1)) < +\infty$.
- Soit $\alpha > 0$. On suppose que $\mathbf{P}(X_n \geq r) \underset{r \to +\infty}{\sim} r^{-\alpha}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ pour que $\sum x_n X_n$ converge presque surement.

Exercice 146 [ENS MP 2024 # 146] Soient $\lambda > 0$ et N_λ une variable de Poisson de paramètre λ.

Pour $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bornée, on pose $Tf : n \in \mathbb{N} \mapsto \lambda f(n+1) - nf(n)$.

- Montrer que $Tf(N_\lambda)$ est d'esperance finie, nulle.
- Pour μ et ν deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$, et X et Y variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ de lois respectivement données par μ et ν, on note $d(\mu,\nu) = d(X,Y) = \frac{1}{2} \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \mathbf{E}(g(X) - g(Y))$.
  Montrer l'existence de $C_\lambda > 0$ tel que, pour toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $d(N, N_\lambda) \leq C_\lambda \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \mathbf{E}(Tf(N))$.

Exercice 147 [ENS MP 2024 # 147] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, \ldots, x_n\}$. L'entropie de X est définie par $\mathcal{H}(X) = -\sum_{k=1}^n p_i \ln(p_i)$ avec $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$.

- Montrer que $\mathcal{H}(X) \geq 0$ avec egalite si et seulement si X est constante.
- Soit $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite positive telle que $p_1 + \cdots + p_n = 1$ et (q_i) une autre suite positive de somme 1.
  - ▷ Montrer que $\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \geq \sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i)$. Expliciter le cas d'égalité.
  - ▷ Montrer que $\mathcal{H}(X) \leq \ln(n)$ avec egalite si et seulement si X suit une loi uniforme.
- Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\{x_1, \ldots, x_n\}^2$.
  On note $p_{i,j} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = x_j)$ pour $1 \leq i,j \leq n$.
  L'entropie de (X,Y) est $\mathcal{H}(X,Y) = -\sum_{i,j=1}^n p_{i,j} \ln(p_{i,j})$.
- Montrer que $\mathcal{H}(X,Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$.

Exercice 148 [ENS MP 2024 # 148] Soit $(E, \langle\ \rangle)$ un espace euclidien. Soient $v_1, \ldots, v_n \in E$ tels que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\|v_i\| \leq 1$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [-1,1]$ et $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Montrer qu'il existe des $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1,1\}$ tels que $v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i$ satisfait $\|v - w\| \leq \sqrt{n}$.

Exercice 149 [ENS MP 2024 # 149] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d sur $\mathbb{Z}$ à support fini suivant la loi μ. On pose $\nu(k) = \frac{e^{\lambda k} \mu(k)}{\mathbf{E}(e^{\lambda X_1})}$ et on considére une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ i.i.d suivant la loi ν. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. On prend $\lambda \geq 0, a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, n \geq 1$.

- Montrer que $\mathbf{P}(na \leq T_n \leq (a+\varepsilon)n) \leq \frac{e^{\lambda n(a+\varepsilon)}}{(\mathbf{E}(e^{\lambda X}))^n} \mathbf{P}(S_n \geq na)$.
- On suppose $X \sim -X$ et $\exists k > a,\ (a > 0),\ \mu(k) > 0$.

Démontrer que $\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n \geq na) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf_{s \geq 0}(-sa + \log \mathbf{E}(e^{sX}))$.

Exercice 150 [ENS MP 2024 # 150] Soient $\sigma > 0$, $n \geq 1$ un entier et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discretes telles que pour tout $1 \leq i \leq n$ et $s > 0$, $\mathbf{E}\left(\exp(sX_i)\right) \leq \exp\left(\sigma^2 s^2\right)$. Montrer que $\mathbf{E}\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i\right) \leq 2\sigma\sqrt{\ln n}$.

Exercice 151 [ENS MP 2024 # 151] Soient $n \geq 1$, $a > 0$, et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discretes, indépendantes, d'esperance nulle, et à valeurs dans $[-a, a]$.

- Montrer que, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $s > 0$, $\mathbf{E}\left[e^{sX_i}\right] \leq \exp\left(\frac{\mathbf{V}(X_i)}{a^2}\left(e^{as} - 1 - as\right)\right)$. - On note $\sigma^2 = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i)$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma^2 + 2at/3}\right).$$

Exercice 152 [ENS MP 2024 # 152] Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$. On pourra utiliser sans demonstration le fait que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$.

- Montrer que, pour tout $k \geq 1$ entier, $\Gamma(k) = (k-1)!$ et $\Gamma(k + 1/2) \leq k!$.
- Soient $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire réelle discrete à valeurs dans un ensemble discret, telle que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{P}\left(|X| > t\right) \leq 2\exp\left(-\dfrac{t^2}{2\sigma^2}\right)$. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbf{E}\left(|X|^k\right) \leq (2\sigma^2)^{k/2} k\Gamma(k/2)$.
- On suppose de plus que $\mathbf{E}\left(X\right) = 0$. Montrer que $\forall s > 0$, $\mathbf{E}\left[\exp(sX)\right] \leq \exp\left(4\sigma^2 s^2\right)$.

Exercice 153 [ENS MP 2024 # 153] Soient $n \geq 3$ un entier. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, une suite alternante pour σ est une suite strictement croissante $(i_1)_{1 \leq m}$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$ telle que :

- soit pour tout $k \in [\![2, \ell - 1]\!]$, $\sigma(i_k) > \max\{\sigma(i_{k-1}), \sigma(i_{k+1})\}$;

- soit pour tout $k \in [\![2, \ell-1]\!]$, $\sigma(i_k) < \max\{\sigma(i_{k-1}), \sigma(i_{k+1})\}$.

On note $\Delta(\sigma)$ la longueur maximale d'une suite alternante pour σ et on considére σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Calculer $\mathbf{E}(\Delta(\sigma_n))$.

Exercice 154 [ENS MP 2024 # 154] Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires discretes réelles i.i.d. Pour $n \geq 1$, on note $M_n = \max\limits_{1\leq k\leq n} X_k$. Soit $\alpha > 0$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists (a_n)_{n\geq 1} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}^*}, \quad \forall x \geq 0, \quad \mathbf{P}\left(\dfrac{M_n}{a_n} \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-x^{-\alpha})$,

(ii) $\forall x > 0, \quad \dfrac{\mathbf{P}(X_1 > xt)}{\mathbf{P}(X_1 > t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} x^{-\alpha} \qquad (\text{et } \forall t > 0, \mathbf{P}(X_1 > t) > 0)$.

Exercice 155 [ENS MP 2024 # 155] Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

- Montrer que, pour une indexation de sous-suite $(\varphi(n))_{n\geq 1}$ bien choisie, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{k\geq N}\left(\left|\dfrac{S_{\varphi(k)}}{H_{\varphi(k)}} - 1\right| > \dfrac{1}{k}\right)\right) = 0$.
- Montrer que l'évènement « $\left(\dfrac{S_n}{\ln(n)}\right)_{n\geq 1}$ converge» est presque sûr.

Exercice 156 [ENS MP 2024 # 156]

- Soient $n \in \mathbb{N}$, $(p_0, \ldots, p_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$. Montrer que les racines de $\sum_{i=0}^{n} p_i X^i$ dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur ou egal à 1.
- Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite réelle non identiquement nulle telle que $\sum a_k x^k$ ait pour rayon de convergence $R > 0$. Si $j \in \mathbb{N}$, on dit que la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ change de signe en j s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_j a_{j+k} < 0$ et que $a_i = 0$ pour $i \in [\![j+1, j+k-1]\!]$. Montrer que l'ensemble des $x \in]0, R[$ tels que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$ est fini de cardinal majoré par le nombre de changements de signes de $(a_i)_{i\geq 0}$.
- Soit $(A_k)_{k\geq 0}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $S_n = \sum_{k=0}^{n} A_k$ et N_n le nombre de $x \in]0, 1[$ tels que $\sum_{i=0}^{n} A_i x^i = 0$. Montrer que $N_n \leq \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \mathbb{1}_{S_{2k+1}=0}$ et en déduire que $\mathbf{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(\sqrt{n})$.

Exercice 157 [ENS MP 2024 # 157] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = k) > 0$. Soit $N \in L^2$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On pose $X = X_N$.

- Montrer qu'il existe une unique fonction $f_0 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que l'on déterminera, telle que $\mathbf{E}\left((f_0(X) - N)^2\right) = \min\limits_{g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}} \mathbf{E}\left((g(X) - N)^2\right)$.
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $R(g, n) = \mathbf{E}\left((g(X_n) - n)^2\right)$. Montrer que, si la suite $(R(f_0, n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante egale à un certain R_0, alors $R_0 = \min\limits_{g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} R(g, n)$ et f_0 est l'unique fonction vérifiant cette condition.

Exercice 158 [ENS MP 2024 # 158] Soient $a \in]0, 1[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. à l'aide d'une interprétation probabiliste, calculer la borne supérieure, pour $(u_n)_{n\geq 1}$ parcourant l'ensemble des suites à valeurs dans $[0, 1]$, de

$$\sum_{1\leq n_1<n_2<\cdots<n_m} \prod_{\ell=1}^{m} u_{n_\ell} \prod_{n_{\ell-1}<k<n_\ell} (1 - au_k).$$

II) X - MP **XENS**

1) Algèbre

Exercice 159 [X MP 2024 # 265] Pour toute partie finie non vide X de $\mathbb{R}$ dont on note $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ les éléments, on pose :

TODO

$$a^+(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i + 1) \quad \text{et} \quad a^-(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i - 1).$$

L'objectif est d'etablir que : $\sum B \subset AB \neq \emptyset a^-(B) = a^+(A)$ pour n'importe quelle partie finie non vide A de $\mathbb{R}$.

On se donne donc $A = \{a_1 \ldots, a_n\}$ une partie finie non vide de $\mathbb{R}$, avec $a_1 < \ldots < a_n$.

- On suppose le résultat acquis. Trouver une expression de : $\alpha(A) = \sum\limits_{\substack{B\subset A\\ a_n\in B}} a^-(B)$.
- Établir le résultat cherché.
- On suppose $A = [\![1, n]\!]$. Calculer : $\sum\limits_{\substack{B\subset A\\ B\neq\emptyset\\ B\cap(B+1)=\emptyset}} a^-(B)$.

Exercice 160 [X MP 2024 # 266]

- Soit n un entier supérieur à 1 et premier avec 10. Montrer que n possède un multiple dont l'écriture en base 10 n'a que des 9.
- On remarque que $\frac{1}{7} = 0, \underline{142857142857}\ldots\underline{142857}\ldots$ avec $142 + 857 = 999$.

$\frac{285+714}{7} = 0, \underline{285714285714}\ldots\underline{285714}\ldots 076 + 923 = 999$

$\frac{1}{13} = 0,\underline{076923}\,\underline{076923}\dots\underline{076923}\dots$
Expliquer.

Exercice 161 [X MP 2024 # 267] Pour r un rationnel non nul s'écrivant $r = 2^k a/b$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et a, b deux entiers impairs, on définit la valuation dyadique de r par $v_2(r) = k$.
On admet que : $\forall x, y \in \mathbb{Q}^*$, $v_2(xy) = v_2(x) + v_2(y)$ et si $x + y \neq 0$, $v_2(x + y) \geq \min(v_2(x), v_2(y))$, avec egalite si $v_2(x) \neq v_2(y)$.
On note enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

- Montrer que pour tout $n > 1$, $H_n \notin \mathbb{Z}$.
- Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \leq n - 2$, on a $v_2(H_n - H_m) < 0$.
- Montrer les propriétés admisses plus haut.
- La question - peut-elle s'adapter à la valuation 3-adique ?

Exercice 162 [X MP 2024 # 268] Quels sont les m de $\mathbb{N}^*$ tels qu'il existe m éléments consécutifs de $\mathbb{N}^*$ divisibles par des cubes d'éléments de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$?

Exercice 163 [X MP 2024 # 269] Montrer que tout $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k (-2)^k$ avec $N \geq 0$ et les ε_k dans $\{0, 1\}$.

Exercice 164 [X MP 2024 # 270] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des entiers naturels qui ne sont pas divisibles par le carré d'un entier supérieur ou egal à 2, et $q(n) = |\mathcal{F} \cap [\![1, n]\!]|$. On note $\mathcal{E}(n, k) = \mathbb{R}^{+*} \cap \left\{\sum_{i=1}^{k} \sqrt{a_i} - \sum_{i=1}^{k} \sqrt{b_i},\ (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k) \in [\![0, n]\!]^{2k}\right\}$ et $\Delta(n, k) = \min \mathcal{E}(n, k)$.

- On admet que $(\sqrt{n})_{n \in \mathcal{F}}$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
  Montrer que $\Delta(n, k) \leq \frac{k(\sqrt{n}-1)}{(q(n)+k-1)-1}$.
- On démontre dans cette question le résultat admis dans la précédente.
- Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{R}$, et x un élément de $\mathbb{K} \cap \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbb{K}[\sqrt{x}] = \mathbb{K} + \mathbb{K}\sqrt{x}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, et que si $\sqrt{x} \notin \mathbb{K}$ alors il existe un unique automorphisme σ de l'anneau $\mathbb{K}[\sqrt{x}]$ différent de l'identite et fixant tous les éléments de $\mathbb{K}$.

Dans la suite, on fixe un entier $n \geq 1$ on suppose acquire, pour tout ensemble fini A constitue de n nombres premiers, la libert é de la famille des $\sqrt{m}$, ou m parcourt l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ ayant tous leurs diviseurs premiers dans A. Soit A un ensemble forme de $n + 1$ nombres premiers $p_1, \dots, p_{n+1}$.

- On construit par récurrence une suite $(\mathbb{K}_0, \dots, \mathbb{K}_n)$ de corps : $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1}[\sqrt{p_i}]$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\mathbb{K}_n$ est de dimension 2^n comme $\mathbb{K}_0$-espace vectoriel, et en preciser une base. Montrer qu'il existe un automorphisme σ du corps $\mathbb{K}_n$ qui fixe $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}}$ et envoie $\sqrt{p_n}$ sur $-\sqrt{p_n}$. Dans la suite, on raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{p_{n+1}} \in \mathbb{K}_n$.
- Montrer que $\sqrt{p_{n+1}} = \alpha + \beta\sqrt{p_n}$ pour un $\alpha \in \mathbb{K}_{n-1}$ et un $\beta \in \mathbb{K}_{n-1}$, puis montrer qu'en fait $\sqrt{p_{n+1}} = \beta\sqrt{p_n}$.
- Montrer que $\sqrt{p_{n+1}} = \lambda \prod_{k=1}^{n} \sqrt{p_k}$ pour un $\lambda \in \mathbb{Q}$, et conclure à une contradiction.
- Conclure.

Exercice 165 [X MP 2024 # 271] Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4. On note L l'ensemble des carres de $\mathbb{F}_p^*$.

- Montrer que $|L| = \frac{p-1}{2}$.
- Montrer que si $x \in L$, alors $-x \notin L$.
- On fixe $x \in \mathbb{F}_p^*$ et l'on pose $A = \left\{(\ell_1, \ell_2) \in L^2\ ;\ x = \ell_1 - \ell_2\right\}$. Calculer card A.

Exercice 166 [X MP 2024 # 272] Soit p un nombre premier impair.

- Dénombrer les $(x, y) \in (\mathbb{F}_p)^2$ tels que $x^2 + y^2 = 1$.
- Soit $z \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$. Dénombrer $\{\,(x, y) \in \mathbb{F}_p^2,\ x^2 + y^2 = z\}$.

Exercice 167 [X MP 2024 # 273] Soit p un nombre premier impair. On pose $q = 2p + 1$ et l'on suppose q premier. On considére l'équation : $(E) : x^p + y^p + z^p = 0$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ une solution de (E) telle que p ne divise aucun des entiers x, y et z et telle que x, y, z soient premiers entre eux deux à deux.

- Montrer que q divise x, y ou z.
- Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que : $y + z = a^p$, $x + y = b^p$, $x + z = c^p$.
- Factoriser $y^p + z^p$.
- Conclure à une contradiction.

Exercice 168 [X MP 2024 # 274] Soient p un nombre premier congru à 1 modulo 4 et S l'ensemble $S = \{x, y, z) \in \mathbb{N}^3\ ;\ p = x^2 + 4yz\}$. Pour $(x, y, z) \in S$ on pose :

- si $x < y - z$, $f(x, y, z) = (x + 2z, z, -x + y - z)$;
- si $y - z < x < 2y$, $f(x, y, z) = (2y - x, y, x - y + z)$;
- si $x > 2y$, $f(x, y, z) = (x - 2y, x - y + z, y)$.

Montrer que f définit une involution de S. En déduire que p s'écrit $u^2 + v^2$ avec $(u, v) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 169 [X MP 2024 # 275] Soit $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. On considére l'équation $(*) : x^2 - dy^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

- Traiter les cas $d < 0$ et $d = k^2$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- Dans la suite, on suppose $d > 0$ et $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ solution de $(*)$.

On pose $z = x_0 + \sqrt{d}\, y_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $z^{n+1} = x_n + \sqrt{d}\, y_n$. - En déduire que, si l'ensemble des solutions de $(*)$ est non trivial, i.e. n'est pas reduit à $\{(\pm 1, 0)\}$, il en existe une infinite.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|p - qx| < \dfrac{1}{n}$.
- Montrer qu'il existe une infinite de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $|p - qx| < \dfrac{1}{q}$.
- Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ pour lequel il existe une infinite de couples d'entiers (p, q) tels que $|p^2 - dq^2| < K$.
- Conclure que $(*)$ possède des solutions non triviales.

Exercice 170 [X MP 2024 # 276] • Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. On admet que le groupe multiplicatif $\mathbb{F}^\times$ est cyclique.

Soient $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{F}$. On note $\widehat{\mathbb{F}^\times}$ l'ensemble des morphismes de $\mathbb{F}^\times$ dans $\mathbb{C}^*$ prolonges par 0 en 0. On note $N(X^n = u)$ le nombre de zeros du polynôme $X^n - u$ dans $\mathbb{F}$. On note $\widehat{\mathbb{F}^\times}[n]$ l'ensemble des $\chi \in \widehat{\mathbb{F}^\times}$ tels que $\chi^n = 1$. Montrer que $N(X^n = u) = 1 + \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[n], \chi \neq 1} \chi(u)$.

- On suppose $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \equiv 1 \pmod 3$ et p impair.

Montrer que $N(X^3 + Y^3 = 1) = p + \sum_{\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[3] \setminus \{1\}} J(\chi_1, \chi_2) = p - 2 + 2 \operatorname{Re}\mathfrak{e}\, J(\omega, \omega)$ si

$\omega \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[3] \setminus \{1\}$, ou $J(\chi_1, \chi_2) = \sum_{a+b=1} \chi_1(a)\chi_2(b)$.

- On admet que $|J(\omega, \omega)| = \sqrt{p}$ et $pJ(\omega, \omega) = g_\omega^3$ ou $g_\omega = \sum_{x \in \mathbb{F}} \omega(x)\zeta_p^x$ avec $\zeta_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$.

Montrer que $N(X^3 + Y^3 = 1) = p - 2 - a_p$ avec $a_p^2 + 27b_p^2 = 4p$ ou $b_p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 171 [X MP 2024 # 277] Pour p premier impair, on note $\chi \colon \mathbb{F}_p \to \{1, -1, 0\}$ la fonction définie par $\chi(0) = 0$, $\chi(x) = 1$ pour tout élément x de $\mathbb{F}_p^\times$ qui est un carre, et $\chi(x) = -1$ dans toute autre situation.

Pour $x \in \mathbb{F}_p$, on note $e^{\frac{2i\pi x}{p}}$ la quantite $e^{\frac{2i\pi k}{p}}$, ou $k \in \mathbb{Z}$ est un representant quelconque de x.

Pour $t \in \mathbb{N}$, on pose $g_p(t) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(tx) e^{\frac{2i\pi x}{p}}$.

- Soit p un nombre premier impair, et des entiers a et b tels que $0 < a < b < p$. Montrer que $g_p(1) \sum_{n=a}^{b-1} \chi(n) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(x) \sum_{t=a}^{b-1} e^{\frac{2i\pi tx}{p}}$
On admettra dans la suite que $|g_p(1)| = \sqrt{p}$.
- Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, quels que soient p premier impair, et a, b entiers tels que $0 \leq a < b < p$, on ait $\operatorname{card}\{k \in [\![a, b-1]\!],\ k \text{ est un carre modulo } p\} = \dfrac{b-a}{2} + u_{p,a,b}$ ou $|u_{p,a,b}| \leq M\sqrt{p}\, \ln p$.

Exercice 172 [X MP 2024 # 278] Soit G un groupe fini de cardinal $2n$ ou n est impair.

- Montrer que G possède un élément d'ordre 2.
- Montrer que G possède un sous-groupe d'ordre n.

Ind. Considérer l'application Φ qui à $g \in G$ associe $\Phi(g) : G \to G$ telle que, pour tout $x \in G$, $\Phi(g)(x) = gx$.

- Trouver un contre-exemple si n est pair.

Exercice 173 [X MP 2024 # 279] Soit p un nombre premier. On dit qu'un groupe G est un p-groupe si, pour tout $g \in G$, l'ordre de g est une puissance de p. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que G est k-divisible si, pour tout $g \in G$, il existe $x \in G$ tel que $x^k = g$.

- Montrer qu'un p-groupe non trivial et p-divisible est infini.
- Donner un exemple de tel groupe.
- Montrer que G est alors k-divisible pour tout k.

Exercice 174 [X MP 2024 # 280] Soit G un groupe d'ordre $n \geq 1$. Pour $g_1, \ldots, g_k \in G$, on note $E(g_1, \ldots, g_k) = \{g_{i_1} \cdots g_{i_s}\ ;\ s \in \mathbb{N},\ \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq k\}$ (avec la convention que l'élément neutre est le produit vide donc appartient à cet ensemble).

- Soient $g_1, \ldots, g_k \in G$ tel que $G = E(g_1, \ldots, g_k)$. Montrer que $k \geq \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
- Soit $A \subset G$. Montrer que $\sum_{x \in G} |A \cap Ax| = |A|^2$.
- Montrer qu'il existe $g_1, \ldots, g_k \in G$ tels que $G = E(g_1, \ldots, g_k)$ avec $k \leq \lfloor \log_2(2n \ln n) \rfloor$.

Exercice 175 [X MP 2024 # 281] On note $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ le groupe des permutations de $\mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe cyclique de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ d'ordre 2^n, ou $n \geq 2$, contenant la conjugaison complexe.

- Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il existe $\tau \in G$ tel que $\tau(z) \neq \pm z$.
- Soit H un sous-groupe de G d'ordre 2^{n-1}. Montrer que H contient au moins deux applications $\mathbb{R}$-lineaires.
- Montrer que G contient exactement deux applications $\mathbb{R}$-lineaires.

Exercice 176 [X MP 2024 # 282] Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre. On suppose que $\mathcal{A}$ est munie d'une norme N vérifiant : $\forall a, b \in \mathcal{A},\ N(ab) = N(a)N(b)$.

- Soit $x \in \mathcal{A}$. En posant $z = z \cdot 1_{\mathcal{A}}$, on identifie $\mathbb{C}$ à une sous-algèbre de $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, N(x - z_0) \leq N(x - z)$. On pose $a = x - z_0$.
- On suppose que $N(a) = 2$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{U}_n,\ N(a - z) \geq 2$. Montrer ensuite que $N(a-1) = 2$ puis $N(a-5) = 2$.
- Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, i.e. $\dim \mathcal{A} = 1$.

Exercice 177 [X MP 2024 # 283] • Soit f l'application qui à $z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$ associe le point d'intersection de $\mathbb{R}$ et de la droite passant par z et i. Montrer que $f(z) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow z \in \mathbb{Q}(i)$.

- Montrer qu'il existe une infinite de triplets non proportionnels $(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3$ tels que $a^2+b^2=c^2$.

Exercice 178 [X MP 2024 # 284] On appelle nombre de coefficients positifs du polynôme $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$ de degre $n\geq 1$ le cardinal de l'ensemble $\{i\in [\![0,n]\!],\ a_i\geq 0\}$.

- Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degre $n\geq 2$. Montrer que P^2 à au moins trois coefficients positifs.
- Montrer que, pour tout entier $n\geq 2$, il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ de degre n tel que P^2 ait exactement trois coefficients positifs.

Exercice 179 [X MP 2024 # 285] Soient $n\in\mathbb{N}$, $P\in\mathbb{Z}[X]$ de degre majore par n, Δ le pgcd de $P(0),P(1),\dots,P(n)$. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, Δ divise $P(k)$.

Exercice 180 [X MP 2024 # 286] Soit $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k\in\mathbb{C}[X]$ de degre $n\geq 2$ dont on note $z_0,\dots,z_{n-1}$ les racines. On note $t_1,\dots,t_{n-1}$ les racines complexes de P' et l'on suppose que : $\forall k\in[\![0,n-1]\!], |z_k|\leq 1$.

- Montrer que : $\forall k\in[\![1,n-1]\!], |t_k|\leq 1$.
- On suppose que z_0 est racine simple de P. Calculer $\dfrac{P''(z_0)}{P'(z_0)}$ deux facons :

(i) en fonction de z_0 et des t_k ; (ii) en fonction de z_0 et des z_k.

- Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ tel que $|z|\leq 1$. Montrer que $\mathfrak{Re}\left(\dfrac{1}{1+z}\right)\geq\dfrac{1}{2}$.
- On suppose que $z_0=1$ et que z_0 est racine simple. Montrer qu'il existe $k\in[\![1,n-1]\!]$ tel que $|1-t_k|\leq 1$.
- On suppose que $|z_0|=1$. Montrer qu'il existe $i\in[\![1,n-1]\!]$ tel que $|z_0-t_i|\leq 1$.
- Soient $Q\in\mathbb{R}[X]$ non constant et $\alpha\in\mathbb{R}^*$. On pose $P=Q^2+\alpha^2$. Montrer qu'il existe une racine z de P et une racine t de P' telles que $|z-t|\leq|z|$.

Exercice 181 [X MP 2024 # 287] Pour $P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n\in\mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\|=\left(\sum_{i=0}^n|a_i|^2\right)^{1/2}$.

- Montrer que $n\geq 2$, $a_0>0$, et θ est racine simple de P.
- On pose $Q=X^nP(1/X)$ et $f:z\mapsto\frac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que si θ^{-1} est un pole de f alors $a_0=1$ et n est pair.
- Montrer qu'il existe un réel $r>0$ et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers telle que, pour tout $z\in D_o(0,r)$, on ait f définie en z et $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$.

Exercice 182 [X MP 2024 # 288]

- Soient $P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n\geq 1$. On pose $r=\min\{|z|,\ z\in\mathbb{C},\ P(z)=0\}$, et on suppose $r>0$. Si $a_k\neq 0$, montrer que $r^k\leq\binom{n}{k}\frac{|a_0|}{|a_k|}$.
- Soit $An=\{P\in\mathbb{C}[X]\mid\deg P=n,\ P(-1)=P(1)=0\}$. Montrer que $\sup_{P\in A_n}\{\min\{|z|,\ P'(z)=0\}\}<+\infty$.

Exercice 183 [X MP 2024 # 289] Soient $\omega,q\in\mathbb{C}^*$ tels que ω^2 n'est pas une puissance entière de q. On considère l'équation $(*)\colon\omega f(z)g(qz)=\omega^2f(qz)g(z)+P(z)$, d'inconnues $(P,f,g)\in\mathbb{C}[X]^3$, avec g,P unitaires.

- Si (P,f,g) vérifie $(*)$, trouver une relation entre les degrés de P,f,g.
- On fixe P. Montrer l'existence de (f,g) tel que (P,f,g) vérifie $(*)$.
- On fixe (P,f). Y a-t-il unicité de g tel que (P,f,g) vérifie $(*)$?

Exercice 184 [X MP 2024 # 290] Soit $\theta\in\mathbb{C}$ un nombre algébrique.

- Montrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de θ est l'ensemble des multiples d'un certain polynôme $P\in\mathbb{Q}[X]$ unitaire, déterminé de manière unique. On écrit $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$, avec $a_n=1$, et on suppose P à coefficients entiers, θ irrationnel et $a_0\geq 0$.
- Montrer que $n\geq q2$, $a_0>0$ et θ est racine simple de P.
- On pose $Q=X^nP(1/X)$ et $f\colon z\mapsto\frac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que si θ^{-1} est un pôle de f, alors $a_0=1$ et n est pair.
- Montrer qu'il existe $r>0$ et une suite (b_n) d'entiers telle que pour tout $z\in D(0,r)$, on ait f définie en z et $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$.

Exercice 185 [X MP 2024 # 291] Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si M est inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre non-inversible ?
- Si M n'est pas inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre inversible ?

Exercice 186 [X MP 2024 # 292] Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $a,b\in\mathcal{L}(V)$. Pour $u,v\in\mathcal{L}(V)$, on pose $[u,v]=uv-vu$. On suppose que a est nilpotent et que $[a,[a,b]]=0$. Montrer que $[a,b]$ et ab sont nilpotents.

Exercice 187 [X MP 2024 # 293] Soit $V_0,\dots,V_n$ des espaces vectoriels, $(v_0^+,\dots,v_{n-1}^+)\in\mathcal{L}(V_0,V_1)\times\cdots\times\mathcal{L}(V_{n-1},V_n)$ et $(v_1^-,\dots,v_n^-)\in\mathcal{L}(V_1,V_0)\times\cdots\times\mathcal{L}(V_n,V_{n-1})$. On suppose que $v_{i-1}^+\circ v_i^-=-v_{i+1}^-\circ v_i^+$ pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$, et que $v_{n-1}^+\circ v_n^-=0$. Montrer que l'endomorphisme $v_1^-\circ v_0^+$ de V_0 est nilpotent. Déterminer l'indice de nilpotence maximal possible de $v_1^-\circ v_0^+$.

Exercice 188 [X MP 2024 # 294] Pour tout $\sigma\in\mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de permutation associée et, pour tout k, $n_k(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

- Soit $\sigma\in S_n$. Calculer, pour tout k, $\mathrm{tr}(P_\sigma^k)$ en fonction des $n_r(\sigma)$.
- En déduire que deux permutations $\sigma,\tau\in\mathcal{S}_n$ sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si les matrices P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 189 [X MP 2024 # 295] Soient $V=\mathbb{C}^n$ et $T=(\mathbb{C}^*)^n$. Pour tout $v\in V$ et toute partie $H\subset V$, on note $H\cdot v=\{(h_1v_1,\dots,h_nv_n),\ h\in H\}$.

- Soit $v\in V$. Déterminer la nature topologique de $T\cdot v$. Preciser notamment son adherence.
- Quels sont les sous-espaces $W\subset V$ tels que, pour tout $v\in T$, $W\cdot v=W$?

- Dénombrer les familles $(W - i \in [\![0, n]\!]$ de sous-espaces vectoriels satisfaisant la condition de la question précédente et les inclusions strictes $W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_n$.

Exercice 190 [X MP 2024 # 296] Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et φ un morphisme de groupes de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}(V)$ tel que $\{0\}$ et V soient les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les $\varphi(g)$ pour $g \in \mathbb{U}$.

- Montrer que $\dim V = 1$.
- On suppose $f\colon \theta \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(e^{i\theta})$ dérivable en 0. Déterminer φ.

Exercice 191 [X MP 2024 # 297] Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que (V, A, B) est une realisation de M si :- V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d,

- $A = (a_1, \ldots, a_n)$ est une famille libre de formes lineaires sur V,
- $B = (b_1, \ldots, b_n)$ est une famille libre de vecteurs de V,
- pour tous i, j, $a_i(b_j) = m_{i,j}$.

On dit que d est la dimension de la realisation.

- Montrer que si M est realisée par un espace de dimension d, elle l'est aussi par un espace de dimension $d' > d$.
- Trouver une realisation de la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Trouver la dimension minimale d'une realisation de M_0.

Exercice 192 [X MP 2024 # 298] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant à $AB - BA$. Calculer $\exp(A + B)$.

Exercice 193 [X MP 2024 # 299] Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \chi_B$ et $AM = MB$.

- Montrer que, pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}((A - MX)^r) = \mathrm{tr}((B - XM)^r)$.
- En déduire que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A - MX) = \det(B - XM)$.

Exercice 194 [X MP 2024 # 300] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ peut-elle s'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 195 [X MP 2024 # 301] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $ab - ba = f \circ v$ avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

- Calculer $\det(ab - ba)$.
- Montrer que a et b sont cotrigonalisables.

Exercice 196 [X MP 2024 # 302] Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par crochet de Lie : pour $M, N \in \mathcal{A}$, $[M, N] = MN - NM \in \mathcal{A}$.

- On suppose que, pour tout $M \in \mathcal{A}$, $N \mapsto [M, N]$ induit un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{A}$. Montrer que $\forall M, N \in \mathcal{A}$, $[M, N] = 0$.
- On suppose que $\dim \mathcal{A} \leq 3$ et que, pour tout $M \in \mathcal{A}$, $N \mapsto [M, N]$ induit un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{A}$. On pose $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ et, pour $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_{j+1} = \{[M, N],\ (M, N) \in \mathcal{A}_j^2\}$. Montrer que $\mathcal{A}_3 = \{0\}$.

Exercice 197 [X MP 2024 # 303] Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un drapeau de E est une famille de sous-espaces $(F - i \in [\![0, n]\!]$ telle que $F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n$.

- Soit $(F - i \in [\![0, n]\!]]$ un drapeau de E. Déterminer $\dim F_k$ pour tout $k \in [\![0, n$.

On considére dorenavant deux drapeaux $(F - i \in [\![0, n]\!]]$ et $(G - i \in [\![0, n$.

- Soient $i \in [\![1, n]\!]$, $j_0 \in [\![0, n]\!]$ tels que $F_{i-1} + G_{j_0} = F_i + G_{j_0}$. Montrer que, pour tout $j \geq j_0$, $F_{i-1} + G_j = F_i + G_j$.
- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $F_{i-1} + G_j = F_i + G_j$.
- Montrer que l'application σ qui à i associe $\min\{j \in [\![1, n]\!],\ F_{i-1} + G_j = F_i + G_j\}$ est une permutation de $[\![1, n]\!]$.
- Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ e_i \in F_i \cap G_{\sigma(i)}$.
- Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique permutation $\tau \in \mathcal{S}_n$ pour laquelle il existe deux matrices U et V triangulaires supérieures dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant \$A=UP$_\tau$V\$ou $P_\tau = (\delta_{i,\tau(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$, et montrer qu'on peut en outre imposer que 1 soit la seule valeur propre de U.

Exercice 198 [X MP 2024 # 304] On considére un groupe fini G et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie. Soit ρ un morphisme injectif de G dans $\mathrm{GL}(V)$.

- Calculer $\mathrm{tr}(\rho(e))$ ou e est le neutre de G.
- Montrer que, pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable.
- Montrer que, si $\mathrm{tr}(\rho(g)) = \mathrm{tr}(\rho(e))$, alors $\rho(g) = \rho(e)$.
- Soit $f : G \to \mathbb{C}$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $a_m = \sum_{g \in G} f(g) \left(\mathrm{tr}(\rho(g))\right)^m$. Démontrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m \neq 0$ lorsque $f(e) \neq 0$.
- Montrer que $\Phi : z \mapsto \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$ est une fonction rationnelle.
- On prend $G = \mathfrak{S}_3$ et $\rho\colon \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{GL}(V)$.

Montrer qu'il existe une décomposition de V sous la forme $\bigoplus_i E_i$ telle que :
(i) $\forall i,\ \forall g \in G,\ E_i$ est stable par $\rho(g)$, (ii) $\forall i,\ \dim E_i \in \{1, 2\}$.

Exercice 199 [X MP 2024 # 305] Soit $d \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $\delta_1, \delta_2 > 0$ avec $\delta_1 \neq \delta_2$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $\forall i \neq j, \|x_i - x_j\| \in \{\delta_1, \delta_2\}$. Montrer que $n \leq \dfrac{(d+1)(d+5)}{2}$.

Ind. Montrer que les $f_i : y \mapsto \left(\|y - x_i\|^2 - \delta_1^2\right)\left(\|y - x_i\|^2 - \delta_2^2\right)$ sont lineairement indépendantes.

Exercice 200 [X MP 2024 # 306] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})\ ;\ M^T M = nI_n\right\}$.

- Déterminer H_1, H_2 et H_3.
- Soit $n \geq 4$ tel que $H_n \neq \emptyset$. Montrer que 4 divise n.
- à l'aide de $A \in H_n$, construire une matrice $B \in H_{2n}$.
- Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 3\,[4]$. Montrer que H_{p+1} n'est pas vide.

Exercice 201 [X MP 2024 # 307] On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ unitaire. Soient $\sigma_u : x \mapsto x - 2\langle x, u\rangle\, u$ et $\Omega_u = \left\{x \in \mathbb{R}^3\ ;\ \langle x, u\rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, \sigma_u(x)\rangle \leq 0\right\}$.

- Décrire et representer Ω_u.
- Montrer que Ω_u est auto-dual, c'est-a-dire que $\Omega_u = \left\{y \in \mathbb{R}^3\ ;\ \forall x \in \Omega_u,\ \langle x, y\rangle \geq 0\right\}$.
- On dit que $x \in \Omega_u$ est extremal si : $\forall x_1, x_2 \in \Omega_u, x = x_1 + x_2 \Rightarrow x, x_1, x_2$ colineaires.

Quels sont les points extremaux de Ω_u ?

- Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on dit que f est extremal si $f(\Omega_u) \subset \Omega_u$ et, pour tous $g, h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $f = g+h$, $g(\Omega_u) \subset \Omega_u$, $h(\Omega_u) \subset \Omega_u$, on a f, g, h colineaires.

Déterminer les endomorphismes extremaux de rang 1.

Exercice 202 [X MP 2024 # 308] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $r = \operatorname{rg}(v_1, \ldots, v_n)$. On cherche à quelle condition il existe une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et un projecteur orthogonal p tels que : $\forall i \in [\![1, n]\!], p(f_i) = v_i$.

- Traiter le cas $r = n$. - On suppose dans cette question que $n = 2$ et $r = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante dans ce cas.

Exercice 203 [X MP 2024 # 309] Combien y a-t-il de matrices orthogonales de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$?

Exercice 204 [X MP 2024 # 310] Un produit scalaire hermitien Φ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une application $\Phi : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que : $\forall y \in E, x \mapsto \Phi(x, y)$ est lineaire ; $\forall (x, y) \in E^2, \Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$; $\forall x \in E \setminus \{0\}, \Phi(x, x) > 0$. On note alors $\|x\| = \sqrt{\Phi(x, x)}$ pour $x \in E$.

- On munit $\mathbb{C}^2$ du produit scalaire hermitien tel que $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$. Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\left\{\langle Tx, x\rangle\ ;\ x \in \mathbb{C}^2,\ \|x\|^2 = 1\right\}$.
- On munit l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ de carre sommable du produit scalaire défini par : $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$. Soit T l'endomorphisme de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui à $(u_n)_{n \geq 0}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n \geq 0}$. Déterminer $\left\{\langle Tu, u\rangle\ ;\ u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}),\ \|u\|^2 = 1\right\}$.

Exercice 205 [X MP 2024 # 311] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ et $b_1 \leq \cdots \leq b_n$ des nombres réels, A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$ et $\chi_B = \prod_{k=1}^n (X - b_k)$. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

Exercice 206 [X MP 2024 # 312] On munit l'espace $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle u(e_i), e_i\rangle = \lambda_i$.

Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base de vecteurs propres de u.

2) Analyse

Exercice 207 [X MP 2024 # 313] Soit E un espace vectoriel normé. Que dire d'une partie A de E à la fois ouverte et fermée ?

Exercice 208 [X MP 2024 # 314] Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que A, A°, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\overline{\overset{\circ}{A}}$ soient toutes distinctes.

Exercice 209 [X MP 2024 # 315] Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$ (ou $d \geq 1$).

- Montrer que la boule unite fermée pour N est fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0.
- Soit C une partie non vide de E, fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0. Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}^d$ dont C est la boule unite fermée.

Exercice 210 [X MP 2024 # 316] Soit $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$.

- Montrer que si f est continue alors le graphe de f noté Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. La réciproque est-elle vraie ?
- Montrer que si Γ_f est compact alors f est continue.

Exercice 211 [X MP 2024 # 317] Soient E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes non nuls de E.

- Trouver des propriétés de base sur A (stabilité ou symétrie).
- Montrer que, pour tout $a \in A$, $|a| < 2$.
- Montrer que $\overline{A} = [-2, -1/2] \cup \{0\} \cup [1/2, 2]$.

Exercice 212 [X MP 2024 # 318] Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

- Soit $h_1\colon E \to \mathbb{R}$ définie par $h_1(f) = \sum\limits_{\substack{p/q \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ p \wedge q = 1}} f\left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{q^3}$. Montrer que h_1 est bien définie et continue.
- Soient $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et $h_2\colon E \to \mathbb{R}$ définie par $h_2(f) = \sup_{t\in[0,1]} g(f(t))$.
Déterminer les points de continuité de h_2.

Exercice 213 [X MP 2024 # 319] Existe-t-il une fonction continue $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f \circ f = \exp$? **TODO**

Exercice 214 [X MP 2024 # 320]
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer la norme subordonnée de A relative à la norme infinie, puis à la norme 1.
- Montrer que si $\|A\|_{\mathrm{op},\infty} \leq 1$ et $\|A\|_{\mathrm{op},1} \leq 1$, alors $\|A\|_{\mathrm{op},2} \leq 1$.
- Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\inf_{B\notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \|B - A\|_{\mathrm{op},2} = \sqrt{\lambda_1}$, ou λ_1 est la plus petite valeur propre de AA^T.

Exercice 215 [X MP 2024 # 321] Soit (u_n) une suite réelle majorée telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$. Montrer que (u_n) est constante.

Exercice 216 [X MP 2024 # 322] On définit la suite (z_n) par $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right)$.
- Lorsque $z_0 \in \mathbb{R}^*$, étudier l'existence de la suite (z_n) et sa convergence.
- Même question lorsque $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 217 [X MP 2024 # 323]
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ que l'on note a_n.
- Montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite ℓ à déterminer. Donner un équivalent de $a_n - \ell$.

Exercice 218 [X MP 2024 # 324] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement décroissante à termes dans $]0,1[$. Soient $\alpha > 0$ et (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(u_n^\alpha + a_n)$. Montrer qu'il existe un unique $u_0 \geq 0$ tel que la suite (u_n) converge vers un réel > 0. Déterminer alors cette limite.

Exercice 219 [X MP 2024 # 325]
- Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ avec $a \wedge b = 1$. Montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $n = au + bv$.
- Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose que l'ensemble $S = \{s_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est stable par produit.

Montrer que $\frac{s_{n+1}}{s_n} \to 1$ si et seulement s'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\ln(s_p)}{\ln(s_q)} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 220 [X MP 2024 # 326] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodique.
On définit : $\forall S \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n(f, S) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(S_k)$.
- Montrer que la suite $(M_n(f, S))$ converge pour toute suite S si et seulement si f est constante.
- On dit qu'une suite réelle (u_n) est équirépartie modulo 1 lorsque

$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 1-periodique, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)dx$.

Montrer que la suite $(\sqrt{n})$ est equiperpartie modulo 1.

Exercice 221 [X MP 2024 # 327] Calculer la somme de la série de terme general $n^2 2^{-(n+1)}$.

Exercice 222 [X MP 2024 # 328] Soit $\varphi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ injective. Nature de $\sum \frac{\varphi(n)}{n^2}$?

Exercice 223 [X MP 2024 # 329] Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Exercice 224 [X MP 2024 # 330] Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série $\sum u_n$ converge.
Montr per que la série de terme general $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$ diverge.

Exercice 225 [X MP 2024 # 331]
- Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. On suppose que $\frac{S_n}{nu_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a > 0$. Déterminer la nature de (S_n). Donner un équivalent de $\frac{1}{u_n}\sum_{k=0}^n ku_k$.
- Soient $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $T_n = v_0 + \cdots + v_n$. On suppose que $\frac{S_n}{nu_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\frac{T_n}{nv_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b \in \mathbb{R}^{+*}$. Donner un équivalent de $\frac{1}{u_n v_n}\sum_{k=0}^n u_k v_k$.

Exercice 226 [X MP 2024 # 332] Déterminer les fonctions dérivables $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(x + yf(x))$.

Exercice 227 [X MP 2024 # 333] Soit $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(mn) = f(m) + f(n)$ pour tous $m, n \geq 1$.
- On suppose f croissante. Montr per qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = c\ln n$. - On suppose que $f(n+1) - f(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = c\ln n$.

Exercice 228 [X MP 2024 # 334] Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Si $f \in E$, on pose $\Delta(f) : x \mapsto f(x+1) - f(x)$.
- Montrer que Δ est un endomorphisme de E. Est-ce un automorphisme ?
- Soient $f \in E$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe $x_n \in]x, x+n[$ tel que $\Delta^n(f)(x) = f^{(n)}(x_n)$.

Ind. Étudier $y \mapsto f(x+y)$ et $y \mapsto \sum_{k=0}^n \dfrac{y(y-1)\cdots(y-k+1)}{k!}\Delta^k(f)(x)$.

Exercice 229 [X MP 2024 # 335] Déterminer les $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 2(f(x/2) + f(1 - x/2))$.

Exercice 230 [X MP 2024 # 336] Soient N et d deux entiers supérieurs ou egaux à 1. On pose $D = [\![-N, N]\!]^d$ et on note $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

On note $\partial D = \left\{\sum_{i=1}^d x_i e_i \,;\, (x_1, \dots, x_n) \in D,\ \exists i \in [\![1, d]\!],\ |x_i| = N\right\}$ et $\mathring{D} = D \setminus \partial D$.

Pour $i \in [\![1, d]\!]$ et $u : D \to \mathbb{R}$, on pose $\forall x \in \mathring{D},\ \Delta_i u(x) = 2u(x) - u(x + e_i) - u(x - e_i)$.

On pose, pour $x \in \mathring{D}$, $Mu(x) = \prod_{i=1}^d \Delta_i u(x)$.

- Construire une fonction $u : D \to \mathbb{R}^+$ concave, i.e. vérifiant $\forall i \in [\![1, d]\!]$, $\Delta_i u \geq 0$, telle que $\forall x \in \mathring{D}$, $Mu(x) > 0$ et $u|_{\partial D} = 0$.

Pour $f \colon \mathring{D} \to \mathbb{R}^+$ fixée, on note A l'ensemble des $h : D \to \mathbb{R}^+$ concaves, nulles sur ∂D et telles que $Mh \geq f$. Soit $u : x \mapsto \inf_{h \in A} h(x)$.

- Montrer que A est non vide.
- Montrer que $u \in A$ et que $Mu = f$.

Exercice 231 [X MP 2024 # 337] Si f est une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on note $V(f)$ la borne supérieure, dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble $\left\{\sum_{k=0}^{n-1} |f(a_{k+1} - f(a_k)| \,;\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq a_0 \leq a_1 \cdots \leq a_n \leq 1\right\}$. On note VB l'ensemble des fonctions f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $V(f) < +\infty$.

- Montrer que VB est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ contenant les fonctions monotones et les fonctions lipschitziennes.
- Donner un exemple de fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ n'appartenant pas à VB.
- Montrer qu'une fonction f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est dans VB si et seulement si elle est différence deux fonctions croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall g \in [0, 1]^{[0,1]}, V(g) < +\infty \implies V(f \circ g) < +\infty$;
(ii) f est lipschitzienne.

Exercice 232 [X MP 2024 # 338]

- Soit $f \colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. - Montrer qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$; déterminer les valeurs possibles de ℓ. - Si $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) - \ell x$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $+\infty$ et déterminer les limites possibles.
- Soient f, g convexes et continues sur $[0, 1]$ vérifiant $\max(f, g) \geq 0$.

Montrer qu'il existe α, β positifs et non tous nuls tels que $\alpha f + \beta g \geq 0$.

- Soient $f_1, \dots, f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ convexes et continues vérifiant $\max(f_1, \dots, f_n) \geq 0$.

Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ positifs et non tous nuls vérifiant $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \geq 0$.

Exercice 233 [X MP 2024 # 339] Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer l'équivalence entre :
(i) f n'est pas polynomiale,
(ii) Vect $\left(\{x \mapsto f(\alpha x + \beta) \,;\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}\right)$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Exercice 234 [X MP 2024 # 340] Soient F un fermé de $\mathbb{R}$, $O = \mathbb{R} \setminus F$.

- Montrer que O est reunion dénombrable d'intervalles ouverts bornes.
- Montrer qu'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 235 [X MP 2024 # 341] On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \|_\infty$.
Pour $f \in E$, soit $T(f) : t \in [0, 1] \mapsto \sup_{[0,t]}(f) - f(t)$. Soit $f \in E$.

- Montrer que $T(f)$ est continue, que $T(f) \geq 0$ et que $T(f)(0) = 0$.
- Montrer que la suite $(\|T^n(f)\|)_{n \geq 0}$ est decroissante.
- Si f est K-lipschitzienne, montrer que $T(f)$ est lipschitzienne.
- Soit $f \in E$ lipschitzienne. Montrer que $(T^n f)$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 236 [X MP 2024 # 342] Soit $f : [0, 1] \to [-a, b]$ continue, ou a et b sont dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.
Montrer que $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq ab$.

Exercice 237 [X MP 2024 # 343] Pour $r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $D_n(r) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n \cos(rx) dx$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe P_n et Q_n des polynômes à coefficients entiers de degre au plus n tels que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $D_n(r) = \frac{n!}{r^{2n+1}}(P_n(r) \cos(r) + Q_n(r) \sin(r))$.
- En déduire que π est irrationnel.

Exercice 238 [X MP 2024 # 344] Soient $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact et E l'ensemble des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ bornées par 1. Déterminer sup $\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi' \,;\, \varphi \in E \right\}$. TODO

Exercice 239 [X MP 2024 # 345] Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{-x} + e^{2x} |\sin x|} \, \mathrm{d}x$?

Exercice 240 [X MP 2024 # 346] Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et lipschitzienne. Peut-il exister un réel x non nul tel que la série de terme general $f(nx)$ diverge ?

Exercice 241 [X MP 2024 # 347]
- Soit (f_n) une suite de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ convergeant uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$. On suppose que, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\int_0^1 f_n' g \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Que dire de f ?
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

Exercice 242 [X MP 2024 # 348] Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1-(1-e^{-n})^x\right) \sim \ln(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 243 [X MP 2024 # 349] Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^*)$. Soit m, M deux réels vérifiant : $0 < m < M$ et $m \leq |a| \leq M$. On suppose egalement que $m > 2$ ou $M < \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ continue et bornée vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = 1 + \frac{F(qt)}{a(t)}$.

Exercice 244 [X MP 2024 # 350] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence appartient à $]0,+\infty[$.

Exercice 245 [X MP 2024 # 351] Soit $x > 0$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\frac{x^k}{k!} < e^{-x} < \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} < \arctan x < \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k(k!)^2} < \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t < \sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k(k!)^2}$.

Exercice 246 [X MP 2024 # 352] Montrer que, pour tous $r \in\,]\,0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\ln\left|1-re^{i\theta}\right| = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{n}\cos(n\theta)$.

Exercice 247 [X MP 2024 # 353] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) \geq 0$.
- On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \leq 0,\ f(x) = 0$.
- On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x) \leq \frac{x}{n}f'(x)$. Que peut-on en déduire ?
- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

Exercice 248 [X MP 2024 # 354] Soit $(L_n)_{n\geq 0}$ définie par $L_0 = L_1 = 1$ et, si $n \geq 1$, $L_{n+1} = (n+1)L_n - \binom{n}{2}L_{n-2}$, avec $L_{-1} = 0$. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n}{n!}x^n$.
- Montrer que le rayon de convergence de f est strictement positif.
- Montrer que $\frac{L_n}{n!} \to 0$.
- Déterminer f. Ind. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
- En déduire un équivalent de $\frac{L_n}{n!}$.

Exercice 249 [X MP 2024 # 355] Une série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est dite primitive lorsqu'elle est à termes entiers et il n'existe pas d'entier $d > 1$ divisant tous les a_n.
- Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries primitives. Montrer que leur produit de Cauchy est une série primitive.
- Soit $F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$, ou $c_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n, telle qu'il existe P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ avec $P \wedge Q = 1$ et $Q(0) = 1$, tels que, pour z voisin de 0, on ait $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que $(P,Q) \in \mathbb{Q}[X]^2$.

Exercice 250 [X MP 2024 # 356] Soit $n \geq 2$. On pose $g_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{4k}}\binom{2k}{k}^2$. Soit K_n l'élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{=} K_n(x) + o(x^n)$.
- Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|K_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = g_n$.
- Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou egal à 1, de somme $f(z)$. On suppose que, pour $|z| < 1$, $|f(z)| \leq 1$. Montrer que $|\sum_{k=0}^n a_k| \leq g_n$.

Exercice 251 [X MP 2024 # 357] Déterminer la limite de la suite de terme general $u_n = n\int_0^{+\infty}\sin(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 252 [X MP 2024 # 358] Soit $r \in]0,\pi[$. Déterminer la limite de la suite de terme general $u_n = \int_{-r}^{r}\frac{\sin(nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 253 [X MP 2024 # 359] Déterminer un équivalent en 1^- de $x \mapsto \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}}dt$.

Exercice 254 [X MP 2024 # 360] Calculer $f(x) = \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ixt}}{1+t^2}dt$.

Exercice 255 [X MP 2024 # 361] Soit $t > 0$. Our $p \in \mathbb{R}$, on pose $F_c(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos(px^2)\,\mathrm{d}x$, $F_s(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\sin(px^2)\,\mathrm{d}x$ et $Z = F_c + iF_s$.
- Montrer que Z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer une équation différentielle du premier ordre satisfaite par F.
- En déduire F_c et F_s.

Exercice 256 [X MP 2024 # 362] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{xf'(x)}{f(x)} \to a \in \mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$.
- Soit $m \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $x \mapsto \frac{f(mx)}{f(x)}$ admet une limite en $+\infty$; la calculer.

Soit $I : t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx}f(x)dx$.
- Montrer que I est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer que I admet une limite finie en $+\infty$.
- Supposons $a < -1$. Déterminer la limite de I en 0^+.

Exercice 257 [X MP 2024 # 363] • Soient I et J deux segments de $\mathbb{R}$, et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ continue. Montrer l'existence et l'egalite des deux quantites $\int_I \left(\int_J f(x,y)dy \right) dx$ et $\int_J \left(\int_I f(x,y)dx \right) dy$.

- Pour $\alpha \in]0,1[$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f^2 et f'^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$, on note $\|f\|_\alpha^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+2\alpha}} dy \right) dx$. Montrer que $\| \, \|_\alpha$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ (f,f') \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})^2\}$.

Exercice 258 [X MP 2024 # 364] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ telles que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_i' = \sum_{j=1}^n a_{i,j} f_j$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.

Exercice 259 [X MP 2024 # 365] • Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Montrer que $\int_0^\pi f^2 \le \frac{\pi^2}{8} \int_0^\pi (f')^2$.

- Soit $f, q \in \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0,\pi],\ q(x) < \frac{8}{\pi^2}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $y \in \mathcal{C}^2([0,\pi],\mathbb{R})$ telle que $y'' + qy = f,\ y(0) = a,\ y(\pi) = b$.

Exercice 260 [X MP 2024 # 366] Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $H(f) : x \mapsto x^2 f(x) - f''(x)$, $A_-(f) : x \mapsto -f'(x) + xf(x)$ et $A_+(f) : x \mapsto f'(x) + xf(x)$.

- Déterminer $A_- \circ A_+$ et $A_+ \circ A_-$.
- Montrer qu'il existe une unique $\varphi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de carre intégrable, telle que $H(\varphi_0) = \varphi_0$ et $\varphi_0(0) = 1$.On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = A_-^n(\varphi_0)$.
- Montrter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(\varphi_n) = (2n+1)\varphi_n$.
- Montrter que φ_n s'écrit sous la forme $P_n \times \varphi_0$ avec P_n polynomiale.

Exercice 261 [X MP 2024 # 367] • Soit f une fonction croissante de $[a,b]$ dans $[a,b]$. Montrter que f possède un point fixe.

- On s'intéresse à l'équation différentielle (E) $x'(t) = \cos(x(t)) + \cos(t)$. On admet que, pour tout $a \in [0,\pi]$, il existe une unique solution φ_a définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi_a(0) = a$, et de plus que s'il existe t tel que $\varphi_a(t) = \varphi_b(t)$ alors $a = b$.

Montrter qu'il existe une unique solution φ_a de (E) qui est 2π-periodique.

<u>Ind.</u> Montrter que toute solution φ_a est à valeurs dans $[0,\pi]$.

Exercice 262 [X MP 2024 # 368] • Soit x de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $+\infty$. On suppose qu'il existe $\tau > 0$ et $\lambda > 0$ tels qu'on ait $x'(t) + \lambda x(t-\tau) \le 0$ et $x(t) \ge 0$ au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que $x(t-\tau) \le \frac{4}{(\lambda\tau)^2} x(t)$ au voisinage de $+\infty$.

- Soient x de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, m et n dans $\mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ des réels, $\tau_1, \ldots, \tau_n$, des réels strictement positifs, $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ des réels positifs.

On suppose que $\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i x'(t-\tau_i) + \sum_{i=1}^m \mu_i x(t-\sigma_i) = 0$.
Démontrer qu'il existe c et K réels tels que, pour t au voisinage de $+\infty$, $|x'(t)| \le Ke^{ct}$.

Exercice 263 [X MP 2024 # 369] • Soient $f, g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et K un réel strictement positif. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \le g(t) + K\int_0^t f(u)\,du$.

Montrter que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \le g(t) + K\int_0^t e^{K(t-u)} g(u)\,du$.

- Soient $A, B\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des fonctions continues, et $M, N\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $M'(t) = A(t)M(t)$, $N'(t) = B(t)N(t)$ et que $M(0) = N(0) = I_n$.

On suppose de plus que $\|A(t)\| \le K$ et $\|A(t) - B(t)\| \le \eta$ pour tout $t \in [0,T]$, ou K, η, T sont des réels strictement positifs, et $\| \, \|$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que, pour tout $t \in [0,T]$, $\|M(t) - N(t)\| \le e^{Kt}\,(e^{\eta t} - 1)$.

Exercice 264 [X MP 2024 # 370] On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique. Soit $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale à valeurs positives.

- La fonction polynomiale P atteint-elle nécessairement un minimum ?
- On suppose que $P(x,y) \underset{\|(x,y)\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La fonction polynomiale P atteint-elle nécessairement un minimum ?
- On garde l'hypothese précédente. On note $S(0,1)$ le cercle unite.

Montrer que : $\forall (x,y) \in S(0,1), \exists C(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}, \lim_{t \to +\infty} \frac{P(tx,ty)}{t^2} = C(x,y)$.

- Montrer que C est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ ou qu'il n'existe qu'un nombre fini de couples (x,y) tels que $C(x,y) < +\infty$.

Exercice 265 [X MP 2024 # 371] Soient $u_0, u_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer les fonctions $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que \$$\partial^2 u \frac{}{\partial x^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 -}$

et $\frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, \cdot) = u_1$.
Ind. On utilisera la fonction $U = f \circ u$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convenable.

Exercice 266 [X MP 2024 # 372] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0,n]\!]$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace de dimension r et $p \in \mathcal{P}$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{P}$ en p.

3) Géométrie

Exercice 267 [X MP 2024 # 373] Soit P un polynôme réel de degre 6. Une droite D est tangente à la courbe C_P en trois points A, B, C d'abscisses $a < b < c$.

- On suppose que $AB = BC$. Montrer que les aires delimitées par $[BC]$ et C_P d'une part, et par $[AB]$ et C_P d'autre part, sont egales.

- On pose : $q = \frac{BC}{AB}$ et $Q = \frac{A_1}{A_2}$ avec A_1 et A_2 les aires susmentionnées. Montrerque : $\frac{2}{7}q^5 \leq Q \leq \frac{7}{2}q^5$.

Exercice 268 [X MP 2024 # 374] On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. Soient $e_0 = (1,0)$, $e_1 = (0,1)$ $e_2 = (-1,0)$, $e_3 = (0,-1)$ et, pour $k \geq 4$, $e_k = e_{k \bmod 4}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On écrit $P = c_0X^n - c_1X^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n$. On pose $M_{-1}(P) = (0,0)$, et pour $k \in [\![0,n]\!]$, $M_k(P) = M_{k-1}(P) + c_k\, e_k$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit D_k la droite passant par $M_k(P)$ dirigée par e_k. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $\Delta_1(\lambda)$ la droite passant par $(0,0)$ de pente λ, $\Delta_0(\lambda)$ la perpendicularaire à $\Delta_1(\lambda)$ et passant par $(0,0)$ et, pour $k \geq 2$, $\Delta_k(\lambda) = \Delta_{(k \bmod 2)}(\lambda)$.
On pose $\mu_0 = (0,0)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, μ_k est l'intersection de D_k et de la parallele à $\Delta_k(\lambda)$ passant par μ_{k-1}.

- On suppose dans cette question que $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.
- Déterminer les racines de P.
- Pour chaque racine λ de P, construire M_3 et μ_3.
- Que peut-on conjecturer ?
- En notant δ_k la distance algebrique selon e_k de M_k à μ_k, montrer que $M_n = \mu_n$ si et seulement si $P(\lambda) = 0$.

4) Probabilités

Exercice 269 [X MP 2024 # 375] Soient $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i\| \leq \sqrt{n}$.

Exercice 270 [X MP 2024 # 376] Soit E un ensemble fini. Dénombrer les triplets (A,B,C) de parties de E telles que $A \subset B \subset C$.

Exercice 271 [X MP 2024 # 377] Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de facon d'apparier les entiers de 1 à $2r$?

Exercice 272 [X MP 2024 # 378] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ ou $r \geq 1$ est arbitraire, et $n_1, \ldots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls.
- On fixe $r \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ ou $n_1, \ldots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls.

Exercice 273 [X MP 2024 # 379] Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les fonctions $f\colon [\![0,2N]\!] \to [\![0,2N]\!]$ telles que $f(0) = f(2N) = 0$ et $\forall k \in [\![0, 2N-1]\!],\ |f(k+1) - f(k)| = 1$.

Exercice 274 [X MP 2024 # 380] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,1\}$.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on note $N\colon \omega \mapsto \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(\omega) = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- Montrer que $\mathbf{E}(N) = +\infty$.
- Exprimer $\mathbf{P}(N \geq 2)$ en fonction de $\mathbf{P}(N \geq 1)$.
- Montrer que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$.

Exercice 275 [X MP 2024 # 381] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer esperance et variance du nombre de points fixes d'une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Exercice 276 [X MP 2024 # 382] On munit $\mathcal{S}_n$ de la loi uniforme et on considére X_n la variable aléatoire qui associe à une permutation le nombre d'orbites de cette permutation.

- Calculer $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$.
- Déterminer la fonction generatrice de X_n.
- En déduire des équivalent de $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{V}(X_n)$ quand $n \to +\infty$.
- Comment peut-on déterminer la loi de X_n ?

Exercice 277 [X MP 2024 # 383]

- Déterminer le nombre de listes de k entiers non consécutifs dans l'intervalle d'entiers $[\![1,n]\!]$.
- On place aléatoirement des couples (A_i, B_i), ou $i \in \{1, \ldots, n\}$, autour d'une table ronde à $2n$ places, de sorte qu'aucun des A_i ne soit assis à cote d'un autre A_j. On cherche la probabilité p_n que A_i et B_i ne soient pas à cote. Montrer que, si la configuration des A_i est fixée, la probabilité que A_i et B_i ne soient pas à cote est inchangée. En déduire une expression sommatoire de p_n.

Exercice 278 [X MP 2024 # 384] Soit s un réel > 1. On munit $\mathbb{N}^*$ de la probabilité $\mathbf{P}_s$ définie par $\mathbf{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{n^s\zeta(s)}$ pour tout $n \geq 1$. On note par ailleurs $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $p \in \mathcal{P}$ on note X_p la variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $X_p(n) = 1$ si p divise n, et 0 sinon.

- Montrer que les variables aléatoires X_p sont mutuellement indépendantes.
- En déduire que $\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{(1-p^{-s})}$.
- Pour $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(n)$ la plus grande puissance de p qui divise n. Déterminer la loi de v_p étudier l'indépendance mutuelle des variables aléatoires v_p.

Exercice 279 [X MP 2024 # 385] On joue à pile ou face avec probabilité $p \in]0,1[$ d'obtenir pile. On decoupe la succession des lancers en sequences maximales de résultats identiques. Déterminer l'esperance de la longueur de la deuxieme sequence.

Exercice 280 [X MP 2024 # 386] Une grille $\{1,2,3\} \times \{1,2,...,n\}$ modelise un tuyau vertical. On depose à l'instant $t = 0$ une goutte d'eau au point $(2,n)$. à chaque instant, si elle se trouve au milieu (i.e. en un point $(2,k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se deplace à droite (resp. gauche) avec probabilité $\frac{1}{4}$; si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\frac{1}{2}$.

- Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à un instant t.
- Calculer l'esperance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

Exercice 281 [X MP 2024 # 387]

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur les entiers pairs entre 2 et $2n$. Déterminer $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 1)$ et $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 2)$.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et identiquement distribuées. Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$S_m(n) = \left|\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,;\; |X_i - X_j| \leq m\}\right|$.
Montrer que $\mathbf{E}(S_m(n)) = n + n(n-1)\mathbf{P}(|X_1 - X_2| \leq m)$.

- Soit $(x_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, on pose : $s_m(n) = \left|\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,;\; |x_i - x_j| \leq m\}\right|$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_2(n) \leq 3s_1(n)$.

- En déduire que, si X, Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et de même loi, alors $\mathbf{P}(|X-Y| \leq 2) \leq 3\,\mathbf{P}(|X-Y| \leq 1)$.

Exercice 282 [X MP 2024 # 388] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On pose : $A_n = \left(\sqrt{X_n}\right.$ admet 1 pour 1er chiffre apres la virgule $\left.\right)$ et
$B_n = \left(\sqrt{X_n}\text{ admet 1 pour 1er chiffre }\right)$, $C_n = \left(2^{X_n}\text{ admet 1 pour 1er chiffre }\right)$.

- Étudier l'existence et, le cas echeant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(A_n))$.
- Étudier l'existence et, le cas echeant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(B_n))$.
- Étudier l'existence et, le cas echeant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(C_n))$.

Exercice 283 [X MP 2024 # 389] On dit qu'une variable aléatoire Y est k-divisible lorsqu'elle à la même loi que la somme de k variables indépendantes et identiquement distribuées.

- On suppose que $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$. Pour quels entiers $k > 0$ la variable Y est-elle k-divisible ?
- Construire une variable aléatoire Y non constante infiniment divisible.
- Soit Y une variable aléatoire bornée infiniment divisible. Montrer que Y est constante presque surement.

Exercice 284 [X MP 2024 # 390] Soient $\alpha > 0$ et $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $\mathbf{P}(B_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(B_i = 0) = \frac{1}{i^\alpha}$. Soit $S = \{n \in \mathbb{N}^*, B_n = 1\}$.

- Donner une condition sur α pour que S soit infini presque surement, puis pour que S soit fini presque surement. - On suppose $\alpha < 1$. On pose $\beta > 0$ et $N = \max\{n \in \mathbb{N}^*, S \cap [\![n, n+n^\beta]\!] = \emptyset\}$. Donner des conditions sur β pour que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$ et pour que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 0$.
- Montrer que, presque surement, il existe un rationnel γ tel que $\lfloor \gamma^{2^n} \rfloor \notin S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 285 [X MP 2024 # 391] Soient $N \geq 1$, μ une distribution de probabilité sur $[\![1,N]\!]$ telle que $\mu(1) > 0$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi μ. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $E = \{S_m,\ m \in \mathbb{N}\}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{P}(n \in E) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)\,\mathbf{P}(n-k \in E)$.

On pose $F : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(n \in E) z^n$ et $G : z \mapsto \sum_{k=1}^{N} \mu(k) z^k$.

- On pose $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{D}$, $F(z) = \frac{1}{1-G(z)}$.
- Montrer que 1 est un pole simple de F et tous les autres poles de F ont un module strictement supérieur à 1.
- Montrer que $\mathbf{P}(n \in E) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathbf{E}(X_1)}$.