Exercices 2025

Table des matières

I) ENS MP — XENS

1) Algèbre

Exercice 1 [ENS L 2025 # 1] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un chemin auto-évitant de longueur n de $\mathbb{Z}^2$ est une suite injective de points $a_0, \dots, a_n$ de $\mathbb{Z}^2$ telle que $a_0 = (0,0)$ et, pour tout i, $\|a_{i+1}a_i\| = 1$ pour la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$. On note A_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n.

1. Montrer que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A_{m+n} \leqslant A_m A_n$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour n assez grand, $(2+\varepsilon)^n \leqslant A_n \leqslant (3-\varepsilon)^n$.
3. Montrer que $\left(\sqrt[n]{A_n}\right)$ converge.

Exercice 2 [ENS SR 2025 # 2] Un sous-ensemble non vide S de $\mathbb{Z}$ est dit direct si, pour $x, y, s, t \in S$, la condition $x + y = s + t$ implique que $\{x, y\} = \{s, t\}$.

1. Les ensembles $\{1, 3, 6\}$ et $\{1, 3, 6, 10, 15\}$ sont-ils directs ?
2. Trouvez un ensemble infini direct.
3. Montrer qu'il existe $B > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout ensemble direct S inclus dans $[\![0, n]\!]$, on ait $|S| \leq Bn^{1/2}$,
4. Montrer qu'il existe $A > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un ensemble direct S inclus dans $[\![0, n]\!]$ tel que $An^{1/3} \leq |S|$.
   Indication : On pourra rajouter des éléments un à un à un ensemble de $[\![0, n]\!]$.
5. Existe-t-il un ensemble S direct inclus dans $\mathbb{N}$ tel que $S + S = \mathbb{N}$?
6. Existe-t-il un ensemble S direct inclus dans $\mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{N}$ soit inclus dans S+S ?
7. Existe-t-il un ensemble S direct inclus dans $\mathbb{Z}$ tel que $S + S = \mathbb{Z}$?

Exercice 3 [ENS L 2025 # 3] Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$, $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = u_n + u_{n+1}$. Montrer que, pour tout nombre premier p, p divise u_p.

Exercice 4 [ENS SR 2025 # 4] On considère la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Exprimer F_n en fonction de n.
2. Montrer que $F_{p+q} = F_p F_{q+1} + F_{p-1} F_q$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
3. Calculer $F_m \wedge F_n$ pour tous $m, n \geq 0$.

Exercice 5 [ENS L 2025 # 5] On note d_n le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $d_n = O(n^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 6 [ENS PLSR 2025 # 6]

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv 3$ [4].

2. Soient p un nombre premier et $n \geq 2$. Soit $k = \frac{(np)^p - 1}{np - 1}$.
   a) Montrer que $k \equiv 1[p]$.
   b) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si d divise k alors $d \equiv 1[p]$.
3. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo p.

Exercice 7 [ENS SR 2025 # 7] 1. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

2. Soit $n \geq 3$. On considère sa décomposition en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ où les p_i sont premiers distincts et supérieurs à 3, les α_i dans $\mathbb{N}^*$.
   On admet que, pour tout i, $(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.
   Montrer que la proportion d'éléments d'ordre pair dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est supérieure ou égale à $1 - \frac{1}{2r}$.
3. Déterminer le nombre de solutions de $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4. Caractériser les éléments $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ d'ordre $r = 2\ell$ pair tel que $x^\ell \neq -1$.

Exercice 8 [ENS PLSR 2025 # 8] Soient p un nombre premier impair, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $q = p^\alpha$ et $f : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ une fonction. Une partie D de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est dite f-génératrice si : $\forall y \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \exists n \geq 2, \exists d_1, \dots, d_n \in D, y = f(\dots f(f(d_1, d_2), d_3), \dots d_n)$.

1. On considère le cas où $f : (x, y) \mapsto x - y$. Déterminer les parties f-génératrices de cardinal minimal et calculer leur nombre.
2. E Dans la suite de l'exercice, on considère le cas où $f : (x, y) \mapsto xy$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de partie f-génératrice de cardinal 1.
4. On admet que le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. Montrer qu'il existe une partie f-génératrice de cardinal 2.
5. Caractériser les parties f-génératrices de cardinal 2.

Exercice 9 [ENS L 2025 # 9] Dénombrer les morphismes de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ dans le groupe des automorphismes de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 10 [ENS P 2025 # 10] Soit A un anneau tel que tout élément de $a \in A$ est nilpotent ou idempotent, c'est-à-dire tel que $a^2 = a$.

1. Montrer que tout élément de A est idempotent.
2. Montrer que A est commutatif.
3. On suppose que A est fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Exercice 11 [ENS PLSR 2025 # 11] On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \left\{a + ib\sqrt{2}; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Rappeler la démonstration du fait que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ dont les idéaux sont principaux.
3. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
4. Trouver les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 + 2 = y^3$.

Exercice 12 [ENS PLSR 2025 # 12] Soit $(A, +)$ un groupe abélien. On dit qu'il est sans torsion lorsque $n \cdot x \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in A \setminus \0\$. Un ordre de groupe sur $(A, +)$ est une relation d'ordre totale $\leq$ sur l'ensemble A telle que $\forall (x, y, z) \in A^3,\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

1. Montrer que si $(A, +)$ possède un ordre de groupe alors il est sans torsion.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}^n, +)$ possède un ordre de groupe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^m$ pour un $m \in [0, n]$.

Exercice 13 [ENS PLSR 2025 # 13] Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $r \geq 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique suite presque nulle $(a_{k,r}(n))_{k \geq 0}$ telle que $n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,r}(n) r^k$ avec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{k,r}(n) \in [\![0, r-1]\!]$.
2. Montrer que $(a_{k,r}(n))_{n \geq 1}$ est périodique et trouver sa période.
3. Montrer que $(a_{k,r}(n^n))_{n \geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 14 [ENS PLSR 2025 # 14] On pose $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3} : x \leq y \leq z, x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.

1. Déterminer les éléments de S vérifiant $x = y$ ou $y = z$.
2. Montrer qu'une infinité d'éléments de S vérifient $x = 1$.
3. On pose $f\colon (x, y, z) \mapsto (y, z, 3yz - x)$ et $g\colon (x, y, z) \mapsto (x, z, 3xz - y)$.
   Montrer S est l'ensemble des images de $(1, 1, 1)$ par toutes les composées de f et g.

Exercice 15 [ENS PLSR 2025 # 15] 1. Soit A un anneau commutatif. Rappeler la définition d'un idéal de A.

2. Un idéal I de A dit maximal si A est le seul idéal J de A tel que $I \subsetneq J \subset A$.
   Montrer qu'un idéal maximal de A ne contient pas d'élément inversible.
3. On pose $U = \mathcal{F}(\{0, 1\}, \mathbb{R})$. Donner les idéaux maximaux de U.
4. On pose $V = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Donner les idéaux maximaux de V.

Exercice 16 [ENS PLSR 2025 # 16] Soit A un anneau commutatif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Sigma_n(A) = \{c_1^2 + \cdots + c_n^2, (c_1, \dots, c_n) \in A^n\}$.

1. Montrer que $\Sigma_2(A)$ est stable par multiplication.
2. Est-ce que $\Sigma_3(A)$ est stable par multiplication quel que soit l'anneau A envisagé ?

3. On suppose que A est un corps de caractéristique différente de 2 et que n est une puissance de 2. Soient $c_1, \dots, c_n$ dans A et $s = \sum_{k=1}^n c_k^2$. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(A)$ dont la première ligne est $(c_1 \cdots c_n)$ et qui vérifie $MM^T = M^T M = sI_n$.
4. En déduire que $\Sigma_{2^n}(A)$ est stable par multiplication.

Exercice 17 [ENS SR 2025 # 17] Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre (donc commutatif). On suppose que A est euclidien, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $t\colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\forall (a,b) \in A \times (A \setminus \{0\}), \exists (q,r) \in A^2,\ a = bq + r$ et $(r = 0$ ou $t(r) < t(b))$.
- $\forall (a,b) \in A \setminus (A \setminus \{0\})^2, t(ab) \geq t(a)$.
- Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont euclidiens, tout comme n'importe quel corps $\mathbb{K}$.
- Montrer que tout idéal de A est principal.
- On suppose que $t(1_A) = 0$. Montrer que les éléments inversibles de A sont les $u \in A \setminus \{0\}$ tels que t(u)=0.
- E On suppose dans toute la suite de l'exercice que dans l'hypothèse (i) il y a en plus unicité du couple (q,r) solution.
- Montrer que $t(a+b) \leq \max(t(a), t(b))$ quels que soient $a \in A \setminus \{0\}$ et $b \in A \setminus \{0\}$ tels que $a + b \neq 0$.
- Montrer que $A^\times \cup \{0\}$ est un sous-corps de A.
- Montrer que A est un corps ou est isomorphe à $\mathbb{K}[X]$ pour un corps $\mathbb{K}$.

Exercice 18 [ENS PLSR 2025 # 18] Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n appartienne à l'anneau $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et que x_n soit l'image de x_{n+1} par l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée font de $\mathbb{Z}_p$ un anneau contenant un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est intègre.
3. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}_p$.
4. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que p divise $P(x)$ et que p ne divise pas $P'(x)$. Montrer que P admet une racine y dans $\mathbb{Z}_p$ telle que $y_1 = \bar{x}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 19 [ENS P 2025 # 19] On considère $P = X^n - a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n \in \mathbb{R}[X]$, scindé sur $\mathbb{R}$ et de racines réelles $x_1, \dots, x_n$. Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\left|x_k - \frac{a_1}{n}\right| \leqslant \frac{n-1}{n}\sqrt{a_1^2 - \frac{2n}{n-1}a_2}$.

Exercice 20 [ENS 2025 # 20] Soient $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $f(\mathbb{Q}) = g(\mathbb{Q})$. Montrer que $\deg f = \deg g$.

Exercice 21 [ENS 2025 # 21] Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $m < n$. Soit $\mathcal{P}_{n,m}$ l'ensemble des polynômes complexes de degré n dont 0 est racine d'ordre m et dont les autres racines sont de module ≥ 1. Déterminer $\inf\{|z|\ ;\ z \in \mathbb{C}^*,\ \exists P \in \mathcal{P}_{n,m},\ P'(z) = 0\}$.

Exercice 22 [ENS SR 2025 # 22] Soit $I = \{P \in \mathbb{C}[X] : \forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) \in \mathbb{Z}\}$. On pose $H_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ et $D_n(P) = \Delta^n(P)(0)$.

1. Montrer que $(H_n)_{n\geq 0}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que, pour tout $n, H_n \in I$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(H_n) = H_{n-1}$. **d)** Montrer que $I \subset \mathbb{Q}[X]$.
4. Montrer que $I = \{\sum_{i=0}^n a_i H_i\ ;\ n \in \mathbb{N},\ (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$.
5. Soient $P_1, P_2 \in I$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P_1(n)$ soit premier avec $P_2(n)$. Montrer qu'il

existe $U_1, U_2 \in I$ tels que $U_1 P_1 + U_2 P_2 = 1$.

Exercice 23 [ENS PLSR 2025 # 23] Soit $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $C_H = \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}),\ MH = HM\}$.

1. Montrer que C_H est un sous-groupe infini de $GL_2(\mathbb{Z})$.
2. Montrer que $C_H = \mathbb{Z}[H] \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, où $\mathbb{Z}[H] = \{xI + yH, (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$.
3. Montrer que C_H est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ et en donner un système de générateurs.

Exercice 24 [ENS L 2025 # 24] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB = BA. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le signe de $\det\,(A^k + B^k)$.

Exercice 25 [ENS SR 2025 # 25] Soient $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ et $x_0, \dots, x_{n-1}$ des réels > 0. On souhaite montrer que :

$$\det\left(\frac{d^j}{dx^j}(f(x)^{x_i})\right)_{0\leqslant i,j<n} = f(x)^{\sum_{0\leqslant i<n}(x_i - i)} f'(x)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{0\leqslant i<j<n}(x_j - x_i).$$

1. a) Soit $(p_j)_{0\leq j<n}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout j, p_j est de degré j et de coefficient dominant d_j. Montrer que $\det(p_j(x_i))_{0\leq i,j<n} = d_0 \times \cdots \times d_{n-1} \prod (x_j - x_i)$.
   b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $p_j \in \mathbb{R}[X]$ de degré j et de coefficient dominant $f'(x)^j$ tel que : $\forall z \in \mathbb{R}$, $\frac{d^j}{dx^j}(f(x)^z) = f(x)^{z-j} p_j(z)$.
   c) Démontrer le résultat annoncé. Que dire dans des cas particuliers ?
2. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.

Pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, on note $c_{i,j}$ le coefficient en x^j de f^i. Calculer $\det((c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n})$.

Exercice 26 [ENS L 2025 # 26] Soit $A \in GL_3(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à A^{-1} si et seulement s'il existe $B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = BC, B^2 = C^2 = I_3$.

Exercice 27 [ENS P 2025 # 27] Soit $n \geq 2$. On note $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des matrices M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $M\overline{M}$ appartient à $\mathbb{C}^* I_n$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $A \sim B$ s'il existe $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $A = \lambda \overline{M} B M^{-1}$. Justifier que $\sim$ induit une relation d'équivalence sur $\mathcal{R}_n$. Déterminer les classes d'équivalence sur $\mathcal{R}_n$.

Exercice 28 [ENS P 2025 # 28] On note G_n l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Soit $\Phi : G_n \to \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$ une application telle que $\forall V, W \in G_n,\ \Phi(V \cap W) + \Phi(V + W) \leqslant \Phi(V) + \Phi(W)$

et $\Phi(\{0\}) \geq 0$. Montrer qu'il existe un unique $V_0 \in G_n$ de dimension maximale tel que $\inf_{V \in G_n \setminus \{(0)\}} \frac{\Phi(V)}{\dim V} = \frac{\Phi(\hat{V}_0)}{\dim V_0}$.

Exercice 29 [ENS PLSR 2025 # 29] Soient G un groupe admettant une partie génératrice finie et H un groupe fini.

1. Montrer que l'ensemble E des morphismes de groupes de G vers H est fini.

b) Soit ψ un endomorphisme surjectif du groupe G. Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi) \subset \bigcap \mathrm{Ker}(\varphi)$.

1. On pose $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \det(M) = 1\}$.
   a) Montrer que G est un groupe multiplicatif.
   b) Montrer que G est engendré par $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   c) Montrer que tout endomorphisme surjectif du groupe G est bijectif.

Exercice 30 [ENS PLSR 2025 # 30] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\det(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = \gamma > 2$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$, on pose $(k, U) = \begin{pmatrix} A^k & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'ensemble $G_A = \{(k, U); k \in \mathbb{Z}, U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})\}$ est un groupe pour la loi de multiplication matricielle. Est-il abélien ?
2. Montrer l'existence d'un morphisme injectif de groupes de G_A dans le groupe

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Soit D_A le sous-groupe de G_A engendré par les éléments $ghg^{-1}h^{-1}$ où $(g, h) \in G_A^2$. Montrer que $D_A = \{(0, (I_2 - A)U), U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})\}$.

Exercice 31 [ENS L 2025 # 31] 1. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, \ldots, F_r) \in \mathbb{C}(X)^r$. On pose $M_r = (F_j^{(i-1)})_{1 \leq i,j \leq r} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}(X))$. Montrer que la famille $(F_1, \ldots, F_r)$ est liée si et seulement si la matrice M_r

n'est pas inversible.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(X))$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $A^{(p)} = (A_{i,j}^{(p)})$ la matrice des dérivées $p^{\text{èmes}}$ des coefficients de A.

Montrer que les matrices $A^{(p)}$ pour $p \in \mathbb{N}$ commutent deux à deux si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}^*, (F_1, \ldots, F_r) \in (\mathbb{C}(X))^r$ et des matrices $C_1, \ldots, C_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux telles que $A = F_1 C_1 + \cdots + F_r C_r$.

Exercice 32 [ENS SR 2025 # 32] Soit $S = \begin{pmatrix} (0) & 1 \\ & \ddots \\ 1 & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier la diagonalisabilité de S et donner ses valeurs propres.
2. Donner une base orthonormale de vecteurs propres de S.
3. Caractériser les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par S.
4. Soient $\omega = \exp(2i\pi/n)$ et $A = \left(\frac{\omega^{jk}}{\sqrt{n}}\right)_{1 \leq j,k \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer les puissances

de A. En déduire que A est diagonalisable.

1. On suppose n impair. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

Exercice 33 [ENS SR 2025 # 33] 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est suffisamment proche de M, alors N admet n valeurs propres distinctes.

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. À quelle condition la matrice $A + \varepsilon B$ admet-elle deux valeurs propres distinctes pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit ?
3. Même question en demandant que $A + \varepsilon B$ soit diagonalisable pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit.

Exercice 34 [ENS L 2025 # 34] Soient $\mathbb{K}$ un corps et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que χ_A est irréductible et qu'il existe $B \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $B^{-1}AB$ commute avec A, mais que B ne commute pas avec A. Montrer que B^2 est scalaire.

Exercice 35 [ENS L 2025 # 35] Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}(ABBA) = 1$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

Exercice 36 [ENS PLSR 2025 # 36] Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 1$ et $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, B$.

1. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$ et $B = P\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$.
2. Pour $P, Q \in GL_2(\mathbb{R})$, on pose $\Psi_{P,Q} : M \mapsto PMQ$. On pose $\tau : M \mapsto M^T$. Soit $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ qui conserve le rang. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Psi = \Psi_{P,Q}$ ou $\Psi = \Psi_{P,Q} \circ \tau$.

Exercice 37 [ENS PLSR 2025 # 37] Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, $C \in \mathbb{C}\ \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ telle que C = AX - XB.

Exercice 38 [ENS PLSR 2025 # 38] Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de Bourdaud si $\chi_M = \prod(X - m_{i,i})$.

1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice de Bourdaud si et

seulement si elle est trigonalisable sur K.

1. Montrer qu'une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est de Bourdaud si et seulement si elle est diagonale.
2. Est-il vrai que toute matrice de Bourdaud de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ?
3. On dit que A est normale si $A^TA = AA^T$. Déterminer les matrices réelles normales et de Bourdaud.

Exercice 39 [ENS SR 2025 # 39] Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. On pose $e^M = \begin{pmatrix}M_1 & \varphi_{A,B}(C)\\ M_2 & M_2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer M_1, M_2, M_3.
2. Montrer que $\varphi_{A,B}$ est linéaire.
3. Montrer que, si A et B sont diagonalisables, alors $\varphi_{A,B}$ l'est aussi, et préciser son spectre.
4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \frac{e^x e^y}{xy}$ si $x \neq y$, et $f(x,x) = e^x$. Montrer que fest de classe C^∞.
5. On suppose que $\varphi_{A,B}$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont distinctes. Montrer que A et B sont diagonalisables.

Exercice 40 [ENS SR 2025 # 40] Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose [A, B] = AB BA. Soit $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ stable par [,].
2. Calculer les [A,B] pour les $A, B \in \{X, Y, H\}$ où $X = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et

$$H = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

1. Soit $\rho : A \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ linéaire telle que, pour tous $A, B \in A$, $\rho([A,B]) = [\rho(A), \rho(B)]$. Montrer que $\rho(H)$ admet une valeur propre α.

Montrer que $\rho(X)(E_\alpha(\rho(H))) \subset \mathrm{Ker}(\rho(H) - (\alpha+2)I_n)$.
Montrer que $\rho(Y)\ (E_\alpha(\rho(H))) \subset$ Ker $(\rho(H)(\alpha 2)I_n)$.

1. On suppose que, si V est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ stable par tous les $\rho(A)$, pour $A \in \mathcal{A}$,

alors $V = \mathbb{C}^n$ ou $V = \{0\}$. Déterminer les ρ possibles.

Exercice 41 [ENS U 2025 # 41] Soient k un corps de caractéristique nulle, E un k-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On écrit $\pi_u = \prod_i P_i^{n_i}$, le polynôme minimal de u, où les P_i sont irréductibles
distincts et les n_i dans $\mathbb{N}^*$. On pose $f = P_1 \times \cdots \times P_r$. On définit une suite en posant $u_0 = u$
et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n f(u_n) f'(u_n)^{-1}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie.
2. Montrer que (u_n) est stationnaire de valeur ultime $d \in \mathcal{L}(E)$ où d est un polynôme en u, u-d est nilpotent et d est annulé par f.

Exercice 42 [ENS L 2025 # 42] Déterminer le cardinal minimal p d'un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Vect}(G) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si G_1 et G_2 conviennent et sont de cardinal p, sont-ils conjugués ?

Exercice 43 [ENS L 2025 # 43] On dit que la propriété $MT(n,\mathbb{K})$ est vraie si, pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ soit diagonalisable, A et B commutent.

1. Montrer que, si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonalisables et commutent, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable.
2. On suppose que $n \geq 2$. La propriété $MT(n,\mathbb{R})$ est-elle vraie ?
3. Montrer que $MT(2,\mathbb{C})$ est vraie.
4. On suppose que $n \geq 2$. La propriété $MT(n,\mathbb{F}_2)$ est-elle vraie ?
5. Soit $p \geq 3$ un nombre premier. La propriété $MT(2,\mathbb{F}_p)$ est-elle vraie ?

Exercice 44 [ENS L 2025 # 44] Quelle est l'image de l'application $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M^{2n+1}$?

Exercice 45 [ENS SR 2025 # 45] 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB = BA. Justifier que $e^{A+B} = e^A e^B$.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$.

3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ convenable, on pose $\log A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(AI_n)^k$. Pour quelles matrices $\log A$ est-il défini ? Montrer les égalités $\exp(\log A) = A$ et $\log(\exp A) = A$. Pour chaque égalité, déterminer les matrices A qui la satisfont.

1. Montrer que, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} e^{A+B}$.

Exercice 46 [ENS PLSR 2025 # 46] Soient $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence égal à $+\infty$.

1. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, justifier la définition de $f^*(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k$.
2. Montrer que f^* est continue.

c) On suppose que f est surjective. Montrer que f induit une surjection de l'ensemble des matrices diagonalisables sur lui-même.

1. On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda$ et $f'(z) \neq 0$. Montrer que f^* est une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lui-même.

Exercice 47 [ENS L 2025 # 47] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe un ensemble $F_n \subset \mathbb{R}^d$ de cardinal n tel que, pour toute partie G de F_n, il existe $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $G = \{x \in F_n, \langle \omega, x\rangle + b > 0\}$.

Exercice 48 [ENS P 2025 # 48] Pour $\omega \in \mathbb{R}$, on pose $R(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu. Montrer qu'il existe $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = P \begin{pmatrix} e^{tR(\omega_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{tR(\omega_r)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_{r-2r} \end{pmatrix}.$$

Exercice 49 [ENS L 2025 # 49] Soient u et v deux endomorphismes autoadjoints positifs d'un espace euclidien. Montrer que $v \circ u$ est diagonalisable.

Exercice 50 [ENS P 2025 # 50] Déterminer l'ensemble des symétries linéaires sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui fixent un hyperplan et stabilisent l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 51 [ENS P 2025 # 51] Soit $H = (H_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tous $i \neq j$, $H_{i,j} \leq 0$. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on dit que i et j sont connectés s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \ldots, k_m \in [\![1,n]\!]$ tels que $k_1 = i$, $k_m = j$ et, pour tout $\ell \in [\![1, m-1]\!]$, $H_{k_\ell,k_{\ell+1}} \neq 0$. Montrer que i et j sont connectés si et seulement si $H^{-1}_{i,j} > 0$, où $H^{-1}_{i,j}$ est le coefficient d'indice (i,j) de H^{-1}.

Exercice 52 [ENS PLSR 2025 # 52] On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})^2$. On pose C = AB et on s'intéresse aux valeurs propres réelles de C.

1. Donner un exemple de n, A et B tels que χ_C n'admette aucune racine réelle.
2. On suppose A inversible. On note $\varphi : (\mathbb{C}^{2n})^2 \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(X,Y) = X^T A^{-1} Y$. Montrer que les sous-espaces caractéristiques $F_\lambda(C)$ de C sont deux à deux φ -orthogonaux, i.e. pour tous λ et μ distinctes dans $\operatorname{Sp} C$, $\forall (X,Y) \in F_\lambda(C) \times F_\mu(C)$, $\varphi(X,Y) = 0$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 53 [ENS PLSR 2025 # 53] On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure canonique d'espace euclidien orienté, et on note $\mathbf{B}$ sa base canonique.

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique endomorphisme z_u de $\mathbb{R}^3$ tel que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\det_{\mathbf{B}}(u,x,y) = \langle z_u(x), y\rangle$, et montrer qu'alors $z_u = -z_u$.
2. Soient $u \in \mathbb{R}^3$ unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$. On munit le plan $\{u\}^\perp$ de l'orientation dont les bases directes sont les bases (x,y) de $\{u\}^\perp$ telles que (x,y,u) soit une base directe de $\mathbb{R}^3$. On note $r_{u,\theta}$ la rotation de $\mathbb{R}^3$ fixant u et induisant sur $\{u\}^\perp$ la rotation d'angle de mesure θ. On note enfin p_u la projection orthogonale sur $\mathbb{R}u$. Exprimer $\operatorname{tr}(r_{u,\theta})$ en fonction de θ, et montrer que $r_{u,\theta} = (\cos\theta).\operatorname{id} + (1-\cos\theta).\, p_u + (\sin\theta).\, z_u$.
3. Soient u,v des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$. On pose $\tau = \arccos(\langle u,v\rangle)$. Soit $(\varphi,\psi) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que $r_{u,\varphi} \circ r_{v,\psi}$ est une rotation, et montrer qu'elle s'écrit $r_{w,\theta}$ pour un vecteur unitaire w et un réel θ vérifiant $|\cos(\theta/2)| = |\cos(\varphi/2)\cos(\psi/2) - \cos(\tau)\sin(\varphi/2)\sin(\psi/2)|$.

Exercice 54 [ENS PLSR 2025 # 54] 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables et telles que AB = BA. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales.

2. Montrer que l'application $\Phi : (S,O) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto SO \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est bien définie et bijective, et que Φ^{-1} est continue.
3. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $M_0 = M$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_{k+1} = \frac{M_k}{2}(I_n + (M_k^T M_k)^{-1})$, et étudier sa convergence.

Exercice 55 [ENS PLSR 2025 # 55] On pose $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $F = \mathcal{P}_2(V)$ l'ensemble des paires de V. Soient $E \subset F$ et $n_i = |\{j \in V,\ \{i,j\} \in E\}|$ pour $i \in V$. On définit la matrice $L = (\ell_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\ell_{i,j} = n_i$ si i=j,-1 si $\{i,j\} \in E$ et 0 sinon. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres (avec multiplicité) de L.

1. Montrer que $\lambda_1 = 0$.
2. Montrer que $\lambda_2 = \min_{X\in\{(1,\ldots,1)\}^\perp\setminus\{0\}} \frac{X^T L X}{X^T X}$.

3. Pour $S \subset V$, on note $\partial S = \{\{i,j\},\ \{i,j\} \in E$ avec $i \in S$ et $j \notin S\}$.

Montrer que $\frac{\lambda_2}{2} \leqslant \min_{\substack{S \subset V \\ 0<|S| \leqslant \frac{n}{2}}} \frac{|\partial S|}{|S|}$.

Exercice 56 [ENS P 2025 # 56] Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on note $A \geq B$ lorsque $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on écrit $A = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et les $\lambda_i > 0$, et on pose, pour $r \in \mathbb{R}$, $A^r = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1^r, \ldots, \lambda_n^r)P^{-1}$; cette définition ne dépend pas de l'écriture de A sous la forme précédente.

1. Montrer que $M \mapsto M^{-1}$ est décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Est-ce que $M \mapsto M^2$ est croissante sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$?
3. Montrer que $M \mapsto M^r$ est convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque $r \in [-1, 0]$. Ceci signifie que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et tout $t \in [0, 1[$, $(tA + (1-t)B)^r \leqslant tA^r + (1-t)B^r$.

Exercice 57 [ENS PLSR 2025 # 57] On dit d'une norme $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ qu'elle est invariante orthogonalement lorsque $\forall M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \forall (P,Q) \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})^2,\ \mathcal{N}(M) = \mathcal{N}(PMQ)$.

1. Donner un exemple d'une telle norme.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $(P,Q) \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})^2$ tel que $A = PDQ$ où $D = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$ avec $\forall i \in [1, r],\ \sigma_i > 0$.
3. On se donne une norme $\mathcal{N}$ invariante orthogonalement sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

On note $T(A) = \sup\{\|AX\|, \|X\| = 1\}$ où $\|\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow T(A) = \alpha\mathcal{N}(A)$.

Exercice 58 [ENS SR 2025 # 58] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur qui lui est subordonnée.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   - Que dire des valeurs propres et des espaces propres de A ?

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A.

- Soient $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \alpha \in \mathbb{R}$ et $y = Ax\alpha x$. Montrer que $\min_{1 \leqslant i \leqslant r} |\lambda_i \alpha| \leqslant \frac{\|y\|}{\|x\|}$.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A. Soient enfin $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et α une valeur propre de A + B. Montrer que $\min_{1 \leq i \leq r} |\lambda_i \alpha| \leq ||P||_{\mathrm{op}}||P^{-1}||_{\mathrm{op}}||B||_{\mathrm{op}}$.

Exercice 59 [ENS NIL 2025 # 59] Soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que SA est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 60 [ENS P 2025 # 60] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ toute application $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$ pour tout $x = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ tels que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les éléments de G. Montrer que les formes quadratiques invariantes par G constituent une droite vectorielle.

Exercice 61 [ENS SR 2025 # 61] Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $\nabla_H : (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto x^T H y$ et $Q_H : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x^T H x$.

1. Soit $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Exprimer la norme d'opérateur de H à l'aide de Q_H.
2. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de leur structure euclidienne canonique. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, comment déterminer la norme d'opérateur de A pour ces normes ?
3. Soient J, K deux ensembles finis non vides, $(a_{j,k})_{(j,k) \in J \times K} \in (\mathbb{R}^+)^{J \times K}$. On suppose qu'il existe C_1 et C_2 tels que : $\forall j \in J, \sum_{k \in K} a_{j,k} \leqslant C_1$ et $\forall k \in K, \sum_{j \in J} a_{j,k} \leqslant C_2$. On

ordonne J et K et on note A la matrice des $a_{j,k}$. Montrer que $||A||_{\mathrm{op}} \leqslant \sqrt{C_1 C_2}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, J = K = [1, n], on pose, pour $1 \leqslant j,k \leqslant n$, $a_{j,k}^n = \frac{1}{(j-k)^2}$ si $j \neq k$, et $a_{j,k}^n = 0$ sinon. On note enfin $A^n = \left(a_{j,k}^n\right)_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de $(\|A^n\|_{\mathrm{op}})_{n \geq 1}$.

Exercice 62 [ENS PLSR 2025 # 62] L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée notée $\|\|_{op}$. Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, on définit le conditionnement de M comme le réel cond $(M) = ||M||_{\mathrm{op}}||M^{-1}||_{\mathrm{op}}$.

1. Calculer cond(M) dans le cas où M est symétrique définie positive.
2. Montrer que, pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $cond(M) \geq 1$ et $cond(M^T) = cond(M)$.
3. Que dire des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{cond}(M) = 1$?
4. Pour A et B dans S_n^{++}, montrer que $Cond(A+B) \leq max(Cond(A), Cond(B))$.

Exercice 63 [ENS SR 2025 # 63] On note E l'ensemble des matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in E$ si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$A = UU^T$. Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, E)$.

1. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(α) il existe $u : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, a(t) = u(t)u(t)^T$; (β) il existe $z : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, z(t)^T a(t) z(t) > 0$.

1. Soient $0 \leq b \leq c$. On suppose qu'il existe $(i,j) \in [1,n]^2$ avec $i \neq j$ tel que, pour tout $t \in [b,c]$, $a_{i,i}(t) > 0$ et $a_{j,j}(t) > 0$. Montrer qu'il existe $z : [b,c] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue telle que $\forall t \in [b,c], z(t)^T a(t) z(t) > 0$ et, en outre, $z(b) = e_i, z(c) = \pm e_i$ (les e_k sont les

vecteurs de la base canonique).

1. En considérant l'ensemble des $d \geq 0$ tels qu'existe $z : [0,d] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continue vérifiant $\forall t \in [0,d], z(t)^T a(t) z(t) > 0$ et $z(d) = \pm e_i$, montrer que a vérifie la propriété (α).

Exercice 64 [ENS SR 2025 # 64] Soient $n \geq 2$, $a : [0,1] \to \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ continue et $A = \int_0^1 a(t)dt$.

1. Montrer que A appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A=0. Exprimer Ker(A).
3. Montrer que $M = \left(\frac{1}{1+i+j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. On suppose a à valeurs dans l'ensemble des matrices de projecteurs orthogonaux. Donner une condition pour que A soit une matrice de projecteur orthogonal.
5. Soit $\Gamma : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$. Soient $0 < \alpha < \beta$.

Montrer que $\begin{pmatrix} \Gamma(2\alpha) & \Gamma(\alpha+\beta) \\ \Gamma(\alpha+\beta) & \Gamma(2\beta) \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

1. En déduire que $\ln(\Gamma)$ est convexe

Exercice 65 [ENS P 2025 # 65] Soit $(O_n)_{n \geq 0}$ une suite d'ouverts non majorés de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $O_n \cap \mathbb{N}x$ soit infini.

Exercice 66 [ENS L 2025 # 66] Soit E un ensemble non vide. Soit $d : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $x, y, z \in E$:

- $d(x,y) = d(y,x)$,
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $d(x,y) \leqslant \max(d(x,z), d(z,y))$.

Ainsi d est une distance sur E. Pour $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on note $B(x,r) = \{y \in E, d(x,y) \leq r\}$ la boule fermée de centre x et de rayon r. On suppose que, pour tout $x \in E$ et tous r, r' vérifiant 0 < r < r', on a $B(x,r) \subsetneq B(x,r')$. Enfin, on suppose qu'il existe une suite d'éléments de E dense dans (E,d). Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E et une suite $(r_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, B(z_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(z_n, r_n)$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(z_n, r_n) = \emptyset$.

Exercice 67 [ENS PLSR 2025 # 67] On note E l'ensemble des fonctions lipschitziennes 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $\alpha \in]0,1]$ et $f \in E$, on pose

$$||f||_\alpha = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Démontrer que $\|\|_\alpha$ est une norme sur E.

1. On note $F = E \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Démontrer que F est un fermé de E pour la norme $\| \cdot \|_1$.

Exercice 68 [ENS P 2025 # 68] Soient E l'espace des suites réelles $(x_n)_{n \geq 0}$ nulles à partir d'un certain rang, et $T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose T continu pour la norme $\| \|_1$ et pour la norme $\| \|_\infty$. Montrer que T est continu pour la norme $\| \|_2$.

Exercice 69 [ENS SR 2025 # 69] Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$.

1. La forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(0)$ est-elle continue pour $\| \cdot \|_\infty$? pour $\| \cdot \|_1$? Dans chaque cas calculer l'adhérence de $\operatorname{Ker} \varphi$.
2. Soit $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f(x) \cos(2\pi x) dx$. Montrer que φ est continue pour $\| \cdot \|_1$ et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 70 [ENS L 2025 # 70] Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$.

$$\text{Si } a = (a_n)_{n \geq 0} \in [0,1]^{\mathbb{N}}, \text{ on pose, pour } f, g \in E, \langle f, g \rangle_a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(a_n)\, g(a_n)}{2^n}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\langle\ ,\ \rangle_a$ soit un produit scalaire sur E. On note alors $\| \|_a$ la norme associée.
2. Si $a, b \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ vérifient les hypothèses de a), donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\|\|_a$ et $\|\|_b$ soient équivalentes.

Exercice 71 [ENS NIL 2025 # 71] Soient $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{x\})$ est compact.

1. Montrer que f admet un extremum global.

Exercice 72 [ENS P 2025 # 72] Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension infinie et K une partie bornée de E dont la frontière est compacte. Montrer que K est d'intérieur vide dans E.

Peut-on généraliser le résultat à n'importe quel espace vectoriel normé de dimension infinie ?

Exercice 73 [ENS P 2025 # 73] Pour x,y réels et $\varepsilon > 0$, on dit que $x \approx_\varepsilon y$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que |x-y-k|<
ε. Soient λ_1, λ_2 deux réels non nuls. Montrer que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$ si et seulement si, pour tout $(a_1, a_2) \in [0,1]^2$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x\lambda_1 \approx_\varepsilon a_1$ et $x\lambda_2 \approx_\varepsilon a_2$.

Exercice 74 [ENS P 2025 # 74] Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 2$ et C une partie non vide, convexe et bornée de E. Montrer que la frontière de C est connexe par arcs.

Exercice 75 [ENS PLSR 2025 # 75] Soient E un espace vectoriel normé et $f : E \to E$ une application telle que f(0) = 0 et $\forall x, y \in E, ||f(x)f(y)|| = ||xy||$.

On pose, pour $x, y \in E$, ||f(x) - f(y)|| = ||x - y||. $\left\| \frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\|$.

1. Montrer que $\forall x, y \in E, df(x, y) \leq \frac{1}{2}\|xy\|$.
2. Montrer que f est linéaire si et seulement si df est identiquement nulle.
3. Trouver une fonction vérifiant les propriétés de la fonction f, non linéaire et non surjective.
   a) On suppose que f est surjective. Montrer que f est linéaire.

Exercice 76 [ENS P 2025 # 76] On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des normes $\|\|_2$ et $\|\|_\infty$. Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. Soit $F = \text{Vect}(x \mapsto x^{n_k}, k \geq 0)$. À quelle condition F est-il dense dans E pour la norme $\|\|_2$? pour la norme $\|\|_\infty$?

Exercice 77 [ENS L 2025 # 77] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $D = \{\ell 2^{-k} + 2^{-k}[0,1]; (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour tout intervalle I de D, on note $\log(I)$ la longueur de I et on pose $M_I(f) = \frac{1}{\log(I)} \int_I f$. On pose $||f|| = \sup\left\{\frac{1}{\log(I)} \int_\Gamma |f M_I(f)| \ ; \ I \in D\right\}$.

1. On suppose ||f|| finie. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $(I, J) \in D^2$ avec $I \subset J$ tels que $\log(J) = 2^m \log(I)$. Démontrer que $|M_I(f) M_I(f)| \leq 2m||f||$

$2^m \log(I)$. Démontrer que $|M_I(f) M_J(f)| \leq 2m||f||$.

1. On suppose que ||f|| = 1 et $M_{[0,1]}(f) = 0$.

On note $F_k = \{I \in D : I \subset [0,1], M_I(f) > 5k$ et I maximal pour cette propriété$\}$. On pose $\Omega_k = \bigcup_{I \in F_k} I$ et et $\log(\Omega_k) = \sum_{I\in F_k} \log(F_I)$.

Montrer que, pour $k \geq 1$, $\log(\Omega_k) \leqslant \frac{1}{3}\log(\Omega_{k-1})$.

Exercice 78 [ENS PLSR 2025 # 78] On munit les espaces $\ell^1_\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ et $\ell^2_\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ de leurs normes usuelles $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On pose $H = \left\{u \in \mathbb{R}^\mathbb{Z} \ ; \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n^2(1+n^2) < +\infty\right\}$.

1. Définir un produit scalaire sur H. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Quelles inclusions a-t-on entre $\ell^1_\mathbb{Z}(\mathbb{R})$, $\ell^2_\mathbb{Z}(\mathbb{R})$ et H ? Montrer que ces inclusions sont continues (i.e. les injections canoniques sont continues).
3. Soit $u \in \mathbb{R}^\mathbb{Z}$. Montrer que $u \in H$ si et seulement si l'application $\mu_u : H \to H$ définie par $\forall v \in H, \ \mu_u(v) = u * v$ avec $(u*v)_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ est bien définie et continue.

Exercice 79 [ENS P 2025 # 79] On note ℓ^1 l'ensemble des suites sommables de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. On munit ℓ^1 de la norme définie, pour $u = (u_n)_{n\geq 0}$, par $||u||_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. Soient $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^1 et $u \in \ell^1$. Montrer l'équivalence entre :

- la suite $(\overline{u^k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u pour la norme $\|\|_1$,
- pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n u_n^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n u_n$.

Exercice 80 [ENS L 2025 # 80] On note $S = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et $\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], S) \ ; \ \gamma(0) = \gamma(1) = 1\}$.

1. Soit $\gamma \in \Gamma$, montrer qu'il existe $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall t, \ \gamma(t) = e^{i2\pi\theta(t)}$.
2. On prend $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$. On note F la propriété : « il existe $h \in \mathcal{C}([0,1]^2, S)$ tel que $\forall x \in [0,1], \ h(x, \cdot) \in \Gamma, \ h(0, \cdot) = \gamma_0$ et $h(1, \cdot) = \gamma_1$ ». On pose $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_1 : t \mapsto e^{2i\pi t}$. Montrer que γ_0 et γ_1 ne vérifient pas F.
3. On note D le disque fermé unité de $\mathbb{C}$. Existe-t-il $f \in \mathcal{C}^0(D, S)$ telle que $f|_S = \text{id}$?

Exercice 81 [ENS PLSR 2025 # 81] 1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$.

On définit par récurrence une suite (x_k) avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{k+1} = x_k \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $x_0 \in [x^*\varepsilon, x^* + \varepsilon]$, la suite (x_k) est bien définie et converge vers x^*.

1. Avec $f : x \mapsto e^x 1$, quelles sont les valeurs de $x_0 \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite (x_k)

précédente est stationnaire ? c) On revient au cas général et on suppose f" > 0 et f' ne s'annule pas sur ℝ. Pour quelles valeurs de $x_0 \in \mathbb{R}$ la suite (x_k) est-elle stationnaire ?

Exercice 82 [ENS L 2025 # 82] Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], [a,b])$. On suppose dans les questions a) et b) que f n'a pas de point de période 2, c'est-à-dire que $\forall x \in [a,b], f(x) \neq x \Rightarrow (f \circ f)(x) \neq x$.

1. Soit $c \in [a,b]$ tel que f(c) > c. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k(c) > c$.
2. Soit $x_0 \in [a,b]$, on pose pour tout n, $x_{n+1} = f(x_n)$. Démontrer que la suite (x_n)

converge.

1. Démontrer que la suite (x_n) converge pour tout choix de x_0 si et seulement si f n'a pas de point de période 2.

Exercice 83 [ENS PLSR 2025 # 83] 1. Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\sin n}{n}, \sum \frac{\sin^2 n}{n}, \sum \frac{|\sin n|}{n}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in [1, Q]$ tels que $|qxp| \leqslant \frac{1}{Q}$.

En déduire qu'il existe une infinité de couples (p,q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x\frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$.

1. On admet que π est irrationnel. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n\sin(n)}$.

Exercice 84 [ENS P 2025 # 84] Soit (a_n) une suite de réels décroissante de limite nulle. Pour $P \subset \mathbb{N}$, on note $A(P) = \sum_{n \in P} a_n$. On suppose $A(\mathbb{N}) = A_\infty \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\{A(P),\ P \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\} = [0, A_\infty] \text{ si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Exercice 85 [ENS L 2025 # 85] 1. Pour quels réels **s** la somme $\sum_{n,m \in \mathbb{N}^*} \frac{|n-m|^s}{nm(n^2-m^2)^2}$ est-elle finie ?

b) Pour $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, on note $|n| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$.

Pour quels réels s la somme $\sum_{(n,m) \in (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})^2} \frac{|n-m|^s}{|n||m|(1+(|n|-|m|)^2)}$ est-elle finie?

Exercice 86 [ENS PLSR 2025 # 86] On note S l'ensemble des suites croissantes à termes dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. Pour $a \in S$, montrer que $\varphi(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k}\right)$ appartient à]0,1].
2. Montrer que φ définit une bijection de S sur]0,1].
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in S$ pour que $\varphi(a) \in \mathbb{Q}$.

Exercice 87 [ENS L 2025 # 87] Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+*}$ décroissante de limite nulle. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une unique suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} f(n_i)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $n_{i+1} \geq \varphi(n_i)$. Montrer que $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n-1) = \sum_{i=0}^{+\infty} f\left(\varphi^i(n)\right)$, où φ^i désigne l'itérée i-ème de φ pour la composition des applications.

Exercice 88 [ENS P 2025 # 88] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

- f(x) = O(x);
- $\sum_{r \neq els} f(a_n)$ converge absolument pour toute série $\sum_{r \neq els} a_n$ absolument convergente à termes
- $\sum f(a_n)$ converge pour toute série $\sum a_n$ absolument convergente à termes réels.

Exercice 89 [ENS P 2025 # 89] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\sum f(a_n)$ converge pour toute série convergente $\sum a_n$ à termes réels. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$ pour x voisin de 0.

Exercice 90 [ENS SR 2025 # 90] 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec a < b et $f : [a, b] \to [a, b]$.

   a) Si f est continue, montrer que f possède un point fixe.
   b) Si f est croissante, montrer que f possède un point fixe.

2. Soit f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que l'ensemble dis(f) des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
3. Construire f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{Q}$.

Exercice 91 [ENS P 2025 # 91] Trouver les $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Exercice 92 [ENS PLSR 2025 # 92] Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement égale à $+\infty$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $f^*(y) = \sup\{xy - f(x); x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}, f^*(x) < +\infty\}$ est un intervalle (éventuellement vide) sur lequel f^* est convexe.
2. Montrer que, si f est dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$, alors $f = f$.
3. On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, que f"> 0 sur $\mathbb{R}$ et que $\frac{f(x)}{|x|} \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que f^* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = f'(x) \Leftrightarrow x = (f^*)'(y)$.

Exercice 93 [ENS SR 2025 # 93] Pour $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on pose $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $B_n(u_1)$ et $B_n(u_2)$ où $u_n : x \mapsto x^n$.

***b)* Montrer que, pour tout** $x \in [0, 1], \sum_{k=0}^{n} \left|x \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$.

1. En déduire que si f est M-lipschitzienne, alors $|B_n(f)(x) f(x)| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}$ pour tout x.

Exercice 94 [ENS L 2025 # 94] Trouver toutes les fonctions f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

- f est croissante, à valeurs dans [0, 1], f est continue à droite,
- $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists b_k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x)^k = f(x + b_k)$.

Exercice 95 [ENS PLSR 2025 # 95] 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|b| < \pi$.
Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + e^z = a + ib$.

1. Montrer que l'application $z \mapsto ze^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 96 [ENS P 2025 # 96] Soient $\sigma > 0$ et f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) + f(y) - f(x + y)| \leq \sigma$. Montrer que f est la somme d'une fonction linéaire $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et d'une fonction bornée par σ.

Exercice 97 [ENS L 2025 # 97] Une partie E de [0, 1] est dite négligeable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n \geq 0}$ d'intervalles de [0,1] dont la réunion contient X et dont la somme des longueurs est majorée par ε. Soit f une fonction dérivable de [0,1] dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une partie négligeable E de [0,1] telle que, pour tout $x \in [0, 1] \setminus E$, on ait $f'(x) \geq 0$. Montrer que f est croissante.

Exercice 98 [ENS P 2025 # 98] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ et $(Q_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ deux familles de polynômes réels, f la fonction de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{P}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{n} P_n(x) e^{Q_k(x)}$. Montrer que si
fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1} P_k(x)\, e^{Q_k(x)}$. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors f ne possède qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 99 [ENS P 2025 # 99] Soit n un entier impair supérieur ou égal à 3. Déterminer les fonctions continues f de [0,1] dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $k \in [1, n-1]$, $\int_0^1 (f(x^{1/k}))^{n-k}\, dx = \frac{k}{n}$.

Exercice 100 [ENS P 2025 # 100] Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $ka_k \leq (k+1)a_{k+1}$. Montrer que $\int_0^\pi \max_{1\leq k\leq n} \left(a_k \frac{|\sin(kx)|}{x} \right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} + O(1)$.

Exercice 101 [ENS PLSR 2025 # 101] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Quelle est la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Déterminer la vitesse de convergence.

b. On suppose désormais f 1-périodique et de classe C^2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geq 1, \left| S_n - \int_0^1 f(t)\, dt \right| \leq \frac{C}{n^2}$.

c. On suppose désormais f 1-périodique et de classe C^3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geq 1, \left| S_n - \int_0^1 f(t)\, dt \right| \leq \frac{C}{n^3}$.

d. Que dire si f est 1-périodique et de classe C^∞ ?

Exercice 102 [ENS P 2025 # 102] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que a < b, f une fonction continue de $[a, b] \times [-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $I(\lambda) = \int_a^b f(t, \sin(\lambda t))\, dt$. Montrer que $I(\lambda)$ admet une limite que l'on déterminera lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice 103 [ENS SR 2025 # 103] Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}^N$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on note $e(y) = e^{2i\pi y}$.
Soit $f\colon t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^N x_n e(nt)$. Soient $R \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \ldots, t_R) \in \mathbb{R}^R$.

1. a) Montrer que $\sum_{r=1}^R |f(t_r)|^2 \leq NR \sum_{k=1}^N |x_k|^2$.
   b) Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\Delta(t) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |n - t|$. On suppose les t_i distincts. Soit $\delta > 0$ tel que $\delta \leq \min_{1\leq i\neq j\leq R} \Delta(t_i - t_j)$. Montrer que $\sum_{r=1}^R |f(t_r)|^2 \leq (2N\pi + \delta^{-1}) \sum_{r=1}^N |x_k|^2$.Ind. On pourra montrer que, pour une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$,

$$|g(a)| \leq \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} |g(t)| dt + \frac{1}{2} \int_{a-h}^{a+h} |g'(t)| dt$$

.

Exercice 104 [ENS PLSR 2025 # 104] On note E l'ensemble des fonctions 1-périodiques et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans
$\mathbb{C}$. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n(f) = \int_0^1 e^{-2in\pi t} f(t) dt$.

1. Montrer que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. On suppose que f(0)=0. Montrer qu'il existe $g \in E$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = g(t)\,(e^{2i\pi t} - 1)$.

Exercice 105 [ENS P 2025 # 105] Soient a,b> 0 et $m \in \mathbb{Z}$. Calculer $I_m(a, b) = \int_a^{+\infty} e^{-ax - \frac{b}{x}} x^{m-\frac{1}{2}}\, dx$.

Exercice 106 [ENS L 2025 # 106] Soit $n \geq 2$. Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t^2 A} dt$ converge.

Exercice 107 [ENS PLSR 2025 # 107] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne. On suppose qu'il existe R > 0 tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$, f(x) = 0.

1. Montrer que $\varepsilon \mapsto \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ admet une limite en 0^+.

On note vp $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right)$ cette limite.

1. On note $T_f\colon x \mapsto \int_{-\infty}^x f(y) \ln|yx| dy + \int_x^{+\infty} f(y) \ln|yx| dy$. Justifier que T_f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose f de classe C^1. Montrer que T_f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (T_f)'(x) = \text{vp}\left(\int_{-y}^{+\infty} \frac{f(y+x)}{y} dy \right)$$

.

Exercice 108 [ENS SR 2025 # 108] 1. Pour $(p, k) \in \mathbb{N}^2$, montrer la convergence de $I_{p,k} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^k x^p}{1xy}\, dx\, dy$ et l'exprimer sous forme de la somme d'une série numérique.

2. On note $d_n = \text{ppcm}(1, \ldots, n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_{p,k} \in \frac{1}{d_p^2}\mathbb{Z}$ si p > k, et $I_{p,p} \in \zeta(2) + \frac{1}{d^2}\mathbb{Z}$.
3. On pose $P_n = \frac{1}{n!} D^n(X^n(1X)^n)$. Montrer que P_n est à coefficients entiers.
4. Montrer que $I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dxdy$ converge, et en donner une expression simplifiée.- e) Montrer que $I_n \in \frac{1}{d^2}(\mathbb{Z} + \zeta(2)\mathbb{Z})$.

Exercice 109 [ENS L 2025 # 109] Déterminer les segments S de $\mathbb{R}$ non réduits à un point tels que l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de S dans $\mathbb{R}$ soit dense dans $(\mathcal{C}^0(S, \mathbb{R}), \|\|_\infty)$.

Exercice 110 [ENS L 2025 # 110] On note E l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant pour limites respectives 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Soient $F, G, H \in E$, avec G et H continues.
On suppose qu'il existe quatre suites réelles a,b,c,d telles que $(x \mapsto F(a_n x + b_n))_n$ et $(x \mapsto F(c_n x + d_n))_n$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$, respectivement vers G et H. Montrer qu'il existe deux réels $\lambda > 0$ et μ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = G(\lambda x + \mu)$.

Exercice 111 [ENS L 2025 # 111] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de [0,1] dans]0,1], convergeant simplement vers une fonction f.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $t_n = \frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{i}$. Montrer que la suite (t_n) converge simplement

vers f.

1. On suppose que f_0 est à valeurs strictement positives et que, pour tout $n \geq 1$, la fonction

f_n est dérivable, croissante et que $f_n' \geq \frac{n f_n}{\sigma_n}$, où $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f_i$. On suppose également que $\sup \sigma_n(1/2) < +\infty$. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1/2[$, il existe $C_x > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$ n assez grand, $f_n(x) \leq e^{-C_x n}$.

1. On enlève l'hypothèse sur $\sigma_n(1/2)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que :

(i) $\forall x < x_0,\ \exists C_x > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ f_n(x) \leq e^{-C_x n}$; (ii) $\forall x > x_0,\ f(x) \geq x - x_0$.

Exercice 112 [ENS P 2025 # 112] Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{4^n}\right)$.

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(\inf\{f(t), t \geq x\}) = 0$.
2. Montrer que $0 < \lim_{x\to+\infty}\left(\sup\left\{\frac{|f(t)|}{\ln(\ln t)},\ t \geq x\right\}\right) < +\infty$.

Exercice 113 [ENS L 2025 # 113] Soit (λ_n) une suite de réels > 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2\lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq 3\lambda_n$. Montrer que :

$$\forall \alpha > 0,\ \exists (c_1, c_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \forall t \in [1/2, 1[,\ \frac{c_1}{(1-t)^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^\alpha t^{\lambda_n} \leq \frac{c_2}{(1-t)^\alpha}$$

.

Exercice 114 [ENS SR 2025 # 114] On pose : $\forall x > 0, \eta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Montrer que η est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$. Étudier sa limite en $+\infty$.
2. Montrer que η est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $\eta(1)$.
4. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |e^z 1| \leq e^{|z|} 1$.
5. Montrer que $\eta(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re} z > 0$.

Exercice 115 [ENS P 2025 # 115]
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $L_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L_n(1) = 1$ et $(1 - X^2)L_n'' - 2XL_n' + n(n+1)L_n = 0$.
2. Montrer que $\forall x \in [-1,1],\ \forall z \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} L_n(x) z^n$.

Exercice 116 [ENS PLSR 2025 # 116] Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telles que f(1)=g(1)=1 et, pour tout $x \in [0,1[, |f(x)| < 1$. On suppose qu'il existe C> 0 et $M \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 - f(1-x) \underset{x\to0^+}{\sim} Cx^{1/M}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 g(x) f(x)^n dx$.

1. Déterminer un équivalent de u_n.
2. Montrer l'existence de C' tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} 1\right| \leq \frac{C'}{n}$.

Exercice 117 [ENS SR 2025 # 117] Soit $f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + tx\right) dt$.

1. Montrer la définition de f sur $\mathbb{R}^+$
2. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\operatorname{Re}\left[\int_0^{+\infty} \exp\left(i\left(\frac{(t+i\varepsilon)^3}{3} + (t+i\varepsilon)x\right)\right) dt\right] \xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{} f(x)$.

Exercice 118 [ENS SR 2025 # 118] On note E l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable de $\mathbb{R}^{+*}$ dans C.

1. On convient que

$$\sqrt{+\infty} = +\infty$$

. Pour f continue de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{C}$, montrer que

$$\sqrt{\int_0^{+\infty} |f|^2} = \sup\left\{\int_0^{+\infty} |fg|\ ;\ g \in E \text{ tel que } \int_0^{+\infty} |g|^2 = 1\right\}$$

.

1. Soit $f \in E$. Montrer que $\Phi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x} dt$ appartient à E.

Exercice 119 [ENS P 2025 # 119] Soient $K \in \mathcal{C}^0([0,1]^2, \mathbb{R})$ telle que $||K||_\infty < 1$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Étudier l'exis- tence et l'unicité de $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0,1],\ g(x) \int_{\mathbb{R}}^1 K(x,t) g(t)\, dt = f(x)$.

Exercice 120 [ENS L 2025 # 120] Soient $\alpha, \theta \in]0,1[$. Pour $f : [1, +\infty[\to [0,1]$ continue, on pose $\|f\|_\alpha = \sup_{s\to\infty} s^\alpha |f(s)|$ et $F_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, [0,1]),\ \|f\|_\alpha < +\infty\}$.

1. Pour $f \in F_\alpha$, on pose $T(f) : s \geq 1 \mapsto 1 - \left(1 - \frac{1}{s}\right)^\theta + \theta(s-1)^\theta \int_{-\infty}^{+\infty} (s+t-1)^{-\theta-1} f(t) dt$.

Montrer que T est une application lipschitzienne de F_α dans F_α (pour $\|\cdot\|_\alpha$).- b) On admet que, pour tout $\alpha \in]0, 1-\theta[$, T possède un unique point fixe $f_\alpha \in F_\alpha$. Montrer que f_α ne dépend pas de α ; on le note f_0. Montrer que $\int_t^{+\infty} t^{-\theta} f_0(t)dt = +\infty$.

Exercice 121 [ENS PLSR 2025 # 121] 1. Expliciter le terme général d'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence $na_{n+1} = (n+1)a_n$ pour tout n.

1. Résoudre x(x-1)y" + 3xy' + y = 0 sur]-1,1[.

Exercice 122 [ENS PLSR 2025 # 122] Résoudre $x^2y'' + xy' + (x^2 1/4)y = 0$ sur $]0, 1[$.

Exercice 123 [ENS P 2025 # 123] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b, \psi \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^{+*})$ croissante. Soit $y \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ non nulle et vérifiant $y'' + \psi(x)y = 0$. Montrer que les points où |y| admet un extremum local forment une suite finie $(a_1, \ldots, a_n)$ (éventuellement vide) et que la suite des valeurs $(|y(a_1)|, \ldots, |y(a_n)|)$ est décroissante.

Exercice 124 [ENS PLSR 2025 # 124] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. On suppose que $f'' + f' + f \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
2. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré 1 ou 2 et à racines simples dans $\mathbb{C}$.

On pose $\partial_P f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que, quelle que soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \partial_P f \xrightarrow[+\infty]{} 0$ implique $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$∀ (x,y,z) ∈ C¹(R,C)³, $\ x' + ax + by + cz \xrightarrow{+\infty} 0\$ y' + bx + cy + az $\xrightarrow{+\infty} 0\$ z' + cx + ay + bz $\xrightarrow{+\infty} 0 \ .\Longrightarrow \ x \xrightarrow{+\infty} 0\$ y $\xrightarrow{+\infty} 0\$ z

Exercice 125 [ENS SR 2025 # 125] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ continue. On regarde l'équation (1) : X'(t) = A(t) X(t).

1. Décrire l'ensemble des solutions de (1).
2. On suppose qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $D : I \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = P^{-1}D(t)P$.

Trouver une condition sur D pour que les solutions de (1) aient une limite quand $t \to +\infty$.

Exercice 126 [ENS P 2025 # 126] Soit $n \geq 2$. Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue. On considère les solutions de l'équation différentielle () : x'(t) = A(t)x(t).

1. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue et à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans $]-\infty, -1]$ telles que, pour tout t, $A(t) = PD(t)P^{-1}$. Les solutions de () ont-elles toutes pour limite 0 en $+\infty$?
2. On suppose qu'il existe $P : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients dans $]-\infty, -1]$ telles que, pour tout t, $A(t) = P(t)DP^{-1}(t)$. Les solutions de () ont-elles toutes pour limite 0 en $+\infty$?

Exercice 127 [ENS PLSR 2025 # 127] On fixe un intervalle non trivial I.- a) Soient a et b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Soit f une solution non nulle sur I de y" + ay' + by = 0. Montrer que les zéros de f sont isolés : pour tout zéro t_0 de f il existe un $\delta > 0$ tel que f n'ait pas de zéro dans $|t_0\delta, t_0 + \delta| \setminus \{t_0\}$.

1. Soient p_1, p_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I$, $p_1(t) \geq p_2(t)$. Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telles que $f'' + p_1 f = 0$ et $g'' + p_2 g = 0$. Soient $t_1 < t_2$ deux zéros de f entre lesquels f n'admet aucun autre zéro. Montrer qu'il existe un zéro de g dans $[t_1, t_2]$, ainsi que dans $[t_1, t_2]$.
2. Soient p,q deux fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in [0,1],\ q(t) > 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ la solution sur [0,1] de l'équation différentielle $y'' + (p(t) + \lambda q(t))y = 0$ avec la condition initiale $f_\lambda(0) = 0$ et $f'_\lambda(0) = 1$. On note N_λ le nombre de zéros de f_λ. Montrer que $\lambda \mapsto N_\lambda$ est croissante et déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3. On admet que $(x, \lambda) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mapsto f_\lambda(x)$ est continue. Montrer que l'ensemble

$\{\lambda \in \mathbb{R},\ f_\lambda(1) = 0\}$ est l'ensemble des termes d'une suite réelle strictement croissante.

1. Montrer que $(\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Exercice 128 [ENS PLSR 2025 # 128] Soit $\mu \in \mathbb{R}^+$. On considère $(E_\mu) : y''\mu(1-y^2)y' + y = 0$.

1. Résoudre (E_0).
2. Soient x_0 et x_1 deux fonctions bornées et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et $\omega_1 \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des fonctions $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables par rapport à la seconde variable telles que :
   - $\omega(\mu) = 1 + \omega_1\mu + o(\mu)$;
   - il existe $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante telle que $\forall k \in \{0, 1, 2\},\ \forall (\tau, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ |(\partial_2)^k \varepsilon(\tau, \mu)| \leq C(\tau)\mu^2$;
   - pour $x : (\tau, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \varepsilon(\tau, \mu)$, la fonction $t \mapsto x(\omega(\mu)t, \mu)$ est solution de (E_μ) sur $\mathbb{R}^+$ pour μ voisin de 0.

   Calculer alors ω_1 et donner une expression explicite de x_0 et x_1 en fonction de quelques constantes inconnues.

Exercice 129 [ENS L 2025 # 129] Soit A une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, X'(t) = A(t)X(t) X(t)A(t). Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, X(t) est semblable à X(0).

Exercice 130 [ENS SR 2025 # 130] Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{e^x e^y}{xy}$ si $x \neq y$ et $f(x, x) = e^x$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 131 [ENS P 2025 # 131] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $L \geq \ell > 0$ des réels. On suppose qu'en tout point de $\mathbb{R}^d$ la hessienne de f a son spectre inclus dans $[\ell, L]$. Soit $\tau \in]0, 2/L[$ ainsi qu'une suite u à termes dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \tau \nabla f(u_n)$. Montrer que u converge.

Exercice 132 [ENS PLSR 2025 # 132] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f tend vers $+\infty$ en ∞, que ∇f est lipschitzienne et que les points critiques de f sont isolés dans $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe un réel $\tau > 0$ tel que, quel que soit le choix de $a \in \mathbb{R}^d$, la suite définie par $x0 = a$et $\forall\ n \in N, \ xn+1 = xn - τ ∇ f(xn)$ soit convergente. On commencera par le cas où d=1 et $f : x \mapsto \frac{x^2}{2}$.

Exercice 133 [ENS L 2025 # 133] Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On pose $L = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} \in G\}$.

1. Montrer que L est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ind. Considérer $\left(e^{tA/k}e^{tB/k}\right)^k$.
2. Montrer que $\forall (A, B) \in L^2, ABBA \in L$.
3. Que peut-on dire de L pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 134 [ENS PLSR 2025 # 134] Soit $n \geq 2$ un entier. Une application f de classe C^2 définie sur un ouvert O de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si, pour tout $x \in O$, df_x est composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.

1. On suppose que n=2 et que f vérifie $\mathcal{P}$. On note $f = (f_1, f_2)$. Montrer que f_1 et f_2 sont harmoniques, c'est-à-dire que $\Delta f_1 = 0$ et $\Delta f_2 = 0$.
2. Montrer que le résultat de la question a) est faux si $n \geq 3$. On pourra considérer l'application $f : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$.

Exercice 135 [ENS P 2025 # 135] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que f est harmonique si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On dit que f est homogène de degré $\lambda \geq 0$ si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$. Soit $\lambda \geq 0$. Déterminer les fonctions harmoniques et homogènes de degré λ.

2) Géométrie

Exercice 136 [ENS L 2025 # 136] Montrer qu'il n'existe aucun triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont dans $\mathbb{N}^*$ et dont l'aire est un carré parfait non nul.

Exercice 137 [ENS MP 2025 # 137] \$ \$ [P] Soient a, b, c, d dans $\mathbb{R}^{+*}$. Quelle est l'aire maximale d'un quadrilatère dont les côtés successifs ont pour longueurs a, b, c, d ?

Exercice 138 [ENS PLSR 2025 # 138] 1. Quelle est l'aire maximale possible pour un rectangle de périmètre 1 ?

2. On considère un entier $n \geq 3$ et une liste strictement croissante $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ à termes dans $[0, 2\pi]$. Déterminer la valeur maximale possible pour le périmètre du polygone de sommets $e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}$ (dans cet ordre).
3. Soit $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes. On convient que $z_0 = z_n$. On définit l'aire algé-

brique du polygone $z_1 \cdots z_n$ comme $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{Re}(z_k)\,\mathrm{Im}(z_{k+1}) - \mathrm{Im}(z_k)\,\mathrm{Re}(z_{k+1}))$. On fixe un réel p> 0. Parmi les listes $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ telles que le périmètre de $z_1 \cdots z_n$ soit égal à p, déterminer celles qui maximisent l'aire algébrique du polygone associé.

3) Probabilités

Exercice 139 [ENS PLSR 2025 # 139] 1. Calculer la variance d'une variable de Poisson.

2. Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier. Calculer $\mathbf{E}(X^p \text{ modulo } p)$ où $X \sim \mathcal{P}(a)$.

Exercice 140 [ENS SR 2025 # 140] Soient $p \in [0, 1]$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi Bernoulli de paramètre p. On pose $S_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$, $S_{n+1} = \begin{cases} 3S_n + 1 & \text{si } X_n = 1 \\ \frac{S_n}{2} & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$.

1. Étudier les cas p=0 et p=1. On supposera que 0 dans toute la suite de l'exercice.
2. Donner une formule de récurrence vérifiée par la suite $(\mathbf{E}(S_n))_{n\geq 0}$, et étudier son comportement quand $n \to +\infty$.
3. Montrer que $\mathbf{P}((S_n)_{n\geq 0} \text{ est bornée}) = 0$.

Exercice 141 [ENS SR 2025 # 141] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}(X_1^4) < +\infty$. On pose $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(X_1)$.

Exercice 142 [ENS L 2025 # 142] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ (resp. $(Y_n)_{n\geq 1}$) une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $T = \inf\{n \geq 2 \ ; \ X_n \notin \{X_1, \ldots, X_{n-1}\}\}$ et $S = \inf\{n \geq 2 \ ; \ Y_n \notin \{Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}\}$. On suppose que $T \sim S$. Que peut-on dire du lien entre les suites (X_n) et (Y_n) ?

Exercice 143 [ENS P 2025 # 143] Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\beta > 1$. Soit $(Y_p)_{p\in\mathcal{P}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbf{P}(Y_p = k) = (1p^{-\beta})p^{-k\beta}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathcal{P}$. On pose $Z = \sum_{n\in\mathcal{P}} Y_p \ln p$ et $X = \exp Z$.

1. Donner la loi de X.
2. En déduire que $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^\beta} = \frac{1}{\zeta(\beta)}$ où μ est la fonction de Möbius.

Exercice 144 [ENS L 2025 # 144] Montrer qu'il existe C > 0 tel que pour tout $n \geq 1$ et tout $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \{\pm 1\}^{n^2}$, il existe $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\{\pm 1\}^n$ tels que $\sum_{1\leq i\leq n} a_{i,j}x_iy_j \geq Cn^{3/2}$.

Exercice 145 [ENS MP 2025 # 145] Soient $\theta \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathbf{P}(X > 0) > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(X \geq \theta\,\mathbf{E}(X)) \geq \frac{(1-\theta)^2\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

Exercice 146 [ENS P 2025 # 146] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $E_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble de cardinal n. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur S_n. Si $i, j \in [1, n]$, on pose $e_ie_j = e_{\sigma_i(j)}$. Montrer que la probabilité que $(E,)$ soit un groupe, sachant que admet un neutre, tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 147 [ENS L 2025 # 147] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_n = e_i) = \mathbf{P}(X_n = -e_i) = \frac{1}{2d}$
pour $1 \leq i \leq d$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_k$ et $S_0 = 0$. Soit $T = \inf\{n > 0, S_n = 0\}$ et $p_d = \mathbf{P}(T < +\infty)$. On admet que $p_d < 1$ pour $d \geq 3$. Montrer que $p_d \to 0$ lorsque $d \to +\infty$.

Exercice 148 [ENS P 2025 # 148] Soient $p \in]0, 1/2[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telle que $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_n = -1) = p$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer l'existence de $c, C_1, C_2 > 0$ tels que $\forall u \geq 0,\ C_1 e^{-cu} \leq \mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1} S_n \geq u\right) \leq C_2 e^{-cu}$.

Exercice 149 [ENS PLSR 2025 # 149] 1. Soit X une variable aléatoire réelle et $s > 0$ tel que $\mathbf{E}(e^{sX})$ soit finie. Démontrer que $\forall a > 0, \mathbf{P}(X \geq a) \leq e^{-sa}\mathbf{E}(e^{sX})$.

2. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variable aléatoires i.i.d. à valeurs dans [0, 1].

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Démontrer que $\forall t > 0, \mathbf{P}(|S_n - \mathbf{E}(S_n)| \geq t) \leq 2e^{-t^2/(2n)}$.

Exercice 150 [ENS PLSR 2025 # 150] Soit $(E, \mathcal{P}(E))$ un espace probabilisable avec E dénombrable.

1. Rappeler la définition d'une probabilité sur cet espace.
2. Pour A et B probabilités sur cet espace, on pose $d(A, B) = \max_{S\subset E} A(S)B(S)$.

Montrer que $d(A, B) = \frac{1}{2}\sum_x |A(\{x\}) - B(\{x\})|$.
c. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans E de lois respectives A et B. Montrer que $P(X \neq Y) \geq d(A, B)$.
d. Les deux lois A et B étant fixées, montrer qu'on peut construire X et Y de façon à assurer l'égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 151 [ENS PLSR 2025 # 151] Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans [0, n]. On pose $p_k = \mathbf{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbf{P}(Y = k)$ pour tout $k \in [\![0, n,$ et $d(p, q) = \max_{S\subset 0,n]\!]}\overline{\mathbf{P}}(X \in S) - \mathbf{P}(Y \in S)$.

1. Montrer que $d(p, q) \geq 0$. Que dire si d(p,q) = 0 ?
2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Comparer $\mathbf{E}(\varphi(X))$ et $\varphi(\mathbf{E}(X))$.
3. On suppose de plus qu'il existe au moins deux éléments k de [0,n] tels que $p_k > 0$. On suppose de plus que φ strictement convexe, c'est-à-dire telle que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in$

$]0, 1[\ x \neq y \Rightarrow \varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$. Montrer que $\mathbf{E}(\varphi(X)) > \varphi(\mathbf{E}(X))$.

1. On suppose que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ p_k > 0$ et $q_k > 0$. On pose $H(p, q) = \sum_{k=0}^n p_k \ln\left(\frac{p_k}{q_k}\right)$.

Montrer que $H(p, q) \geq 0$. Que dire si H(p,q) = 0 ?

Exercice 152 [ENS L 2025 # 152] On considère $r_0 = 0$ et $(r_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose $p_{i,j} = r_i$ si $j = i+1, 1-r_i$ si j = i - 1 et 0 sinon.On admet l'existence d'une famille de variables aléatoires $(X_k^i)_{(i,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ telles que

- $X_0^{i_0} = i_0$ p.s. pour tout $i_0 \in \mathbb{N}^*$,
- $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_k^{i_k} = i_{k-1})\right) = \prod_{i=1}^n p_{i_{k-1}, i_k}$ pour tout $(i_0, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^{*k+1}$.

On pose, pour \$i,j∈N*,\$ $\tau_j^i = \inf\{k \in 0, +\infty,\ X_k^i = j\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
Soit $b \in \mathbb{N}$. Calculer, pour $i \in [0, b]$, $\hat{p_i} = \mathbf{P}(\tau_0^i < \tau_b^i)$ en fonction des $\gamma_k = \prod_{i=1}^k \frac{1-r_i}{r_i}$.

Exercice 153 [ENS PLSR 2025 # 153] Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes et $X_0 = k \in \mathbb{Z}$ (constante). On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_0 + \dots + X_n$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$. Que dire de la loi de $(S_n)_{n\geq m}$ conditionnée par $(S_1 = k_1, \dots, S_m = k_m)$?
3. Soient $k, N \in \mathbb{N}^*$ avec $N \geq k$. On considère que la marche aléatoire s'arrête dès que $S_n = 0$ ou $S_n = N$. On admet que l'arrêt est presque sûr. Déterminer la probabilité p_k que la marche s'arrête sur 0 en partant de k.
4. Déterminer le temps moyen d'arrêt (en 0 ou N cette fois) en partant de k.

Exercice 154 [ENS P 2025 # 154] On considère n variables aléatoires de Rademacher indépendantes $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$. Montrer que, pour tout réel p > 0, il existe $(c_p, C_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que,
pour tout

$$(z_1, \dots z_n) \in \mathbb{C}^n$$

, $c_p \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 155 [ENS L 2025 # 155] Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X_n = -k) = ce^{-|k|}$ où c est à déterminer. Déterminer la loi du rayon de convergence de la série entière aléatoire $\sum X_n z^n$.

Exercice 156 [ENS P 2025 # 156] Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de [0,1]. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_n le graphe aléatoire G_{n,p_n} d'Erdös-Renyi, c'est-à-dire un graphe aléatoire de sommets [1,n] et une famille $(X_{\{i,j\}})_{\{i,j\}\in\mathcal{P}_2([1,n])}$ de variables de Bernoulli i.i.d. de paramètre p_n, avec $X_{\{i,j\}} = 1$ si et seulement s'il existe une arête reliant i et j. On note I_n le nombre de sommets isolés deG_n.

1. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geq (1+\varepsilon)\frac{\ln(n)}{n}$. Montrer que $\mathbf{P}(I_n \geq 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leq (1-\varepsilon)\frac{\ln(n)}{n}$. Montrer que $\mathbf{P}(I_n \geq 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 157 [ENS L 2025 # 157] Montrer qu'il existe un réel c> 0 vérifiant la condition suivante : quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelle que soit S partie non vide de $\mathbb{U}_n$, il existe un entier naturel $p \leq \frac{cn}{|S|}$ ainsi
qu'une p-liste $(z_1, \ldots, z_p)$ d'éléments de $\mathbb{U}_n$ telle que $|\bigcup_{k=1}^{p} z_k S| \geq \frac{n}{2}$.

Exercice 158 [ENS PLSR 2025 # 158] Soit $p \in [0, 1/2]$. On fixe une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ et telles que $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = p$ et $P(X_1 = 0) = p$
valeurs dans

$$\{-1, 0, 1\}$$

et telles que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = 1) = 1 - 2p$. Pour $b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(b, a, n) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k = b\right)$.

1. On suppose a = (2< sup> k-1< /sup>)< sub> kN< /sub> . Calculer P(0, a, n) pour tout n N.
   a) On suppose p = 1/4 et a = (1)< sub> kN< /sub> . Calculer P(0, a, n) pour tout n N.
   b) Déterminer les valeurs de p pour lesquelles $b \to$ P(b, a, n) est maximale en 0 pour tout $a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$.

Exercice 159 [ENS PLSR 2025 # 159] Soit $n \geq 3$. Une alpiniste dispose de n lieux possibles pour planter sa tente, lieux numérotés de 1 à n. Elle peut visiter chacun de ces lieux successivement, à partir du numéro 1, et doit décider si elle y plante sa tente. Lorsqu'elle visite le lieu k, elle peut savoir si elle préfère ce lieu à tous les lieux précédemment visités, mais ne sait pas si elle le préfère aux lieux non encore visités. Une fois un lieu visité, si l'alpiniste a refusé d'y installer sa tente elle ne pourra plus revenir sur ce lieu. L'alpiniste a pour objectif de maximiser la probabilité d'avoir choisi celui des n lieux qui a sa préférence parmi les n lieux.

1. Déterminer une stratégie optimale pour l'alpiniste lorsque n=3.
2. On fixe un $k \in [0, n-1]$. L'alpiniste suit la stratégie décrite ci-après : elle visite automatiquement les k+1 premiers lieux ; étant donné $\ell \in [k+1, n-1]$, si l'alpiniste visite le -ième lieu alors elle l'écarte si et seulement s'il n'a pas sa préférence parmi tous les lieux déjà visités. Déterminer la probabilité $p_{n,k}$ pour que l'alpiniste s'installe sur le lieu ayant sa préférence parmi les n lieux.
3. On fixe un k_n maximisant $p_{n,k}$ lorsque k parcourt [0, n-1]. Étudier le comportement asymptotique de k_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 160 [ENS L 2025 # 160] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles discrètes. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $f_n(t) = \frac{1}{n} |\{k \in [1, n], X_k \leq t\}|$. Montrer qu'il existe une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{P}\left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\right.$
0 pour tout réel $\varepsilon > 0$.

Exercice 161 [ENS L 2025 # 161] Pour deux variables aléatoires réelles bornées X et Y, sur des espaces probabilisés a **priori** distincts, on note $X \leq_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leq \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On se donne, sur un espace probabilisé, deux suites $(M, X_1, X_2, \ldots)$ et $(N, Y_1, Y_2, \ldots)$ de variables aléatoires indépendantes bornées vérifiant les conditions suivantes :

- les X_n, où $n \in \mathbb{N}^*$, sont identiquement distribuées et positives ;
- les Y_n, où $n \in \mathbb{N}^*$, sont identiquement distribuées et positives ;
- M et N sont à valeurs dans $\mathbb{N}$:
- $M \preccurlyeq_c N$ et $X_1 \preccurlyeq_c Y_1$.

On pose $S = \sum_{k=1}^{M} X_k$ et $T = \sum_{k=1}^{N} Y_k$. Montrer que $S \preccurlyeq_c T$.

Exercice 162 [ENS L 2025 # 162] Soient E une partie bornée et au plus dénombrable de $\mathbb{R}^+$, et $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux lois de probabilité sur E. Déterminer, en fonction de ces lois, la plus petite constante $K_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ telle que, pour tout couple (X,Y) de variables aléatoires réelles à valeurs dans E telles que $X \sim \mathcal{L}$ et $Y \sim \mathcal{L}'$, on ait l'inégalité $\mathbf{E}(XY) \leq K_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$.

Exercice 163 [ENS SR 2025 # 163] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbf{E}\left(\|X\|^2\right) < +\infty$. On note $C(X) = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de covariance.

1. Que dire de C(X) si les X_i sont indépendantes ?
2. Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $Y = \langle v, X \rangle$. Exprimer $\mathbf{V}(Y)$ en fonction de C(X).
3. On suppose les X_i centrées. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Z = AX. Exprimer $\mathbf{E}(\|Z\|^2)$ en fonction de C(X).
4. Caractériser les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un vecteur aléatoire X tel que A = C(X).
5. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $P(X \in H) = 1$ si et seulement si $H^\perp \subset \mathrm{Ker}(C(X))$.

Exercice 164 [ENS SR 2025 # 164] Soit $\alpha > 0$. On considère l'équation différentielle () : $(y' = -x, x' = \alpha^2 y)$ avec $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

1. Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est fixé, justifier l'existence et l'unicité d'une solution de () vérifiant $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Pour cette solution, on pose $I(t) = y^2(t)$ et $J(t) = \alpha^2 x^2(t)$.
2. Montrer que les applications $T \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T I(t)dt$ et $T \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T J(t)dt$ admettent une

limite finie en $+\infty$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires x_0, y_0 indépendantes à valeurs dans $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}\left(x_0 = \frac{k}{N}\right) = \mathbf{P}\left(y_0 = \frac{k}{N}\right) = \gamma_N \exp\left(-(k/N)^2\right)$.
   a) Justifier l'existence de $\gamma_N \in \mathbb{R}^+$ pour lequel ces conditions définissent la loi des deux variables aléatoires.
   b) On fixe t et on considère, pour $N \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $f_N(t) = I(t) + J(t)$ (les fonctions I et J sont associées aux variables aléatoires x_0 et y_0). Montrer que $\mathbf{E}\left(e^{-f_N(t)}\right)$ possède une limite quand $N \to +\infty$.

II) ENS PSI

AUTRE

1) Algèbre

Exercice 165 [ENS PSI 2025 # 165] 1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in [1, n], a_{i,i} = 2, a_{i,j} = -1$ si $|i - j| = 1, a_{i,j} = 0$ si $|i - j| \geq 2$.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ où ≥ 0 signifie que toutes les coordonnées sont positives ou nulles.

b) En déduire que A est inversible.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{i \neq i} |a_{i,j}|$.

a) Montrer que A est inversible.

b) Soit E et F les matrices de taille n définies par $e_{i,j} = a_{i,j}$ si $j \geq i, e_{i,j} = 0$ si $j < i$ et $f_{i,j} = -a_{i,j}$ si $j < i, f_{i,j} = 0$ si $j \geq i$. Montrer que, si $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ vérifie Ev = Fu, alors $||v||_\infty \leq ||u||_\infty$.

c) Montrer qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\forall u, v \in \mathbb{R}^n, Ev = Fu \Rightarrow ||v||_\infty \leq k||u||_\infty$.

d) Soient $b \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et (x_k) la suite définie par $\forall k \in \mathbb{N}$, $Ex_{k+1} = Fx_k + b$. Montrer que la suite (x_k) est bien définie et que la suite (x_k) converge. Déterminer sa limite.

Exercice 166 [ENS PSI 2025 # 166] Soit f : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$. Spectre de f ? Diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 167 [ENS PSI 2025 # 167] 1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La suite $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ peut-elle être dense dans $\mathbb{C}$?

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

a) Pour $X \in \mathbb{C}^2$, la suite $\left(A^k X\right)_{k \in \mathbb{N}}$ peut-elle être dense dans $\mathbb{C}^2$?

b) Soient $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}), X \in \mathbb{C}^m$. La suite $(A^k X)_{k \in \mathbb{N}}$ peut-elle être dense dans $\mathbb{C}^m$?

3. Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ qui n'admet pas de valeur propre réelle.

a) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}), a > 0, \theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\sin\theta & * & \cdots & * \\ a\sin\theta & a\cos\theta & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} P^{-1}$$

.

b) Soient $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), X \in \mathbb{R}^m$. La suite $(A^k X)_{k \in \mathbb{N}}$ peut-elle être dense dans $\mathbb{R}^m$?

Exercice 168 [ENS PSI 2025 # 168] On dit que $P = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation s'il existe une permutation σ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ telle que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ p_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$. On dit que $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une H-matrice si tous ses coefficients valent ± 1 et si ses colonnes forment une famille orthogonale pour le produit scalaire canonique.

1. Soit P une matrice de permutation. Montrer que P est orthogonale et que P^T est une matrice de permutation.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$.Montrer que M est une H-matrice si et seulement si $M^T M = nI_n$.

c. Soient $D \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ une matrice diagonale, M une H-matrice de taille n, et P une matrice de permutation de taille n. Montrer que DM, M^T, MD et PM sont des H-matrices. On suppose dans les dernières questions qu'il existe une H-matrice de taille $n \geq 3$.

d. Montrer qu'il existe une H-matrice $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'ayant que des 1 en première ligne.

3. Montrer que $\forall i, j \in [\![2, n]\!]$ avec $i \neq j$, on a $\sum_{k=1}^n (s_{i,k} + 1)(s_{j,k} + 1) = n$.
4. En déduire que n est un multiple de 4. On écrit n=4k avec $k \in \mathbb{N}^*$.

g) Montrer qu'il existe une H-matrice de taille n dont les trois premières lignes sont présentées en quatre blocs de taille k de la forme suivante :

(

Exercice 169 [ENS PSI 2025 # 169] Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ est noté $\langle x, y \rangle = x^T y$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique $(A^+, A^-) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times A_n(\mathbb{R})$ tel que $A = A^+ + A^-$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle Ax, x \rangle = \langle A^+ x, x \rangle$.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ les valeurs propres de A^+ et $E_1, \ldots, E_\ell$ les sous-espaces propres associés. On suppose de plus que A et A^+ commutent.

1. Montrer que $\forall x \in E_i$, $Ax \in E_i$ et $A^- x \in E_i$.
2. Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$ et F_μ le sous-espace propre associé. Montrer qu'il existe j tel que $\mu = \lambda_j$ et $F_\mu \subset E_j$.
3. Soit $i \in [1, \ell]$. On suppose $\dim(E_i) = 1$. Montrer que $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)$ et $E_i \subset \mathrm{Ker}(A^-)$.
4. Montrer que si A est diagonalisable alors A est symétrique.

Exercice 170 [ENS PSI 2025 # 170] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMA^T$.

1. On suppose A diagonalisable.
   a) Montrer que **u** est diagonalisable.
   b) Montrer que $tr(u) = [tr(A)]^2$.
   c) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est stable par u. On note u_S l'endomorphisme induit par u sur

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

. Montrer que $\operatorname{tr}(u_S) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(A^2) + [\operatorname{tr}(A)]^2)$.

1. On suppose désormais que $\tilde{A}^m = I_n$ pour un entier $m \geq 1$.
   a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
   b) Montrer qu'il existe des entiers r,s tels que $r+2s \leq n$ et des entiers $k_1 \leq \cdots \leq k_s$ tels que $\operatorname{tr}(A) = r+2\sum_{s=1}^{s} \cos\left(\frac{2k_i\pi}{m}\right)$.
   c) Montrer que $\{A^k, k \in \mathbb{N}\}$ est fini.
   d) On pose $N = \operatorname{Card}(\{A^k, k \in \mathbb{N}\})$. Montrer que $\operatorname{tr}(u) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr}(A^k)$.

Exercice 171 [# 171] 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k \geq 0$.
   a) Montrer que f est continue.
   b) On suppose k < 1. Montrer que f admet un unique point fixe.
   c) Donner un exemple de fonction 1-lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'a pas de point fixe.
2. On considère $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme N. Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction 1lipschitzienne. Soit Ω l'ensemble des vecteurs x de E tels que la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $\Omega = \emptyset$ ou $\Omega = E$.
3. On suppose $E = \mathbb{C}$ et f(z) = az + b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit 1-lipschitzienne. En supposant cette condition réalisée, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Omega = E$.

Exercice 172 [ENS PSI 2025 # 172] Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension 2 muni d'une base (e_1, e_2) vérifiant la propriété () : $\forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $||\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2|| = |||\lambda_1||e_1 + ||\lambda_2||e_2||$.

1. Rappeler la définition d'un espace euclidien.
2. Donner un exemple d'espace vectoriel normé et d'une base où la propriété () est vérifiée.
3. Donner un exemple d'espace vectoriel normé et d'une base où la propriété () n'est pas vérifiée.
4. On veut montrer le résultat () : pour tout $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2) \in \mathbb{R}^4$, si $|\alpha_1| \leq |\beta_1|$ et $|\alpha_2| \leq |\beta_2|$ alors $||\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2|| \leq ||\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2||$. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et on définit la fonction $f(\mu) = \|\mu e_1 + \lambda e_2\|$.
   - Montrer que $f\left(\frac{\mu+\mu'}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(\mu) + \frac{1}{2}f(\mu')$ pour tout $(\mu,\mu') \in \mathbb{R}^2$.
   - En déduire que f est convexe.
   - Montrer que f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$. iv) En déduire la validité de l'implication ().

Exercice 173 [ENS PSI 2025 # 173] Nature, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, de la série $\sum(-1)^n \frac{n^\alpha}{n^{2\alpha}+(-1)^n}$.

Exercice 174 [ENS PSI 2025 # 174] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{pq}{p+q}$.

1. Montrer que $(H_n \ln(n+1))$ converge. On note sa limite γ.
2. Déterminer un équivalent de S_n.
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de S_n.

Exercice 175 [ENS PSI 2025 # 175] Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note D(f) l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+1)f(x)$.

1. Montrer que D induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (on identifie un polynôme et la fonction polynomiale associée). Quel est son noyau ? son image ?
2. Soient $f \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$ et x > 0.

Montrer qu'il existe $c \in]x, x+n[$ tel que $D^n(f)(x) = f^{(n)}(c)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^\lambda \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{N}$.

Exercice 176 [ENS PSI 2025 # 176] Soit G l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos(2k\pi x) + b_k \sin(2k\pi x))$$

avec (a_n) et (b_n) sommables. Soit F l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 1-périodiques.

1. Si $f \in G$, montrer que les a_k et b_k sont uniquement déterminés par f.

Si $a \in \mathbb{R}$ est fixé, on pose, pour $f \in F, T(f) : x \mapsto f(x+a)f(x)$.

1. Si $a \in \mathbb{Z}$, que vaut T ? c) Si $a \in \mathbb{Q}$, décrire Ker(T).
2. Si $a = \sqrt{2}$, décrire Ker(T).
3. Oue vaut $\operatorname{Im}(T|_G)$ pour $a = \sqrt{2}$?

Exercice 177 [ENS PSI 2025 # 177] Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ convexe, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.

1. Soit $t \in I$. Pour tout $x \in I \setminus \{t\}$, on pose $\Delta_t(x) = \frac{f(x)f(t)}{xt}$.
   a) Montrer que Δ_t est croissante sur $I \setminus \{t\}$.
   b) Justifier l'existence de $f'(t^+) = \lim_{x \to t^+} \Delta_t(x)$. iii) On pose $a_t : x \mapsto f(t) + f'(t^+)(x - t)$. Montrer que $f(x) = \sup_{t \in I} a_t(x)$.
2. On dit que f est log-convexe lorsque f > 0 sur I et $\ln \circ f$ convexe
   a) Montrer que si f est log-convexe, alors elle est convexe.
   b) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$. Montrer que f est log-convexe si et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, x \mapsto e^{\alpha x} f(x)$ est convexe. iii) Montrer que la somme de deux fonctions log-convexes est log-convexe.
3. On pose $\Gamma : x \mapsto \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
   a) Justifier que Γ est définie, de classe $\mathcal{C}^2$, et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   b) Montrer que Γ est log-convexe.
   c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer : $\Gamma(x + n) = \Gamma(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x + k)$ et $\Gamma(n + 1) = n!$.
   d) Montrer que $\ln(n) \leq \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\Gamma(n+1+x)}{\Gamma(n+1)}\right) \leq \ln(n + 1)$.

Exercice 178 [ENS PSI 2025 # 178] 1. Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ décroissante, positive, et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f(x) = o(1/x) quand $x \to +\infty$.

2. Montrer qu'il existe une fonction $g \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, positive et intégrable qui n'est pas négligeable devant 1/x en $+\infty$.

Exercice 179 [ENS PSI 2025 # 179] Soit $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, strictement décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(x^n)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) > 0$ et que $\lim_{x \to \infty} f = 0$.
2. Soit $a \in [0, 1[$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur [0,a]. Cette suite est-elle uniformément convergente sur [0, 1] ?
3. Soit $b \in]1, +\infty[$. Mêmes questions pour les intervalles $[b, +\infty[$ et $]1, +\infty[$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. La suite de terme général $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$ est-elle convergente ?

Exercice 180 [ENS PSI 2025 # 180] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec a < b et I = [a,b]. Soit $f \colon I \to I$ continue. La notation f^n désigne $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois).
On suppose qu'il existe $\omega \in I$ tel que $\forall x \in I, f^n(x) \to \omega$ quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ω est l'unique point fixe de f^k.
2. Montrer que $f(I) \neq I$.
3. Montrer que $\cap_{n \geq 1} f^n(I) = \{\omega\}$.
4. Montrer que la suite (f^n) converge uniformément vers la fonction constante égale à ω.

Exercice 181 [ENS PSI 2025 # 181] Pour $n \geq 1$, on note b_n le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n.
On pose

$$b_0 = 1$$

et $B : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$.
réflexive ($\forall x \in E, x \sim x$),

1. Montrer que b_n est le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble de cardinal n. Cette notion étant hors-programme, nous en donnons la définition. Une relation ~ sur l'en-

semble E est dite d'équivalence lorsque c'est une relation : symétrique ($\forall (x, y) \in E^2, x \sim y \Rightarrow y \sim x$), - transitive ($\forall (x, y, z) \in E^3, x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$).

1. Calculer b_0, b_1, b_2.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k$.
3. Montrer que B est dérivable sur un intervalle ouvert non vide, en déduire une équation différentielle vérifiée par B puis la résoudre.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Exercice 182 [ENS PSI 2025 # 182] 1. Calculer $\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{t} dt$. On donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Soient $x \in [0, 1]$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec 0 < a < b. Montrer que l'équation $y^a y^b = x^a x^b$ d'inconnue y admet deux solutions, sauf pour une valeur x_0 de x que l'on déterminera.
3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_0) = x_0$ et, pour $x \neq x_0$, f(x) est l'unique solution différente de x de l'équation $y^a - y^b = x^a - x^b$. Montrer que f est décroissante et continue.
4. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que l'équation $x^{b-a} = \frac{1-t^a}{1-t^b}$ admet une unique solution $t \in$

]0,1[. On la note g(x).

1. Calculer $I = \int_0^1 -\frac{\ln(f(x))}{x} dx$. On utilisera le changement de variable t = g(x).

Exercice 183 [ENS PSI 2025 # 183] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$. Soit $J : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle \langle v, x\rangle$.

1. Calculer le gradient de J et montrer que $\forall x, h \in \mathbb{R}^n, J(x + h) - J(x) = \langle \nabla J(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle$.

2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   - il existe $x \in \mathrm{Ker}(B)$ tel que $\forall z \in \mathrm{Ker}(B), J(z) \geq J(x)$;
   - il existe $x \in \mathrm{Ker}(B)$ tel que $\nabla J(x) \in \mathrm{Ker}(B)^{\perp}$;
   - le système (S) : $\begin{cases} Ax + B^T y = v \\ Bx = 0 \end{cases}$
3. Montrer que si $Ker(B) = \{0\}$ alors (S) admet au moins une solution.
4. Montrer que (S) admet au plus une solution si et seulement si $Ker(B^T) = \{0\}$.
5. Montrer qu'il existe $\alpha > 0, \beta \geq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $J(x) \geq \alpha||x||^2\beta||x||$.
6. En déduire que (S) admet au moins une solution.

Exercice 184 [ENS PSI 2025 # 184] Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien.

1. a) Montrer que la fonction $x \mapsto ||x||$ est de classe C^1 sur $E \setminus \{0\}$. Calculer sa différentielle.
   b) Soient H un sous-espace vectoriel de E et $a \in E$.

Soit $x \in H$ tel que $||x - a|| = \inf_{y \in H} ||y - a||$. Montrer que $x - a \in H^{\perp}$.

1. a) Soient $a, b \in E$ et $\varphi : x \in E \mapsto ||xa|| + ||xb||$. Calculer la différentielle de φ là où elle existe, et déterminer les points où celle-ci s'annule.
   b)) Déterminer les extrema de φ sur E.
2. Soit $\rho : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (1-y)^2}$. Déterminer les extrema de ρ.
3. Soient A, B et C trois points du plan formant un triangle aigu. Soit $\Psi : M \mapsto AM + BM + CM$.
   a) Montrer que Ψ admet un minimum en un point O tel que, pour tout couple $(M, N) \in \{A, B, C\}^2$ de points distincts, l'angle non orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ vaut $\frac{2\pi}{3}$.
   b) Que se passe-t-il si A, B et C forment un triangle équilatéral ?
   c) Que peut-on conclure dans le cas général ?

2) Probabilités

Exercice 185 [ENS PSI 2025 # 185] 1. Soient N boules rouges et M boules noires dans une urne. Combien y a-t-il de suites de tirages successifs sans remise d'une boule jusqu'à vider l'urne ?

On considère désormais une urne contenant n> 2 boules rouges et 2N-n> 2 boules noires. On effectue des tirages successifs sans remises de deux boules à la fois jusqu'à vider l'urne. On note X le nombre de tirages ayant donné deux boules rouges.

1. On suppose $n > N$. Déterminer $P(X \geq 1)$.
2. Majorer X.

On suppose n pair et on note A l'événement « les $\frac{n}{2}$ premiers tirages sont constitués de deux boules rouges » et B l'événement « les $\frac{n}{2} - 1$ premiers tirages sont constitués de deux boules rouges et les deux tirages suivants d'une boule rouge et d'une boule noire ». Sont-ils équiprobables ?

1. Soit un entier $k < N$. Déterminer P(X = k).
2. Déterminer $\mathbf{E}(X)$.
3. On suppose que $n = \lfloor \lambda N \rfloor$ avec $\lambda < 1$. Montrer que $\mathbf{E}(X) \sim \frac{\lambda^2}{4} N$.

Exercice 186 [ENS PSI 2025 # 186] 1. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$, on note $||f||_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$.

- Montrer que $\|\|_2$ et $\|\|_4$ sont des normes sur E.
- Montrer que $\| \cdot \|_4 \geq \| \cdot \|_2$.
- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par $\forall x∈[0,1/2n],\ f_n(x)=0,$ $\forall x \in [1/n, 1], f_n(x) = x^{-1/4}$ et f_n est affine sur $[1/2n, 1/n]$. Comparer $||f_n||_2$ et $||f_n||_4$. Qu'en déduit-on ?

2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
   Pour
   $$a = (a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*},\ n \geq 1$$
   et $p \geq 2$, on note $N_{n,p}(a) = \left(\mathbf{E}\left(|\sum_{k=1}^n a_k X_k|^p\right)\right)^{1/p}$.
   - Calculer $N_{n,2}(a)$.
   - Calculer $N_{n,4}^4(a)$ en fonction de $N_{n,2}(a)$.

Exercice 187 [ENS PSI 2025 # 187] Soit S_n l'ensemble des permutations de [1, n], que l'on munit de la probabilité uniforme.

1. Pour $k, \ell \in [1, n]$ avec $k \neq \ell$, on note $\tau_{k,\ell} \in \mathcal{S}_n$ la transposition définie par $\tau_{k,\ell}(k) = \ell$, $\tau_{k,\ell}(\ell) = k$ et $\forall j \in [1, n] \setminus \{k, \ell\}, \tau_{k,\ell}(j) = j$.
   - Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, expliciter $\sigma \circ \tau_{k,\ell} \circ \sigma^{-1}$.
   - Déterminer tous les $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tels que $\forall \alpha \in \mathcal{S}_n, \sigma \circ \alpha = \alpha \circ \sigma$.
2. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $Z_\sigma = \{\alpha \in \mathcal{S}_n,\ \sigma \circ \alpha = \alpha \circ \sigma\}$.

- Montrer que Z_σ est stable par composition et passage à l'inverse.
- Pour $\sigma \neq id$, montrer que $2|Z_\sigma| \leq |S_n|$.

3. On tire indépendamment et avec remise deux éléments σ et τ de S_n.
   - Montrer que $\forall n \geq 3, p_n = \mathbf{P}(\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma) \leq \frac{7}{12}$.
   - Déterminer p_3.
4. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $C_\sigma = \{\alpha \circ \sigma \circ \alpha^{-1},\ \alpha \in S_n\}$.
   - Montrer que $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ |C_\sigma| = \frac{n!}{|Z_\sigma|}$.
   - Montrer que $\forall \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n, C_\sigma = C_\tau$ ou $C_\sigma \cap C_\tau = \emptyset$.

Exercice 188 [ENS PSI 2025 # 188] Soit $n \geq 2$. On se place dans $\mathbb{N}^2$ et on considère le rectangle $[0,n]\times[0,2]$. On appelle recouvrement de $[0,n]\times[0,2]$ tout ensemble fini formé de rectangles translatés de $[0,1]\times[0,2]$ (rectangles verticaux) et de $[0,2]\times[0,1]$ (rectangles horizontaux) qui recouvrent $[0,n]\times[0,2]$ sans que leurs intérieurs ne se chevauchent.

On note u_n le nombre de recouvrements de $[0,n]\times[0,2]$. On munit l'ensemble des recouvrements de $[0,n]\times[0,2]$ de la probabilité uniforme.

1. Calculer u_1, u_2, u_3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. En déduire une expression de u_n.
2. On note $P_{1,n}$ la probabilité qu'il y ait un rectangle vertical tout à gauche.

Calculer $P_{1,n}$ et montrer que $(P_{1,n})$ admet une limite L.

c. On note V_n le nombre de rectangles verticaux. Calculer $\mathbf{E}(V_n)$.Ind. On pourra écrire $V_n = \sum_{i=1}^n U_{i,n}$ où $U_{i,n}$ est l'indicatrice de l'événement : « il y a un

rectangle vertical en position i ».

d. Montrer que $\frac{\mathbf{E}(V_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

Ind. Découper la somme entre $[1,\sqrt{n}], [\sqrt{n}, n-\sqrt{n}]$ et $[n-\sqrt{n}, n]$.

1. On note $V_{i,j,n}$ l'événement : « il y a un rectangle vertical en i et en j ». Calculer $\mathbf{E}(V_{i,j,n})$.
2. Calculer $V(V_n)$, puis en donner un équivalent quand $n \to +\infty$.

Exercice 189 [ENS PSI 2025 # 189] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_{m,n} = \{a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n\}$ où les a_i, b_j sont des éléments distincts. Soit $H_{m,n}$ l'ensemble des bijections f de $A_{m,n}$ sur $[\![1, m+n]\!]$ telles que, pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!]$, $i < j$ implique $f(a_i) < f(a_j)$ et, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i < j$ implique $f(b_i) < f(b_j)$.

1. Calculer le cardinal de $H_{m,n}$.

Soit $f_{m,n}$ suivant la loi uniforme sur $H_{m,n}$.

1. Calculer $\mathbf{P}(f_{m,n}(a_m) = i)$.
2. Pour $c, k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{P}(f_{cn,n}(a_{cn}) = (c+1)n - k)$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$.
3. Calculer $P(f_{2m,n}(a_m) = i)$.
4. Soit $t \geq 0$. donner un équivalent de $\mathbf{P}(f_{2n,2n}(a_n) = 2n + \lfloor t\sqrt{n} \rfloor)$. Ind. Commencer avec $t = 0$ et utiliser l'équivalent de Stirling lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 190 [ENS PSI 2025 # 190] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ convexe.
   - Montrer que, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in I^n$, on a $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.
   - On suppose f de classe C^2 sur I avec f" > 0. Montrer que, si les λ_i sont dans]0,1[et les x_i sont distincts, l'inégalité du i) est stricte.
2. Soient Ω un ensemble fini, P_1 et P_2 des probabilités sur Ω. On pose

$$TV(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2) = \sup_{A\in\mathcal{P}(\Omega)} |\mathbf{P}_1(A) - \mathbf{P}_2(A)| \text{ et } N_1(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2) = \sum_{\omega\in\Omega} |\mathbf{P}_1(\{\omega\}) - \mathbf{P}_2(\{\omega\})|$$

.

   - Montrer que $TV(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2) = \frac{1}{2}N_1(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2)$
   - Montrer que $TV(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2) = \sum_{\omega\in\Omega} \max(\mathbf{P}_1(\{\omega\}),\mathbf{P}_2(\{\omega\}))1$
   - Montrer que

$$1 - TV^2(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2) \geq \left(\sum_{\omega\in\Omega} \sqrt{\mathbf{P}_1(\{\omega\})\mathbf{P}_2(\{\omega\})}\right)^2.$$

3. On garde les hypothèse de la question b) et on suppose que, pour tout $\omega \in \Omega$, la condition $\mathbf{P}_2(\{\omega\}) = 0$ implique $\mathbf{P}_1(\{\omega\}) = 0$. On pose $D(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{P}_1(\{\omega\}) \ln\left(\frac{\mathbf{P}_1(\{\omega\})}{\mathbf{P}_2(\{\omega\})}\right)$ avec la convention $0\ln 0 = 0$.
   - Montrer que $D(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2) \geq 0$
   - Montrer que $\left(\sum_{\omega\in\Omega} \sqrt{\mathbf{P}_1(\{\omega\})\mathbf{P}_2(\{\omega\})}\right)^2 \geq e^{-D(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2)}$.

- Conclure.

Exercice 191 [ENS PSI 2025 # 191] Soient $n \geq 2$ et $p \in \{1,\dots,n\}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que A^TA est inversible. On pose $P = A(A^TA)^{-1}A^T$.
On considère des variables aléatoires i.i.d. $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ d'espérance nulle et ayant un moment d'ordre 4. On pose $\sigma = \sqrt{\mathbf{V}(z_1)}$ et $Z = (z_1 \dots z_n)^T$.
On considère une matrice colonne $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On pose $Y = AX_0 + Z$ et $X = (A^TA)^{-1}A^TY$. On pose enfin $T = ||A(X - X_0)||^2$, où $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que rg(A) = p.
2. Montrer que P est un projecteur orthogonal de rang p. Déterminer son image et son noyau.
3. Montrer que $T = Z^TPZ$.
4. On note $P_{i,j}$ les coefficients de P. On pose $T_1 = \sum_{i=1}^n P_{i,i}z_i^2$ et $T_2 = 2\sum_{1\leq i<j\leq n} P_{i,j}z_iz_j$.

Exprimer $\mathbf{E}(T_1)$, $\mathbf{E}(T_2)$ et $\mathbf{E}(T_1T_2)$ en fonction de σ et p.

1. Déterminer $\mathbf{E}(T_1^2)$ et $\mathbf{E}(T_2^2)$.
2. En déduire l'espérance et la variance de T.

Exercice 192 [ENS PSI 2025 # 192] Soit Y une variable aléatoire. On dit que Y est k-divisible ($k \in \mathbb{N}^*$) s'il existe un vecteur aléatoire $(X_1,\dots,X_k)$ où les X_i sont i.i.d. tel que $Y \sim (X_1 + \dots + X_n)$. On dit que Y est infiniment divisible si elle est k-divisible pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendante suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ et ν. Donner la loi de X+Y. En déduire que si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors Y est infiniment divisible.
2. Soit Y une variable aléatoire. On suppose qu'il existe A> 0 tel que $\mathbf{P}(Y \in [-A, A]) = 1$ et que Y est k-divisible pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc $Y \sim (X_1 + \dots + X_k)$ où les X_i sont i.i.d.
   - Montrer que, pour tout i, $P(X_i \in [-A/k, A/k]) = 1$.
   - Montrer que, pour tout $i \in [1,k]$, $\mathbf{V}(X_i) \leq \left(\frac{A}{k}\right)^2$. En déduire une majoration de $\mathbf{V}(Y)$.
   - Que peut-on dire si la variable aléatoire Y vérifie $\mathbf{P}(Y \in [-A, A]) = 1$ et qu'elle est infiniment divisible ?
3. Soient $p \in]0,1[$ et Y une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(\lambda)$. Si $k \geq 2$, montrer que Y n'est pas k divisible.
4. Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et Y une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n,p)$. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y est-elle k-divisible ?

Exercice 193 [ENS PSI 2025 # 193] On dit que le spectre d'une matrice est simple lorsque toutes les valeurs propres de la matrice sont simples. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ considéré comme un vecteur colonne et $c \in \mathbb{R}$.L'objectif des deux premières questions est d'établir une démonstration de la proposition suivante : si le spectre de M n'est pas simple, alors b est orthogonal à un des vecteurs propres Soit λ une valeur propre non simple de M.

1. Montrer que l'on dispose de $v \in \mathbb{R}^n$, un vecteur propre de M, associé à la valeur propre λ, tel que $v_{n+1} = 0$.
2. Montrer que λ est aussi valeur propre de A et conclure.

Notons

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_5 & X_2 \\ 0 & X_5 & -1 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

où les X_i sont des variables aléatoires indé-

1. On note B l'événement : « le spectre de N est simple ». Montrer que $P(B) \geq 3p^32p^4$.

Exercice 194 [ENS PSI 2025 # 194] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
Pour

$$n \in \mathbb{N}^*$$

, soient $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k^\alpha}$ où $\alpha > 3/4$.

1.
   - Pour $(i,j,k,\ell) \in [1,n]^4$, calculer $\mathbf{E}(X_iX_jX_kX_\ell)$.
   - En déduire $\mathbf{E}(S_n^4)$.
   - Soit $(x_k)_{k\geq 1}$ une suite de réels > 0 et $B_{n,p} = \bigcup_{k\in[\![n,n+p]\!]} (|S_k| \geq x_k)$.
     Montrer que
     $$\mathbf{P}(B_{n,p}) \leq 3 \sum_{k\in[n,n+p]} \frac{k^2}{x_k^4}.$$
2.
   - Exprimer Y_n en fonction des S_k.
   - Montrer que (Y_n) converge presque sûrement.

Exercice 195 [ENS PSI 2025 # 195] 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ convexe.

- Soit $t_0 \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe g affine telle que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*} : f(t) \geq g(t)$ et $f(t_0) = g(t_0)$.
- Soit Z une variable aléatoire réelle telle que Z et f(Z) sont d'espérance finie. Montrer que $f(\mathbf{E}(Z)) \leq \mathbf{E}(f(Z))$.

2. Pour X variable aléatoire réelle et $t \in \mathbb{R}$, on pose si possible $\Psi_X(t) = \ln(\mathbf{E}(e^{tX}))$. Calculer Ψ_X lorsque X suit la loi de Poisson de paramètre λ.
3. Pour X variable aléatoire discrète réelle et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi_X(\theta) = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}(t\theta\Psi_X(t))$.
   - Montrer que Φ_X est positive et convexe sur son ensemble de définition.
   - Montrer que Φ_X est définie en $\mu = \mathbf{E}(X)$ et que $\Phi_X(\mu) = 0$.
   - Montrer que Φ_X est décroissante pour $\theta < \mu$ et croissante pour $\theta > \mu$.
4. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
   - Calculer Φ_X.
   - Donner un majorant de $P(X \geq 2\lambda)$.

III) ENS PC **AUTRE**

Exercice 196 [ENS PC 2025 # 196] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2i\pi k^2}{n}\right)$.

Exercice 197 [ENS PC 2025 # 197] Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\mathrm{tr}(A^2) \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$. Cas d'égalité ?

Exercice 198 [ENS PC 2025 # 198] Soient

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

et $F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $(D+F)^k$

Exercice 199 [ENS PC 2025 # 199] Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \beta\,\mathrm{tr}$.

Exercice 200 [ENS PC 2025 # 200] Soit $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^n$. Existe-t-il nécessairement $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que : $\mathrm{tr}\left(\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i A_i\right)^2\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}\left(A_i^2\right)$?

Exercice 201 [ENS PC 2025 # 201] Soit $R : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par R(0) = 0 et, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, $R(P) = X^n P\left(\frac{1}{Y}\right)$.

1. L'application R est-elle linéaire ? bijective ?
2. Trouver tous les polynômes P tels que R(P') = R(P)'.

Exercice 202 [ENS PC 2025 # 202] Soient M et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = N^2 = 0$ et $MN + NM = I_2$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $M = PE_{1,2}P^{-1}$ et $N = PE_{2,1}P^{-1}$.

Exercice 203 [ENS PC 2025 # 203] Soit $(A_1, \ldots, A_m) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^m$ tel que, $\forall (i,j) \in [1,m]^2$, $A_iA_j \in \{A_1, \ldots, A_m\}$. Montrer que $|\det(A_j)| = 1$ pour tout $j \in [1,m]$.

Exercice 204 [ENS PC 2025 # 204] Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. On pose $f_N : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} t^k N^k$.

1. Montrer que f_N est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si f_N s'annule alors N = 0.

Exercice 205 [ENS PC 2025 # 205] Soient $A, B \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note, pour $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, [X, Y] = XY - YX. Montrer que $[[A,B]^2, C] = 0$.

Exercice 206 [ENS PC 2025 # 206] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $E = \{AM, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$. Déterminer la dimension de E.

Exercice 207 [ENS PC 2025 # 207] 1. Soient A, B, C des espaces vectoriels. On note $A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C$ lorsque $f_1 \in \mathcal{L}(A,B)$, $f_2 \in \mathcal{L}(B,C)$ et $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Ker}(f_2)$. Que peut-on dire si $A = \{0\}$? si $C = \{0\}$?b) Soient A, B, C, D, E, F des espaces vectoriels. On suppose que

où h_1 et h_3 sont des isomorphismes et où $h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1$ et $h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2$. Montrer que h_2 est un isomorphisme.

Exercice 208 [ENS PC 2025 # 208] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_k$ des éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui ne sont pas des monômes tels que $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \exists i \in [1,k], P_i(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 209 [ENS PC 2025 # 209] Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\mathrm{rg}\,A = p$ et $\mathrm{rg}\,B = q$. Déterminer les valeurs possibles de $\mathrm{rg}(AB)$.

Exercice 210 [ENS PC 2025 # 210] Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sans valeur propre complexe commune. Montrer que $\Phi : M \mapsto AM - MB$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 211 [ENS PC 2025 # 211] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n > p > \mathrm{rg}(A)$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Déterminer les $x \in \mathbb{R}^p$ tels que $||Axb|| = \min_{y\in\mathbb{R}^p} ||Ayb||$.

Exercice 212 [ENS PC 2025 # 212] Soient E un espace euclidien et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux qui commutent. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal.

Exercice 213 [ENS PC 2025 # 213] Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & x \\ x^T & a \end{pmatrix}$.

On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \mu_{n+1}$ les valeurs propres de M. Montrer que $\mu_1 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \lambda_n \leq \mu_{n+1}$.

Exercice 214 [ENS PC 2025 # 214] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$, on note $A \leq B$ si $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On pose $\Phi : A \mapsto A^T A$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que Φ est convexe, c'est-à-dire : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\Phi((1 - \lambda)A + \lambda B) \leq (1 - \lambda)\Phi(A) + \lambda\Phi(B)$.

1) Analyse

Exercice 215 [ENS PC 2025 # 215] Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \|M^n X\| = +\infty$.

Exercice 216 [ENS PC 2025 # 216] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on définit [A,B] = AB BA. Soient A et B dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices définie par $F_0 = B$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $F_{p+1} = [A, F_p]$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe des réels $c_{0,n}, c_{1,n}, \ldots, c_{n,n}$ tels que

$$F_n = \sum_{i=0}^{n} c_{i,n} A^{n-i} B A^i$$

.b) Soit $A \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que la suite (F_n) tende vers la matrice nulle, et ce quelle que soit la matrice B à partir de laquelle la suite (F_n) a été construite.

Exercice 217 [ENS PC 2025 # 217] Soit $\gamma \in]0, 1]$. Soit $(x_n)_{n\geq1} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leq x_n + x_n^{1-\gamma}$. Montrer qu'il existe d> 0 tel que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ x_n \leq dn^{1/\gamma}$.

Exercice 218 [ENS PC 2025 # 218] Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles.

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - x_n$. Si $y_n \to 0$, la suite (x_n) converge-t-elle nécessairement ?
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$. Montrer que, si $y_n \to 0$, alors $x_n \to 0$.

Exercice 219 [ENS PC 2025 # 219] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_{n,N})_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double réelle.

On suppose que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} x_{n,N} = \alpha$. Montrer qu'il existe $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} x_{n,N_n} = \alpha$.

Exercice 220 [ENS PC 2025 # 220] Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge.

1. Montrer que $\sum \frac{u_n}{(u_1+\cdots+u_n)^2}$ converge.

1. Montrer que $\sum \frac{u_n}{u_1+\cdots+u_n}$ diverge.

   c. Soit $(x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. On suppose, que pour toute $(y_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$, la convergence de $\sum y_n^2$ implique celle de $\sum x_n y_n$. Montrer que $\sum x_n^2$ converge.

Exercice 221 [ENS PC 2025 # 221] Soient a > 0 et $f \in C^0([0, +\infty[\,, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - 1| < \frac{1}{1+x^2}$.

Montrer qu'il existe $g \in C^0([0, +\infty[\,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)g(x + a)$.

Exercice 222 [ENS PC 2025 # 222]

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, f(xy) = f(x) + f(y).
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, f(xy) = f(x) f(y).

Exercice 223 [ENS PC 2025 # 223] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que f" est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f'(x))^2 \leq Cf(x)$.

Exercice 224 [ENS PC 2025 # 224] Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f, f' et f" sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to0} \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$

0.

Exercice 225 [ENS PC 2025 # 225] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui tend vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$ et telle que la famille de fonctions $(f, x \mapsto f(x + 1), x \mapsto f(x + 2))$ est liée. Que dire de f ?

Exercice 226 [ENS PC 2025 # 227] Soient

$$a, b \in \mathbb{R}$$

avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ intégrable.

On suppose the

$$a, b \in \mathbb{R}$$

avec $a < b \in f \in C\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ integrable.

On suppose que :

$$\forall x \in [a, b],\ f'(x) \geq 1$$

. Peut-on avoir $\int_{\mathbb{R}} f = \frac{(b-a)^2}{2}$?

Exercice 227 [ENS PC 2025 # 228] Trouver toutes les

$$f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^{+*})$$

telles que $\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{1}{f} = 1$.

Exercice 228 [ENS PC 2025 # 229] Soient

$$a < b$$

deux réels.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b]), \mathbb{R})$ telle que $|\varphi'| \geq 1$ et $\varphi'' > 0$.
2. Soit

$$\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b]), \mathbb{R}$$

) telle que $|\varphi'| \geq 1$ et $\varphi'' > 0$. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\left|\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x))\, dx\right| \leq \frac{4}{\lambda}$.

b. Montrer que, pour tout

$$\varphi \in C^2([a,b], \mathbb{R})$$

et pour tout $\alpha > 0$, si $|\varphi'| \geq \alpha$ et $\varphi'' > 0$ alors

$$\left|\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x))\, dx\right| \leq \frac{4}{\alpha\lambda}$$

. *c*. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ telle que $\varphi'' \geq 1$.

Montrer que, pour tout

$$\lambda > 0$$

, $\left|\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x))dx\right| \leq \frac{8}{\sqrt{\lambda}}$.

d. Soit

$$\varphi \in C^k([a,b], \mathbb{R})$$

, où $k \in \mathbb{N}^*$, telle que $\varphi^{(k)} \geq 1$.

$$\text{Trouver } C > 0 \text{ et } \alpha > 0 \text{ tels que } \forall \lambda > 0, \left|\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x))dx\right| \leq \frac{C}{\lambda^\alpha}$$

.

Exercice 229 [ENS PC 2025 # 230] Soit E un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note $L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées et $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de carré intégrable.

l'espace des fonctions bornées et

$$L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

l'espace des fonctions de carré intégrable.

1. On suppose qu'il existe un sous espace vectoriel G de E constitué de fonctions bornées

sur

$$\mathbb{R}^+$$

tel que $E = \text{Vect}(x \mapsto e^x) + \text{Vect}(x \mapsto e^{-x}) + G$ et que la seule fonction dans G qui soit de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$ est la fonction nulle. Montrer que $E \cap L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{0\}$.

1. On suppose que E vérifie les hypothèses de la question a) et qu'on dispose de deux sousespaces F_1 et F_2 de E tels que dim $F_1 = \dim F_2 = 2$, que toutes les fonctions de F_1 sont bornées sur $\mathbb{R}^-$, et que la seule fonction de F_2 bornée sur $\mathbb{R}^-$ est la fonction nulle. Montrer que $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) = 1$.

Exercice 230 [ENS PC 2025 # 231] On définit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = e^{-x} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_{-1}^{+\infty} \frac{f_n(t+1)}{1+t^2}\, e^t\, dt$$

.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge sur un intervalle $[x_0, +\infty[$, où x_0 est judicieusement choisi.

Exercice 231 [ENS PC 2025 # 232] 1. Soient f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et J une partie finie
On suppose que $f^{(i)}(0) = 0$ si $i \notin J$ et $f^{(i)}(1) = 0$ si $i \in J$. Que dire de f ?

1. La propriété est-elle encore vérifiée si J est une partie infinie de $\mathbb{N}$?

Exercice 232 [ENS PC 2025 # 233] Pour $a > 0$, on pose $f(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+a^2x^2}}$

1. Justifier la définition de f(a).

2. Montrer que $f(a) = O\left(\frac{\ln a}{a}\right)$.

Exercice 233 [ENS PC 2025 # 234] Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)\exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{1}{4}x^2\right)$.

Exercice 234 [ENS PC 2025 # 235] Pour $n \in \mathbb{N}$, donner un équivalent de $A_n(t) = \int_0^1 \sin^2(xt)\, x^{n-2}\, dx$ lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 235 [ENS PC 2025 # 236] Soit $h \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que h(0) = h(1) = 0 et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto h(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Soit $g\colon y \in \mathbb{R} \mapsto \int_a^1 |x-y| f(x) dx$.

1. Montrer que g est deux fois dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = 2f(x)$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que q soit bornée.

Exercice 236 [ENS PC 2025 # 237] Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |h(x)| \leq \frac{1}{1+|x|}$ et $|h'(x)| \leq \frac{1}{1+|x|^2}$. Montrer la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\, dx\, dy$ où $\varphi(x,y) = \frac{h(x)-h(y)}{x-y}$ si $x \neq y$, et

Exercice 237 [ENS PC 2025 # 238] Soit, pour

$$x \in \mathbb{R}$$

, $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(xy)\, dy$.

1. Calculer explicitement f.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k-ième de f est bornée par k!.
3. En quels points x y a-t-il égalité entre k! et $|f^{(k)}(x)|$?

Exercice 238 [ENS PC 2025 # 239] 1. Donner les solutions de l'équation différentielle : $x''x = \cos(2t)$.

2. Soient c> 0 et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que f(t)=0 pour tout t vérifiant $|t| \geq c$.

Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle x" x = f(t) vérifiant $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$.
$\varphi(x,y) = h'(x)$ sinon.

2) Géométrie

Exercice 239 [ENS PC 2025 # 240] Soit $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2+bx+c$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et a > 0. On pose $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq f(x)\}$ et $\mathcal{C} = \{(x,f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$. Soient v un vecteur non nul du plan, $X \in E$ et $\Delta = \{X + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\Delta \cap \mathcal{C}$ est non vide.

Exercice 240 [ENS PC 2025 # 241] 1. Soit ABC un « vrai » triangle tel que ABC soit aigu (et non droit).Montrer que : $AC^2 < AB^2 + BC^2$.

2. Soient e_1, e_2 et e_3 des vecteurs non nuls orthogonaux de $\mathbb{R}^3$. On pose : $d_1 = \{te_1; t>0\}$, $d_2 = \{te_2; t>0\}$, $d_3 = \{te_3; t>0\}$. Montrer que tout triangle $A_1A_2A_3$, où $A_i \in d_i$, est aigu, c'est-à-dire que ses trois angles sont aigus.

3) Probabilités

Exercice 241 [ENS PC 2025 # 242] Deux joueurs de tennis sont de même niveau. Ils disputent un match. Quelle est la probabilité que le match se termine par un tie-break ?

Exercice 242 [ENS PC 2025 # 243] On lance n fois une pièce avec une probabilité p d'obtenir face. On pose A_n : « on n'obtient jamais deux faces de suite ». Donner un équivalent de $\mathbf{P}(A_n)$.

Exercice 243 [ENS PC 2025 # 244] On considère une urne contenant initialement n+1 boules : n blanches et une rouge. On tire une par une des boules dans l'urne. Si on tire la boule rouge, on s'arrête, sinon on a une chance sur deux de remette la boule et continuer, une chance sur deux de s'arrêter. On pose X_n le nombre de boules tirées lorsque l'on s'arrête. Donner $\mathbf{E}(X_n)$.

Exercice 244 [ENS PC 2025 # 245] Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On lance N fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité qu'on obtienne un nombre pair de face ?

Exercice 245 [ENS PC 2025 # 246] Soit S_n l'ensemble des permutations de [1, n] muni de la probabilité uniforme.

1. Donner la loi de la variable aléatoire K qui donne la taille du cycle contenant 1.
2. Déterminer l'espérance et la variance du nombre N de cycles.

Exercice 246 [ENS PC 2025 # 247] Soit σ une permutation aléatoire de [1, 2n] suivant la loi uniforme.
On pose

$$Y = \sum_{i=0}^{n-1} |\sigma(2i) - \sigma(2i+1)|$$

. Calculer $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 247 [ENS PC 2025 # 248] Soient Y, Z deux variables aléatoires à valeurs dans [0, n]. Montrer que si, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, $\mathbf{E}(P(Y)|Q(Z)) = \mathbf{E}(P(Y))|\mathbf{E}(Q(Z))$, alors Y et Z sont indépendantes.

Exercice 248 [ENS PC 2025 # 249] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_0, \ldots, A_d$ des variables aléatoires indépendantes. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k suit la loi géométrique de paramètre 1/(k+1). On note $P = \sum_{k=0}^{a} A_k X^k$ et R la variable aléatoire la loi telle que, conditionnelleme
Calculer $\mathbf{E}(R)$.

Exercice 249 [ENS PC 2025 # 250] Soit a > 0. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' \geq 2a$. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles et admettant une variance. Montrer que $\mathbf{E}(f(X))f(\mathbf{E}(X)) \geq a\mathbf{V}(X)$.

Exercice 250 [ENS PC 2025 # 251] Un mobile se déplace sur l'axe des réels. Soit $\varepsilon > 0$. Son mouvement est décrit par une fonction x dérivable sur tous les intervalles [n, n+1] et y vérifiant $x'(t) = \varepsilon x(t)$, admettant en chaque $n \in \mathbb{N}^*$ une limite finie à gauche $x(n^-)$ et une limite finie à droite $x(n^+)$, et telle que x(0) = 0.

Soit $T \in \mathbb{N}$. À chaque instant $t = n \in [0, T]$, on lance une pièce équilibrée. Si on fait Pile $x(n^+) = x(n^-) + n$, si on fait Face $x(n^+) = x(n^-) - n$, avec la convention $x(0^-) = 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ assez grand tel que, pour tout $T \in \mathbb{N}$, x reste de signe constant sur [0, T].

Exercice 251 [ENS PC 2025 # 252] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!]^2)$. On note $X = (X_1, X_2)$. On pose $Y_0 = 0$ et, pour $k \in [0, n-1]$, $Y_{k+1}(\omega) = Y_k(\omega) + 2$ si $X_1(\omega) \leq k$ et $X_2(\omega) \geq Y_{X_1}(\omega),$ et $Y_{k+1}(\omega) = 0\ Y_k(\omega) + 1$ sinon.

1. Justifier que Y_k est bien définie pour $0 \leq k \leq n$.
2. Déterminer la limite de $\left(\frac{\mathbf{E}(Y_n)}{n}\right)$.

Exercice 252 [ENS PC 2025 # 253] Soient n et d dans $\mathbb{N}^*$. On note $[-n, n]^d$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont des entiers compris entre -n et n. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-n, n]^d$.

1. Déterminer $\mathbf{E}(\|X\|_1)$ et en trouver un équivalent lorsque $n \to +\infty$.
2. Déterminer $\mathbf{E}(\|X\|_\infty)$ et en trouver un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 253 [ENS PC 2025 # 254] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans [1,d]. On note $p_k = \mathbf{P}(X_1 = k)$. Soit N_k la variable aléatoire égale au nombre de fois que la valeur k est obtenue. Donner la matrice $(Cov(N_i, N_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ et préciser son rang.

Exercice 254 [ENS PC 2025 # 255] 1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

Montrer que, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}\left(e^{\gamma X}\right) \leq e^{\gamma^2/2}$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soient $(c_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_N = c_1 X_1 + \cdots + c_N X_N$.

1. Montrer que, pour tout t > 0, $\mathbf{E}(e^{tY_N}) \leq e^{t^2(c_1^2 + \cdots + c_N^2)/2}$.

c) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|Y_N| > \lambda) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{2(c_1^2 + \cdots + c_N^2)}}$.
d) Montrer que $N^{10}\, \mathbf{P}(|X_1 + \cdots + X_N| > N^{3/4}) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

IV) X MP **XENS**

1) Algèbre

Exercice 255 [X MP 2025 # 256] Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre réel $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ est-il rationnel ?

Exercice 256 [X MP 2025 # 257] On étudie l'équation $x^2 + y^2 = N(1 + xy)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, où $N \in \mathbb{N}$.

1. Traiter les cas x = y, N = 0, N = 1.- b) On suppose $N \geq 2$ et on se donne (x,y) solution avec $x \neq y$. Montrer qu'on peut se ramener à $x > y \geq 0$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que (y, z) soit solution et tel que y > z.

En déduire que N est un carré parfait.

1. On considère maintenant l'équation $x^2 + y^2 = -N(1 + xy)$ dans $\mathbb{Z}^2$. En adaptant la méthode précédente, trouver tous les couples solutions.

Exercice 257 [X MP 2025 # 258] Soient $a \in \mathbb{N}$ avec $a \geq 2$ et $P = X^2 + X + a$. On suppose que, pour tout $n \in [0, a-1]$, P(n) est premier. Soit $k \in [1, a-2]$.

1. Montrer que si k+1 est un carré alors P(a+k) n'est pas premier.
2. Montrer que si P(a+k) n'est pas premier alors k+1 est un carré.

Exercice 258 [X MP 2025 # 259] 1. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 1-périodique. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n f(x + ka) \leq \sum_{k=0}^n f(y + ka)$. Montrer que f est constante.

2. Soient p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valuation p-adique de n !.
3. Soient $m, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{\prod_{j=1}^m \binom{2jk}{jk}}{\prod_{j=1}^m \binom{2j}{j}} \in \mathbb{N}$.

Exercice 259 [X MP 2025 # 260] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour une partie I de [1, n], on appelle composante de I tout sous-ensemble maximal de I formé d'entiers consécutifs. On note c(I) le nombre de composantes de I.

1. Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est dite i-adaptée lorsque, pour tout $i \in I$, les entiers $\sigma(i)$ et $\sigma(i+1)$ sont consécutifs. Dénombrer les permutations I-adaptées en fonction de |I| et c(I).
2. Soient $c \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, n]$. Dénombrer les parties I de [1, n] telles que |I| = p et c(I) = c.

Exercice 260 [X MP 2025 # 261] Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites d'entiers relatifs. On dit que les deux séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ sont congrues modulo m si $a_n \equiv b_n \mod m$ pour tout $n \geq 0$. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \mod m$.

1. Soit p un nombre premier. Montrer que $(e^z - 1)^{p-1} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{z^{n(p-1)}}{(n(p-1))!} \bmod p$.
2. Soit m > 4 un entier non premier.

Montrer que m divise (m-1) !, et que $(e^z - 1)^{m-1} \equiv 0 \mod m$.

Exercice 261 [X MP 2025 # 262] Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est dit maximal lorsque $H \neq G$ et aucun sous-groupe de G n'est compris strictement entre H et G. Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \varepsilon(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe maximal de $\mathcal{S}_n$.
2. Soit $k \in [1, n]$. Montrer que $\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \sigma(k) = k\}$ est un sous-groupe maximal de $\mathcal{S}_n$.
3. On suppose que G est fini, et on se donne un sous-groupe H de G tel que $\frac{|G|}{|H|}$ soit un nombre premier. Montrer que H est maximal.

Exercice 262 [X MP 2025 # 263] Soit φ un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Z}$ nul sur l'ensemble $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ des suites presque nulles. Montrer que φ est nul.

Exercice 263 [X MP 2025 # 264] On pose

$$\alpha = \frac{12 + 5i}{13}$$

.

1. Montrer que α n'est pas une racine de l'unité.
2. Le nombre α est-il racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$? dans $\mathbb{Z}$?
3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que α soit racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers dont toutes les racines complexes sont de module 1. Montrer que α est racine de l'unité.

Exercice 264 [X MP 2025 # 265] 1. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, $z \in \mathbb{C}$ une racine de $A = P^2 + Q^2$. Est-ce que z est racine de $B = P'^2 + Q'^2$? Que dire si z est racine multiple de A ?

a) Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, P s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si

$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

1. Montrer que tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$ si et seulement s c) Montrer que tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Est-ce que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ peut s'écrire $U^3 + V^3$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$? Ind. Montrera que le plus petit facteur premier p de P(a+k) est supérieur ou égal à a, puis que P(a+k-p)=p.

Exercice 265 [X MP 2025 # 266] On admet le résultat suivant. Soient $c \in \mathbb{C}$, U un voisinage de c dans $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de c et telle que $f(z) = O((z-c)^k)$. Alors il existe $r > 0$ et $z_1, \ldots, z_{2k} \in U$ distincts tels que : $\forall i \in [1, 2k], f(z_i) \in \mathbb{R}$ et $|c - z_i| = r$.

1. Soient $A, B \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. On suppose que les polynômes non nuls de $\mathrm{Vect}(A, B)$ sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'entre deux racines de A (au sens large) se trouve au moins une racine de B.
2. Démontrer le résultat admis.

Exercice 266 [X MP 2025 # 267] Soient $F \in \mathbb{R}(X)$, $A = \{x \in \mathbb{Q}, F(x) \in \mathbb{Q}\}$ et $A' = \{x \in \mathbb{Z}, F(x) \in \mathbb{Z}\}$.

1. On suppose A infini. Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.
2. On suppose A' infini. Que peut-on dire de F ?

Exercice 267 [X MP 2025 # 268] Soit $f = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ un polynôme de degré n à coefficients entiers et dont toutes les racines complexes appartiennent à $\mathbb{Q}^*$. On pose $H = \max(|c_0|, \ldots, |c_n|)$.

1. Montrer que pour le complexe i on a $|f(i)|^2 \leq H^2 \left(\frac{n^2}{2} + n + 1\right)$.
2. Montrer que |f(i)|< sup> 2< /sup> 2< sup> n< /sup> .
   a) En déduire que si n 10 alors n 5 log< sub> 2< /sub> (H).

Exercice 268 [X MP 2025 # 269] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que Tr(A) = Tr(B). Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 269 [X MP 2025 # 270] Soient A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $k = \dim \mathrm{Ker}(AB)$. Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de $\mathrm{Ker}(BA)$?

Exercice 270 [X MP 2025 # 271] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C_n = \{-1, 1\}^n$. On pose $H = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ f(C_n) = C_n\}$.Montrer que H est un groupe pour la loi de composition et déterminer son cardinal.

Exercice 271 [X MP 2025 # 272] Soient $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que la matrice $A = XY + YX - \mathrm{tr}(X)Y - \mathrm{tr}(Y)X + (\mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y) - \mathrm{tr}(XY))I_2$ est nulle.

Exercice 272 [X MP 2025 # 273] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ tels que P soit scindé à racines simples, $\deg P = n$ et $\deg Q \leq n$. On admet qu'il existe une matrice $B = (b_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ avec $x \neq y$, on ait

$$\frac{P(x)Q(y) - P(y)Q(x)}{x - y} = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} b_{i,j} x^i y^j$$

.

Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\, B = |\{z \in \mathbb{C},\ P(z) = Q(z) = 0\}|$.

Exercice 273 [X MP 2025 # 274] Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u et v dans $\mathcal{L}(E)$, $c = u \circ v - v \circ u$, on suppose $\mathrm{rg}\, c = 1$.

1. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de c est égale à $E_{n-1,n}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\mathrm{Im}\, c) \subset \mathrm{Ker}\, c$.

3. Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E non trivial tel que $u(F) \subset F$. Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Étudier la réciproque.

Exercice 274 [X MP 2025 # 275] On fixe un entier $n \geq 1$ et, pour $k \in [1, n]$, on note $\mathcal{R}_k$ l'ensemble des matrices de rang k de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{R}_1 = \{XY^T, (X, Y) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^2\}$.
2. Montrer que $\mathcal{R}_2$ est l'ensemble des matrices de la forme $X_1Y_1^T + X_2Y_2^T$ avec (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) couples libres de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $M \in \mathcal{R}_1$. Décrire l'ensemble des couples $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $M = XY^T$.
4. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ conservant le rang.

Soient X_1, X_2, Y_0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et P_1, P_2, Q_1, Q_2 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\varphi(X_1Y_0^T) = P_1Q_1^T$ et $\varphi(X_2Y_0^T) = P_2Q_2^T$, avec (P_1, P_2) libre. Montrer qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $Q_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \varphi\left(XY_0^T\right) = AXQ_0^T$.

Exercice 275 [X MP 2025 # 276] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Pour $k \in [0, n]$, on pose $N(k) = \{N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \forall i, j \in [1, n], i > j - k \implies N_{i,j} = 0\}$ et $T(k) = \{I_n + N; N \in N(k)\}$.

1. Montrer que, pour tout $k \in [0, n]$, T(k) est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. Construire pour, $k \in [0, n-1]$, un morphisme de groupes $\varphi_k : T(k) \to G(k)$ où G(k)est un groupe abélien bien choisi tel que $Ker(\varphi(k)) = T(k+1)$.
3. Pour un groupe G, on note D(G) le sous-groupe engendré par $\{ghg^{-1}h^{-1}; g, h \in G\}$. Montrer que T(0) est résoluble i.e. qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $D^q(T(0)) = \{I_n\}$.

Exercice 276 [X MP 2025 # 277] 1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux distincts. Montrer que l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $X^2 = D$ est fini non vide, déterminer son cardinal.

2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = I_n + N$.

Exercice 277 [X MP 2025 # 278] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $R(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^2 = A\}$.

1. Déterminer le cardinal maximal d'une famille de matrices de $R(I_n)$ non semblables deux à deux

à deux.

1. On suppose A diagonalisable avec n valeurs propres distinctes. Déterminer le cardinal de
2. Est-il vrai que, si A est diagonalisable, toutes les matrices de R(A) le sont ?
3. Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet-elle une racine carrée ?
4. On pose $U_n = \{I_n + N, N \text{ nilpotente}\}$. Montrer que toute matrice A de U_n admet une unique racine carrée dans U_n.

Exercice 278 [X MP 2025 # 279] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
R(A).

$$\mathcal{IA} = \sup\{r \in \mathbb{N}; \exists A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall i, A_i^2 = I_n \text{ et } \forall i \neq j, A_iA_j = -A_jA_i\}$$

.

1. Si n est impair, montrer que $\mathcal{IA}(n) = 1$.
2. Soient $s, t \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{IA}(2^s(2t+1)) = 2s + 1$.

Exercice 279 [X MP 2025 # 280] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x, Ax, \ldots, A^{n-1}x)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

2. Soient

$$b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$$

et $M = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$.

- À quelle condition la matrice M est-elle diagonalisable ?
- À quelle condition existe-t-il $x \in \mathbb{R}^3$ tel que (x, Mx, M^2x) soit une base de $\mathbb{R}^3$?
- On suppose que $b_1b_2b_3 = 1$. Montrer qu'il existe un unique $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que M soit semblable à la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 280 [X MP 2025 # 281] \$ \$ Soient V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$.

1. On suppose que G = GL(V). Que vaut Vect(G) ? La réciproque est-elle vraie ?

On suppose maintenant que, pour tout $g \in G$, g id est nilpotent.

1. Quels sont les éléments diagonalisables de G ?

2. On suppose que G est fini et que $Vect(G) = \mathcal{L}(V)$. Quelle est la dimension de V ?
3. Si G n'est plus fini mais que $Vect(G) = \mathcal{L}(V)$, quelle est la dimension de V ?

Exercice 281 [X MP 2025 # 282] 1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice complexe dont les valeurs propres sont de module strictement inférieur à R. Montrer que $\sum a_n M^n$ converge.

2. Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R> 0 telle que, pour toute matrice M à spectre inclus dans $\overline{D(0,R)}$ et admettant une valeur propre de module R, la série $\sum a_n M^n$ diverge ?
3. Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R> 0 telle que, pour toute matrice M à spectre inclus dans $\overline{D(0,R)}$ admettant une valeur propre de module R, la série $\sum a_n M^n$ converge ?d) Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

On pose

$$f^{(k)} : z \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^n.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_M = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont distincts et de module $< R$ et les α_i dans $\mathbb{N}^*$.

- Montrer l'existence de $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$\forall i \in [1, r], \forall k \in [0, \alpha_i 1], f^{(k)}(\lambda_i) = P^{(k)}(\lambda_i)$.

- On suppose que M est diagonalisable. Montrer que f(M) = P(M).
- Est-ce toujours le cas si on ne suppose plus M diagonalisable ?

Exercice 282 [X MP 2025 # 283] Soient $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$, g une surjection continue croissante de [-1,1] sur luimême. On considère F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie stable par $f \mapsto f \circ g$. On note φ l'endomorphisme de F défini par $\varphi : f \mapsto f \circ g$.

1. Montrer que 1 est la seule valeur propre de φ.
2. En déduire que $\varphi = \mathrm{id}_F$.
3. Que peut-on dire des valeurs propres possibles de φ si q n'est plus supposée surjective ?

Exercice 283 [X MP 2025 # 284] Soit p un nombre premier, A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Démontrer que $\mathrm{tr}((A+B)^p) \equiv \mathrm{tr}(A^p) + \mathrm{tr}(B^p) \pmod p$.

Exercice 284 [X MP 2025 # 285] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit matriciel. On note $D = \{\delta \in \mathcal{L}(H) : \forall (A,B) \in H^2,\ \delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)\}$.

1. Soit $C \in H$. Montrer que $\delta : A \mapsto CAAC$ est dans D, et exprimer simplement e^δ.
2. Soit $\delta \in D$. Montrer que $\forall A, B \in H$, $e^\delta(AB) = e^\delta(A)e^\delta(B)$.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en considérant l'application $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t\delta}\left(e^{t\delta}(A)e^{t\delta}(B)\right)$ et en calculant f'.
4. Soit $\delta \in D$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note H_λ le sous-espace caractéristique de δ associé à λ (éventuellement $\{0\}$). Soient λ, $\mu \in \mathbb{C}$, $A \in H_\lambda$ et $B \in H_\mu$. Montrer que $AB \in H_{\lambda+\mu}$.

Exercice 285 [X MP 2025 # 286] 1. Soient $k, m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^m$ tels que $\langle v_i, v_j \rangle \leq -1/k$ pour tous i,jdistincts. Montrer que $n \leq k+1$.

2. Montrer qu'il existe une famille $(v_1, \dots, v_{k+1})$ de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^k$ tels que $\langle v_i, v_j \rangle = -1/k$ pour tous i, j distincts.

Exercice 286 [X MP 2025 # 287] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que Tr(f id) = 0 et rg(f id) = 1 si et seulement s'il existe $a \in E$ et $\ell \in E^*$ tel que $\ell(a) = 0$ et $f = id + \ell a$. On dit alors que f est une transvection.

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire telle que : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists y \in E, \varphi(x,y) \neq 0$ et $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$.
Soit $G = \{u \in GL(E) : \forall x, y \in E, \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x,y)\}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de GL(E).- c) Montrer que G contient les applications de la forme id $+\lambda\varphi(a,\cdot)$ a avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in E$.
2. Montrer que G est engendré par les transvections de la forme indiquée en c).

Exercice 287 [X MP 2025 # 288] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\alpha_O = |\det(\psi_O)|$ où $\psi_O : A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto O^T AO$.

Exercice 288 [X MP 2025 # 289] Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $-1 \notin Sp(M)$, on pose $T(M) = (I_n M)(I_n + M)^{-1}$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $-1 \notin \mathrm{Sp}(M)$.

1. Montrer que T est bien définie sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.
2. Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $T(A) \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.
3. Si $B \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$, montrer que $T(B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Calculer $T \circ T(A)$ si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
5. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$. Calculer T(A).
6. Déduire des questions précédentes que toute matrice de $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ est orthosemblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 289 [X MP 2025 # 290] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto \langle M^{-1}x, y\rangle$ définit un

produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soient $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que MN est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectre inclus dans $i\mathbb{R}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à spectre inclus dans $i\mathbb{R}$. Existe-t-il $M \in$

$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que A = MN ?

Exercice 290 [X MP 2025 # 291] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_{2n}$. Montrer l'équivalence : $M^T J \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T J M = J$.
2. On note $C = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), M^2 = -I_{2n}$ et $M^T J \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})\}$. Montrer que, pour tout $M \in C$, $M + J \in GL_{2n}(\mathbb{R})$.
3. Pour $M \in C$, on note $S_M = (M+J)^{-1}(M-J)$. Montrer que $S_M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, ||S_M X||_2 < ||X||_2$.
4. Montrer que, pour pour tout $M \in C$, $S_M J + J S_M = 0$.

Exercice 291 [X MP 2025 # 292] Les espaces $\mathbb{R}^p$ sont munis de leurs normes euclidiennes canoniques. Soient d et D des entiers ≥ 1. Étant donné $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^d$, on dit que $(p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$ s'il existe $q_0, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}^D$ vérifiant $\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|$ pour tous $i, j \in [0, n]$.

1. On suppose que $(p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$. Soit p une combinaison linéaire à coefficients rationnels de $p_0, \ldots, p_n$. Montrer que $(p, p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$.
2. Soient $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^d$ tels que $||p_i p_j||^2 \in \mathbb{Q}$ pour tous $i, j \in [0, n]$. Montrer que $(p_0, \ldots, p_n)$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^{4d}$. On admettra que tout entier naturel est somme de quatre carrés d'entiers.

Exercice 292 [X MP 2025 # 293]

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si et seulement si, pour tout $k \in [1, n]$, $\det((a_{i,j})_{1}$
0.
2. On pose $A_k = (t^{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq k}$ où $t \in \mathbb{R}^{+*}$. Calculer $\det A_k$.
3. On pose $A = \left(\frac{1}{1+|i-j|}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Démontrer que A est symétrique définie positive.

Exercice 293 [X MP 2025 # 294] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ une base or-

thonormée de F. On pose : $\tau_F(A) = \sum_{i=1}^{k} \langle f_i, Af_i \rangle$. Montrer que $\tau_F(A)$ ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

Dans la suite de l'exercice, on suppose $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on note $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A, comptées avec multiplicité.

1. Déterminer le meilleur encadrement possible de $\tau_F(A)$ en fonction de F et de Sp(A).
2. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = A + tE_{1,1}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lambda_1(t) \geq \cdots \geq \lambda_n(t)$ les valeurs propres de A(t). Montrer que : $\forall t \geq 0, \lambda_n(t) \geq \lambda_n$ et $\lambda_1 \geq \lambda_2(t)$.
3. Déterminer un équivalent simple de $\lambda_1(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

2) Analyse

Exercice 294 [X MP 2025 # 295]

1. Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E. Montrer que si N_1 et N_2 ont la même sphère unité alors $N_1 = N_2$.
2. On pose $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. Soit $(f, g) \in E^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|xf + yg\|_\infty$ soit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien, dont on note $\|\|$ la norme. Soit p une autre norme sur E. On note S et S_p les sphères unité respectives pour $\|\|$ et p. Montrer que $d : x \in S \mapsto \sup |\langle x, y\rangle|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, que $k = \sup \|y\|$ est un réel strictement positif, et enfin $y \in S_p$ que d est k-lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|$.
4. On note $B = \{f \in E,\ p(f) \leq 1\}$ et, pour $x \in S, D_x = \{z \in E; |\langle x, z\rangle| \leq d(x)\}$. Montrer que $B = \bigcap_{x \in S} D_x$.

Exercice 295 [X MP 2025 # 296] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que tout convexe non borné contient au moins une demi-droite. On pourra commencer par le cas d'un convexe fermé.

Exercice 296 [X MP 2025 # 297] Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit R_k la borne inférieure de l'ensemble E_k des $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tels qu'il existe une boule fermée de $\mathbb{R}^2$ euclidien de rayon r contenant au moins k points de $\mathbb{Z}^2$.

1. Calculer R_k pour k = 2, 3, 4.
2. Si $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que R_k est le minimum de E_k.
3. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $4R_k^2$ est entier.
4. Donner un équivalent de R_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Exercice 297 [X MP 2025 # 298] Soit E l'espace des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$. On munit E de la norme $\|\|_\infty$. Déterminer les formes linéaires continues φ sur E telles que, pour tout $(f, g) \in E^2$ tel que $\varphi(fg) = 0$, on ait $\varphi(f) = 0$ ou $\varphi(g) = 0$.

Exercice 298 [X MP 2025 # 299] Soit $\rho : [0, 1] \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue telle que, pour tout $t, \rho(t)^2 = \rho(t)$.

1. Montrer que $t \mapsto \operatorname{rg} \rho(t)$ est constante.
2. Montrer l'existence de $u \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ telle que $\forall t, \rho(t) = u(t)\rho(0)u^{-1}(t)$.

3. On suppose de plus que $\rho(1) = \rho(0)$. Montrer que l'on peut choisir u de sorte que l'on ait aussi u(0) = u(1).

Exercice 299 [X MP 2025 # 300] Soit $n \geq 2$. On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire
\$les M \,=\, (m_{i,j})_{1≤ i,j≤ n} \,∈\, M_n(R) \,\, telles que : ∀ i \,∈\, [[{]]1,n ,\, ∑_{i=1}^n m_{i,j} \,=\, 1,\, ∀ j \,∈\, 1,n },\$
$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1$ et $\forall (i,j) \in [[1,n]]^2, m_{i,j} \geq 0$. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ la
matrice de permutation associée à σ ; la matrice P_σ est dans $\mathcal{B}_n$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un élément M de $\mathcal{B}_n$ est dit extrémal lorsqu'il ne peut pas s'écrire M=(1-t)A+tB avec

A, B éléments distincts dans $\mathcal{B}_n$ et $t \in]0,1[$.

1. Montrer que les P_σ sont des points extrémaux de $\mathcal{B}_n$.
2. On fixe un élément M de $\mathcal{B}_n$.
   Pour une partie I de [1, n], on note $\mathcal{F}(I) = \{i \in [1,n] : \exists j \in I, m_{i,j} > 0\}$.
   a) Montrer que $|I| \leq |\mathcal{F}(I)|$.
   b) Montrer qu'il existe une injection $f\colon [1,n] \to [1,n]$ telle que, pour tout $i \in [1,n]$, $m_{i,f(i)} > 0$.
   c) En déduire l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}_n$.
3. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est l'enveloppe convexe des P_σ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Exercice 300 [X MP 2025 # 301] On munit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge.

1. Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_{3^n}(x)$.
   - Montrer que f est bien définie et continue sur [-1, 1].
   - Montrer que $d(f, \mathbb{R}_{3^n}[X]) = \inf_{P \in \mathbb{R}_{3^n}[X]} \|fP\|_\infty = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Ind. On pourra considérer les points $x_k = \cos(\pi(1 + k3^{-n-1}))$ pour $k \in [0, 3^{n+1}]$.

Exercice 301 [X MP 2025 # 302] Soient K une fonction continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$, E l'espace des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$.- a) Si $f \in E$, soit $T_K(f)$ la fonction de [0,1] dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1], T_K(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)f(y)dy$. Montrer que T_K est un endomorphisme continu de l'espace normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

1. On suppose que K est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, que $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et que l'espace propre $E_\lambda(T_K)$ contient une fonction non identiquement nulle à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $E_\lambda(T_K)$ est de dimension 1.

Exercice 302 [X MP 2025 # 303] Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \to 0$. Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 303 [X MP 2025 # 304] Soient a < b réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $t \in [a,b]$, il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers tels que $tu_n - k_n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 304 [X MP 2025 # 305] Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\beta = 1/\alpha$. Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $z_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{\alpha n+1}{\alpha(n+1)} z_n$.

1. Donner un équivalent de z_n et sa valeur exacte lorsque $\beta \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.
   - On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k$ et $y_n = \alpha x_n + (1-\alpha)\mu_n$. On suppose que $y_n \to x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x_n \to x$.

Exercice 305 [X MP 2025 # 306] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = |\{(p,q) \in \mathbb{N}^2, p^2 + q^2 = n\}|$.

1. Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum u_k$.
2. Étudier la nature de la suite (u_n).
3. Montrer que (u_n) n'est pas bornée.

Exercice 306 [X MP 2025 # 307] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$.

1. On suppose que $a_0 = 1/2$. Montrer que $\frac{1}{a_n} n \sim \ln n$ quand $n \to +\infty$.
2. On suppose $a_0 > 1$. Déterminer la limite de (a_n) puis un équivalent de a_n.
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n.

Exercice 307 [X MP 2025 # 308] 1. Pour $n \geq 3$, justifier l'existence de $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ avec $0 < x_n < y_n$ solutions de $x - n\ln x = 0$.

2. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n et y_n.

Exercice 308 [X MP 2025 # 309] Construire une suite strictement croissante $(p_n)_{n\geq 2}$ d'entiers avec $p_2 = 2$ telle qu'il
existe C> 0 vérifiant, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=n}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{\ln k} \geq C$, et telle que la série de terme général $2^{-(p_{n+1}-p_n)}$ diverge.

Exercice 309 [X MP 2025 # 310] On pose $\alpha = 4\sum_{k=0}^{499999} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer qu'exactement une des 16 premières décimales de α diffère de la décimale de π correspondante.

Exercice 310 [X MP 2025 # 311] Soient p> 0 et q> 0 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout

$$(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}^+)^{2n}, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

.

Exercice 311 [X MP 2025 # 312] Soit $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f^{(n)}(x_n) = 0$.

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x^n f^{(n)}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
3. On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour tout $x > 0$. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe $a_{n,0}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{Z}$ tels que $g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \frac{f^{(n-k)}(x)}{x^{k+1}}$ pour tout x> 0.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $(-1)^n g^{(n)}(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Exercice 312 [X MP 2025 # 313] Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que : $f^2 \leq 1$ et $(f')^2 + (f'')^2 \leq 1$. Le but est de montrer par l'absurde que $g = f^2 + (f')^2 \leq 1$. On suppose donc qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $f(t)^2 + f'(t)^2 > 1$.
On pose : $E = \{x \in \mathbb{R}; \forall y \in [\min(t,x), \max(t,x)], f(y)^2 + f'(y)^2 > 1\}$.

1. Montrer que E est un intervalle ouvert.
2. Montrer que f' ne s'annule pas sur E.
3. Conclure.

Exercice 313 [X MP 2025 # 314] Si $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ est une famille de fonctions de]-1,1[dans $\mathbb{R}$, on dit que $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ vérifie (C) si $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4$ sur]0, 1[et $\varphi_2 < \varphi_4 < \varphi_1 < \varphi_3$ sur]-1, 0[.

1. Montrer qu'il n'existe pas de famille $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ de fonctions polynomiales vérifiant (C). Ind. On pourra étudier la valuation de $\varphi_i - \varphi_j$ pour $i \neq j$.
2. Existe-t-il une famille $(\varphi_k)_{1\leq k\leq 4}$ de fonctions de classe C^∞ vérifiant (C) ?

Exercice 314 [X MP 2025 # 315] Soit $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $(*)$: $\forall x \in \mathbb{R}, s(x+1) = s(x) + \frac{1}{1+x^2}$ et $s(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $s(x) \geq 0$.
2. A-t-on existence et unicité de s vérifiant () ? Déterminer les s solutions.
3. Que se passe-t-il si on remplace la condition $s(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par la condition $s(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$?

Exercice 315 [X MP 2025 # 316] 1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que f est affine si et seulement si, pour tout réel x, on a $\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(}{h^2}$

0.b) Montrer que le résultat de la question précédente peut tomber en défaut sans hypothèse de continuité.

Exercice 316 [X MP 2025 # 317] Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$. On suppose qu'il existe $\alpha, \eta > 0$ tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha F(x)F(y) \leq F(x+y) \leq \eta F(x)F(y)$$

.

1. On suppose que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{F'}{F}$ est bornée. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ bornée tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = e^{\gamma x} H(x)$.
2. On revient au cas général. Montrer qu'il existe une unique fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\frac{F}{G}$ soit bornée et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ G(x+y) = G(x)G(y)$.

Exercice 317 [X MP 2025 # 318] Soient $M, m \in \mathbb{R}$ avec $0 < m < M$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, [m, M])$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Soit () l'équation fonctionnelle $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = 1 + \frac{g(qt)}{f(t)}$.

1. On suppose $m > 2$ ou $M < 1/2$. Montrer qu'il existe une unique solution bornée de ().
2. Montrer que les solutions bornées de () ne s'annulent pas.

Exercice 318 [X MP 2025 # 319] Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(G_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n P^{(n)}$$

.

1. Expliciter (G_n) pour φ vérifiant : $\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = \int_0^x P(t)dt$.
2. On suppose que, pour tout $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, si P admet un minimum local en a alors $\varphi(P)(a) = 0$. Montrer qu'il existe $Q \in E$ tel que, pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = QP'$.
3. On suppose que, pour tout $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, si P admet un minimum local en a alors $\varphi(P)(a) \geq 0$. Montrer qu'il existe $Q, R \in E$ tels que, pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = QP' +$

RP" avec R positif sur $\mathbb{R}$.

1. Donner une preuve directe de l'égalité trouvée en b).

Exercice 319 [X MP 2025 # 320] Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe quatre réels strictement positifs α, β, A, B tels que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)f(y)| \leq A|xy|^\alpha$ et $|g(x)g(y)| \leq B|xy|^\beta$ et $\alpha + \beta > 1$. On pose $\zeta : s \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. On fixe deux réels $a < b$.

1. Pour une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de [a,b], on pose $J(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k))$
$g(x_k))$. Montrer que $|J(\sigma) f(a)(g(b) g(a))| \leq AB\zeta(\alpha+\beta)(2(b-a))^{\alpha+\beta}$.

1. Montrer qu'il existe un réel $I_{a,b}(f,g)$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de [a,b], $\max_k |x_{k+1} x_k| < \delta \Rightarrow |J(\sigma) I_{a,b}(f,g)| < \varepsilon$.

Exercice 320 [X MP 2025 # 321] On note S l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $\gamma : [0,1] \to S$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une fonction continue $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$ pour tout $t \in [0,1]$.

Exercice 321 [X MP 2025 # 322] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose $h : t \in [0,1] \mapsto \inf_{s\in[0,t]} f(s)$ et g=f-2h.

1. Montrer que g est continue, positive et que g(0) = 0.
2. Montrer que si f est affine par morceaux alors q l'est aussi.
3. On suppose que f atteint son minimum en 1. On pose $q : t \in [0,1] \mapsto \inf_{s\in[t,1]} g(s)$. Montrer que f = g - 2q.

Exercice 322 [X MP 2025 # 323] Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On pose $\Psi(x) = \sum_{\substack{p\in\mathcal{P},\alpha\in\mathbb{N}^* \\ p^\alpha \leq x}} \ln p$ et $T(x) = \sum_{1\leq n\leq x} \Psi\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que $T(x) = \sum_{1\leq n\leq n} \ln(n) = x\ln(x) x + O(\ln x)$ quand $x \to +\infty$.
2. Montrer que $T(x) 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \Psi\left(\frac{x}{n}\right) = x \ln 2 + O(\ln x)$.

Exercice 323 [X MP 2025 # 324] Soit f une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, de réciproque notée g.

1. Montrer que, pour $x \geq 0$, $\int_a^x f(t)dt + \int_a^{f(x)} g(t)dt = xf(x)$.
2. Déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, xy \leq \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(t)dt$.

Exercice 324 [X MP 2025 # 325] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive sur]0,1[.

1. Calculer $\lim_{p\to+\infty} \left(\int_0^1 f(x)^p dx\right)^{1/p}$.
2. Calculer $\lim_{x\to 0^+} \left(\int_0^1 f(x)^p dx\right)^{1/p}$.

Exercice 325 [X MP 2025 # 326] Soit f la fonction 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1[, f(x) = x - \frac{1}{2}$. Pour i et j dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^1 f(ix)f(jx)dx$.

Exercice 326 [X MP 2025 # 327] Pour a, b > 0, on définit $J_{a,b} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(a\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2}}$.

1. Montrer que $J_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$.
2. Montrer que $J_{a,b} = J_{\frac{a+b}{2}} \sqrt{ab}$

Exercice 327 [X MP 2025 # 328] Déterminer les réels α et β tels que $\int_0^{+\infty} |\sin t|^\alpha t^\beta dt < +\infty$.329. [nil] a) Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note $I_f = \left\{p > 0, \int_\mathbb{R} |f|^p < +\infty\right\}$. Montrer que I_f

Exercice 328 [X MP 2025 # 329] 1. Pour

$$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

, on note $I_f = \{p > 0, \int_\mathbb{R} |f|^p < +\infty\}$. Montrer que est un intervalle et exhiber f telle que $I_f =]a,b[,]0,b[$ ou $]b,+\infty[$ pour $0 < a < b$.

1. Déterminer $\lim_{p\to+\infty} \left(\int_a^1 |f|^p\right)^{1/p}$.

Exercice 329 [X MP 2025 # 330] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $g\colon x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Exprimer $\int_{-\infty}^0 g + \int_0^{+\infty} g$ en fonction de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Exercice 330 [X MP 2025 # 331] On rappelle que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n : x \in \mathbb{R} \mapsto (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n(e^{-x^2/2})}{dx^n}$.

1. Montrer que p_n est polynomiale, préciser son degré et son coefficient dominant, et dé-

montrer que p_n est paire ou impaire.

1. Calculer $\int_\mathbb{R} p_m(x)p_n(x)e^{-x^2/2}dx$ pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale multiple

$$I = \int_\mathbb{R} \cdots \int_\mathbb{R} \left(\prod_{1\leq i\leq n} (x_j - x_i)^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_k^2\right) dx_1 \cdots dx_n$$

.

Ind. On pourra s'intéresser au déterminant de la matrice $(p_{i-1}(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 331 [X MP 2025 # 332] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f_i f_j = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $K_N(x,y) = \sum_{i=1}^{N} f_k(x)f_k(y)$. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_p(x_1, \ldots, x_p) = \det((K_N(x_i, x_j))_{1\le i,j\le p})$.
Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_p(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \ldots dx_p$.

Exercice 332 [X MP 2025 # 333] 1. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Calculer les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(1+t^a)}{t} dt$ et $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

2. Soit $(a_n)_n \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{n\in I} a_n$ soit injective, $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ désignant l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \le 2$.
   c. Soit $(a_n)_n \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle qu'il n'existe pas d'entier n ni de partie finie I de $\mathbb{N} \setminus \{n\}$ telle que $a_n = \sum_{k\in I} a_k$. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \le 50$.

Exercice 333 [X MP 2025 # 334] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 334 [X MP 2025 # 335] Pour

$$n \in \mathbb{N}$$

, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \mapsto \pi \cot(\pi x) - \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{1}{x+k}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\ge0}$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ vers une fonction f, et que l'on peut prolonger f par continuité à $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction prolongée par continuité est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4f'(x) = f'\left(\frac{x}{2}\right) + f'\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

.

1. En déduire que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $g\colon x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$. Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que le développement en série entière de $x \mapsto g(x) - 1 + \frac{x}{2}$ ne contient que des termes

pairs. On note

$$g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}$$

.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $\zeta(2n)$ en fonction de a_n. Ind. On pourra considérer g(ix) pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 335 [X MP 2025 # 336] Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$.
Si

$$t \ge 0$$

, on pose $g_t : x \in [0,1] \mapsto \inf\{f(y) + t|y-x|, y \in [0,1]\}$.

1. Si $t \ge 0$, montrer que g_t est une fonction continue.
2. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la suite $(g_n(x))_{n\ge0}$ est croissante et qu'elle converge vers

f(x).

1. Montrer que $(g_n)_{n\ge0}$ converge uniformément vers f sur [0,1].

Exercice 336 [X MP 2025 # 337] 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(2\cos(x)) = 2\cos(nx)$.

2. Pour $x, y \in [-2, 2[$ avec $x \neq y,$ on pose $S(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} T_n(x)T_n(y)$.
   - Montrer que $S_n(x,y)$ est bien défini.
   - Montrer que, pour $x, y \in [-2, 2[$ avec $x \neq y$, on a $S(x,y) = -2\ln|xy|$.

Exercice 337 [X MP 2025 # 338] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. À quelle condition sur α la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n+x}$ est-elle définie sur $\mathbb{R}^+$?
2. Lorsque f est définie sur $\mathbb{R}^+$, déterminer sa limite, puis un équivalent, en $+\infty$.
3. On fixe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré d > 0, sans racine dans $[1, +\infty[$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, d) pour que $g\colon x \mapsto \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{P(n+x)}$ soit définie

sur $\mathbb{R}^+$. Dans ce cas, donner un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 338 [X MP 2025 # 339] 1. On fixe un entier $d \ge 0$. Soit $(c_k)_{k\le d}$ une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}_{\le d} = \{k \in \mathbb{Z}, k \le d\}$. On suppose qu'il existe un réel R > 0 telle que $(c_k z^k)_k$ soit sommable pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que |z| > R; pour un tel z, on pose $g(z) = \sum_k c_k z^k$. On suppose enfin que $c_1, \ldots, c_d$ sont tous rationnels et que $g(a) \in \mathbb{Z}$ pour une infinité d'entiers a. Montrer que $c_0 \in \mathbb{Q}$ et $c_k = 0$ pour tout k < 0.

2. Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que, pour tout entier n assez grand, P(n) est la puissance s-ième d'un entier. Soient $\tau_1, \dots, \tau_s$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe une fonction gvérifiant les hypothèses de la question précédente (pour un certain d) et telle que, pour tout complexe z de module assez grand, $\prod P(z+\tau_k) = g(z)^s$. En déduire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q^s$ et $\forall k \in \mathbb{Z},\ Q(k) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 339 [X MP 2025 # 340] Soient $\theta > 1$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$ dont θ est racine de multiplicité 1 et dont les autres racines complexes sont de module < 1 et dont $1/\theta$ n'est pas racine. Soit $Q = X^n P(1/X)$.

1. Montrer que $f\colon z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon

$1/\theta$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ ce développement.

1. Montrer que $g\colon z \mapsto f(z)(1-\theta z)$ est développable en série entière de rayon > 1. On note $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. Montrer que les c_n sont dans $\mathbb{Z}$ et que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g(e^{it})\right|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2$.
2. Démontrer que $1+\theta^2 = b_0^2 + \sum_{n=0}^{+\infty}(b_n\theta b_{n-1})^2$.
3. On suppose que P(0) > 0. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 340 [X MP 2025 # 341] 1. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-2}^{2} x^{2n}\sqrt{4-x^2}dx$. Prouver l'existence d'une constante

c> 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c\, I_n$ et la déterminer.

Exercice 341 [X MP 2025 # 342] Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_0 = 4^m$, $u_1 = 4^m - 1$ et, pour $k \in [1, m]$, $u_k = -1 + \frac{2m-k}{2m}u_{k+1} + \frac{k}{2m}u_{k-1}$ et $v_k = m\int_0^1 \frac{(1+x)^{2m-k}}{x}\left((1+x)^k - (1-x)^k\right)dx$.

1. Montrer que, pour tout $k \in [1, m]$, $v_k = u_k$.
2. Donner un équivalent de $W_m = m\int_0^1 \frac{(1+x)^m}{x}((1+x)^m(1-x)^m)dx$.

Exercice 342 [X MP 2025 # 343] Déterminer un équivalent de $\int_0^{+\infty}(te^{-t})^x dt$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 343 [X MP 2025 # 344] Soit E l'ensemble des fonctions y de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $y''(t) + e^t y(t) = 0$. Soit $y \in E \setminus \{0\}$.

1. Montrer que les zéros de y sont isolés.
2. Montrer que les zéros de y peuvent être rangés en une suite strictement croissante $(t_n)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$.
3. Donner un équivalent de t_n.

Exercice 344 [X MP 2025 # 345] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$.

1. Soient p un projecteur de E et $a \in \mathcal{L}(E)$ tels que ap + pa = a. Montrer que $\operatorname{tr} a = 0$.
2. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E. Pour $p \in \mathcal{P}(E)$, décrire l'espace tangent à $\mathcal{P}(E)$ en p. Quelle est sa dimension ?

3) Géométrie

Exercice 345 [X MP 2025 # 346] Soit (u, v) une base de $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (u, v) pour qu'il existe un polygone régulier à n côtés dont les sommets sont tous dans $+$.

4) Probabilités

Exercice 346 [X MP 2025 # 347] Un tiroir contient 2n chaussettes, constituant n paires. On tire successivement et aléatoirement les chaussettes du tiroir les unes après les autres jusqu'à avoir tiré une paire. Quelle est l'espérance du nombre total de chaussettes tirées ? **Ind.** Pour simplifier le résultat,

on pourra utiliser un raisonnement probabiliste pour établir que

$$\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} 2^{-k} = 1$$

.

Exercice 347 [X MP 2025 # 348] On organise un tournoi avec une infinité $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de joueurs. Les modalités sont les suivantes : J_0 et J_1 s'affrontent, le gagnant affronte J_2 et ainsi de suite : le gagnant de chaque partie affronte le joueur suivant lors de la partie suivante. On considère tous les matchs comme indépendants et on note $p_n = \mathbf{P}(J_n$ remporte son premier match). Le tournoi s'arrête lorsqu'un joueur remporte deux matchs successifs. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de matchs joués jusqu'à l'arrêt du tournoi. Pour les deux premières questions, on fixe

$$\alpha \in]0,1[$$

et on suppose que : $\forall n \geq 2,\ p_n = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Montrer que T est presque sûrement finie.
2. Montrer que T est d'espérance finie.

3. Dans cette question, on fixe $N \geq 2$ et la condition de victoire devient : un joueur remporte le tournoi quand il a gagné N matchs consécutifs. Ainsi le cas précédent correspond au cas N=2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = p \in]0,1[$.

On note $a_n = \mathbf{P}(T \geq n)$ avec, pour $k \leq N$, $a_k = 1$. Déterminer une relation de récurrence entre les a_n.

Exercice 348 [X MP 2025 # 349] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $|\sigma|$ le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints (y compris les cycles de longueur 1).a) Pour $k \in [1,n]$, on pose $C_k = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n, |\sigma| = k\}|$.

1. Pour $k \in [1,n]$, on pose $C_k = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n, |\sigma| = k\}|$

Calculer f_n où $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n C_k x^k$.

1. Soit σ_n une variable de loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Donner un équivalent de l'espérance de $|\sigma_n|$.
2. Montrer que $\frac{|\sigma_n|}{\ln(n)}$ tend vers 1 en probabilités quand $n \to +\infty$.

Exercice 349 [X MP 2025 # 350] 1. Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbf{E}(X(X-1)\cdots(X-p+1))$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et calculer $\mathbf{E}(1/(X+1))$ et $\mathbf{E}(1/(X+2))$.

2. Soient A un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Une p-partition de A est une partition de X formée de p sous-ensembles (non vides) de X. Soit B un ensemble fini de cardinal m. Dénombrer, pour une p-partition de $\mathcal{F}$ de A, les applications de A dans B dont $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fibres non vides (à savoir des ensembles non vides de la forme $f^{-1}\{b\}$ où $b \in B$).
3. En utilisant les deux questions précédentes, exprimer le nombre de partitions de A comme

Exercice 350 [X MP 2025 # 351] Soient $p \in]0,1[$ et t> 0. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = -1) = 1-p$ et $N \sim \mathcal{P}(t)$ indépendante des X_n. On pose :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$$

.

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\mathbf{P}(S_N = n)$.
2. Montrer que :

la somme d'une série numérique.

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} y^n \sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ n\geq 0}} \frac{x^{n+2i}}{n!(n+i)!} = e^{xy+1/y}$$

.

Exercice 351 [X MP 2025 # 352] Soient $p \in [0,1[, m \geq 2$ et $\xi = e^{2i\pi/m}]$.

1. Montrer que :

$$\forall a,b \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k\in[\![0,n]\!]} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (b + \xi^j a)^n$$

.

1. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose : $A_n = (m \mid X_1 + \cdots + X_n)$ et $u_n = \mathbf{P}(A_n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_n \frac{1}{m}\right| \leq e^{-8pqn/m^2}$ où q = 1 p.

Exercice 352 [X MP 2025 # 353] Soit X une variable aléatoire discrète positive ayant un moment d'ordre 2 et telle que $\mathbf{E}(X^2) > 0$. Montrer que, pour t > 0, $\mathbf{P}(X\mathbf{E}(X) \leq -t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{\mathbf{E}(X^2)}\right)$.

Exercice 353 [X MP 2025 # 354] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose de plus que $\mathbf{E}(X_1^2) < +\infty$, et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_i}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que, pour tout ω, $(T_n(\omega))_{n\geq 1}$ a une limite dans $[0,+\infty]$.
2. Montrer qu'il existe une constante C > 0 et une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$

d'entiers ≥ 1 vérifiant $n_{k+1} \geq 2n_k$ et $\mathbf{P}(S_{n_k} \geq 2n_k\mathbf{E}(X_1)) \leq \frac{C}{2^k}$ pour tout $k \geq 1$.

1. En déduire que $(T_n)_{n\geq 1}$ tend presque sûrement vers $+\infty$.
2. Montrer que $\mathbf{V}(T_n) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\frac{1}{S_i^2}\right)$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 354 [X MP 2025 # 355] On pose $(X)_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(X)_n = X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

1. Montrer que $((X)_n)_{n\geq 0}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on décompose $X^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}(X)_n$. Déterminer $a_{k,0}$ et $a_{k,n}$ pour $n \geq k$.
3. En considérant une variable aléatoire Z suivant la loi de Poisson de paramètre 1, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{+\infty} a_{k,n} = \frac{1}{e}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^k}{i!}$.
4. Pour $0 \leq n \leq k$, on note $b_{k,n}$ le nombre de façons de ranger k objets indifférenciés dans n tiroirs non numérotés, aucun des tiroirs n'étant vide. Montrer que $b_{k,n} = a_{k,n}$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de façons de partitionner un ensemble à k éléments.

Exercice 355 [X MP 2025 # 356] On cherche à prouver l'existence d'un réel $C > 0$ tel que, pour toutes variables aléatoires réelles X et Y indépendantes et de même loi, on ait l'inégalité $\mathbf{P}(|X-Y| \leq 2) \leq C\,\mathbf{P}(|X-Y| \leq 1)$.

1. On suppose X et Y à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer l'existence de C' > 0 indépendant de X tel que $\mathbf{P}(|XY| \leq 2) \leq C'\mathbf{P}(X = Y)$.
2. Montrer le résultat souhaité.
3. Montrer que C' 3.

Exercice 356 [X MP 2025 # 357] 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2 de même loi telles que $Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{B}(n,p)$?

2. On dit qu'une variable aléatoire Z est infiniment divisible si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_k$ telles que $Y_1 + \cdots + Y_k \sim Z$, avec a priori $(Y_1, \ldots, Y_k)$ défini sur un espace probabilisé différent de celui de Z.

Donner un exemple d'une telle variable aléatoire.

1. Que dire d'une variable aléatoire Z infiniment divisible de support inclus dans [0,1] ?
2. Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ indépendante des X_i (avec $\lambda > 0$). Montrer que $Z = X_1 + \cdots + X_N$ est une variable aléatoire infiniment divisible.

Exercice 357 [X MP 2025 # 358] Soient $a \in]0,1[$ et $\varphi_a : x \mapsto 1(1-x)^a$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X_a à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $x \in [0,1], \varphi_a(x) = \mathbf{E}(x^{X_a})$.b) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) = \frac{a}{n}$. On pose $Y = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{1}_{A_n} = 1\}$. Montrer que $Y \sim X_a$.

On considère l'équation fonctionnelle : $\forall x \in [0,1], \varphi_a(x) = x\varphi(\varphi_a(x))$ d'inconnue φ :
$[0,1] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour $a \in [1/2, 1]$ cette équation admet une unique solution continue, qui est

de plus la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans N.

1. Montrer que ce n'est pas le cas pour a = 1/3.

Exercice 358 [X MP 2025 # 359] Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ et $\mathbf{P}(X_n = n) =$
rac1n. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la limite de $\left(\mathbf{E}\left(e^{-\lambda\frac{S_n}{n}}\right)\right)_{n\geq 1}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ dérivable sur $]1, +\infty[$ et telle que : $\forall x > 1, f(x-1) + xf'(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1], f(x) = 1$.

Montrer qu'il existe une unique fonction f qui respecte ces conditions, qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers 0 en $+\infty$.

1. On définit $\varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt$, avec f la fonction de la question précédente. Mon- trer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+, \lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda\frac{S_n}{n}}\right) = e^{-k}\varphi(\lambda)$.

Exercice 359 [X MP 2025 # 360] Soient X une variable aléatoire à support fini à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ et telle que $-X \sim X$, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(\|S_n\|^2) = n\,\mathbf{E}(\|X\|^2)$ et $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{P}(S_n = x)^2$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(S_{2n} = 0) \geq \frac{c}{n}$.
3. Démontrer que $P(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1$.

V) X PSI — AUTRE

1) Algèbre

Exercice 360 [X PSI 2025 # 361] Soit $P(X) = X^{11}14X^2 5X + 1$. Montrer que P admet au moins une racine complexe de module strictement inférieur à 1.

Exercice 361 [X PSI 2025 # 362] Soit $f\colon P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}\left(\frac{X+1}{2}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{X}{2}\right)\right)$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $(f^n(P)(a))$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 362 [X PSI 2025 # 363] 1. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que h est diagonalisable et $h \circ u - u \circ h = 2u$. Montrer que u est nilpotent.

2. Soit $E = \mathbb{C}[X]$ et soient u, v, h les trois endomorphismes de E définis par$\forall P \in E, u(P) = X^2P' + XP, v(P) = P'$ et $h(P) = P + 2XP'$.
   a) Montrer que h est diagonalisable et que $h \circ uu \circ h = 2u$. L'endomorphisme u est-il nilpotent ?
   b) Soit F un sous-espace vectoriel de E à la fois u-stable et v-stable. Montrer que $F = \{0\}$ ou F = E.

Exercice 363 [X PSI 2025 # 364] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \dim(\mathrm{Ker}(B\lambda I_{2n})) = \dim(\mathrm{Ker}(A\lambda^2 I_n))$.
2. À quelle condition sur A la matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 364 [X PSI 2025 # 365] Soit $X \in \mathbb{C}^n$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $XX^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit diagonalisable.

Exercice 365 [X PSI 2025 # 366] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}((AI_3)^2) \oplus \text{Ker}(A2I_3)$. Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Trouver un équivalent de $||A^n x||$.

Exercice 366 [X PSI 2025 # 367] On définit deux matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon > 0$.

1. Étudier la diagonalisabilité de M et N_ε, détailler leurs sous-espaces propres et donner une base de chacun d'eux.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = M^n E, Y = N_\varepsilon^n E$, où $E = \binom{1}{\varepsilon}$. Expliciter X_n et Y_n et étudier asymptotiquement les vecteurs $\frac{X_n}{\|X_n\|}$ et $\frac{Y_n}{\|Y_n\|}$.

Exercice 367 [X PSI 2025 # 368] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $A^T = -A$. Soient $\mu \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. On écrit X = U + iV avec $U, V \in \mathbb{R}^n$. Montrer que U et V sont orthogonaux.

2) Analyse

Exercice 368 [X PSI 2025 # 369] Soient E et F deux espace vectoriels normés (de dimension quelconque) et $\psi\colon E \to F$ une fonction telle que $\forall x, y \in E,\ \psi(x) + \psi(y) = \psi(x+y)$ et ψ est bornée sur la boule ouverte unité de E. Montrer que ψ est linéaire et continue.

Exercice 369 [X PSI 2025 # 370] Soit (E, ‖ ‖) un espace vectoriel normé avec $E \neq \{0\}$.

1. Soit φ un endomorphisme continu de E. Montrer que : $\sup_{x\neq 0} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} < +\infty$
2. Soient u,v deux endomorphismes continus de E tels que uv-vu= id. Montrer que $E = \{0\}$.

Exercice 370 [X PSI 2025 # 371] Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $K \subset E$ un convexe non vide. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$.- a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n(K) \subset K$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (S_1 \circ \cdots \circ S_n)(K) \subset \bigcap^n S_k(K)$.
2. On suppose que K est compact et que, pour tout $x \in E$, $||u(x)|| \leq ||x||$. Montrer que : $\forall x \in \bigcap S_n(K),\ u(x) = x$.

Exercice 371 [X PSI 2025 # 372] Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- $A_{n-1} = o(a_n)$,
- $a_{n-1} = o(a_n)$,
- $A_{n-1} = o(A_n)$

Exercice 372 [X PSI 2025 # 373] Soit u une suite réelle strictement positive, croissante et tendant vers $+\infty$. Montrer que la série $\sum \frac{u_n - u_{n-1}}{u}$ diverge.

Exercice 373 [X PSI 2025 # 374] Soit (d_n) une suite de réels positifs telle que la série de terme général d_n diverge. Nature de $\sum \frac{d_n}{1+d_n}$, $\sum \frac{d_n}{1+nd_n}$, $\sum \frac{d_n}{1+d_n^2}$ et $\sum \frac{d_n}{1+n^2 d_n}$?

Exercice 374 [X PSI 2025 # 375] Trouver $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que, successivement,

- f est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$;
- f est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et $[1, +\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0, 1[$;
- f est nulle sur $\mathbb{R}^-$, égale à 1 sur $[1, +\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0, 1[$.

Exercice 375 [X PSI 2025 # 376] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = f(x_k)$. On suppose que $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)$ est bornée. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 376 [X PSI 2025 # 377] Soit a > 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I(a,n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a + \cos(x))^n dx$.

1. Trouver la limite de $(I(a,n))_{n\geq 0}$.

b) Soit $b \in]0, \pi/2[$. Montrer que $\frac{\sqrt{n}}{(1+a)^n}\int_b^{\frac{\pi}{2}} (a+\cos(x))^n dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Calculer la limite de $\left(\frac{\sqrt{n}}{(1+a)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+1}}\int_0^b (a+\cos(x))^n dx\right)$.
2. En déduire un équivalent de I(a,n) quand $n \to +\infty$

Exercice 377 [X PSI 2025 # 378] Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Soit () l'équation différentielle y' + y = f(t).

1. Montrer que toute solution y de () tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.
2. On suppose de plus que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Soit y une solution non nulle de (). Déterminer un équivalent de y(t) quand $t \to +\infty$.

Exercice 378 [X PSI 2025 # 379] Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$, on considère le problème de Cauchy $f' = -f^2$ et f(0) = 1.

1. Résoudre l'équation différentielle.
   Soit $h \in]0, 1/2[$. On définit la suite (y_n) par $y_0 = 1$ et $y_{n+1} y_n = -h y_n^2$.
2. Montrer que $y_n \to 0$.
3. Montrer que $\frac{1}{y_n} = 1 + nh + o(n)$.

3) Probabilités

Exercice 379 [X PSI 2025 # 380] Soient $n \geq 2$ et X une variable aléatoire à valeurs dans [0, n].

1. Soit Y une autre variable aléatoire à valeurs dans [0,n]. Montrer que si $\forall k \in [0, n]$,

$\mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k)$ alors $X \sim Y$.

1. Montrer qu'il existe des variables aléatoires X, Y à valeurs dans [0, n] ne suivant pas la même loi et telles que $\forall k \in [2, n], \mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k)$.

Exercice 380 [X PSI 2025 # 381] Soient ε, X et Y trois variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\varepsilon \sim \mathcal{B}(1/2)$ et que X et Y suivent
$]0, 1[$. On note $M = \begin{pmatrix} (2\varepsilon - 1)X & Y \\ Y & (2\varepsilon - 1)X \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathbf{P}(M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer $P(M \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}))$.

Exercice 381 [X PSI 2025 # 382] Soit $n \geq 2$. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans [1, n]. Déterminer les $X \in \mathcal{X}$, indépendantes de toutes les $Y \in \mathcal{X}$.

Exercice 382 [X PSI 2025 # 383] On effectue $n \leq N$ tirages sans remise dans un sac de N jetons numérotés de 1 à N. On note X_i la variable aléatoire donnant le numéro du jeton du i-ème tirage et on pose $Z_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Calculer $\mathbf{E}(Z_n)$.

Exercice 383 [X PSI 2025 # 384] On pose (X_k) une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de para- mètre $p \in [0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k+n}$

1. Calculer l'espérance de Y_n
2. Déterminer la limite de $(\mathbf{E}(Y_n))$
3. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|Y_n \alpha| > \varepsilon) = 0$.

VI) X PC **AUTRE**

1) Algèbre

Exercice 384 [X PC 2025 # 385] Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que P P' = Q. Montrer que, si $Q \geq 0$, alors $P \geq 0$.

Exercice 385 [X PC 2025 # 386] Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes de E. Montrer que $A \cap]2, +\infty[= \emptyset$.

Exercice 386 [X PC 2025 # 387] Soient

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$$

et $r \in [0, 1]$.
Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|P(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k} \leq \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |P(e^{i\theta})|^2$$

.

Exercice 387 [X PC 2025 # 388] Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré d et $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ ses racines. On suppose que, pour tout

$$k \in [1, d]$$

, $|\lambda_k| \leq 1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k^n$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f(n) est entier.
2. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f(n+p) = f(n).

Exercice 388 [X PC 2025 # 389] Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, A + kB est inversible et que son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que A + 5B est inversible et que son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 389 [X PC 2025 # 390] On considère la matrice $A = (\mathbf{1}_{i=j+1 \bmod n})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p \in \mathbb{N}^*$ pour que $B = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$ soit inversible.

Exercice 390 [X PC 2025 # 391] On considère une ferme avec 2n+1 vaches. Le fermier s'aperçoit que quelle que soit la vache que l'on retire du troupeau, il peut séparer les vaches restantes en deux groupes de n vaches, de telle sorte que les sommes des poids des vaches de chacun des groupes sont égales. Montrer que toutes les vaches ont le même poids.

Exercice 391 [X PC 2025 # 392] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $a_{i,j} = \frac{1}{\min(i,j)}$. Calculer $\det A$.

Exercice 392 [X PC 2025 # 393] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + H) = \det(A) + \det(H)$. Que dire de A ?

Exercice 393 [X PC 2025 # 394] Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des réels distincts. Soient $c_1, \ldots, c_p$ des réels non tous nuls. On pose

$$\varphi : x \mapsto \sum^{p} c_i e^{\alpha_i x}$$

. Montrer que φ s'annule au plus $p-1$ fois.

1. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_p$ des réels tels que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ et $\beta_1 < \cdots < \beta_p$. Montrer que le déterminant de la matrice $\left(e^{\alpha_i \beta_j}\right)_{1 \leq i,j \leq p}$ est strictement positif.

Exercice 394 [X PC 2025 # 395] Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB^2B^2A = B$. Montrer que B est nilpotente d'ordre impair.

Exercice 395 [X PC 2025 # 396] 1. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable.b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q : x = (x_1 \ldots x_n)^T \in \mathbb{C}^n \mapsto \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} x_i x_j \in \mathbb{C}$. Montrer
qu'il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $Q(x) = x^T S x$.
c. Montrer qu'il existe un ensemble fini I, une famille $(\ell_i)_{i \in I} \in (\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}))^I$ de formes linéaires indépendantes et une famille $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ telles que
linéaires indépendantes et une famille

$$(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$$

telles que $\forall x \in \mathbb{C}^n, \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i \in I} \alpha_i \ell_i(x)^2$.
Ind. Commencer par traiter l'exemple $Q(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_3^2$.

Exercice 396 [X PC 2025 # 397] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$.

Exercice 397 [X PC 2025 # 398] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M pour que l'application $f\colon A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit bijective.

Exercice 398 [X PC 2025 # 399] Soit

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

. On pose $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

1. Justifier que cette définition est pertinente.
2. On suppose que M s'écrit $M = I_n + A$ où A est nilpotente. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

Exercice 399 [X PC 2025 # 400] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Pour

$$v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

, on pose $H_v = I_n - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}$.

1. Donner une interprétation géométrique de H_v.
2. Montrer que, pour tout vecteur unitaire $e \in v^\perp$, on a $H_{v - \|v\| e}(v) = \|v\| e$.
3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Donner un algorithme permettant de trouver $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 telles que A = QR.

Exercice 400 [X PC 2025 # 401] Soient $E = [\![1, n]\!]$ et $A_1, \ldots, A_m$ des parties distinctes de E telles qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j, \Rightarrow \mathrm{Card}(A_i \cap A_j) = c$. Montrer que $m \leq n$. Ind. Considérer d'abord le cas où il existe i tel que $\mathrm{card}(A_i) = c$. Ensuite pour $i \in [\![1, m]\!]$,

$$\text{poser } v_i = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{A_i}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{A_i}(n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et considérer } G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq m}$$

.

Exercice 401 [X PC 2025 # 402] Soient $n, p \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient E un sousespace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\inf\{||x - b||, x \in E\}$ est atteint en un unique point de E.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf\{\|Axb\|, x \in \mathbb{R}^p\}$ est atteint. Si x_1 et x_2 sont deux points en lesquels le minimum est atteint, montrer que $x_2 x_1 \in \mathrm{Ker}\, A$.
3. Résoudre l'équation $A^T A x = A^T b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^p$.

Exercice 402 [X PC 2025 # 403] Soit

$$H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

.a) Montrer qu'il existe des réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et des matrices de projecteurs orthogonaux $P_1, \ldots, P_k$ de $\mathbb{R}^n$ tels que : $\sum_{i=1}^k P_i = I_n, P_i P_j = 0$ si $i \neq j$ et $H = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$.

1. Soit $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{tr}(R) = 1$. On pose $p_i = \mathrm{tr}(RP_i)$ pour $1 \leq i \leq k$.

Montrer que $(p_1, \ldots, p_k)$ est une loi de probabilité sur $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Exercice 403 [X PC 2025 # 404] Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det^{1/n}(A+B) \geq \det^{1/n}(A) + \det^{1/n}(B)$.

Exercice 404 [X PC 2025 # 405] Soient $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $\sum_{i=1}^n M_i^T M_i = I_p$.
Pour $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose $L(X) = \sum_{i=1}^n M_i^T X M_i$.
On écrit $M \geq N$ pour signifier $M - N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $L(X^T X) \geq L(X^T)L(X)$.

Exercice 405 [X PC 2025 # 406] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. On définit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $A_0 = A$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + A_n^{-2}$. Donner un équivalent de $\operatorname{tr} A_n$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 406 [X PC 2025 # 407] 1. Soit $(u_1, \ldots, u_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$. Montrer que l'on peut renuméroter les u_i pour qu'il existe $\alpha \in [1, k]$ tel que la famille $(u_1, \ldots, u_\alpha)$ soit libre et $u_j \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_\alpha) = E$
pour tout $j \in [\alpha + 1, k]$.

1. Soit $U = (u_1 | \cdots | u_\alpha) \in \mathcal{M}_{n,\alpha}(\mathbb{R})$. Montrer que $U^T U$ est inversible.
   c. Soient

$$\beta \geq \alpha + 1$$

et $B = \begin{pmatrix} \langle u_\beta, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_\beta, u_\alpha \rangle \end{pmatrix}$. Montrer que la solution de $U^T U X = B$ donne
les coordonnées de u_β dans la base $(u_1, \ldots, u_\alpha)$ de E.

d. Soit $(v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ telle que : $\forall (i, j) \in [\![1, k]\!]^2, \langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$. Montrer qu'il existe $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in [1, k], W v_i = u_i$.

Exercice 407 [X PC 2025 # 408] 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ tels que $A = B^T B$.
Soient $n \geq 2$ et $\mathcal{L}$ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour $A \in \mathcal{M}_{kn}(\mathbb{R})$ que l'on écrit $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \ldots & A_{k,k} \end{pmatrix}$ où chaque bloc est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\hat{\mathcal{L}}_k$ par $\hat{\mathcal{L}}_k(A) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(A_{1,1}) & \ldots & \mathcal{L}(A_{1,k}) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{L}(A_{k,1}) & \ldots & \mathcal{L}(A_{k,k}) \end{pmatrix}$.
On dit que $\mathcal{L}$ est C.P. (complètement positif) lorsque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathcal{S}_{nk}^+(\mathbb{R})$, $\hat{\mathcal{L}}_k(A) \in \mathcal{S}_{nk}^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{L} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas C.P.
   c. Soit $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ complètement positif. En regardant le cas k=2, montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{L}(M^T) = \mathcal{L}(M)^T$.

Exercice 408 [X PC 2025 # 409] Soient $S, T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T(S+T)X > 0$.
Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la famille (Se_i, Te_i) soit liée. Ind. Considérer $B : (X, Y) \mapsto X^T(S+T)Y$ et $M = (S+T)^{-1}S$.

2) Analyse

Exercice 409 [X PC 2025 # 410] Soit $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \forall (i,j) \in [1,n]^2, m_{i,j} \in [0,1]^2\}$.
On pose $\alpha = \sup_{M\in A}(\det M)$.

1. Montrer que α est un maximum.

b. Montrer que ce maximum est atteint en des matrices M à coefficients dans $\{-1, 1\}$ telles que $\det M > 0$.

Exercice 410 [X PC 2025 # 411] Pour

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

, on pose $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1. Montrer que $\exp(A)$ est bien définie. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

1. Montrer que, si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
   c. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{2k}\right) \exp\left(\frac{B}{k}\right) \exp\left(\frac{A}{2k}\right) \right)^k = \exp(A+B)$$

.

Exercice 411 [X PC 2025 # 412] On munit

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$$

de la norme $\|\|_\infty$. Si $f \in E$, on pose $A(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f(t)dt + \int_0^1 t f(t)dt$.

1. Trouver $C > 0$ tel que $\forall f \in E, ||A(f)||_\infty \leq C||f||_\infty$.

b. Déterminer la constante C optimale.

Exercice 412 [X PC 2025 # 413] Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. On pose

$$Conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ ; \ n \in \mathbb{N}^*, \ (x_1, \dots, x_n) \in A^n, \ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

.

On suppose de plus que, pour tout $(x, y) \in A^2$, il existe $\gamma : [0,1] \to A$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Montrer que $\mathrm{Conv}(A) = \bigcup_{(a,b)\in A^2} [a, b]$.

Exercice 413 [X PC 2025 # 414] Soit E un espace vectoriel normé. On dit que $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ vérifie la propriété C si : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall p \geq N, \ \forall q \geq N, \ \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$. On dit que E vérifie la propriété B si toute suite de E vérifiant C est convergente. On admet que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété B. On
pose

$$\ell^1 = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty \right\}$$

. On munit ℓ^1 de la norme définie par $||u||_1 = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

. Montrer que $(\ell^1, |||_1)$ vérifie la propriété B.

Exercice 414 [X PC 2025 # 415] On munit $\ell^1 = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty ight \right\}$ de la norme définie par $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$
et

$$\ell^\infty = \{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M \}$$

de la norme définie par $||u||_\infty = \{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M \}$
$\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Enfin, pour $(u, v) \in \ell^1 \times \ell^\infty, \$ on pose $\varphi_v(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que pour tout $v \in \ell^\infty$, φ_v est bien définie sur ℓ^1.

On note D_{ℓ^1} l'ensemble des formes linéaires sur ℓ^1 qui sont continues.

1. Montrer que pour tout $v \in \ell^\infty$, $\varphi_v \in D_{\ell^1}$. On pose, pour $v \in \ell^\infty$, $\|\varphi_v\| = \inf\{C > 0 : \forall u \in \ell^1, |\varphi_v(u)| \leq C\|u\|_1\}$.
   c. Montrer que $|||$ est une norme.
2. Calculer $\|\varphi_v\|$ pour $v \in \ell^\infty$.
   d. Calculer $\|\varphi_v\|$ pour $v \in \ell^\infty$. Les question précédentes montrent que l'application T de ℓ^∞ dans D_{ℓ^1}, qui à v associe φ_v est une application linéaire et une isométrie

est une application linéaire et une isométrie.

1. Montrer que T est bijective.

Exercice 415 [X PC 2025 # 416] 1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique $(N, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que :

- $M = D + N$,
- D est diagonalisable,
- N est nilpotente, iv) ND = DN.

2. Quels sont les points de continuité de $M \mapsto (D, N)$?

Exercice 416 [X PC 2025 # 417] Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = \sum_{n=1}^{n^2} \frac{1}{n^2+k^2}$. Déterminer la limite de (nv_n).

Exercice 417 [X PC 2025 # 418] On définit (u_n) par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 418 [X PC 2025 # 419] Soient $(a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}}$.

1. Montrer que, si $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} \left\{ \frac{\ln(\ln a_k)}{k} \right\} > \ln 2$, alors (t_n) diverge.
2. Montrer que, si $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k>n} \left\{ \frac{\ln(\ln a_k)}{k} \right\} < \ln 2$, alors (t_n) converge.

Exercice 419 [X PC 2025 # 420] Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ strictement croissante, continue et telle que $f(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Montrer que les séries de termes généraux $\frac{1}{f(n)}$ et $\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Exercice 420 [X PC 2025 # 421] Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \frac{u_n}{S_n}$ converge.

Exercice 421 [X PC 2025 # 422] Soient $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $f : x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$. Montrer que, si $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$, alors $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est irrationnel.

Exercice 422 [X PC 2025 # 423] Soit
$$n \in \mathbb{N}^*$$
. Montrer : $\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$.

Exercice 423 [X PC 2025 # 424] Soit $f\colon x \in \mathbb{R}^* \mapsto e^{-1/x^2}$. Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 424 [X PC 2025 # 425] Soit $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que G(0)=G(1)=0, G est continue en 1 et dérivable en 0, $G'(0) \ge 0$ et, pour tout $x \in [0,1]$, on a $G(x) = \max_{y\in[0,x]}(G(y) + G(x-y))$.
Montrer que G est nulle.

1. Montrer $I_n \to +\infty$.

Exercice 425 [X PC 2025 # 426] $$ Montrer que : $\sum_{p\le x} \frac{\ln p}{p} \ge \ln x + O(1)$. **Ind.** Considérer $\ln(n!)$.

Exercice 426 [X PC 2025 # 427] Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue à valeurs positives telle $\int_0^1 g = 1$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\varphi'' \ge 0$.
Montrer :
$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right) \le \int_0^1 \varphi(f(x))g(x)dx$$
.

Exercice 427 [X PC 2025 # 428] Soient deux réels a < b et $f, g \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}^{+*}\right)$ avec $f \ne g$.
On suppose
$$\int_a^b f = \int_a^b g$$
. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^b \frac{f^{n+1}}{g^n}$.

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}^{J_a}$ est strictement croissante.

Exercice 428 [X PC 2025 # 429] Soif $f \in C^2([0,1], \mathbb{R}^+)$ telle que f(0) = 0 et $f'' \ge 0$.
Montrer que $\int_0^1 f(x)^2 dx \le \int_0^1 x^2 f'(x)^2 dx$.

Exercice 429 [X PC 2025 # 430] Soient $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^{+*}$ et $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$ continues telles que : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \int_0^1 K(x,z)g(z)dz$ et $g(x) = \int_0^1 K(x,z)f(z)dz$. Montrer que f=g.

Exercice 430 [X PC 2025 # 431] Soient L^1 (resp. L^2) l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ intégrables (resp. de carré intégrable). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $x \mapsto x\,f(x)$ et $x \mapsto x\,f'(x)$ sont dans L^2.

1. Montrer que $f \in L^2 \cap L^1$.

1. Montrer $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Montrer que $x \mapsto xf^2(x)$ est dans L^2

Exercice 431 [X PC 2025 # 432] Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $x \mapsto (1+x^2)|f(x)|$, $x \mapsto (1+x^2)|f'(x)|$ et $x \mapsto (1+x^2)|f''(x)|$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $A_t(f)\colon x \mapsto f'(x) + txf(x)$ et $A_t^*(f) : x \mapsto -f'(x) + txf(x)$.

1. Si $f \in E$, montrer que $\int_{\mathbb{T}^n} A_t^*(A_t(f))f \ge 0$.

Ind. Montrer, pour $(f,g) \in E^2$, que $\int_{\mathbb{R}} A_t(f)g = \int_{\mathbb{R}} f A_t^*(g)$.

1. Soit $f \in E$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f^2 = 1$. Montrer que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f^2(x)dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)dx\right) \ge \frac{1}{4}$

Exercice 432 [X PC 2025 # 433] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^3 définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n^{(3)}(x)\right|\right) = c \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n'(x)| = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n''(x)| = 0$.

Exercice 433 [X PC 2025 # 434] On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Soit $g\colon x \mapsto \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2 dx$.
3. Calculer $\int_0^\pi (x^2 g(x))^2 dx$.
4. Expliciter q et tracer son graphe.

Exercice 434 [X PC 2025 # 435] Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_0 = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t)dt$.

1. Montrer que l'application T qui à f associe $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Exprimer T(f) à l'aide de f.
3. L'application T est-elle injective ? surjective ?

Exercice 435 [X PC 2025 # 436] Soit $f\colon t \mapsto (1-t)^{1-1/t}$. Cette fonction est-elle développable en série entière ? Si oui déterminer le rayon de convergence et le signe des coefficients de ce développement en série entière.

Exercice 436 [X PC 2025 # 437] Donner le développement en série entière de $f(x) = \frac{1}{1-2x-x^2}$ et son rayon de convergence. Montrer que les coefficients sont entiers. Pouvait-on le prévoir ?

Exercice 437 [X PC 2025 # 438] On pose $f\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n(n-1)/2}}$. Montrer que f n'est pas le quotient de deux polynômes.

Exercice 438 [X PC 2025 # 439] 1. Donner le développement en série entière de $\arctan$ et montrer : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 4\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer : $\left|\pi S_n \frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{1}{2n^3}$.
3. Montrer que, pour $n = 5 \times 10^5$, π et S_n ont leurs 16 premières décimales communes, sauf pour la 6e.

Exercice 439 [X PC 2025 # 440] 1. Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Soit $r > 0$. On suppose que f n' a pas de racine de module r. On note $N_r(f)$ le nombre de racines de f (comptées avec multiplicité) situées dans le disque de centre 0 et de rayon r. Montrer que $N_r(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} re^{i\theta} d\theta.$

2. Soit $r > 0$. Soient f et g dans $\mathbb{C}[X]$ tels que, pour tout z de module r, [g(z)] < |f(z)|. Montrer que f et f+g ont le même nombre de racines comptées avec multiplicité dans le disque de centre 0 et de rayon r.
3. Application : montrer que $X^8 5X^3 + X + 2$ possède 3 racines comptées avec multiplicité dans le disque unité.

Exercice 440 [X PC 2025 # 441] Soit $A : \mathbb{C} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. On suppose que les coordonnées de A sont sommes de séries entières de rayon $+\infty$ et que $A(\mathbb{R}) \subset SO_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ somme d'une série entière de rayon $+\infty$ telle que $\forall z \in \mathbb{C},\ A(z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(z)) & -\sin(\varphi(z)) \\ \sin(\varphi(z)) & \cos(\varphi(z)) \end{pmatrix}$.

Exercice 441 [X PC 2025 # 442] Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que, pour tout $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ la restriction γ_k de γ au segment $[a_k, a_{k+1}]$ est de classe C^1. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue. On définit $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{j+1}} f(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)dt$. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ et f est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(z)dz = 0$.

Exercice 442 [X PC 2025 # 443] 1. Montrer que, pour $x > 0$, $e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+s^2)}ds.$

2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$
3. Calculer $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt.$

Exercice 443 [X PC 2025 # 444] 1. Montrer que $\forall t \in [0,1[, \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}d\theta = 0.$b) En déduire que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|e^{i\theta} - z|d\theta = \max(0, \ln|z|)$$

.

Ind. Considérer la fonction

$$f\colon t \mapsto \int_0^{2\pi} \ln\left(|z - te^{i\theta}|\right) d\theta$$

.

Exercice 444 [X PC 2025 # 445] Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = \max(x,0)$. Soit $\widehat{f} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{i\xi x}dx.$

1. Montrer que $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=-k}^{k} e^{ijx} = \sum_{j=-N}^{N}\left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right)e^{ijx} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

.

c. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, montrer que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin((N+1)x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 e^{-ikx}dx = \left(1 - \frac{|k|}{2N+2}\right)^+$$

.

d. Montrer que, uniformément en $k \in \mathbb{Z}$, la suite de terme général $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin((N+1)x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 e^{-ikx}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin((N+1)x)}{\frac{x}{2}}\right)^2 e^{-ikx}$ tend vers

$$0$$

lorsque $N \to +\infty$. En déduire : $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(\xi) = \pi\left(1 - \frac{|\xi|}{2}\right)^+$.

Exercice 445 [X PC 2025 # 446] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier l'existence de $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ Ind. Montrer l'existence d'une norme $\|\ \|$

sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle il existe $c > 0$ tel que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq c\|A\|\|B\|$.

1. Soit $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), t \mapsto \exp(tA)$. Montrer que M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer

M'(t) pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ continue et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Trouver toutes les fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivables telles que $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) + Bu(t)$.
2. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $\exp(A) = P(A)$?

Exercice 446 [X PC 2025 # 447] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle\langle b, x\rangle$.

1. Montrer que J est strictement convexe : $\forall x \neq y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in]0, 1[\,, J(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y)$.
2. Montrer que $\lim_{\|x\| \to +\infty} J(x) = +\infty$.
3. Montrer que J atteint son minimum en l'unique point x_0 vérifiant $Ax_0 = b$.

Exercice 447 [X PC 2025 # 448] Soit $n \geq 2$. On pose $\Sigma = \left\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ \sum_{i=1}^n a_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1\right\}$.Maximiser $S_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ lorsque $(a_1, \ldots, a_n)$ décrit Σ.

3) Probabilités

Exercice 448 [X PC 2025 # 449] Soit $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(X = k)$.

Exercice 449 [X PC 2025 # 450] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'entiers naturels non nuls. On tire des dés équilibrés, le n-ième dé admettant a_n faces numérotées de 1 à a_n. On effectue les tirages tant que la suite des résultats est croissante. On note p la probabilité de faire une infinité de tirages. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour que p soit non nul.

Exercice 450 [X PC 2025 # 451] On définit pour

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

, $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1. Montrer que e^A est bien défini.

Ind. On pourra montrer qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ et une constante $C > 0$ telles que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), ||AB|| \leq C||A||||B||$.
On note

$$R = \frac{1}{2}I_2$$

, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer, pour $s, t \in \mathbb{R}$, $f(s,t) = \mathrm{Tr}(Re^{i(sR+yH)})$.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^2$. On note $g(s,t) = \mathbf{E}(e^{i(sX+tY)})$.
c. Montrer que

$$\forall s_1, \ldots, s_m,\ t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m g(s_k - s_\ell, t_k - t_\ell) \geq 0$$

()

1. On prend $s_2 = s_3 = t_1 = t_3 = \frac{2\pi}{3}$ et $t_2 = s_1 = 0$. Montrer que f ne vérifie pas ().
2. Soient $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), R \in \mathcal{S}_n^+(\check{\mathbb{R}})$ tel que $\mathrm{Tr}\, R = 1$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que $\forall s \in \mathbb{R}, \mathrm{Tr}(Re^{isH}) = \mathbf{E}(e^{isX})$

Exercice 451 [X PC 2025 # 452] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit S_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \geq 0$. Calculer $\mathbf{E}(e^{sS_n})$.
2. Montrer que, pour tout réel a,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \exp\left(-n \sup_{s>0}\left(as - \ln\left(pe^s + (1-p)\right)\right)\right)$$

.

c. Montrer qu'il existe une fonction $H \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{+*})$ ne dépendant pas de n telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \exp(-nH(\varepsilon))$$

.

Exercice 452 [X PC 2025 # 453] Une suite (Y_n) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dite **transiente** si, pour toute partie bornée A de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(Y_n \in A) < +\infty$.Soient $\alpha > 0$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on ait $X_i \sim \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{i}\right)$. On pose $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que (Y_n) est transiente.

Exercice 453 [X PC 2025 # 454] Une suite (S_n) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dite **transiente** si, pour toute partie bornée A de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(S_n \in A) < +\infty$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables
aléatoires telle que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$, avec $p \in]0, 1[$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que (S_n) est transiente si et seulement si $p \neq 1/2$.

Exercice 454 [X PC 2025 # 455] Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_k=1)=p$ et

$$P(X_k=-1)=1-p$$

. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$, $T=\inf\{n\in\mathbb{N}^*, S_n=1\}$ et $f_n=P(T=n)$.

1. Montrer que $f_1=p$ et que $\forall n\geq 2$, $f_n=(1-p)\sum_{k=0}^{n} f_{k-1}f_{n-k}$.
2. On pose $F: x\mapsto \mathbf{E}\left(x^T 1_{T<+\infty}\right)$. Montrer que $F(x)=px+(1-p)F(x)^2x$.

Exercice 455 [X PC 2025 # 456] On considère un marcheur qui peut se situer sur n sites numérotés de 1 à n. À chaque étape, il a une probabilité $p_{i,j}$ de sauter du site numéro i au site numéro j.

Pour $k\in\mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire donnant le site occupé par le marcheur à l'étape k et $\mu_{k,i}=\mathbf{P}$ (le marcheur est en i à l'étape k). L'application $\mu_k: i\in[\![1,n]\!]\mapsto \mu_{k,i}$ est la loi de X_k.

1. Donner les lois de X_1 et X_2 et fonction de μ_0 et des $p_{i,j}$.
2. Pour $f\colon[1,n]\to\mathbb{R}$, donner $\mathbf{E}(f(X_1))$.

On pose, pour $f\in\mathbb{R}^{[1,n]}$, l'application $T(f):[1,n]\to\mathbb{R}$ définie par : $T(f)(i)=\mathbf{E}(f(X_1))$ lorsque la suite (X_n) vérifie $\mu_0=\mathbf{1}_{\{i\}}$. On dit que la marche aléatoire est déterministe si : $\forall i\in[1,n],\ \exists j_i\in[1,n],\ p_{i,j_i}=1$.

1. Interpréter cette dernière définition.
2. Montrer que la marche est déterministe si et seulement si : $\forall(f,g)\in(\mathbb{R}^{[1,n]})^2$, T(fg) = T(f)T(g).

Exercice 456 [X PC 2025 # 457] Soit $n\geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $X=(X_1,\ldots,X_n)^T$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que X est à valeurs dans $\{V_1,\ldots,V_m\}$ avec, pour $k\in[1,m]$, $\mathbf{P}(X=V_k)=p_k>0$.

1. On dit que X est centrée lorsque $\mathbf{E}(X)=0$. Montrer que, si X est centrée, alors $\operatorname{rg}(V_1,\ldots,V_m)<m$.
2. On dit que X est centrée-réduite lorsque $\mathbf{E}(X)=0$ et que la matrice de covariance $(\operatorname{Cov}(X_i,X_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est égale à I_n. Montrer que si X est centrée-réduite alors $m\geq n$.
3. On suppose que m = n + 1. Montrer que X est centrée-réduite si et seulement si, pour tous $i\neq i$ $\langle V_i,V_j\rangle=-1$ et pour tout i n = 1

tous $i\neq j$, $\langle V_i,V_j\rangle=-1$ et, pour tout i, $p_i=\frac{1}{\|V_i\|^2+1}$.

VII) De Christophe **XENS**

Exercice 457 [ENS 25, ULSR] Une randonneuse doit choisir un emplacement pour poser sa tente. Elle dispose de N emplacements distincts numérotés, qu'elle parcourt à partir du premier. Elle ne peut pas revenir en arrière, et lorsqu'elle est au niveau d'un emplacement, elle peut le comparer aux emplacements qu'elle a déjà vu. On suppose que tous les emplacements ont autant de chance d'être le meilleur. L'objectif est de s'arrêter au niveau du meilleur emplacement. But de l'exercice : trouver une stratégie maximisant les chances de réussite.

1. Traiter le cas $N=3$.
2. (Question donnée après avoir fini Q1) On considère la stratégie suivante : la randonneuse parcourt les k premiers emplacements sans s'arrêter, et à partir du $k+1$-ième, elle s'arrête dès qu'elle en trouve un meilleur que les précédents. Quel est le meilleur k (asymptotiquement) ?

Exercice 458 [ENS 25, SR] Soit $M=\begin{pmatrix} A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ où $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),B\in\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et $C\in\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$. On écrit

$$e^M=\begin{pmatrix} * & \Phi_{A,B}(C)\\ & *\end{pmatrix}$$

1. Rappeler la valeur de chacune des étoiles.
2. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est linéaire.
3. On suppose A,B diagonalisables. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

Exercice 459 [ENS SR 25] Montrer le caractère C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction définie par

$$\forall x\neq y, f(x,y)=\frac{e^x-e^y}{x-y}\text{ et }\forall x, f(x,x)=e^x$$

Exercice 460 [X 2025] Soit $\alpha>0$. On définit

$$z_0=1\text{ et }\forall n\in\mathbb{N}, z_{n+1}=\frac{\alpha n+1}{\alpha(n+1)}z_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} z_i\sim\alpha n z_n$.
2. Soit $(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note $\displaystyle\mu_n=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i$. On suppose que $\alpha x_n+(1-\alpha)\mu_n\to x$. Montrer que $x_n\to x$.

Exercice 461 [ENS 2025, MPI] Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie. Soit K une partie de E non vide, bornée et dont la frontière est compacte. Montrer que K est d'intérieur vide. Question supplémentaire : et si on remplace l'hypothèse "préhilbertien" par "normé" ?

Exercice 462 [ENS 2025, MPI] Dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on définit la relation d'ordre strict $>$: $A > B \iff A - B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 463 [X 2025] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note $f : z \mapsto \sum_{k \leq d, k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$, et on suppose que f est définie sur le complémentaire d'un disque centré en 0. On suppose également que $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{Q}$ et qu'il existe une infinité de $z \in \mathbb{Z}$ tels que $f(z) \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $c_0 \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\forall k < 0, c_k = 0$.
3. Autres questions non abordées.

Exercice 464 [X 2025] Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$?

Exercice 465 [ENS SR 2025] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \{A \in S_n^+(\mathbb{R}), \operatorname{rg}(A) = 1\}$.

1. Montrer que $A \in E \iff \exists U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, A = UU^T$.
2. Soit $a \in C^0(\mathbb{R}^+, E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   - $\exists u \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall x > 0, a(x) = u(x)u(x)^T$
   - $\exists z \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall x > 0, z(x)^T a(x) z(x) > 0$
3. On suppose vraies les propriéts de la question 2. Soient $b < c$ dans $\mathbb{R}^+$ et $i, j \in [1, n]$. On suppose que $a_{i,i}(x) > 0$ et $a_{j,j}(x) > 0$ pour tout $x \in [b, c]$. Montrer que

$$\exists z \in C^0([b,c], \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \begin{cases} \forall x \in [b,c], z(x)^T a(x) z(x) > 0 \\ z(b) = e_i \\ z(c) = \pm e_j \end{cases}$$

Exercice 466 On note $A = \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, n a_{n+1} = (n+1) a_n\right\}$.

1. Etudier A.
2. Trouver les solutions sur $]-1{,}1[$ de $\quad (H) : x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$

Exercice 467 [ENS 2025] Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$, ppremier impair. On dit qu'une partie $D \subset \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ est f génératrice pour $f : \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ si

$$\forall y \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}, \exists n \geq 2, \exists d_1, \ldots, d_n \in D, y : f(f(\ldots f(d_1, d_2), d_3) \ldots, d_n)$$

1. Avec $f : (x, y) \mapsto x - y$, dénombrer les parties $D \subset \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ qui sont f-génératrices et de cardinal minimal.
2. Avec $f : (x, y) \mapsto xy$, montrer qu'il n'existe aucune partie f-génératrice de cardinal 1.
3. Avec $f : (x, y) \mapsto xy$, montrer qu'il existe au moins une partie f-génératrice de cardinal 2. On admettra que le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ est cyclique.

Exercice 468 [ENS25, SR] Pour $f, g \in E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$, on note $(f \mid g) = \int_{-1}^1 fg$.

Pour tout entier naturel n, on pose $\quad L_n = \left(X^2 - 1\right)^n$ et $P_n = \dfrac{1}{n! 2^n} L_n^{(n)}$.

1. Rappeler pourquoi (.|.) est un produit scalaire.
2. Montrer que pour tout n, P_n est un polynôme de degré n. Montrer que les P_i sont deux à deux orthogonaux.
3. Montrer que P_n est scindé simple à racines dans $]-1, 1[$.
4. Ecrire P_n sous la forme $\sum_{k=0}^n \alpha_k (X-1)^{n-k}(X+1)$. Montrer que $(X-1)^n P\left(\frac{X+1}{X-1}\right)$ est un polynôme.
5. Etudier la rationnalité des racines de P_n

Exercice 469 [X 2025] Soit $\sum (a_n z^n)$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme f. Soeint $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(M), |\lambda| < R$.

1. Montrer que $\sum (a_n M^n)$ converge.
2. Peut-on trouver une suite (a_n) telle que le résultat soit vrai pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(M), |\lambda| \leq R$.

Exercice 470 [X 2025] On note $B_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(M) = 1$ et $-1 \notin \operatorname{Sp}(M)$. On note

$$T : M \mapsto (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$$

1. Montrer que T est bien définie sur $A_n(\mathbb{R})$ et que $T(A_n(\mathbb{R})) \subset B_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $T(B_n(\mathbb{R})) \subset A_n(\mathbb{R})$.
3. On prend $n = 2$. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -\tan(\theta) \\ \tan(\theta) & 0 \end{pmatrix}$ avec $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Que dire de $T(M)$ et $T^2(M)$?

Exercice 471 [ENS 2025] On dit qu'une matrice est de Bordaud si ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

1. Montrer que A est semblable à une matrice de Bordaud si et seulement si A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. Existe-t-il une matrice symétrique dans $\mathbb{C}$, non diagonalisable, qui est de Bordaud ?
3. Caractériser les matrices A qui sont normales, i.e. $A^T A = AA^T$, et de Bordaud.

Exercice 472 [ENS 2025] 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient A, B diagonalisables qui commutent. Montrer que A et B sont codiagonalisables.

2. Soit $\Phi : S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(H, Q) = HQ$. Montrer que Φ est une bijection.
3. Montrer que Φ^{-1} est continue.

Exercice 473 [X 2025] Trouver deux dés non biaisés tels que la probabilité de la somme soit la même que pour deux dés usuels. Les valeurs des faces sont des entiers naturels, pas forcément distincts et les dés peuvent être différents.

Exercice 474 Ci-dessous, version alternative du même exercice Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que :

- Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta > 1$;
- Il existe $A, B > 0$ tels que : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\alpha, \quad |g(x) - g(y)| \leq B|x - y|^\beta$.

Soit $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_0 < x_1 < \cdots < x_n, a = x_0, b = x_n$. On définit :

$$J_S(f, g) := \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

1. Montrer que : \$ $|J_{\mathrm{S}}(f,g) - f(a)(g(b) - g(a))| \leq A$ B|2(b-a)|$^{\alpha+\beta}$ ζ(α+β)\$, où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.
2. Montrer qu'il existe une unique valeur $I \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ si } \max_{0 \leq i < n} |x_{i+1} - x_i| < \delta \Rightarrow |J_S(f, g) - I| < \varepsilon$$

Exercice 475 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in [a, b],\ |f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\alpha$$
$$|g(x) - g(y)| \leq B|x - y|^\beta$$

Soient $a < b$ et $S = (x_k)$ une subdivision de $[a, b]$ de cardinal n. On note :

$$J_S(f, g) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,(g(x_{k+1}) - g(x_k))$$

1. Montrer qu'il existe un indice i entre 1 et $n - 1$ tel que $x_{i+1} - x_{i-1} < \frac{2(b-a)}{n-1}$.
2. Soit un tel i, et $S' = S \setminus \{x_i\}$. Exprimer simplement puis majorer $|J_S(f, g) - J_{S'}(f, g)|$.
3. Montrer que \$ $|J_{\mathrm{S}}(f,g) - f(a)(g(b) - g(a))| \leq A$ B(2(b-a))$^{\alpha+\beta}$ ζ(α+β)\$.
4. Montrer qu'il existe un réel I tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision S de $[a, b]$ de pas inférieur à δ,

$$|J_S(f, g) - I| < \varepsilon$$

Exercice 476 [X 2025] Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ une application linéaire.

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(g_n)_{n\geq 0}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on ait : $\quad \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \cdot P^{(n)}$.
2. Déterminer les polynômes g_n dans le cas particulier où $\quad \varphi(P)(X) = \int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 477 [X 2025] On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n, u_n = u_{n-1}(1 - u_{n-1})$.

1. Etudier la limite de (u_n).
2. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
3. Montrer que $\frac{1}{u_n} - n \sim \ln(n)$.