# Exercices 2023

## I) ENS MP-MPI **XENS**

### 1) Algèbre

**Exercice 1** [ENS 2023 # 1] Soient $S$ et $T$ des ensembles finis non vides et $f$ une application de $S$ dans $T$. On pose $X = \{(x,y) \in S^2, f(x) = f($
Montrer que $|X| \geq \max\left(\frac{|S|^2}{|T|}, \left(\left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil\right)^2 + |S| - \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil\right)$.

*Démonstration.* Pour le terme de gauche, il s'agit de montrer que $\sum_y n_y^2 \geq \frac{\left(\sum_y n_y\right)^2}{\sum_y 1}$, c'est Cauchy-Schwarz.
Pour le terme de droite, c'est un principe des tiroirs, puis compter pour 1 les éléments qui ne sont pas dans le tiroir. □

**Exercice 2** [ENS 2023 # 2] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $S$ un sous-ensemble non vide de $[\![1, n]\!]$ tels que $\left|m - \sum_{i \in S} x_i\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

*Démonstration.* $S$ sera un sous-ensemble d'entiers consécutifs : considérer les sommes partielles $S_0, \ldots, S_n$. □

**Exercice 3** [ENS 2023 # 3] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E(n)$ la valuation 5-adique de $\prod_{k=1}^n k^k$. Donner un équivalent de $E(n)$, quand $n \to +\infty$. **SUP**

*Démonstration.* C'est $\sum_{q=1}^{\lfloor n/5 \rfloor} 5q + \sum_{q=1}^{\lfloor n/5^2 \rfloor} 25q + \ldots$. □

**Exercice 4** [ENS 2023 # 5] Soit $p$ un entier premier $> 1$. Montrer que $-1$ est un carré modulo $p$ si et seulement si $p$ est somme de deux carrés d'entiers.

*Démonstration.* Si $p$ est somme de deux carrés d'entiers, $p \equiv 1[4]$, et $a$ est un carré si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.
Réciproquement, si $p \mid m^2 + 1$. On peut trouver $0 < x, y < \sqrt{p}$ tels que $p \mid m^2x^2 - y^2$. On obtient alors $p \mid x^2 + y^2$. □

**Exercice 5** [ENS 2023 # 6]
1. Soit $p$ un nombre premier impair. Montrer que $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^\times$ contient $(p-1)/2$ carrés.
2. Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ s'écrit comme la somme de deux carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Soit $n$ un entier impair. Montrer que tout élément de $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times$ s'écrit comme somme de deux carrés.
   **Indication** : Commencer par le cas où $n$ est sans facteur carré.

**Exercice 6** [ENS 2023 # 7] Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Si $p$ est un nombre premier et si $r \in \mathbb{Q}^*$ s'écrit $\frac{a}{b}$ de manière irréductible, on définit la $p$-valuation $v_p(r)$ comme $v_p(a) - v_p(b)$.
1. Montrer que si $p \geq 3$ est premier, alors $v_p(H_{p-1}) \geq 1$.
2. Montrer que si $p \geq 5$ est premier, alors $v_p(H_{p-1}) \geq 2$.
3. Montrer que si $p \geq 5$ est premier, alors $v_p(H_{(p-1)p}) \geq 1$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $v_2(H_n)$.

**Exercice 7** [ENS 2023 # 9]
1. Calculer $\sum\limits_{d|n} \varphi(d)$ où $\varphi$ est l'indicatrice d'Euler.
2. Calculer $\sum\limits_{d|n} \mu(d)$ où $\mu$ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1, \mu(p) = -1, \mu\left(p^k\right) = 0$ pour $k \geq 2$ si $p$ est un nombre premier et $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ si $n \wedge m = 1$. On pose $F\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \left|\left\{\frac{p}{q} \in [0,1]; q \leq x\right\}\right|$.
3. Montrer que $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \ln x)$.

*Démonstration.*
1. $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$
2. $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$, ou 1 pour $n = 1$.
3. Par inversion de Möbius, on a $\varphi(d) = \sum\limits_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right)d'$. □

**Exercice 8** [ENS 2023 # 10] Soient $p, q$ deux nombres premiers distincts. On note $v_p(n)$ la valuation $p$-adique d'un entier $n$. On pose, pour $m \in \mathbb{N}^*, N(m) = (1-q)\left(1-q^2\right)\ldots(1-q^m)$. Trouver une constante $c > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*, v_p(N(m)) \leq cm\ln(m)$.

*Démonstration.* Relier à 423 (LTE).
On a $v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(n)$ (pour $p \neq 2$).
Donc $v_p(N(m)) = \sum_{k=1}^m v_p(1-q) + v_p(m!)$, plus formule de Legendre. □

**Exercice 9** [ENS 2023 # 11] Si $X$ est un ensemble fini, on note $X^* = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^k, c\colon \left(X^*\right)^2 \to X^*$ la concaténation et $\ell\colon X^* \to \mathbb{N}$ la longueur. Soient $A$ et $B$ deux ensembles finis et $\varphi\colon A^* \to B^*$ telle que, pour tous $a, a' \in A, \varphi\left(c\left(a, a'\right)\right) = c\left(\varphi(a), \varphi\left(a'\right)\right)$. **SUP**

1. On pose $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{0, 1\}$. Étudier l'injectivité des applications définies sur les lettres de $A$ puis étendues sur $A^*$ par $\varphi\colon A \to B^*$ telles que $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 01, \varphi(c) = 10, \varphi(d) = 10011$, et $\psi\colon A \to B^*$ telle que $\psi(a) = 01, \psi(b) = 10, \psi(c) = 11, \psi(d) = 00$.
2. Montrer que, si $\varphi$ est injective, alors $\sum_{a \in A} |B|^{-\ell(\varphi(a))} \leq 1$.

*Démonstration.* 1. La première est non injective : 0100110 peut être lu de deux façons.
La seconde l'est.

2. On note $C_N$ le nombre de choix possibles, de mots, dont la longueur totale $N$.
On doit avoir $C_N \leq |B|^N$. Mais $C_N$ vérifie une relation de récurrence : $C_N = \sum_{a\in A} C_{N-\ell(a}$.
Donc les racines de cette récurrence doivent être $\leq |B|$, ce qui implique qu'en $|B|$ la valeur est négative, d'où le résultat. □

**Exercice 10** [ENS 2023 # 12] 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition $(1\,2)$ et le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

2. La transposition $(1\,3)$ et le cycle $(1\,2\,3\,4)$ engendrent-ils $\mathcal{S}_4$ ?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq a < b \leq n$ tels que $\tau = (ab)$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{S}_n$. Montrer que $b-a$ et $n$ sont premiers entre eux.
4. Montrer la réciproque de la propriété précédente. **SUP**

*Démonstration.* 1.

2. Non.
3. Si $p \mid b-a \wedge n$, alors $\sigma(a) - \sigma(b) \equiv a - b[p]$.
4. Facile de se ramener à un cycle $(u\,u+1)$ □

**Exercice 11** [ENS 2023 # 14] Soit $G$ un groupe fini. Si $X$ et $Y$ sont des parties non vides de $G$, on pose $X^{-1} = \left\{x^{-1}, x \in X\right\}$ et $XY = \{xy, (x,y) \in X \times Y\}$. **SUP**

Dans la suite, $X$ désigne une partie non vide de $G$.

1. On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
2. On suppose que $\left|XX^{-1}\right| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de $G$.

*Démonstration.* 1. Si $X$ a un seul élément, ok. Sinon, alors pour tous $a, b \in X$, les ensembles $aX$ et $bX$ ne sont pas disjoints, donc il existe $u, v$ tels que $au = bv \Leftrightarrow a^{-1}b = uv^{-1}$. D'où le résultat.

2. $X^{-1}X$ contient l'élément neutre, et stable par inverse.
Si ce n'est pas un sous-groupe, c'est qu'il existe $u^{-1}va^{-1}b$ qui ne s'écrit pas de cette forme.
!!
Quitte à translater, on peut supposer que $e \in X$. Alors $XX^{-1}$ contient tous les éléments de $X$, et leurs inverses. Au moins la moitié des éléments de $X$ ont leurs inverses dans $X$ ! □

**Exercice 12** [ENS 2023 # 15] Soient $A$ un anneau et $B \subset A$ finie non vide. On note $E(B) = \left|\{(a,b,c,d) \in B^4 \mid ab = cd\}\right|$. Montrer que $E(B) \geq \frac{|B|^4}{|BB|}$. **SUP**

*Démonstration.* On note $x_i$ le nombre de couples qui donnent une valeur $i \in A$. Alors $E(B) = \sum x_i^2$, et $|BB| = \sum_i 1$. Cauchy-Schwarz permet de minorer par $(\sup x_i)^2$, d'où le résultat. □

**Exercice 13** [ENS 2023 # 16] 1. Montrer que $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$.

2. Soit $m \geq 2$. Montrer que le morphisme $\pi\colon SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjectif. **SUP**

*Démonstration.* Easy □

**Exercice 14** [ENS 2023 # 17] Soit $p$ un nombre premier. On admet qu'il existe un anneau commutatif $A$ dans lequel $p^2.1_A = 0_A$ et il existe un élément inversible $x$ tel que :

- tout élément de $A$ s'écrive $P(x)x^{-k}$ pour un $P \in \mathbb{Z}[X]$ et un $k \in \mathbb{N}$ ;
- pour deux polynômes $P, Q$ dans $\mathbb{Z}[X]$ et deux entiers naturels $k, l$, l'égalité $P(x)x^{-k} = Q(x)x^{-\ell}$ équivaut à ce que $X^kQ$ et $X^\ell P$ aient même réduit modulo $p^2$ (autrement dit, tous les coefficients de $X^kQ - X^\ell P$ sont des multiples de $p^2$).

1. Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Caractériser l'inversibilité de $P(x)x^{-k}$ dans $A$.
2. Montrer que le groupe multiplicatif $A^\times$ ne possède pas de partie génératrice finie.

*Démonstration.* !! □

**Exercice 15** [ENS 2023 # 18] Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$. On pose $S_q = \sum\limits_{\substack{0 \leq a < q \\ a \wedge q = 1}} \sum\limits_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi a f(n)}{q}}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $q \wedge q' = 1$, alors $S_{qq'} = S_q S_{q'}$.

*Démonstration.* Les $a \in [\![1, qq']\!]$ premiers avec $q$ et $q'$ sont les $bq + aq'$, avec $a$ premier avec $q$ et $b$ premier avec $q'$. □

**Exercice 16** [ENS 2023 # 19] On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{C}$ est intégrable si : $\forall (x,y) \in X^2, |x-y| \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble intégrable $X$ composé de $n$ points tous sur un même cercle. **SUP**

*Démonstration.* On veut que les $\sin(\frac{\theta_i - \theta_j}{2})$ soient rationnels, c'est-à-dire les $\sin\frac{\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_j}{2} - \sin\frac{\theta_j}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}$.
Il suffit donc de prendre les doubles d'une infinité de points rationnels sur le cercle. □

**Exercice 17** [ENS 2023 # 20] Anneau des entiers algébriques Soit $z \in \mathbb{C}$ annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers. Soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $Q(z)$ est annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers. SUP

*Démonstration.* On note $P$ le polynôme unitaire qui annule $z$ (polynôme minimal, via lemme de Gauss).
Pour $z^2$, je vois mal quoi faire, si ce n'est $P = \prod(X - x_i^2)$.
Par dimension, on sait que $Q(z)$ admet un polynôme annulateur dans $\mathbb{Q}[X]$.
!! □

**Exercice 18** [ENS 2023 # 21] Soit $n = 2m+1 \geq 1$ un entier impair. Expliciter un polynôme $P_m$ de degré $2m$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sin(nx) = (\sin x)^n P_m(\operatorname{cotan} x)$.

1. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

*Démonstration.* Easy. □

**Exercice 19** [ENS 2023 # 22] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. SUP

1. Montrer que $P_n$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si $n$ est impair, alors $P_n$ possède exactement une racine réelle, et qu'elle appartient à $[-n, -1]$.
3. On suppose $n$ pair. Le polynôme $P_n$ a-t-il une racine réelle ?
4. Déterminer les variations et la convexité de $x \mapsto P_n(x)$.

*Démonstration.* Easy. □

**Exercice 20** [ENS 2023 # 23] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$.

1. On suppose $P$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, nP(x)P''(x) \leq (n-1)P'(x)^2$.
2. Donner un polynôme ne vérifiant pas le résultat de la question précédente, puis un polynôme non scindé le vérifiant.

*Démonstration.*
1.
2. Ajouter à un précédent. □

**Exercice 21** [ENS 2023 # 24] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On factorise $P$ sous la forme $P = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k = \sum_{i=1}^{n} z_i^k$. Montrer que, si $k > n$, $S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_0 S_{k-n} = 0$ et que, si $k \leq n$, $S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1}S_1 = -k a_{n-k}$. SUP

**Exercice 22** [ENS 2023 # 25] Une suite d'entiers $(a_n)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme si pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, $m - n \mid a_m - a_n$. SUP

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $\big(P(n)\big)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme.
2. Montrer que $\big(\lfloor n!e \rfloor\big)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme.
3. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et que la suite $\big(P(n)\big)_{n\geq 1}$ ne soit pas un pseudo-polynôme.

*Démonstration.*
1.
2.
3. $\frac{n(n+1)}{2}$ □

**Exercice 23** [ENS 2023 # 26] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{n+1}$ tel que, pour tout $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$, le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* Easy, à relier. □

**Exercice 24** [ENS 2023 # 27] Deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont entrelacées si

- $-P$ et $Q$ sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$,
- $P$ et $Q$ n'ont aucune racine réelle commune,
- entre deux racines consécutives de $P$ (respectivement $Q$) il y a une unique racine de $Q$ (respectivement $P$).

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, $\lambda P + \mu Q$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors $P$ et $Q$ sont entrelacés.

*Démonstration.* À relier. □

**Exercice 25** [ENS 2023 # 28] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. On note $D_r$ le disque complexe ouvert de centre 0 et de rayon $r$. Montrer que $D_{1/n} \subset P(D_1)$. SUP

*Démonstration.* $X + X^2 Q(X) - z_i = 0$ avec $|z_i| < \frac{1}{n}$ admet toujours une racine, $< 1$.
Vient des relations coefficients-racines. □

**Exercice 26** [ENS 2023 # 29] Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\mathcal{C}_Q = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid P \circ Q = Q \circ P\}$. SUP
On appelle suite commutante toute famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n$, $\deg P_n = n$ et $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $P_n \circ P_m = P_m \circ P_n$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{C}(X^2 + \alpha)$ contient au plus un polynôme.

2. Expliciter une famille commutante telle que $P_2 = X^2$.
3. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(nx) = T_n(\cosh x)$.
4. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite commutante.
5. Montrer que les polynômes de degré 1 sont inversibles pour $\circ$.
6. Montrer que, pour $P$ de degré 2, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 unitaire tel que $P = U \circ (X^2+\alpha) \circ U^{-1}$.
7. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille commutante. Montrer que, ou bien il existe $U$ de degré 1 tel que $P_n = U \circ X^n \circ U^{-1}$, ou bien il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 tel que $P_n = U \circ T_n \circ U^{-1}$.

**Exercice 27** [ENS 2023 # 31]
- CNS sur $n$ pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.
- On suppose cette condition satisfaite. Combien y a-t-il de polynômes de degré $d \in \mathbb{N}$ fixé dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ?
- Soit $p$ premier. Montrer qu'il existe des polynômes irréductibles de degré 2 et 3 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

*Démonstration.*
- 
- 
- Compter les multiples. □

**Exercice 28** [ENS 2023 # 32] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps, et $V$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang $\leq 1$. Montrer que $V$ est de dimension $\leq n$. Étudier le cas d'égalité.

**Exercice 29** [ENS 2023 # 33] Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel $V$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(X,Y) \in V^2$, on ait $\mathrm{Tr}(XY) = 0$.

*Démonstration.* On a $X \perp X^T$, donc la dimension de $X$ est $\leq \frac{n^2}{2}$.
Réciproquement. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on prend une diagonale, où le second coefficient est $i\times$ le premier etc.
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ : $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ia \end{pmatrix}$. On cherche une forme réelle : $ia = \overline{a}$ donne $u + \frac{\pi}{2} = -u$, c'est-à-dire $u = -\frac{\pi}{4}$. Donc $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et idk, il faudrait écrire les équations pour l'autre matrice. □

**Exercice 30** [ENS 2023 # 35] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même rang telles que $A^2B = A$. Montrer que $B^2A = B$. **SUP**

*Démonstration.* En passant à la transposée, on veut montrer que $(B'A' - I_n)A' = O_n \Rightarrow (A'B' - I_n)B' = O_n$.
Mais la première relation donne que si $X \in \operatorname{Im} A'$, alors $B'A'X = X$. Donc $\operatorname{Im} B' = \operatorname{Im} A'$, et leurs induits sont inverses l'un de l'autre. □

**Exercice 31** [ENS 2023 # 38] Soient $n \geq 1$ et $E$ une partie de $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. **SUP**

1. On suppose que $E$ est stable par différence symétrique. Que dire de $C = \{\mathbb{1}_A\}$ comme partie de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n$ ?
2. On ne fait plus l'hypothèse précédente, mais on suppose que $A \cap B$ est de cardinal pair pour tous $A, B \in E$. Montrer que $|E| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

*Démonstration.*
1. C'est un sous-espace vectoriel.
2. D'une part les cardinaux des éléments sont pairs. D'autre part les cardinaux des réunions aussi.
   On vérifie que si $A, B, C \in E$, alors $(A \Delta B) \cap C$ est pair. Donc on peut supposer que $E$ est stable par $\Delta$.
   Chaque $A \in E$ donne un élément du dual $\tilde{A}\colon B \mapsto A \cap B$, ce qui limite la dimension de $E$. □

**Exercice 32** [ENS 2023 # 39] Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $|a_i| \geq 2$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. **SUP**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i,\ a_{ii} = a_i,\ a_{ij} = 1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Montrer que $A$ est inversible et que son déterminant a le même signe que $\prod a_k$.
2. Montrer que la conclusion tient encore si l'on suppose $|a_{ij}| \leq 1$ si $|i-j| = 1$ au lieu de $a_{ij} = 1$.

*Démonstration.*
1. $A$ est inversible car diagonale dominante.
   Le signe du déterminant s'obtient en augmentant les coefficients, ou plutôt en diminuant les autres.
   Par récurrence ? On a $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ On montre que $|\Delta_n| > |\Delta_{n-1}|$ + le signe, ça passe par récurrence.
2. … C'est clair. □

**Exercice 33** [ENS 2023 # 40] On considère $\varphi : \left(\mathbb{R}^4\right)^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui à $(u,v)$ associe la matrice dont le coefficient en $(i,j)$ vaut $\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$. **SUP**

1. Que peut-on dire si $\varphi(u,v) = \varphi(u',v') \neq 0$ ?
2. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que $A$ s'écrit comme $\varphi(u,v)$ avec $(u,v)$ libre si et seulement si $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$ et $A \neq 0$.
4. Décrire l'image et le noyau d'une telle matrice.

*Démonstration.*
1. 
2. 
3. 

4. $\square$

**Exercice 34** [ENS 2023 # 41] Soient $a, b, m, p$ des entiers naturels tels que $a^2+b^2-pm=-1$. On pose $A=\begin{pmatrix} p & a+ib \\ a-ib & m \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(i))$ telle que $A=B^*B$ où $B^*=\bar{B}^T$. Même question avec $B$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

*Démonstration.* On a une matrice hermitienne, de déterminant 1. Donc diagonalisable ?!! $\square$

**Exercice 35** [ENS 2023 # 42] Soient $n \in \mathbb{N}^*, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^2$. Pour $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $f_g : (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^n \mapsto \varphi_1\left(g\left(x_1\right)\right) \times \cdots \times \varphi_n\left(g\left(x_n\right)\right)$, application de $\left(\mathbb{R}^2\right)^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

- il existe une suite $(g_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}^2$, $f_{g_k}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,
- il existe une droite vectorielle $L$ telle que $|\{i \mid L \subset \operatorname{Ker}\left(\varphi_i\right)\}| > \frac{n}{2}$.

*Démonstration.* Si il existe une droite $L$, en prenant $g_k=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ selon $L$ et n'importe quel supplémentaire, ça devrait être bon.

Réciproquement, par décomposition polaire, on peut écrire $g_k=O_k D_k O'_k$, et supposer que $O_k \to O_\infty$ et $O'_k \to O'_\infty$, et $D_k=\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_k^{-1} \end{pmatrix}$, avec $\lambda_k \geq 1$.

On prend alors $e_L=O_\infty e_1$. En effet, pour $x=O'^{-1}_\infty(e_1+y)$, on a $g_k x=O_k((\lambda_k+o_{+\infty}(\lambda_k))e_1+(\lambda_k^{-1}+o_{+\infty}(\lambda_k^{-1}))e_2)$, donc, pour que ça tende vers 0, il faut que $\varphi(O_k e_1) \to 0$, au moins un.
En fait, les $m$ facteurs pour lesquels $\varphi(O_\infty e_1) \neq 0$ contribuent (en termes d'équivalent) $\lambda_k^m$.
Lemme : Si $g_k$ est une suite, et $\varphi$ est fixée, il existe une extraction, et un vecteur $x$ tel que $\varphi(g_k(x))$ soit au moins de l'ordre de $\lambda_k^{-1}$. Démonstration : Sinon, c'est que $\varphi(g_k(x))=o(\lambda_k^{-1})$, pour tout $x$. Prendre une BON $(e_1, e_2)$ avec $e_1$ dans le noyau de $\varphi$. Les coordonnées de $g_k$ sont de taille au plus $\lambda_k$ donc l'un de $g_k(e_1), g_k(e_2)$ doit avoir une coordonnée en bas pas trop petite.
On applique ça aux éléments qui ont $L$ dans leur noyau, et $e_L$ pour les autres. $\square$

**Exercice 36** [ENS 2023 # 43] Soit $G$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $ad-bc=1$ et $a \equiv d \equiv 1-c \equiv 1 \bmod 3$. Montrer que $G$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

*Démonstration.* Facile ? Attention : faux pour 2. $\square$

**Exercice 37** [ENS 2023 # 45] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C_A \colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX-XA$. Montrer que si la matrice $A$ est diagonalisable, alors $C_A$ l'est aussi.

*Démonstration.* Calculer les puissances de $C_A$. $\square$

**Exercice 38** [ENS 2023 # 46] Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec $A$ et $B$. Montrer que $BA=\pm AB$.

*Démonstration.* $\Leftarrow$ Ok.
Si $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec un Vect de dimension 2. Si $AB=\lambda BA$, c'est bon. Sinon, alors le commutant de $ABA^{-1}B^{-1}$ est $\mathrm{Vect}(I_n, C)$, donc $B=\lambda A+\mu I_n$, puis faire de la réduction. $\square$

**Exercice 39** [ENS 2023 # 47] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de $A$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ leurs multiplicités. On note $P_k=(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ et $F_k=\operatorname{Ker} P_k(A)$.

1. Montrer que $\mathbb{C}^n=\bigoplus_{i=1}^r F_i$.
2. Montrer que $P_k$ est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par $A$ sur $F_k$.
3. Montrer que $A$ se décompose en $D+N$, avec $D$ diagonalisable, $N$ nilpotente et $ND=DN$.

*Démonstration.* Easy. $\square$

**Exercice 40** [ENS 2023 # 48] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $m$ la multiplicité de 0 dans $\chi_A$. On suppose que $m \geq 1$. Montrer l'équivalence entre

- $\operatorname{Ker} A=\operatorname{Ker} A^2$.
- il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^m=A$.
- pour tout $k \geq 1$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^k=A$.

*Démonstration.* $(iii) \Rightarrow (ii)$
$(iii) \Rightarrow (i)$ est simple, via les noyaux itérés.
$(i) \Rightarrow (iii)$ : Décomposition des noyaux, on est ramené au cas $A$ inversible. !! $\square$

**Exercice 41** [ENS 2023 # 49] Soit $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ dont toutes les valeurs propres sont de module $\leq 1$. Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $M^k-I_n$ soit nilpotente.

*Démonstration.* Il s'agit exactement de montrer que les valeurs propres de $M$ sont des racines de l'unité.
Les $\operatorname{Tr} M^k$ prennent un nombre fini de valeurs, et par co-approximations, on peut tendre vers 1, donc c'est gagné. $\square$

**Exercice 42** [ENS 2023 # 51] Soit $n \geq 1$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{i,j}$ la matrice de permutation associée. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que $\forall A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}), \quad f(PAP^{-1}) = f(A)$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f\colon \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que $f(P_\sigma D P_\sigma^{-1}) = f(D)$. Expliciter un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$.

*Démonstration.* $\mathcal{B}$ est l'ensemble des polynômes symétriques. On a une application $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Elle est injective : si l'on coïncide sur les matrices diagonales, on coïncide sur les diagonalisables, donc par densité, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Elle est surjective : Si $f$ est donné sur les $\mathcal{D}_n$, on montre que $f$ est entièrement déterminée par $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Par ailleurs, $f$ est polynomiale en les $\sigma_i$ (il faut travailler…).
Puis on peut définir $f$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en prenant l'image des coefficients du polynôme caractéristique. ☐

**Exercice 43** Décomposition de Jordan [ENS 2023 # 52] Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $m$, $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $\left(f^k(x)\right)_{0 \leq k \leq m-1}$ est libre. On note $V$ le sous-espace de $E$ engendré par cette famille.
2. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(f^{m-1}(x)) \neq 0$, $W$ le sous-espace de $E^*$ engendré par $(\varphi \circ f^i)_{0 \leq i \leq m-1}$, $W^\perp$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $\forall \psi \in W^\perp, \psi(y) = 0$. Montrer que $W^\perp$ est un supplémentaire de $V$ dans $E$ stable par $f$.
3. Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme $J_k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, où $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la sur-diagonale qui sont égaux à 1.

*Démonstration.* ☐

**Exercice 44** [ENS 2023 # 53] Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$. Un élément $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ soit une base de $E$.

1. Quels sont les endomorphismes de $E$ diagonalisables et cycliques ?
2. Montrer que si $u$ est cyclique, le commutant de $u$ est égale à $\mathbb{K}[u]$.
3. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des sous-espaces $E_1, \ldots, E_r$ de $E$ stables par $u$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ et que, pour tout $i$, $u_{E_i}$ soit cyclique.

*Démonstration.* Ok. ☐

**Exercice 45** [ENS 2023 # 54] Soient $r \in \mathbb{N}^*, d_1, \ldots, d_r$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $d_1 \,|d_2| \ldots \mid d_r$. Déterminer le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contienne un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$.

*Démonstration.* $n = r$ convient. Réciproquement, si $G$ contient un tel groupe, on peut codiagonaliser. ☐

**Exercice 46** [ENS 2023 # 55] Le groupe $GL_2(\mathbb{Q})$ contient-il un élément d'ordre 5 ?

*Démonstration.* Montrer qu'une racine 5-ème de l'unité n'a pas de polynôme annulateur sur $\mathbb{Q}$ de degré 2, c'est-à-dire que $1 + \cdots + X^4$ est irréductible. ☐

**Exercice 47** [ENS 2023 # 56] On note $H$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle.

1. Montrer que $\forall M \in H$, $e^M \in SL_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall M \in H$, $\operatorname{Tr} e^M \geq -2$.
3. A-t-on $\exp(H) = SL_2(\mathbb{R})$ ?
4. Montrer que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit d'une matrice de $SO_2(\mathbb{R})$ et d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux $> 0$.
5. En déduire que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit de deux exponentielles de matrices de $H$.

*Démonstration.*
1.
2. C'est $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
3. Non, cf question précédente.
4. Partir d'une matrice de $SL_2$, et faire le produit.
5. Antisymétrique + triangulaire. ☐

**Exercice 48** [ENS 2023 # 57] Soient $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie, $h_1$ et $h_2$ deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une norme sur $E$ pour laquelle $h_1$ et $h_2$ sont des isométries et que $[h_1, h_2] = h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ commute avec $h_1$ et $h_2$. Montrer que l'espace des vecteurs de $E$ fixes par $h_1$ et $h_2$ admet un supplémentaire dans $E$ stable par $h_1$ et $h_2$.

*Démonstration.* On peut supposer que l'ensemble $F$ des points fixes est de dimension 1. Donc est le noyau d'une forme linéaire $\varphi$.
Notons $C$ le commutateur. On a $Ch_2 = h_1 h_2 h_1^{-1}$.
Si $h_1$ et $h_2$ commutent.
Si $h_1 = h_2$.!! ☐

**Exercice 49** [ENS 2023 # 58] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

1. Montrer que $\sum |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.
2. Montrer que $|\det A| \leq n^{n/2} \sup |a_{ij}|$.

*Démonstration.* 1. !!

2. IAG probablement. ☐

**Exercice 50** [ENS 2023 # 59] Soient $(E, \langle\rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ des vecteurs de $E$ tels que, pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2, \langle u_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$. On note $p$ le projecteur orthogonal de $E$ sur $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_m)$. Montrer que $\forall x \in E, \sum_{i=1}^n \langle u_i, x\rangle \langle x, p(v_i)\rangle = \|p(x)\|^2$.

*Démonstration.* Easy, on a $\langle x, p(v_i)\rangle = \langle p(x), v_i\rangle = \langle u_i, x\rangle$. ☐

**Exercice 51** [ENS 2023 # 60] On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$. On pose $F = \operatorname{Vect}(X, X^2, \ldots, X$ et on note $Q$ la projection orthogonale de 1 sur $F$.
On écrit $Q = -\sum_{k=1}^n a_k X^k$ et $P = 1 + \sum_{k=1}^n a_k (X+1)\ldots(X+k)$.

- Déterminer $\langle Q-1, X^k\rangle$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ et montrer que $P(k) = 0$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.
- Calculer $\inf_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 e^{-x}\, dx$.

*Démonstration.* 1. Cela vaut 0. Découle des relations intégrales.

2. Cela vaut $\langle 1-Q, 1-Q\rangle = \langle 1-Q, 1\rangle = \int (1 + \sum a_i x^i) e^{-x}\, \mathrm{d}x$. C'est une fonction des $a_i$, et la question 1 permet de conclure, peut-être. ☐

**Exercice 52** [ENS 2023 # 61] Soient $(E, \langle\rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*$ et $u, u_1, \ldots, u_m$ des vecteurs de $E$. Montrer que $u \in \mathbb{R}^+ u_1 + \cdots + \mathbb{R}^+ u_m$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\{x \in E; \forall i \in [\![1,m]\!], \langle u_i, x\rangle \leq 0\} \subset \{x \in E; \langle u, x\rangle \leq 0\}$.

*Démonstration.* $\Rightarrow$ : Easy.
$\Leftarrow$ : Si les vecteurs $u_i$ sont libres, on peut prendre un élément $x$ orthogonal à tous sauf 1.
Sinon, si $u_m$ est combinaison linéaire des précédents, avec un coefficient $< 0$.!! ☐

**Exercice 53** [ENS 2023 # 62] Montrer que, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $M$ s'écrit d'une unique façon $QR$ avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure a termes diagonaux dans $\mathbb{R}^{+*}$.

*Démonstration.* C'est GS. ☐

**Exercice 54** [ENS 2023 # 63] [Rennes sur dossier] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et inversible.

- Que peut-on dire de l'entier $n$ ?
- En considérant $M^2$, montrer que $M$ admet un plan stable puis qu'il existe une matrice orthogonale $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $O^T M O$ soit une matrice diagonale par blocs de la forme $\operatorname{diag}(R_{a_1}, \ldots, R_{a_k})$, avec $R_a = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.
- Qu'en est-il si $M$ n'est plus supposée inversible ?

*Démonstration.* 1. pair.

2. $M^2$ est symétrique donc diagonalisable. Alors si $X$ est valeur propre, $X, MX$ est stable.
3. On rajoute le noyau. ☐

**Exercice 55** [ENS 2023 # 64] Soit $n \geq 1$. Déterminer les matrices $A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^k = A^T$ pour tout entier $k \geq n$.

*Démonstration.* On a $A$ et $A^T$ cotrigonalisable, donc $\lambda \mapsto \lambda + \lambda^k$ est une bijection sur les valeurs propres. La seule possibilité est que $A$ soit nilpotente, donc symétrique. ☐

**Exercice 56** [ENS 2023 # 65] Soient $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $M$ une matrice de réflexion dans $\mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. On pose $A' = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Calculer $\chi_{A'}(1)$ en fonction de la première colonne de $M$ et de $\chi_A$.

*Démonstration.* $\chi_{A'}(1) = \det(I_{n+1} - M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix})$.!! ☐

**Exercice 57** [ENS 2023 # 66] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ayant $n$ valeurs propres distinctes. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $A$ et $A + vv^T$ n'ont pas de valeur propre commune. Sous reserve d'existence, on pose $F(x) = 1 + v^T(A - xI_n)^{-1} v$ pour $x$ réel.

- Montrer que les zeros de $F$ sont les valeurs propres de $A + vv^T$.
- On note $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les valeurs propres de $A$. Montrer que chaque intervalle $]\lambda_1, \lambda_2[, \ldots, ]\lambda_{n-1}, \lambda_n[, ]\lambda_n, +\infty[$ contient exactement une valeur propre de $A + vv^T$.

*Démonstration.* !! ☐

**Exercice 58** [ENS 2023 # 67] Soient $n \in \mathbb{N}$ impair, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $A + M$ soit non inversible. Montrer que $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

*Démonstration.* Par récurrence. On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A' \end{pmatrix}$, avec $h$ petit et $A'$ fixé. Le terme en $h^2$ est $h^2 \det(M' + A')$. ☐

**Exercice 59** [ENS 2023 # 68] Soient $A, B$ deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'ont pas -1 pour valeur propre et telles que $AB$ n'ait pas 1 pour valeur propre. Montrer que $(A - I_n)(BA - I_n)^{-1}(B - I_n)$ est antisymétrique.

*Démonstration.* Classique □

**Exercice 60** [ENS 2023 # 69] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres de $J$ et leur multiplicité.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
- Que peut-on dire de la matrice $BJB$ ?
- Lorsque $A$ est diagonale, calculer les valeurs propres de $JA$.
- Montrer plus généralement que toute valeur propre d'une matrice antisymétrique réelle est imaginaire pure.

**Exercice 61** [ENS 2023 # 70] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de $A$ non nécessairement distinctes. Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{k} a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_{n+1-i}$.

*Démonstration.* !! □

**Exercice 62** [ENS 2023 # 71]

1. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ Montrer que $AB$ est diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles.
2. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $f_{A,B} : X \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{Tr}(AX) + \operatorname{Tr}\left(BX^{-1}\right)$. Montrer que $f_{A,B}$ admet un minimum $\mu_{A,B}$ atteint en une unique matrice $M_{A,B}$. Expliciter $\mu_{A,B}$ et $M_{A,B}$.

*Démonstration.* □

**Exercice 63** [ENS 2023 # 72] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On définit $p(A)$ comme la dimension maximale d'un sous-espace $V$ sur lequel $\forall x \in V \setminus \{0\}$, $\langle Ax, x\rangle > 0$. On définit de meme $q(A)$ avec la condition $\langle Ax, x\rangle < 0$.

- Montrer que $p(A) + q(A) = \operatorname{rg} A$.
- Montrer que, si $A$ est inversible, alors $p$ et $q$ sont constantes sur un voisinage de $A$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on suppose que $f : t \mapsto \det(A + tB)$ n'a que des racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ admet au moins $|p(B) - q(B)|$ racines dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 64** [ENS 2023 # 73] On note $\lambda_1(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonne d'une matrice $S$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Si $1 \leq i, j \leq n$ et $i + j \geq n + 1$, que dire du signe de $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$

Soient $a \leq b$ deux réels, et $(O - i \in I$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. On note $X$ l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels qu'il existe une partie finie $J \subset I$ vérifiant $[a, x] \subset \bigcup_{j \in J} O_j$. Montrer que $X = [a, b]$.

**Exercice 65** [ENS 2023 # 74] Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonné de $M$.

1. On considère $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. Montrer que, si $i + j < n + 2$ alors $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) < 0$.
2. Généraliser à $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1 + \cdots + A_d \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. telle que $B = P^T A P$.

*Démonstration.* □

**Exercice 66** [ENS 2023 # 75] On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne. Soit $S \in \mathcal{S}_n$. On suppose que $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid S = M^T M - M M^T\}$ est non vide. On note $\gamma(S) = \inf_{M \in E} \|M\|^2$. Montrer que $\|S\| \leq \gamma(S) \leq 2\,\|S\|$.

**Exercice 67** [ENS 2023 # 76]

1. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^T A P$.
2. Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Proposer une définition naturelle de $f(A)$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Pour $A$ et $B$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on pose $d(A, B) = \left\|\ln\left(\sqrt{A^{-1}} B \sqrt{A^{-1}}\right)\right\|$. Justifier la définition, et montrer que $d$ est une distance sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $d\left(P^T A P, P^T B P\right) = d(A, B)$.

*Démonstration.* □

**Exercice 68** [ENS 2023 # 77] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X, Y) \mapsto \operatorname{Tr} X^T Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $L(M)\colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MX$. Montrer que $L$ est un morphisme d'algèbre injectif.
3. Soit $|||\cdot|||_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, et $|||\cdot|||$ la norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ subordonnée à $\|\cdot\|$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $|||L(M)||| \leq |||M|||_2$.
4. Montrer que $\left|\left|\left|M^T\right|\right|\right|_2 = |||M|||_2$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 69** [ENS 2023 # 78] On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associée à la norme $X \mapsto \sqrt{\bar{X}^T X}$.

1. Soient $A, B$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left\|e^{iA} - e^{iB}\right\| \leq \|A - B\|$.
2. Démontrer le même résultat sous l'hypothèse que $A$ et $B$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\bar{A}^T = A$ et $\bar{B}^T = B$.

*Démonstration.* □

## 2) Analyse

**Exercice 70** [ENS 2023 # 79] Soit $p > 1$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$.

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une norme.
2. Montrer l'inégalité de Hölder.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner la boule unité de la norme $p$ pour plusieurs valeurs de $p$.

**Exercice 71** [ENS 2023 # 80] Soient $a \leq b$ deux réels, et $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a,b] \subset \bigcup_i O_i$. On note $X$ l'ensemble des $x \in [a,b]$ tels qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $[a,x] \subset \bigcup_{j\in J} O_j$. Montrer que $X = [a,b]$.

**Exercice 72** [ENS 2023 # 81] Soient $K$ un compact convexe non vide d'un espace norme $E$, $f$ un endomorphism continu de $E$ tel que $f(K) \subset K$. Montrer que $f$ admet un point fixe dans $K$.

**Exercice 73** [ENS 2023 # 82] Peut-on écrire $]0{,}1[$ comme réunion dénombrable disjointe de segments d'intérieurs non vides ?

*Démonstration.* Non. Par l'absurde, on fait de la dichotomie, entre des segments, dont la distance tend vers 0, alors la limite n'appartient à aucun segment. □

**Exercice 74** [ENS 2023 # 83] Pour tout réel $x$ dans $[0{,}1[$, on note $0, x_1x_2x_3\ldots$ le développement décimal propre de $x$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i$. Soit $a$ un réel tel que $0 < a < 9$. On définit $P_n = \{x \in [0{,}1[; S_n(x) \leq na\}$ et $P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$. Montrer que $P$ est compact, non vide, d'intérieur vide et sans point isolé.

*Démonstration.* $P$ est borné et fermé, car $S_n$ est continue inférieurement. Clairement non vide et d'intérieur vide. Si $x \in P$, en retirant 1 a un chiffre de $x$ arbitrairement grand, on reste dans $P$. Possible sauf si $x$ est décimal, auquel cas on peut ajouter 1. □

**Exercice 75** [ENS 2023 # 84] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que la classe de similitude de $A$ est fermée si et seulement si $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

**Exercice 76** [ENS 2023 # 85]

- On note $D$ le disque unite du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(C - i \in \mathbb{N}$ de parties de $D$ telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $C_i$ soit un carré de $\mathbb{R}^2$ dont les cotes sont parallèles aux axes ;
  - ▷ les $C_i$ soient d'intérieurs deux a deux disjoints ;
  - ▷ $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Aire}(C_i) = \pi$.
- On note $C = [-1,1]^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(D - i \in \mathbb{N}$ de parties de $C$ telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $D_i$ soit un disque ferme de $\mathbb{R}^2$ ;
  - ▷ les $D_i$ soient d'intérieurs deux a deux disjoints ;
  - ▷ $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Aire}(D_i) = 4$.

**Exercice 77** [ENS 2023 2023 # 86] Soit $d \geq 1$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré $d$ de $\mathbb{R}[X]$.

1. On pose $A = \{(P,x) \in \mathcal{P}\times\mathbb{R}; P(x) = 0\}$ et $P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de $A$ dans $\mathbb{R}_d[X]\times\mathbb{R}$.
2. On pose $B = \{P \in \mathcal{P}; \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \neq 0 \text{ ou } P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de $B$ dans $\mathbb{R}_d[X]$.

*Démonstration.*

1. Par translation, on peut passer de $(P,x)$ à $(\tilde{P},0)$. Alors $P = X^n + Q + \alpha X$, avec $\alpha \neq 0$. On peut ramener $Q$ à 0, et $\alpha$ à $\pm 1$. Deux composantes connexes, selon le signe de $\alpha = P'(x)$.
2. $B$ est l'ensemble des polynômes unitaires à racines simples. Le nombre de racines simples est un invariant, et réciproquement, ces morceaux sont clairement connexes par arcs. □

**Exercice 78** [ENS 2023 # 87] Soient $(M_k)_{k\geq 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables les unes aux autres, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\|M_k\| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et une extractrice $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telles que $\frac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|} \to N$.

*Démonstration.* On peut extraire $\frac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|}$ convergent, vers $\Pi$.

Si $\Pi$ a une valeur propre complexe $X$, comme $\left\|\frac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|} - \Pi\right\| \leq \varepsilon$, on a une valeur propre complexe proche de $\lambda$, donc $M_{\varphi(k)}$ a une valeur propre qui tend vers $+\infty$. □

**Exercice 79** [ENS 2023 # 88] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module $< 1$. Montrer qu'il existe une norme \|\| sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour la norme d'opérateur associée, on ait $\|A\| < 1$.

*Démonstration.* Trigonaliser, puis conjuguer par une matrice diagonale pour n'avoir que des petits coefficients hors de la diagonale. □

**Exercice 80** [ENS 2023 # 89] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de lignes $L_1,\ldots,L_n$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\|L_i\|_2 = 1$ et la distance euclidienne canonique de $L_i$ au sous-espace engendré par les $L_j$, pour $j \neq i$, est supérieure ou égale à $\varepsilon$. Montrer que $A$ est inversible et que $\sup\left\{\left\|A^{-1}x\right\|_2 ; x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = 1\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

*Démonstration.* $A$ est inversible car aucune ligne n'est combinaison linéaire des autres.

Si $x = E_i$, on considère les colonnes de $A^{-1}$, notées $C_i$. On $\langle C_i, L_i\rangle = 1$ et $C_i$ orthogonal aux autres lignes, ce qui donne $\|C_i\|_2 \leq \frac{1}{\varepsilon}$, peut-être.

Ensuite, utiliser une convexité ? □

**Exercice 81** [ENS 2023 # 90] On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$. On fixe $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ non nulle a support compact, et on note $W(g)$ l'espace vectoriel engendre par les fonctions $x \mapsto g(x-n)$, $n$ décrivant $\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des réels $t$ lets que $\left\{x \mapsto f(x-t), f \in \overline{W(g)}\right\} = \overline{W(g)}$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.

**Exercice 82** [ENS 2023 # 91] Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites réelles de limite 1 et $(u_n)$ une suite réelle strictement positive telle que, pour tout $n, u_{n+2} = a_{n+1}u_{n+1} + b_{n+1}u_n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \frac{\ln(u_n)}{n}$. Montrer que les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent.

*Démonstration.* Soit $m$. On peut écrire $u_{a+n} = G_n u_a + G_{n+1}u_{a-1}$ et $u_{a+n+1} = G_{n+1}u_a + G_{n2}u_{a-1}$, où $G_n \xrightarrow[a\to+\infty]{} F_n$, ce qui devrait implique ce que l'on veut.
$w_n$ s'obtient à partir de $v_n$ par Cesàro. □

**Exercice 83** [ENS 2023 2023 # 92] 1. Si $n \geq 2$ est un entier, montrer que $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor = \sum_{j=2}^n \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor$.

2. Donner un équivalent lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor$, puis un développement asymptotique à deux termes.

*Démonstration.* 1. Le premier compte les puissances de $k$ inférieures à $n$, dont $k^1$.
Le second compte les puissances $j$-èmes inférieures à $n$.
2. En coupant la somme en $k = \sqrt{n}$, on a du $\sqrt{n}\ln n + (n - \sqrt{n})n$, d'où un équivalent à $n$.
En suite, on prend l'autre expression, on retire $n$. Le premier terme est $\sqrt{n}$. Les termes non nuls correspondent à $\sqrt[j]{n} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 2^j$, donc les autres termes sont au plus en $\sqrt[3]{n}\ln n$, d'où le DSA $n + \sqrt{n} + o_{+\infty}(\sqrt{n})$. □

**Exercice 84** [ENS 2023 # 93] Soient $\alpha > 0$ et $(a - n \in \mathbb{N}$ une suite strictement décroissante a valeurs dans $]0,1[$. Soit $(u - n \in \mathbb{N}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(u_n^\alpha + a_n)$. Montrer qu'il existe un unique $u_0 > 0$ tel que la suite $(u - n \in \mathbb{N}$ converge vers un réel strictement positif.

**Exercice 85** [ENS 2023 # 94] Soit $(u_n)$ une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sin(\ln n)$. On note $V$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)$.

- Montrer que, pour tous $x$ et $y \in \mathbb{R}$, $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$.
- Montrer que $u_{n+1} - u_n \to 0$.
- Montrer que $V$ est un intervalle inclus dans $[-1,1]$, puis que $V = [-1,1]$.

**Exercice 86** [ENS 2023 # 95] Si $A$ est une partie de $\mathbb{N}^*$, on dit que $A$ admet une densité si la suite $\left(\frac{|A \cap [\![1,n]\!]|}{n}\right)_{n\geq 1}$ admet une limite. Cette limite est alors notée $d(A)$.

- Si $m \in \mathbb{N}^*$, quelle est la densité de l'ensemble des multiples de $m$ dans $\mathbb{N}^*$ ?
- Soient $A$ et $B$ deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ admettant une densite. Montrer que $A \cup B$ admet une densité que l'on precisera.
- Donner un exemple de partie de $\mathbb{N}^*$ n'admettant pas de densite.

**Exercice 87** [ENS 2023 # 96] On considère une suite $a \in \{2,3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite $a$ entre la $n$-ième occurrence de 2 et la $(n+1)$-ième occurrence de 2 soit égal a $a_n$.
Étudier la convergence de la suite de terme général $\frac{1}{n}\left|\{k \in [\![1,n]\!],\ a_k = 3\}\right|$.

**Exercice 88** [ENS 2023 # 97] On considère une suite $a \in \{2,3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite $a$ entre la $n$-ième occurrence de 2 et la $(n+1)$-ième occurrence de 2 soit égal à $a_n$. Montrer qu'il existe un unique irrationnel $\alpha$ tel que les indices $n \geq 1$ tels que $a_n = 2$ soient exactement les entiers de la forme $\lfloor m\alpha \rfloor + 1$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

*Démonstration.* □

**Exercice 89** [ENS 2023 # 98] Une suite réelle $(x_n)$ est dite équirépartie modulo 1 si elle vérifie, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$, $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N e^2$
0.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(n\alpha)$ est équirépartie modulo 1.
2. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_{n+h} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie ; on veut montrer que $(x_n)$ est équirépartie modulo 1.
   a) Soit $(a_n)$ une suite de complexes de module $\leq 1$. Montrer, pour tous $N, H \in \mathbb{N}^*$ : $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N a_n\right| \leq \left|\frac{1}{H}\sum_{h=0}^{H-1}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N a_{n+h}\right| + \frac{2H}{N}$.
   b) Montrer que $\left|\frac{1}{H}\sum_{h=0}^{H-1}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N a_{n+h}\right| \leq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \left|\sum_{h=0}^{H-1}\frac{a_{n+h}}{H}\right|^2}$.
   c) Conclure.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et de coefficient dominant irrationnel. Montrer que $(P(n))_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1.
4. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle équirépartie modulo 1, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k) \xrightarrow[n\to+]{}$
$\int_0^1 f$.
5. On reprend les hypothèses de la question 3. Montrer que la distance de $P(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$ est nulle.

*Démonstration.* 1.

2.

3.

4.
5. ??

$\square$

**Exercice 90** [ENS 2023 # 99] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on note $A_n$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ ou, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de $(\operatorname{tr}(A_n^q))_{n\geq 2}$.

**Exercice 91** [ENS 2023 # 100] Montrer la convergence et calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \right\rfloor$.

*Démonstration.* Écrit quelque part… $\square$

**Exercice 92** [ENS 2023 # 101] On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$. On se donne une suite presque nulle $v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ainsi qu'une suite $(u_k)_k$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ (l'élément $u_k$ est donc noté $(u_{k,i})_{i\in\mathbb{N}}$). On suppose que, pour tout entier $p \geq 2$, la suite de terme général $w_k = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{k,n})^p$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} (v_n)^p$. Montrer que $\inf_{\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(u_{k,\sigma(n)} - v_n\right)^2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}$ 0.

*Démonstration.* Écrit quelque part…
On peut supposer que les $(v_n)$ sont décroissants, par réordonnement. $\square$

**Exercice 93** [ENS 2023 # 102] Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et telle que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de $f$ ?

*Démonstration.* Facile. $\square$

**Exercice 94** [ENS 2023 # 103] Soient $I$ un intervalle ouvert, $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable et $[a,b] \subset I$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que la tangente au graphe de $f$ en $c$ passe par le point $(a, f(a))$.

*Démonstration.* On peut supposer $f'(a) = f'(b) = 0$. À relier. $\square$

**Exercice 95** [ENS 2023 # 104] Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit dérivable en aucun point.

**Exercice 96** [ENS 2023 # 105] Déterminer les applications $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geq 2$, $f^n$ (puissance) soit polynomiale.

*Démonstration.* $f^2$ et $f^3$ polynomiales, donc $f$ est une fraction rationnelle, $f \in \mathbb{Q}(x)$ et $f^2 \in \mathbb{Q}[X]$ impliquent $f \in \mathbb{Q}[X]$. $\square$

**Exercice 97** [ENS 2023 # 106] Soit $p > 1$ un réel. Montrer qu'il existe une constante $k_p > 0$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x|^p + |y|^p = 2$, on ait $(x-y)^2 \leq k_p\,(4 - (x+y)^2)$.

**Exercice 98** [ENS 2023 # 107] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (sx - f(x))$ et $f^*(x) = \sup_{s\in\mathbb{R}} (sx - f^*(s))$.
Montrer que $f^*(x) = \sup_{a \text{ affine } \leq f} a(x)$.

**Exercice 99** [ENS 2023 # 108] Soient $I$ un ensemble fini et $(P - i \in I$ une famille de polynômes réels stable par derivation. On définit une fonction signe par $\operatorname{sign}(x) = \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $\operatorname{sign}(0) = 0$.

Pour $\varepsilon \in \{-1, 1, 0\}^I$, soient $A_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ \forall i \in I,\ \operatorname{sign}(P_i(t)) = \varepsilon(i)\}$ et
$B_\epsilon = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ \forall i \in I, \operatorname{sign}(P_i(t)) \in \{\varepsilon(i), 0\}\}$.

- Montrer que $A_\varepsilon$ est soit vide, soit réduit a un point, soit un intervalle ouvert.
- Si $A_\varepsilon$ est non vide, montrer que $B_\varepsilon$ est l'adhérence de $A_\varepsilon$. Si $A_\varepsilon$ est vide, montrer que $B_\varepsilon$ est soit vide suit un singleton.

**Exercice 100** [ENS 2023 # 109] Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

- Soient $x_0, \ldots, x_{n-1}$ des points de $I$.
  - ▷ sV2 Soit $P$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ aux points $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Montrer que pour tout $x \in I$, il existe $c \in I$ tel que
  $$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$
  - ▷ On note $V(x_0, \ldots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde associe a $(x_0, \ldots, x_n)$. Montrer qu'il existe $\tau \in I$ tel que
  $$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!} V(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

- On suppose que $n=2$, que $I$ est un segment et que $f$ est strictement convexe. On note $\Gamma_f = \{(x, f(x)); x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de $f$. Montrer qu'il existe une constante $C$, dépendant uniquement de $I$ et $f$, telle que le nombre de points de $\Gamma_f \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^2$ soit majore par $C\, N^{2/3}$ pour tout entier $N \geq 1$.

*Démonstration.* 1. a)

b) On part du déverminant de Vandermonde. Par des opérations sur les colonnes, on transforme la dernière en $P(x_i) - f(x_i)$, où $P$ est un polynôme de degré $\leq n-1$.
On choisit pour $P$ le polynôme d'interpolation de $f$ en $x_0, \ldots, x_{n-1}$.
Alors le déterminant vaut $\big(f(x_n) - P(x_n)\big) V(x_0, \ldots, x_{n-1})$.
Par ailleurs, on sait que $f(x_n) - P(x_n) = \frac{\lambda}{n!}(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})$ (choisir $\lambda$ pour que ce soit correct en $x_n$), et on obtient $\lambda = f^{(n)}(\tau)$.

2. En trois points $\frac{i}{N}, \frac{j}{N}, \frac{k}{N}$ qui vérifient la condition, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & i & f(x_i)N \\ 1 & j & f(x_j)N \\ 1 & k & f(x_k)N \end{vmatrix} = \frac{f^{(2)}(\tau)}{2} \begin{vmatrix} 1 & i & i^2 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & k & k^2 \end{vmatrix},$$

donc $(i-j)(j-k)(i-k) = \frac{Nk}{f^{(2)}(\tau)}$, si $f^{(2)}(\tau) \neq 0$, où $k$ est un entier.
En particulier, il existe une constante $C$ telle que l'un des trois facteur soit $\geq CN^{1/3}$. Cela implique la borne en $N^{2/3}$.
Si $f^{(2)}$ s'annule, on applique ce qui précède sur chaque deux intervalles sur lequel ce n'est pas le cas. □

**Exercice 101** [ENS 2023 # 110] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx$.

- Montrer que $(w_n)_{n\geq 0}$ est decroissante.
- Etablir une relation de recurrence entre $w_{n+2}$ et $w_n$.
- Sans utiliser la formule de Stirling, déterminer un équivalent simple de $w_n$.
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$.

**Exercice 102** Théorème de Rouché [ENS 2023 # 111] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$.

1. Montrer que le nombre de racines de $P$ de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité n'est autre que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}P'(e^{it})}{P(e^{it})}$ d
2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$ et tel que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$. Montrer que $P$ et $Q$ ont même nombre de racines de module strictement inférieurs à 1 comptées avec multiplicité.

*Démonstration.* 1. Écrire $\frac{P'}{P}$ en éléments simples, puis développement en série à l'intérieur de l'intégrale.
2. Prendre un arc continu entre les deux. □

**Exercice 103** [ENS 2023 # 112] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,dx$ et $B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n}(x)\,dx$. On admet que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2nA_n = (2n-1)A_{n-1}$.

- Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{2B_0}{A_0} - \frac{2B_n}{A_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ puis que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

**Exercice 104** [ENS 2023 # 113] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et presque périodique c'est-à-dire telle que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x+nT) - f(x)| \leq \epsilon$. Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et presque périodique.

1. Montrer que $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t f$ possède une limite quand $t \to +\infty$.

*Démonstration.* 1. Easy.
2. ! ! □

**Exercice 105** [ENS 2023 # 114] Soit $f$ une fonction continue par morceaux et croissante de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^1 f(x)e^{i\lambda x}dx \underset{\lambda\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

**Exercice 106** [ENS 2023 # 115]

- Es On admet l'existence d'une notion d'intégrale multiple sur un rectangle de $\mathbb{R}^n$, et que pour des fonctions continues $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\int_{[0,1]^n} f_1(x_1)\ldots f_n(x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \prod_{i=1}^{n} \int_0^1 f_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Soient $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$ des fonctions de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Soit $A$ la matrice de terme général $A_{i,j} = \int_0^1 f_i(x)g_j(x)\,\mathrm{d}x$.
On pose $B(x_1, \ldots, x_n) = \det\big(f_i(x_j)\big)$ et $C(x_1, \ldots, x_n) = \det\big(g_i(x_j)\big)$. Montrer que $\int_{[0,1]^n} B(x_1, \ldots, x_n)\, C(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$ $n!\det(A)$.
- s Montrer que si $\det A = 0$, alors la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.
- s En déduire que si $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\big(f_i(x_j)\big)$ soit inversible.

*Démonstration.* Le produit des déterminants est $\sum_{\sigma,\sigma'} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')\prod_{i=1}^n f_i(x_{\sigma(i)})\prod_{i=1}^n g_i(x_{\sigma'(i)}) = \sum_{\sigma,\sigma'} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')\prod_{i=1}^n f_{\sigma(i)}(x_i)g_{\sigma'(i)}(x_i)$
Quand on l'intègre, on obtient $\sum_{\sigma,\sigma'} \varepsilon(\sigma')\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n \int_0^1 f_{\sigma(i)}(x)g_{\sigma'(i)}(x_i)$, et l'intégrale ne dépend que de $\sigma^{-1}\circ\sigma$, ce qui permet d'obtenir le résultat. ☐

**Exercice 107** [ENS 2023 # 116] • La fonction $f : x \in [1,+\infty[ \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$ est-elle uniformement continue ?

- Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et telle que $f'$ est uniformément continue. Est-ce que $f'$ a une limite en $+\infty$ ?

**Exercice 108** [ENS 2023 # 117] Soient $d, N \in \mathbb{N}$ tels que $N > d$. Soient $(P - n \in \mathbb{N}$ une suite de polynômes a coefficients réels de degré au plus $d$ et $x_1, ..., x_N$ des réels distincts. On suppose que pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, la suite $(P_n(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que l'on peut extraire de $(P - n \in \mathbb{N}$ une suite $(Q - n \in \mathbb{N}$ qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers un polynôme de degré au plus $d$.

**Exercice 109** [ENS 2023 # 118] Montrer que la suite de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto (\sin x)^n\ \cos(x)$ converge uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**Exercice 110** [ENS 2023 # 119] On note $I$ (resp. $S$) l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telles que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in [0, 1], f(x) \le a\}$ est ferme (resp. de meme avec l'inégalité dans l'autre sens).

- Montrer que $S \cap I$ est l'ensemble $C$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.
- Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$. On pose $f_n : x \mapsto \inf(\{1\} \cup \{f(y) + n|x - y|, y \in [0, 1]\})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f_n$ est continue pour tout $n$, que la suite $(f_n)$ est croissante et que $f \in I$ si et seulement si la suite $(f_n)$ converge simplement vers $f$.

**Exercice 111** [ENS 2023 # 120] Soit $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(n) = \ln(p)$ si $n = p^k$ avec $p$ premier et $k \in \mathbb{N}^*$, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.
2. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^s}$.
3. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} \underset{s\to 1+}{=} \frac{1}{s-1} + O(1)$.
4. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \underset{s\to 1^+}{=} \ln\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1)$. Qu'en déduire ?

*Démonstration.* ☐

**Exercice 112** [ENS 2023 # 121] Soit $q \ge 2$ entier. On se donne un caractère non trivial $\chi$ sur le groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, c'est-à-dire un morphisme de groupes non constant $\chi : ((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \times) \longrightarrow (\mathbb{U}, \times)$. Pour $m \in \mathbb{Z}$, on pose alors $\widetilde{\chi}(m) = 0$ si $q$ n'est pas premier avec $m$, et $\widetilde{\chi}(m) = \chi(\overline{m})$ sinon (ou $\overline{m}$ désigne la classe de $m$ modulo $q$).

- Montrer que la série $\sum_{n\ge 1} \frac{\chi(m)}{m^s}$ converge si et seulement si $s > 0$.
- Montrer que la fonction $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

**Exercice 113** [ENS 2023 # 122] Soient $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle en $+\infty$ et $g\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(nx)$. Quelle est la limite de $g$ en $0^+$ ?

*Démonstration.* C'est $\sum f(2nx) - f((2n + 1)x) = \sum \int_{2nx}^{(2n+1)x} f'(t)\,\mathrm{d}t$. Cela tend vers $\frac{1}{2}f(0)$, en découpant sur un segment, et en utilisant l'uniforme continuité de $f'$. ☐

**Exercice 114** [ENS 2023 # 123] Pour tout polynôme trigonométrique $P : \theta \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(P)e^{ik\theta}$ (somme a support fini) et pour tout $d \in \mathbb{R}$, on pose $\|P\|_{h^d}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(P)|^2(1 + |k|)^{2d}$.
On admet que $\| \ \|_{h^d}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{T}$ des polynômes trigonométriques pour tout $d \in \mathbb{R}$. Soit $E$ l'espace des fonctions continues par morceaux et $2\pi$-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit le produit de convolution de deux fonctions $f, g \in E$ par : $f \star g : \varphi \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)g(\varphi - \theta)\mathrm{d}\theta$. Enfin, on pose, pour $f \in E$, $\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\mathrm{d}\theta$.

- Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ et $c = c(d) \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tous $f, g \in \mathcal{T}$,

$\|f \star g\|_2 \le c(d)\|f\|_{h^d}\|g\|_2$.

- Déterminer tous les réels $d$ vérifiant la condition de la question précédente.
- Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $2\pi$-periodique. On pose, pour $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta$ et, pour tout $d \in \mathbb{R}$, $\|f\|_{h^d}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2(1 + |k|)^{2d}$. Déterminer les $d \in \mathbb{R}$ tels que $\|f\|_{h^d} < +\infty$.
- Soient $f, g$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $2\pi$-périoddiques et $d \in \mathbb{R}$. Calculer $\|f \star g\|_{h^d}$.

**Exercice 115** [ENS 2023 # 124] Soient $p \ge 2$ et $q \ge 2$ deux entiers tels que $p \wedge q = 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on pose $f(z) = \frac{1-z^{pq}}{(1-z^p)(1-z^q)}$. Écrire $f(z)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ et trouver le plus grand $n \ge 0$ tel que $c_n = 0$.

**Exercice 116** [ENS 2023 # 125] Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, $f$ et $g$ deux fonctions développables en série entière sur $]-R,R[$ telles que $\forall x \in\ ]-R,R[$, $\int_0^x f(t)g(x - t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que l'une au moins des deux fonctions $f$ et $g$ est identiquement nulle sur $]-R, R[$.

*Démonstration.* ☐

**Exercice 117** [ENS 2023 # 126] Soient $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et $g : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.

- Déterminer les rayons de convergence de $f$ et $g$.
- Trouver les complexes $z \in \mathcal{S}(0, 1)$ tels que $f(z)$ converge.

- Montrer que $f$ admet un prolongement $\bar{f}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, développable en série entière en tout point de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- Montrer que $|g(r)| \to +\infty$ quand $r \to 1$ avec $r \in \mathbb{R}$. - Montrer que, si $z \in \mathcal{B}(0,1)$, alors $g(z^2) = g(z) - z$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{U}_{2^n}$. Montrer que $|g(r\alpha)| \to +\infty$ quand $r \to 1$ avec $r \in \mathbb{R}$.
- Soit $h : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n+1}}{2^n+1}$. Montrer que $h$ est continue sur $\overline{\mathcal{B}}(0,1)$.
- Montrer que, pour tout $z_0 \in \mathcal{S}(0,1)$, $\varepsilon > 0$ et $\tilde{h}$, prolongement de $h$ sur $\overline{\mathcal{B}}(0,1) \cup \mathcal{B}(z_0, \varepsilon)$, la fonction $\tilde{h}$ n'est pas développable en série entière en $z_0$.

**Exercice 118** [ENS 2023 # 127] Soit $\alpha = (\alpha - i \geq 1$ une suite de $\mathbb{Z}$ nulle a partir d'un certain rang. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \prod_{i \in \mathbb{N}^*} ((in)!)^{\alpha_i}$.

- Déterminer, selon la valeur de $\alpha$, le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum_{n \geq 1} u_n z^n$.

Dans la suite, on note $f$ la somme de cette série entière.

- Expliciter $f$ si $\alpha = (-\delta_{i,1})_{i \geq 1}$.
- Pour une somme $g$ de série entière sur un intervalle $]-a, a[$ non trivial, on pose $\Delta(g) : z \mapsto z g'(z)$. Expliciter $P(\Delta)(g)$ lorsque $g : z \mapsto z^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
- Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite complexe, et $P \in \mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{P(n+1)}$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} v_n z^n$ a un rayon de convergence non nul et donner une methode simple pour trouver une équation différentielle linéaire non triviale a coefficients polynomiaux dont sa somme est solution.
- Résoudre le meme probleme qu'en (d) lorsqu'il existe $P$ et $Q$ dans $\mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ telles que $v_{n+1} = \frac{Q(n+1)}{P(n+1)} v_n$ pour tout $n \geq 1$, et en supposant cette fois-ci que $\deg(Q) \leq \deg(P)$.
- Justifier que le cadre de la question - s'applique bien a la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ lorsque $R > 0$.

**Exercice 119** [ENS 2023 # 128] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n!\,(30n)!}{(15n)!\,(10n)!\,(6n)!}$.

- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est un entier.
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
- Trouver une équation différentielle vérifiée par la somme de la série entière précédente.

**Exercice 120** [ENS 2023 # 129] Existe-t-il une partie $A$ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$ ?

*Démonstration.* Cf un précédent □

**Exercice 121** [ENS 2023 # 130]

- Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$. Montrer que, pour tout $0 < r < R$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.
  - ▷ Soit $f$ une fonction développable en série entière de rayon de convergence égal a 1. On suppose que $f$ est prolongeable par continuité sur le disque ferme $D_f(0,1)$. Expliquer pourquoi la formule de Cauchy ci-dessus reste vraie pour $r = 1$. - Soit $f : x \in ]-1, 1[ \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}} e^{-\frac{1-x}{1+x}}$. Montrer que $f$ est développable en série entière au voisinage de 0.
  - ▷ On admet que le rayon de convergence du développement de $f$ en 0 vaut 1. Montrer que les coefficients du développement en série entière en 0 de $f$ sont bornes par $M > 0$. Experimer $M$ en fonction de $f$.

**Exercice 122** [ENS 2023 # 131] Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ a l'aide de la transformation de Laplace.

**Exercice 123** [ENS 2023 # 132] Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ tel que $\forall x \in [0,1], 1 + ax + bx^2 \geq 0$.

1. Si $a \in \mathbb{R}^+$, montrer que $n \int_0^1 \left(1 + ax + bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Si $a \in \mathbb{R}^{-*}$, montrer que $n \int_0^1 \left(1 + ax + bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{a}$.

*Démonstration.* □

**Exercice 124** [ENS 2023 # 133] Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{e^{2x}\cos^2(t) + e^{-2x}\sin^2(t)}}$. Montrer qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq (ax+b)e^{-x}$.

*Démonstration.* □

**Exercice 125** [ENS 2023 # 134] Pour $x$ réel, on pose $J(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) \, dt$.

- Calculer $J(0)$.
- Montrer que $J$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- En estimant $\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \cos(x \sin t) \, dt$ pour un $\varepsilon$ a choisir convenablement en fonction de $x$, etablir que $J(x) = O(x^{-1/2})$ quand $x \to +\infty$.

**Exercice 126** [ENS 2023 # 135] Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f \star g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x f(t)\, g(x-t) \, dt$. Montrer que $f \star g$ est dérivable et donner une expression de sa derivée.

**Exercice 127** [ENS 2023 # 136] Soit $f : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geq 1$ et $s < t$ dans $]0,1[$, on pose
$a_n(f,s,t) = \frac{2}{t-s} \int_s^t f(u) \cos\left(\frac{2n\pi}{t-s}(u-s)\right) du$.

- On suppose $f$ strictement convexe. Montrer que $a_1(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$.
- On suppose $f$ strictement convexe. Montrer que $a_n(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Réciproquement, on suppose $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a_1(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$. Montrer que $f$ est strictement convexe.

**Exercice 128** [ENS 2023 # 137] Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{n} y^{(k)} = 0$.
À quelle condition sur $n$ tout élément de $\mathcal{S}$ possède-t-il une limite en $+\infty$ ?

*Démonstration.* Si et seulement si toutes les valeurs propres ont une partie réelle $< 0$ (puisque 0 n'est pas racine). □

**Exercice 129** [ENS 2023 # 138] Soit $I$ un (vrai) intervalle de $\mathbb{R}$. Si $r \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$, on pose $W_r(f_1, \ldots, f_r) = \det\left(\left(f_j^{(i-1)}\right)_{1 \le i,j \le r}\right)$. Soient $r \in \mathbb{N}^*, f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$. Montrer que $W_r(gf_1, \ldots, gf_r) = g^r W_r(f_1, \ldots, f_r)$.
2. On suppose que, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $W_k(f_1, \ldots, f_k)$ ne s'annule pas. Montrer que, pour tout $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ non nul, la fonction $a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$ s'annule au plus $(r-1)$ fois sur $I$.
3. On suppose que $W_r(f_1, \ldots, f_r)$ est identiquement nul sur $I$ et que $W_{r-1}(f_1, \ldots, f_{r-1})$ ne s'annule pas. Montrer que $(f_1, \ldots, f_r)$ est liée.

*Démonstration.* □

**Exercice 130** [ENS 2023 # 139] On considère l'équation différentielle $(D_\lambda)$: $y'' + (\lambda - r)y = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}, r \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, ou $I$ un intervalle contenant $[0,1]$. On considère $E_\lambda$ l'espaces des solutions $y$ de $(D_\lambda)$ telles que $y(0) = 0, y(1) = 0$.

1. Quelles sont les dimensions possibles de $E_\lambda$ ?
2. On note $y_\lambda$ la solution du probleme de Cauchy $(D_\lambda)$, $y_\lambda(0) = 0$, $y'_\lambda(0) = 1$. Caractériser le cas où $\dim(E_\lambda) = 1$.
3. Montrer que, à $r$ fixé, les $E_\lambda$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$.
4. On note $N_\lambda$ le nombre de zeros de $y_\lambda$ sur $[0,1]$. Pourquoi est-il fini ?
5. Calculer $N_\lambda$ dans le cas $r = 0$, $\lambda > 0$.
6. Dans le cas général, étudier le comportement de $N_\lambda$.

*Démonstration.*
1. $0, 1$ : c'est l'intersection de deux formes linéaires.
2.
3.
4.
5.
6. □

**Exercice 131** [ENS 2023 # 140] Soient $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $a, b$ deux fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : x'' + a(t)\, x' + b(t)\, x = 0$.

- Soit $x$ une solution non nulle de $(E)$. Montrer que les zeros de $x$ sont isoles.
- On suppose $a$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe $z$ de classe $\mathcal{C}^2$ de $I$ dans $\mathbb{R}$, et $q : I \to \mathbb{R}$ continue telles que $x \mapsto [t \mapsto x(t)\, e^{z(t)}]$ définisse une bijection de l'ensemble des solutions de $(E)$ sur celui des solutions de $y'' + q(t)\, y = 0$.
- Soient $q_1, q_2$ deux fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \le q_2$. On considère l'équation différentielle $(E_i) : y'' + q_i(t)\, y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Soient $y_1, y_2$ des solutions respectives de $(E_1)$ et $(E_2)$ sur $I$. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs de $y_1$. Montrer que $y_2$ s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
- Soient $q : I \to \mathbb{R}$ continue, et $m, M$ deux réels strictement positifs tels que $m \le q \le M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs d'une solution non nulle de $y'' + q(t)y = 0$. Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \le \beta - \alpha \le \frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

**Exercice 132** [ENS 2023 # 141] Soient $A$ une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M$ l'unique application dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(0) = I_n$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ M'(t) = A(t)M(t)$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \det(M(t)) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{Tr} A\right)$.

**Exercice 133** [ENS 2023 # 142] Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, $\pi$-périoddique et telle que $\int_0^\pi p(t)dt \ge 0$ et $\int_0^\pi |p(t)|dt \le \frac{\pi}{4}$. Montrer que l'équation $u'' + pu = 0$ n'admet pas de solution $u$ non nulle sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, u(t + \pi) = \lambda\, u(t)$.

**Exercice 134** [ENS 2023 # 143] Soit $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A_0 + A_0^T) \subset \mathbb{R}^-$.
On admet l'existence d'une unique fonction $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(0) = A_0$ et $\forall t \ge 0,\ A'(t) = (A(t))^2 - \left(A(t)^T\right)^2$. Montrer que la fonction $A$ a une limite en $+\infty$ et expliciter cette limite.

**Exercice 135** [ENS 2023 # 144] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Décrire le comportement asymptotique en $+\infty$ des solutions de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$.

**Exercice 136** [ENS 2023 # 145] On considère l'équation différentielle $(1)$: $X'(t) = P(t)X(t)$ où $P$ est une application continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Résoudre $(1)$ si $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- On revient au cas général. Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ une période de $P$. On note $X_1, \ldots, X_n$ une base de l'espace des solutions de $(1)$ et, si $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))$. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t + T) = M(t)C$.
- Avec les notations de la question précédente, montrer qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t)e^{-tA}$ soit $T$-périoddique.

*Démonstration.* •

- Par inversibilité, il existe $C$ tel que $M(T) = M(0)C$.
  Puis on considère $Y(t) = M(t)C$, elle vérifie la même équation différentielle.
- Si et seulement si $M(t)Ce^{-(t+T)A} = M(t)e^{-tA}$, c'est-à-dire $Ce^{-TA} = I_n$
  Le caractère inversible de $A$ implique que $C$ ne peut pas avoir 1 comme valeur propre, ce qui est faux pour $P = 0$.
  Sans cette condition, c'est la surjectivité de l'exponentielle… ☐

**Exercice 137** [ENS 2023 # 146] • Soit $f\colon (x,y) \mapsto \left(\ln\left(x^2+y^2\right), \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$. Donner le domaine de définition $\Omega$ de $f$. Étudier la continuité et la différentiabilité de $f$.

- On identifie naturellement $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Montrer que, si $(x,y) \in \Omega$, $df_{(x,y)}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

*Démonstration.* • $\Omega = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$. La continuité et la différentiabilité ne posent pas de problème.

- ☐

**Exercice 138** [ENS 2023 # 147, 148] 1. Calculer $\sup\limits_{a,b,c>1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^b + \left(1-\frac{1}{2b}\right)^c + \left(1-\frac{1}{3c}\right)^a$.

2. Trouver $\sup\limits_{a,b,c\geq 1} \left(1-\frac{1}{a}\right)^b \left(1-\frac{1}{2b}\right)^c \left(1-\frac{1}{3c}\right)^a$.

*Démonstration.* • C'est $\leq e^{-\frac{b}{a}} + e^{\frac{c}{2b}} + e^{\frac{a}{3c}}$, et cela s'en approche pour $a, b, c$ très grand. Puis étudier cette quantité, en dérivant.

- C'est $\leq e^{-\frac{b}{a}-\frac{c}{2b}-\frac{a}{3c}}$, et cela s'en approche pour $a, b, c$ très grand. Puis étudier la quantité dans l'exponentielle. ☐

**Exercice 139** [ENS 2023 # 149] Soient $q \in \mathbb{R}^+$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y=1\}$, Déterminer $\min_{(x,y)\in D}(x^q + y^q)$.

**Exercice 140** [ENS 2023 # 150] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.
Déterminer les extrema de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

**Exercice 141** [ENS 2023 # 151] Soient $f$ une application différentiable convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq 0$.
2. On suppose que l'application $\nabla f$ est $L$-lipschitzienne.

Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq \frac{1}{L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$.

**Exercice 142** [ENS 2023 # 152] Soit $p > 1$. Montrer qu'il existe $K_p \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x|^p + |y|^p = 2$, on a $(x-y)^2 \leq K_p(4 - (x+y)^2)$.

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que $\frac{(x-y)^2}{K_p(4-(x+y)^2)^2}$ est majorée.
On sait que $\frac{|x|+|y|}{2} \leq \left(\frac{|x|^p+|y|^p}{2}\right)^{1/p} = 2$, donc le seul problème de définition est en $(x,y) = (1,1)$, où il faut montrer que la fonction admet un prolongement par continuité.
Le dénominateur est $(x-y)^2 - 2(x-1)^2 - 2(y-1)^2 - 4(x-1) - 4(y-1)$. On pourrait poser $x' = x - 1$. ☐

**Exercice 143** [ENS 2023 # 153] Soient $f$ une application de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ telle que $df_x$ soit injective. Montrer qu'il existe un voisinage de $x$ dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel $f$ est injective.

*Démonstration.* Par l'absurde, on extrait deux suite $(x_n), (y_n)$ qui tendent vers $x$. Alors $f(x_n) = df_0(x_n) + o(x_n)$, idem pour $y_n$, et en posant $z_n = x_n - y_n$, on a $df(z_n) = o(z_n)$. Ce qui n'est pas possible car $\|df(\ldots)\|$ est une norme. ☐

**Exercice 144** [ENS 2023 # 154] On identifie $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$. Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $C^2$ et telle que $\Delta f = 0$. Montrer que $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt$.

**Exercice 145** [ENS 2023 # 155] On munit $\mathbb{R}^n$ de la nome euclidienne canonique et on note $B$ unité fermée de cet espace. Soient $f$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $C^1$ et telle que, pour tout $(u,v) \in B^2$, $\|-f(0) + v - df_u(v)\| \leq \frac{1}{2}$. Montrer que $f$ s'annule exactement une fois sur $B$.

*Démonstration.* La fonction $g = \mathrm{Id} - f$ vérifie $\|dg_u(v) - g(0)\| \leq \frac{1}{2}$. En intégrant, on obtient $\|g(x)\| \leq \frac{1}{2}$ sur $B$.
Cela justifie que $\|f\|$ admet un minimum dans l'intérieur de la boule. L'inégalité de l'énoncé donne $df_u$ inversible, donc le minimum ne peut être atteint qu'en un point où $f$ s'annule.
Si $f$ s'annule en deux points $x_1$ et $x_2$, la fonction $g$ a deux points fixes, mais sa différentielle est de norme $\leq \frac{1}{2} + \|f(0)\|$, avec par ailleurs $\|f(0)\| \leq \frac{1}{2}$. Donc il faudrait que $\|f(0)\| = \frac{1}{2}$, et que le long du chemin entre $x_1$ et $x_2$, on ait $dg_{\ldots}(x_2 - x_1)$ parallèle (de même sens) à $f(0)$, donc $x_2 - x_1$ est également parallèle à $f(0)$.
Mieux : On a $\|f(0)\| = \frac{1}{2}$ et $\|dg_u(v) - f(0)\| \leq \frac{1}{2}$, donc $\|dg_u(v)\|$ doit être nul : $f(v) = v + f(0)$. ☐

## 3) Géométrie

**Exercice 146** [ENS 2023 # 156] • Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que
$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(2\ \cos(\theta)) = 2\ \cos(n\theta)$.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, quel est le terme de plus haut degré de $T_n$ ? En déduire les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.
- Déterminer les triangles du plan euclidien dont les cotes ont des longueurs rationnelles et les angles sont des multiples rationnels de $\pi$.

**Exercice 147** [ENS 2023 # 157] Soit $G$ un groupe d'isométries affines de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout point $x$, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$. Montrer que $G$ contient une translation autre que l'identité de $\mathbb{R}^2$.

*Démonstration.* Vrai pour $G = O_2$, avec $x = \vec{0}$.

Les éléments de $G$ sont de la forme $z \mapsto az + b$, ou $z \mapsto a\overline{z} + b$, avec $a \in \mathbb{U}$.

On considère $G^+$ (isométries affines qui préservent l'orientation), dont les éléments ont un unique point fixe. Si il existe deux éléments qui ne commutent pas dans $G^+$, on s'en sort : conjuguer, puis multiplier par l'inverse. Par ailleurs, deux éléments commutent si et seulement si ils ont le même point fixe.

Si tous les éléments de $G^+$ ont le même point fixe, tout élément de $G^-$ (qui a une droite de points fixes) doit préserver ce point, sinon on créerai d'autres éléments de $G^+$ avec un point fixe différent. □

**Exercice 148** [ENS 2023 # 158] Soit $S$ le groupe (pour la composition) des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Soit $G$ un sous-groupe de $S$ vérifiant les conditions suivantes :

- si $g \in G, g(0)$ est nul ou de module supérieur ou égal à 1 ;
- l'ensemble des $b \in \mathbb{C}$ tels que $z \mapsto z + b$ appartienne à $G$ contient deux éléments $\mathbb{R}$ linéairement indépendants.

Montrer que l'ensemble $\{a \in \mathbb{U} \mid \exists b \in \mathbb{C},\ z \mapsto az + b \in G\}$ est fini.

*Démonstration.* Sinon, il existe une suite $(a_n)$ qui s'accumule. On peut supposer qu'elle s'accumule sur 1, puis on peut borner les $(b_n)$, puis extraire une suite convergence, donc elle est constante à partir d'un certain rang. Donc on a une infinité de $z \mapsto a_n z$, ce qui est impossible. □

**Exercice 149** [ENS 2023 # 159] Soit $L$ la courbe du plan complexe d'équation $|z|^2 = \cos(2\arg(z))$.

- Trouver une équation cartésienne réelle définissant $L$.
- En déduire une paramétrisation de $L \cap (\mathbb{R}^+)^2$ sous la forme $\{(x(r), y(r)),\ r \in [0, 1]\}$.
- Montrer que la longueur de la courbe $L$ entre le point $(0, 0)$ et le point $(x(r), y(r))$ s'écrit : $A(r) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
- Montrer que $A$ définit une bijection de $[-1, 1]$ dans un intervalle de la forme $[-w, w]$ ou $w > 0$.
- On définit $B = A^{-1}$. Montrer que $B$ vérifie une équation différentielle du second ordre.

**Exercice 150** [ENS 2023 # 160] Soit $(e_1, e_2)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $L = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ et on note $\operatorname{coVol}(L) = |\det(e_1, e_2)|$.

- sV2 Pour $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, représenter $L$ dans $\mathbb{R}^2$. Que représente géométriquement le covolume $\operatorname{coVol}(L)$ ?
- Soit $A$ un disque fermé de $\mathbb{R}^2$, d'aire strictement supérieure a $\operatorname{coVol}(L)$. Montrer qu'il existe deux éléments distincts $x$ et $y$ de $A$ tels que $x - y \in L$.
  Indication : Les parallélogramme du réseau $L$ découpent le disque $A$ en un nombre fini de morceaux $A_i$. Considérer les translatés $A_i'$ des $A_i$, déplacés dans le parallélogramme à l'origine de $\mathbb{R}^2$, appliquer l'hypothèse.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe dans $L \setminus \{0\}$ un élément $\ell$ tel que $\|\ell\| \leq \frac{2+\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\operatorname{coVol}(L)}$.
- Soit $p$ un nombre premier congru a 1 modulo 4.
  - ▷ En considérant $m = (p-1)!$, montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}$ tel que $p$ divise $1 + \omega^2$.
  - ▷ En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$.

*Démonstration.* •

- 
- 
- ▷
  ▷ □

**Exercice 151** [ENS 2023 # 161] • On note $D$ le disque unite du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties de $D$ telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $C_i$ soit un carré de $\mathbb{R}^2$ dont les cotes sont parallèles aux axes ;
  - ▷ les $C_i$ soient d'intérieurs disjoints ;
  - ▷ $\sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Aire}(C_i) = \pi$.
- On note $C = [-1, 1]^2$. Démontrer qu'il existe une suite $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties de $C$ telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $D_i$ soit un disque ferme de $\mathbb{R}^2$ ;
  - ▷ les $D_i$ soient d'intérieurs disjoints ;
  - ▷ $\sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Aire}(D_i) = 4$.

## 4) Probabilités

**Exercice 152** [ENS 2023 # 162] On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $A$ de $\mathbb{N}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|A\cap[\![1,n]\!]|}{n}$ existe. Est-ce que $\mathcal{A}$ est une tribu ?

*Démonstration.* Non vide, stable par complémentaire, et stable par union dénombrable. On n'est pas stable par union dénombrable : toute partie est réunion dénombrable de singleton. ☐

**Exercice 153** [ENS 2023 # 163] On pose, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, $d(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |\sigma(k) - k|$ et on note, pour $p \in \mathbb{N}$, $q_{n,p} = |\{\sigma \in S_n,\ d(\sigma) = p\}|$. Montrer que, si $p \geq 2n$, alors $q_{n,p}$ est pair.

*Démonstration.* On procède par récurrence. Si $\sigma \neq \sigma^{-1}$, ils vont par paires. De même, par hypothèse de récurrence, si $\sigma$ a au moins un point fixe, le cardinal est pair.
Reste les éléments vérifiant $\sigma = \sigma^{-1}$, sans point fixes, qui sont produits de transpositions. Par ailleurs, la condition $p \geq 2n$, implique que les transpositions ont des croisements.
On peut alors transformer $(i_1 i_2)(j_1 j_2)$ en $(i_1 j_2)(j_1 i_2)$, qui préserve la quantité donnée (faire le dessin), et faire la transformation réciproque. ☐

**Exercice 154** [ENS 2023 # 164] Un derangement est une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sans point fixe. On note $D_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ formé des derangements. **SUP**

- Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $D_n$. Calculer la probabilité que $X$ soit une permutation paire.
  Indications.
  - ▷ On donne la formule d'inversion de Pascal : si $(a_n)$ et $(b_n)$ sont deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.
  - ▷ On pourra calculer la difference du nombre d'éléments pairs et impairs de $D_n$.
- Soit $Y$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Calculer la probabilité de $(Y \in D_n)$ sachant que $Y$ est paire.

*Démonstration.*
- La différence du nombre d'éléments pairs et impairs est le déterminant de la matrice avec des 1 et des 0 sur la diagonale.
- ☐

**Exercice 155** [ENS 2023 # 165] Soient $m \geq 1$ et $r \geq 1$ deux entiers. On munit l'ensemble des morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de la loi uniforme. Donner une expression simple de la probabilité de l'événement «le morphisme $\varphi$ est surjectif».

*Démonstration.* Le faire pour $m = p$, puis lemme Chinois. ☐

**Exercice 156** [ENS 2023 # 166] Deux joueurs $A$ et $B$ lancent une pièce truquée donnant pile avec une probabilité égale à $5/9$. Les règles de gain sont les suivantes : pile rapporte 5 euros et face 4 euros. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chacun des joueurs effectue $9n$ lancers indépendants ; on note $A_n$ (resp. $B_n$) la variable aléatoire donnant le gain du joueur $A$ (resp. $B$).

- Trouver un équivalent, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, de $\mathbf{P}\left(A_n = B_n\right)$.
- Montrer que $\mathbf{P}\left(A_n \geq B_n\right) \geq \frac{1}{2}$.
- Vers quoi tend $\mathbf{P}\left(A_n < B_n\right)$ ?

*Démonstration.*
- On a $P(A_n = B_n) = P(A_n = 9n - B_n) = P(A_n + B_n = 9n)$, et la somme est une loi binomiale.
- C'est clair.
- Découle des questions précédentes. ☐

**Exercice 157** [ENS 2023 # 167, 177] On joue a pile ou face avec une pièce pipée qui donne pile avec probabilité $p < \frac{1}{2}$. On lance la pièce $2n$ fois et on compte le nombre de «Piles». Déterminer l'entier $n$ qui maximise la probabilité d'avoir compté au moins $n+1$ «Piles».

*Démonstration.* On a $P(S_{2n} = n + k) \leq P(S_{2n} = n - k)$, puis on montre que $P(S_{2n} \geq n+1) + \frac{1}{2} P(S_{2n} = n)$ est décroissante. Mais on connaît $P(S_{2n} = n)$, et il suffit de voir quand elle devient plus petite que les premières valeurs de $P(S_{2n} \geq n+1)$. ☐

**Exercice 158** [ENS 2023 # 168] Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{E}(X) = 1$, $\mathbf{E}\left(X^2\right) = 2$ et $\mathbf{E}\left(X^3\right) = 5$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{P}(X = 0)$ ?

*Démonstration.* On a $E(X)E(X^3) \geq E(X^2)^2$. En notant $e = P(X = 1)$, on a $E(X 1_{X>1}) E(X^3 1_{X>1}) \geq E(X^2 1_{X>1})^2$, donc $(1-e)(5-e)(2-e)^2$, qui donne $e \leq \frac{1}{2}$.
Comme $E(X) = 1$, on doit avoir $P(X = 0) \geq \frac{1}{4}$, mais le cas d'égalité ne donne pas les bonnes valeurs : mais $E(X) = 1$, $E(X^2) = \frac{3}{2}$ et $E(X^3) = \frac{5}{2}$.
Si on suppose que $e = \frac{1}{2}$, on peut prendre $Y$ qui vaut 3 avec probabilité $\frac{1}{6}$ et 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$.
!! Manque : on ne peut pas faire mieux… ☐

**Exercice 159** [ENS 2023 # 169] Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier impair $\geq 3$, $(X_m)_{m \geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que $X_0 = 0$, et pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_{m+1} = k+1 \mid X_m = k) = \mathbf{P}(X_{m+1} = k-1 \mid X_m = k) = \frac{1}{2}$. Montrer que $(X_m)_{m \geq 0}$ converge en loi vers la loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

*Démonstration.* On regarde la loi de $X_m + m$, dont la série génératrice est $G_m = \left(\frac{1+X^2}{2}\right)^m$. Puis on regarde $P(S_m = 0[n])$, c'est $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} G_m(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1+e^{\frac{4ik\pi}{n}}}{2}\right)^m = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^{2m} \frac{2k\pi}{n}$
Pour les autres valeurs que 0 modulo $n$, il faut prendre $X^k G_m(X)$, cela marche pareil. ☐

**Exercice 160** [ENS 2023 # 170] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de $\sigma$ c'est-a-dire le nombre de couples $(i, j)$ avec $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

- Montrer que $P_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X^{I(\sigma)} = \prod_{k=1}^{n-1}(1 + X + \cdots + X^k)$.
- On pose $f(n) = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ (n+1) \text{ divise } I(\sigma)\}|$. Exprimer $f(n)$ a l'aide de $P_n$.
- Montrer qu'il existe une infinite de nombres premiers $p$ tels que $f(p-1) < \frac{(p-1)!}{p}$ et de meme une infinite de nombres premiers $p$ tels que $f(p-1) > \frac{(p-1)!}{p}$.

**Exercice 161** [ENS 2023 # 171] Soient $p$ un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, $P$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des polynômes unitaires de degré $n$ de $\mathbb{F}_p[X]$, $N$ le nombre de racines de $P$ dans $\mathbb{F}_p$ (sans tenir compte des multiplicités). Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.

**Exercice 162** [ENS 2023 # 172] Dans tout l'exercice, les variables aléatoires considérées sont supposées réelles, discrètes et à loi de support fini. Pour deux telles variables $X$ et $Y$, on note $X \leq_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leq \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Soient $X$ une variable aléatoire vérifiant les conditions de l'exercice et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(f(X))$.
2. Donner un exemple de couple $(X, Y)$ pour lequel $X \leq_c Y$ mais $X \neq Y$.
3. Montrer que si $X \leq_c Y$ alors $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X) \leq \mathbf{V}(Y)$.
4. Montrer que $X \leq_c Y$ si et seulement si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et
$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geq x)\,\mathrm{d}x.$$

*Démonstration.* □

**Exercice 163** [ENS 2023 # 173] On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. On choisit de façon équiprobable $u_1 \in [\![1, N]\!]$, puis $u_2 \in [\![1, u_1 - 1]\!]$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $u_\ell = 1$ avec nécessairement $\ell \leq N$. On note $E_N = \{u_j, 1 \leq j \leq \ell\}$.

1. Calculer $\mathbf{P}\left(k \in E_N\right)$ pour $1 \leq k \leq N$.
2. Calculer $\mathbf{P}\left(2 \in E_N \mid 3 \notin E_N\right)$.
3. Calculer $\mathbf{E}\left(|E_N|\right)$ et $\mathbf{V}\left(|E_N|\right)$.

*Démonstration.*
1. $P(k \in E_{k+1}) = \frac{1}{k}$, puis $P(k \in E_n) = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\big(P(k \in E_{N-1}) + \cdots + P(k \in E_{k+1})\big)$. On trouve $P(k \in E_N) = \frac{1}{k}$.
2. On a $P(2 \in E_N \mid 3 \in E_N) = \frac{1}{2}$.
3. Semble facile. □

**Exercice 164** [ENS 2023 # 174] Dans tout l'énonce, on fixe un entier $p \geq 1$.

- Développper $(x_1 + \cdots + x_N)^p$ pour toute liste $(x_1, \ldots, x_N)$ de nombres réels.
- Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$. Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leq (2p)^p(\mathbf{E}(X^2))^p$.
- Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leq p^p(\mathbf{E}(X^2))^p$.
- Soit $(a - k \geq 1$ une suite réelle telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = 1$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $Y_x = \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx)\, X_i$.

Montrer que $\omega \mapsto \int_0^{2\pi} Y_x(\omega)^{2p}\, dx$ prend au moins une valeur inférieure ou égal a $2\pi p^p$.

**Exercice 165** [ENS 2023 # 175] suivant la loi uniforme sur $\{1, -1\}$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher, et $a_1, \ldots, a_n$ des réels. On pose $Y = \sum_{k=1}^n a_k X_k$.

- Montrer que $\mathbf{E}(|Y|)^2 \leq \mathbf{E}(Y^2)$.
- Montrer que $\mathbf{E}(Y^2) = \sum_{k=1}^n a_k^2$.
- Montrer que si $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$ alors $\mathbf{E}(Y^2) \leq e\,\mathbf{E}(|Y|)^2$.
- Montrer que $\mathbf{E}(Y^2) \leq e\,\mathbf{E}(|Y|)^2$ en toute généralite.

**Exercice 166** [ENS 2023 # 176] Une variable aléatoire discrète réelle $X$ est dite decomposable s'il existe deux variables aléatoires discrètes réelles non presque sûrement constantes et indépendantes $X_1$ et $X_2$ telles que $X \sim X_1 + X_2$. - Une variable aléatoire de Bernoulli est-elle decomposable ? Une variable aléatoire binomiale est-elle decomposable ?

- Montrer que le polynôme $T^4 + 2T + 1$ ne peut se factoriser comme produit de deux polynômes de degré 2 a coefficients dans $\mathbb{R}^+$. En déduire une variable aléatoire réelle discrète decomposable $X$ telle que $X^2$ ne soit pas decomposable.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme que $[\![0, n-1]\!]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n$ pour que $X$ soit decomposable.

**Exercice 167** [ENS 2023 # 178] On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $X = [\![1, n]\!]$. Soient $A$ et $B$ des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de $X$.

- Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $|A|$ (cardinal de $A$).
- Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(|A| \geq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) n\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathbf{1}_{\{i\}}$ la fonction indicatrice du singleton $\{i\}$. Déterminer la loi de $\mathbf{1}_{\{i\}}(A)$.
- Calculer $\mathbf{P}(A \subset B)$. Commenter.

**Exercice 168** [ENS 2023 # 179] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On considère un échiquier $n \times n$. On colorie chaque case en rouge (resp. en bleu) avec probabilité $p$ (resp. $1-p$). On note $Q(p)$ la probabilité pour qu'il existe un chemin joignant le bord gauche au bord droit constitué uniquement de cases rouges (les déplacements ne se font pas en diagonale) ? Que dire de la fonction $Q$ ?

**Exercice 169** [ENS 2023 # 180] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$.

- Calculer l'espérance du nombre $R$ de retour en zero de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.
- Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{R}$. Montrer que la probabilité qu'il existe $n \geq 1$ tel que $S_n \notin I$ est égale a 1.
- Montrer que l'évènement $(R = +\infty)$ est presque sûr.

*Démonstration.* • Passer par la probabilité de premier retour en 0, il faut tout refaire… □

**Exercice 170** [ENS 2023 # 181] Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilise et $(m - k \in \mathbb{N}$ une suite de réels positifs de somme 1. On considère un arbre aléatoire sur cet espace tel que chaque noeud ait un nombre aléatoire $X$ de successive avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = m_k$. Ces variables aléatoires correspondant au nombre de succcesseurs sont mutuellement indépendantes. On note $X_1$ la variable aléatoire comptant le nombre de succcesseurs de la racine. Caracteriser le fait que la longueur de l'arbre soit presque surement finie.

**Exercice 171** [ENS 2023 # 182] On construit iterativement et aléatoirement un arbre aléatoire sur l'ensemble de sommets $[\![1, n]\!]$ (graphe oriente) selon le procede suivant : a l'etape $k$, on choisit aléatoirementun point dans $[\![1, k]\!]$ (avec probabilité uniforme) et on rajoute une arete orientée de ce point vers $k+1$. Ces choix s'effectuent de maniere indépendante les uns des autres.

- On note $X_n$ la variable aléatoire donnant le nombre d'aretes partant du point 1. Déterminer l'espérance et la variance de $X_n$.
- On suppose $n \geq 2$. On note $S_n$ la variable aléatoire donnant le nombre de descendants (directs ou non) du sommet 2. Déterminer la loi de $S_n$.
- Calculer l'espérance du nombre de feuilles de l'arbre.

**Exercice 172** [ENS 2023 # 183] Soient $E$ un ensemble fini, $V : E \to \mathcal{P}(E)$ une fonction de $E$ vers les parties de $E$ et $f \colon E \to \mathbb{R}$ une fonction. Un point $a \in E$ est un minimum local si $f(a) \leq f(b)$ pour tout $b \in V(a)$. Soit $M$ un entier tel que $M \geq \sqrt{|E|}$. Soient $b_1, \ldots, b_M$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans $E$. Soit $k$ tel que $f(b_k) = \min_{1\leq i\leq M} f(b_i)$. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $E$ telle que $u_0 = b_k$ et, pour tout $n \geq 0$ :

- si $u_n$ est un minimum local, alors $u_{n+1} = u_n$ ;
- sinon $u_{n+1} \in V(u_n)$ et $f(u_{n+1}) < f(u_n)$.

Montrer que $u_M$ est un minimum local avec probabilité au moins $1/2$.

*Démonstration.* La donnée est celle d'un graphe. Étant donné l'algorithme, on peut retirer des arêtes, de sorte que les voisins de $a$ vérifient $f(b) < f(a)$. Auquel cas il n'y a plus de cycles.

Alors on choisit aléatoirement $\sqrt{n}$ sommets du graphe, et parmi ceux-ci le sommet de valeur minimale. On veut montrer que la plus longue chaîne décroissante à partir de celui-ci est de longueur $\leq \sqrt{n}$ avec probabilité $\geq \frac{1}{2}$.

On peut attribuer à chaque sommet sa valeur par $f$, et on peut supposer que c'est injectif.

Puis on peut ajouter des arêtes, vers ceux qui sont $< s$. Puis on peut retirer les arêtes, sauf celle juste en dessous. On est ramené à traiter le cas du graphe $n \to n-1 \to \ldots \to 1$. □

**Exercice 173** [ENS 2023 # 184] Une variable aléatoire réelle $X$ est infiniment divisible si $X$ admet un moment d'ordre 2, et si, pour tout $n \geq 2$, il existe $(X_{i,n})_{i\in[\![1,n]\!]}$ i.i.d. et admettant des moments d'ordre 2 telles que $X \sim \sum_{i=1}^n X_{i,n}$. Montrer que si $X$ est bornée et infiniment divisible, alors $X$ est presque surement constante.

**Exercice 174** [ENS 2023 # 185] On se donne une suite $(X - i \geq 1$ de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $i \geq 1$, il existe $a_i \in ]0, 2]$ et $p_i \in [0,1]$ tels que $X_i$ soit a valeurs dans $\{0, a_i, -a_i\}$ et $\mathbf{P}(X_i = a_i) = \mathbf{P}(X_i = -a_i) = \frac{p_i}{2}$.

- Quelle relation doivent vérifier $a_i$ et $p_i$ pour que $\mathbf{V}(X_i) = 1$ ? Dans toute la suite, on suppose cette relation vérifiée et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
- Calculer la variance de $n^{-1/2}S_n$.
- Montrer que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2}tS_n)) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(\cos(n^{-1/2}tX_i))$.
- En déduire que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2}tS_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2/2}$.

**Exercice 175** [ENS 2023 # 186] On fixe un entier $n \geq 1$. On considère la relation d'ordre partielle $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \leq y_i$. Une fonction $f \colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ est dite croissante lorsque $f(x) \leq f(y)$ quels que soient $x, y$ dans $\{0,1\}^n$ tels que $x \preccurlyeq y$.

- Donner un exemple de fonction croissante non constante de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- Dans la suite, on se donne une liste $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires i.i.d. suivant $\mathcal{B}(1/2)$. Soit $f \colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ croissante. On suppose $n \geq 2$.

Montrer que $\mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_n)) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_{n-1}, 0) + \mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_{n-1}, 1))\Big)$. - Soit $f \colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ croissantes.

Montrer que $\mathbf{E}((fg)(X_1, \ldots, X_n)) \geq \mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_n))\,\mathbf{E}(g(X_1, \ldots, X_n))$.

**Exercice 176** [ENS 2023 # 187] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $S_n$ de la distribution uniforme de probabilité. On note $A_i = \{\sigma \in S_n,\ \sigma(i) = i\}$ et $N$ la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation.

- Soit $I \subset [\![1,n]\!]$. Calculer $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.
- Exprimer $N$ avec des indicatrices. Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.
- Soient $k \in [\![1,n]\!]$ et $F \subset [\![1,n]\!]$. Calculer $\sum_{I\subset[\![1,n]\!],\ |I|=k} \prod_{i\in I} \mathbf{1}_F(i)$.
- Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $\mathbf{E}(N(N-1)\cdots(N-k+1))$.
- Soient $X \sim \mathcal{P}(1)$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbf{E}(X(X-1)\cdots(X-k+1))$.
- Calculer $\mathbf{P}(N=0)$.

**Exercice 177** [ENS 2023 # 188] On considère une suite i.i.d. $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires suivant toutes la loi uniforme sur $\{1,2\}$. On définit $(S_n)_{n\geq 0}$ par $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.
a) i) Déterminer l'espérance et la variance de $S_n$.

- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|S_n - 3n/2| \geq \varepsilon n)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|S_n - 3n/2| \geq \varepsilon n^{2/3})$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.
- On considère la variable aléatoire $T_n : \omega \mapsto \min\{k \in \mathbb{N},\ S_k(\omega) \geq n\}$. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $T_n$.
- Soit $k \geq 2$. Montrer que $\mathbf{P}(T_n = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-2} = k-1)$.
- Calculer l'espérance de $T_n$.

**Exercice 178** [ENS 2023 # 189] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 3$. On pose $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S = \{\pm e_i, 1 \leq i \leq d\}$, où $e_i$ désigne l'élément de $G$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $i$-ème, égale à $\overline{1}$. Soient enfin $f\colon G \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et $X$ une variable aléatoire uniformément distribuée sur $G$.
Montrer que $\mathbf{E}(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))|) \leq \frac{nd}{2} \max_{s\in S} \mathbf{E}(|f(X) - f(X+s)|)$.

*Démonstration.* C'est simple : On peut passer d'un somme à un autre en au plus $\frac{nd}{2}$ pas. ☐

# II) X XENS

## 1) Algèbre

**Exercice 179** [X MP 2023 # 275] On note $p(n)$ le nombre de partitions de $n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Monter que $p(n) \leq 2^{n-1}$. SUP

*Démonstration.* On a $p(n) \leq p(n-1) + p(n-2) + \cdots + p(1) + 1$, en considérant le (un) plus grand élément de la partition. Formellement, on a une surjection $\sqcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_k \to \mathcal{P}_n \quad (X,k) \mapsto X + (n-k)$. ☐

**Exercice 180** [X MP 2023 # 276] Soient $e_r > \cdots > e_2 > e_1 \geq 0$ des entiers, $n = \sum_{k=1}^r 2^{e_k}$ et $X = \{s \in \mathbb{N};\ 2^s \mid n!\}$. SUP

- Montrer que $\max X = n - r$.
- Montrer que le nombre d'entiers $k$ tels que $\binom{n}{k}$ est impair est $2^r$.

*Démonstration.*
- Formule de Legendre.
- Il faut que quand $n_i = 0$, $k_i = 0$ (chiffres en base 2).
  Avec Q1, on veut que le nombre de uns dans la décomposition de $n$ soit la somme du nombre de uns de $k$ et de $n-k$.
  Quand on fait la somme de deux nombres en binaires, le nombre de uns du résultat est $\leq$ à la somme des nombres de uns des sommandes. Avec égalité si et seulement si il n'y a aucune retenue (chaque retenue fait perdre un un).
  Donc forcément, il faut que là où $k$ a un chiffre 1, $n$ l'ait également. ☐

**Exercice 181** [X MP 2023 # 277]
- Montrer que l'équation $a^2 - 2b^2 = 1$ admet une infinité de solutions $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.
  Déterminer l'ensemble des solutions.
- Que dire de l'ensemble des solutions de $a^2 - 2b^2 = -1$ ?

*Démonstration.*
- $(3+2\sqrt{2})^k$
- $(1+\sqrt{2})^{2k+1}$ ☐

**Exercice 182** [X MP 2023 # 278] Si $G$ est un groupe, les éléments d'ordre fini forment-il un sous-groupe ?

*Démonstration.* Non : cf le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ : l'ensemble des mots sur $\{A,B\}$ où deux $A$ d'affilée, ou deux $B$ d'affilées se simplifient, muni de la concaténation. Cf # 281 ☐

**Exercice 183** [X MP 2023 # 279]
- Trouver deux groupes $G_1$ et $G_2$ non isomorphes de cardinal $2023 = 7.17^2$.
- Soit $p$ premier. Montrer qu'un groupe de cardinal $p^2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
- Soient $G, H$ deux groupes finis et $\psi\colon G \to H$ un morphisme surjectif.
  Montrer que $|G| = |H| \times |\operatorname{Ker}\psi|$.
- On suppose que $G$ est un groupe de cardinal 2023, que $H = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et que $\varphi\colon G \to H$ est un morphisme surjectif. Montrer que $G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \operatorname{Ker}\varphi$.
- Montrer que tout groupe de cardinal 2023 est isomorphe a $G_1$ ou $G_2$.

*Démonstration.*
-

- Le centre est non trivial : on regarde l'action de $G$ sur lui-même par conjugaison, les éléments du centre ont une orbite restreinte à eux mêmes. Sinon, tout élément est conjugué à un nombre d'éléments multiple de $p$, $\Phi\colon g \mapsto gxg^{-1}$ est un morphisme de groupe, donc son noyau est un sous-groupe, donc de cardinal $1, p, p^2$, donc son image est de cardinal $1, p, p^2$.

  La somme des cardinaux des orbites fait $p^2$, donc le nombre d'orbite de cardinal $p$ est un multiple de $p$.

  Soit $G$ est commutatif, auquel cas soit $G$ est cyclique, soit il admet deux éléments $h, g$ d'ordre $p$, tel que $\langle g\rangle \neq \langle h\rangle$. Alors $G \simeq \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2$, via $(i, j) \mapsto h^i g^j$ (injective + cardinal).

  Sinon, le centre de $G$ est de cardinal $p$ engendré par $g$. On prend un élément $h$ qui n'est pas dans le centre, $(i, j) \mapsto g^i h^j$ est injectif.
- On peut écrire $G$ comme la réunion de $g_1 \operatorname{Ker}\varphi, \dots, g_7 \operatorname{Ker}\varphi$.

  On a $g_1 n_1 g_2 n_2 = g_1 g_2 g_2^{-1} n_1 g_2 n_2$. On veut montrer que la conjugaison de $N$ par $g_2$ est triviale, ce qui vient du fait qu'en conjuguant 7 fois de suite, on est sensé faire l'identité, et $k \mapsto (n_1 \mapsto g_2^{-k} n_1 g_2)$ est un morphisme, et $N$ n'a pas d'automorphisme d'ordre 7.

  $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-groupe normal de $G$. Tout élément de $g$ donne, par conjugaison, un automorphisme de $\operatorname{Ker}\varphi$, qui ne dépend que de la classe de $g$ modulo $\operatorname{Ker}\varphi$ (car $\operatorname{Ker}\varphi$ est commutatif).

  On a un morphisme $H \to \operatorname{Aut}(\operatorname{Ker}\varphi)$, qui est forcément trivial, donc $(g_1, n_1) \mapsto g_1 n_1$ est un morphisme. □

**Exercice 184** [X MP 2023 # 280] Soit $G$ un groupe fini de neutre 1. Soit $\varphi$ un automorphisme de $G$ sans point fixe c'est-à-dire tel que : $\forall x \in G, \varphi(x) = x \Rightarrow x = 1$. On note $n$ l'ordre de $\varphi$ ; c'est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^n = \mathrm{id}$.

- Montrer que $\forall x \in G, x\,\varphi(x)\,\varphi^2(x)\,\cdots\,\varphi^{n-1}(x) = 1$.
- Si $n = 2$, que peut-on dire du groupe $G$ ? Donner un exemple.
- Si $n = 3$, montrer que, pour tout $x \in G$, $x$ et $\varphi(x)$ commutent.

**Exercice 185** [X MP 2023 # 281] Soient $G$ un groupe et $T$ l'ensemble des éléments de $G$ d'ordre fini.

- En général, $T$ est-il un sous-groupe de $G$ ?
- Soit $S$ une partie finie de $G$ stable par conjugaison munie d'une relation d'ordre totale $\leq$. Montrer que, pour tous $s_1, \dots, s_r \in S$, il existe $s'_1, \dots, s'_r \in S$ tels que $s'_1 \leq s'_2 \cdots \leq s'_r$ et $s_1 s_2 \cdots s_r = s'_1 s'_2 \cdots s'_r$.
- Avec la question précédente, montrer que, si $T$ est fini, alors $T$ est un sous-groupe de $G$.

*Démonstration.*
- Non : cf le produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ : l'ensemble des mots sur $\{A, B\}$ où deux $A$ d'affilée se simplifient, munit de la concaténation.
- Pour deux éléments : on peut écrire $s_1 s_2 = s_2\left(s_2^{-1} s_1 s_2\right)$ : on a mis le second en premier. On peut recommencer tant que le premier est plus grand, on obtient une suite strictement décroissante, qui s'arrête car $S$ fini.

  Puis récurrence sympa.
- Si $T$ est fini, si $ab \notin T$, alors on obtient une infinité de puissances, qui sont distinctes, mais d'après la question précédentes, elle s'écrivent comme un produit croissant, qui n'a qu'un nombre fini de possibilités. □

**Exercice 186** [X MP 2023 # 282]
- Soit $s\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $t \mapsto t^{-1}$. Déterminer le groupe engendré par $s$.
- On définit les applications $s_1 : (t, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto (t^{-1}, tu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et

  Montrer que le sous-groupe qu'elles engendrent est isomorphe a $\mathcal{S}_3$.
- Retrouver le résultat de la question précédente en considérant le quotient $A$ de $(\mathbb{R}^*)^3$ par la relation de colinearite, la bijection $f : A \to (\mathbb{R}^*)^2$ qui associe a la classe de $(x_1, x_2, x_3)$ le couple $(x_1/x_2, x_2/x_3)$, et enfin les permutations de $A$ induites par $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1, x_3)$ et $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3, x_2)$.
- Soit $n \geq 3$. Déterminer le groupe engendre par les bijections $(s{-}1 \leq i \leq n$ de $(\mathbb{R}^*)^n$ définies par $s_i(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{i-2}, t_{i-1} \times t_i, t_i^{-1}, t_i \times t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n)$ si $1 < i < n$, $s_1(t_1, \dots, t_n) = (t_1^{-1}, t_1 \times t_2, t_3, \dots, t_n)$ et $s_n(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{n-2}, t_{n-1} \times t_n, t_n^{-1})$.

  Ind. Considérer $f : (\mathbb{R}^*)^{n+1} \to (\mathbb{R}^*)^n$ définie par $f(t_1, \dots, t_{n+1}) = \left(\dfrac{t_2}{t_1}, \dots, \dfrac{t_{n+1}}{t_n}\right)$ et chercher des bijections simples $s'_i$ de $(\mathbb{R}^*)^{n+1}$ telles que $s_i \circ f = f \circ s'_i$.

**Exercice 187** [X MP 2023 # 283] Soit $G$ un groupe fini d'ordre $n$. On note, pour tout diviseur positif $d$ de $n$, $n_d(G)$ le nombre d'éléments de $G$ d'ordre $d$.

- Montrer que $n = \sum_{d|n} n_d(G)$.
- Calculer les $n_d(G)$ lorsque $G$ est cyclique.
- Montrer que, si pour tout diviseur positif $d$ de $n$, $|\{x \in G,\ x^d = 1\}| \leq d$, alors $G$ est cyclique. - Soient $\mathbb{K}$ un corps et $G$ un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$. Montrer que $G$ est cyclique.

**Exercice 188** [X MP 2023 # 284] On pose $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
- Déterminer les éléments de $\mathbb{Q}[i] \setminus \{0\}$ qui sont d'ordre fini.

**Exercice 189** [X MP 2023 # 285]
- Soient $\mathbb{K}$ un corps, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $P = X^2 - aX - b$. On considère la $\mathbb{K}$-algèbre $A$ admettant une base sur $\mathbb{K}$ de la forme $(1, x)$ avec $x^2 = ax + b$. À quelle condition cette algèbre est-elle un corps ?
- On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ ou $p$ est un nombre premier. Combien de $\mathbb{F}_p$-algèbres non isomorphes peut-on obtenir ainsi ?

*Démonstration.*
- À condition que $P$ soit irréductible.

- Si c'est un corps : $(x-a/2)^2 = c$ on obtient $x'$ avec $x'^2 = c$, avec $c$ n'est pas un carré, et il y une unique classe de non carré. Si c'est pas un corps, $x^2 = 1$, l'algèbre est isomorphe à $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$. □

**Exercice 190** [X MP 2023 # 286] Soit $p$ un nombre premier. On suppose que, pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre $A$, il existe un endomorphisme $u_A$ de $A$ de sorte que, pour tout couple $(A,B)$ de $\mathbb{F}_p$-algèbres et tout morphisme $\tau$ de $\mathbb{F}_p$-algèbres de $A$ dans $B$, on ait $\tau \circ u_A = u_B \circ \tau$. Que dire des $u_A$ ?

*Démonstration.* Pour tout morphisme d'algèbre $\tau\colon A \to A$, $u_A$ commute avec $\tau$. Donc $u_A(PMP^{-1}) = Pu_A(M)P^{-1}$, donc $u_A = \mathrm{Id}$, ou $u_A = 0$. □

**Exercice 191** [X MP 2023 # 287] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$. **SUP**
Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_k = 2^{n-1} P_n\left(\frac{X+1}{2}\right)$.

*Démonstration.* Revient à l'identité $\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=p+1}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{2^k}\binom{k}{p}$, qui peut se démontrer par des récurrence, en appliquant successivement la formule de Pascal. Faire le dessin.

Interprétation probabiliste : on divise par 2, à gauche, on a la probabilité de tirer une partie de taille $> p$. À droite, si on imagine des tirages pile/face successif, c'est la probabilité d'obtenir le $p+1$-ème élément au rang $k+1$ exactement. □

**Exercice 192** [X MP 2023 # 288]

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $S_n \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\forall N \in \mathbb{N},\ S_n(N) = \sum_{k=0}^{N-1} k^n$. Dans la suite, on note $b_n$ le coefficient de $S_n$ devant $X$.
- Donner une relation de recurrence exprimant $b_n$ en fonction de $b_0, \dots, b_{n-1}$.
- Pour $n \geq 1$, donner une relation entre $S_n''$ et $S_{n-1}'$.
- En déduire une expression explicite des coefficients de $S_n$ en fonction de $b_0, \dots, b_n$.

**Exercice 193** [X MP 2023 # 289] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$. **SUP**
On pose $F\colon z \in \mathbb{C}^* \mapsto \prod_{k=1}^{n}(1+q^{2k-1}z)(1+q^{2k-1}z^{-1})$.

- Montrer qu'il existe une unique liste $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ F(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z^k + z^{-k})$$

.

- Donner une relation de recurrence entre $c_k$ et $c_{k+1}$, et en déduire une expression de $c_k$ a l'aide d'un produit.
  Ind. Exprimer $F(q^2 z)$ en fonction de $F(z)$.

*Démonstration.*

- Existence claire, via $f(z) = f(1/z)$. Unicité via l'unicité polynomiale.
- On a $F(q^2 z) = F(z) \frac{1+q^{2n+1}z}{1+qz} \frac{1+z^{-1}q^{-1}}{1+q^{2n-1}z^{-1}}$. Multiplier par le dénominateur, identifié. □

**Exercice 194** [X MP 2023 # 290] Soit $p$ un nombre premier. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(X+Y)^n$ soit congru a $X^n + Y^n$ modulo $p$.

*Démonstration.* Pour $n = p$ ok, si $n = p^\alpha$ aussi. Sinon, cf Lucas pour les coefficients binomiaux : on choisit un $p$ qui divise $n$, on veut $\forall u,\ \lfloor \frac{n}{p^u} \rfloor = \lfloor \frac{k}{p^u} \rfloor + \lfloor \frac{n-k}{p^u} \rfloor$, il faut écrire la décomposition en base $p$. □

**Exercice 195** [X MP 2023 # 291] Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(0) \neq 0$. Soit $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X^n$ divise $P^k - f$.

*Démonstration.* C'est des DLs : faire le DL de $\sqrt[k]{f}$. □

**Exercice 196** [X MP 2023 # 292] Soit $p$ un nombre premier. Pour deux polynômes $P, Q$ dans $\mathbb{Z}[X,Y]$, on note $P \equiv Q\ [p]$ pour signifier que $P - Q$ a tous ses coefficients (devant les $X^k Y^l$) divisibles par $p$. On adopte une définition similaire pour les polynômes a une indéterminée.

- Exhiber un polynôme $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$, $P \not\equiv T\ [p]$ et $P \not\equiv 0\ [p]$.
- Exhiber un polynôme $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$, $P(X+Y) \equiv P(X) + P(Y)\ [p]$, $P \not\equiv T\ [p]$ et $P \not\equiv 0\ [p]$.
- Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{Z}[T]$ tels que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$ et $P(X+Y) \equiv P(X) + P(Y)\ [p]$.

*Démonstration.*

- $T^p$
- $T^p$
- La première dit que $P$ est un monôme, puisque $P(X)P(Y)$ est une somme de sommandes que l'on peut identifier. La seconde que c'est un $X^{p^\alpha}$. □

**Exercice 197** [X MP 2023 # 293] Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des complexes deux a deux distincts. Soient $n_1, \dots, n_r$ dans $\mathbb{N}^*$ et $H_1, \dots, H_r$ dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un $H \in \mathbb{C}[X]$ tel que $(X - \alpha_i)^{n_i}$ divise $H - H_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

*Démonstration.* Interpolation de Hermite. □

**Exercice 198** [X MP 2023 # 294]

- Soient $N_1, \dots, N_r$ des entiers premiers entre eux deux à deux, et $f_1, \dots, f_r$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier $F$ tel que $F \equiv f_i\ [N_i]$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.
- Soient $N_1, \dots, N_r$ des éléments de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux deux à deux, et $f_1, \dots, f_r$ des éléments de $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe $F \in \mathbb{C}[X]$ tel que $N_i$ divise $F - f_i$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

- Soient $f, g$ deux éléments de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $h \in \mathbb{C}[X]$ tel que $g$ divise $h^n - f$.

*Démonstration.*

-
-
- Se ramener au cas de $g = X^k$, qui se fait par DL via ce qui précède, peut-être.
  $g = \prod(X - \alpha_i)^{\beta_i}$. On veut que $\forall i,\ h^n \equiv f[(X - \alpha_i)^{\beta_i}]$, Via des DLs, il existe $h_i$ tel qu'il suffise que $h \equiv h_i[(X - \alpha_i)^{\beta_i}]$ (ici on utilise $f \wedge g = 1$, $h_i$ est obtenu en prenant une racine $n$-ième de $f$). □

**Exercice 199** [X MP 2023 # 295] Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $X^{n+1} - nX^n + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ ?

*Démonstration.* Pour $n = 2$, 1 est racine :)
Critère de Perron : si $|a_{n-1}| > 1 + |a_0| + \cdots + |a_{n-2}|$ et $a_0 \neq 0$.
D'une part, il n'y a pas de racines de module 1. Donc au moins une racine complexe est $> 1$.
On écrit $P = (X - x_1)Q$. Et on obtient que $\sum_{i=0}^{n-2} |q_i| < 1$. Donc toutes les racines de $Q$ sont de module $< 1$. □

**Exercice 200** [X MP 2023 # 296] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire dont les racines complexes ont un module inférieur ou égal a 1. Montrer que les racines de $P$ sont des racines de l'unite.

**Exercice 201** [X MP 2023 # 297] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ possedant $n$ racines distinctes $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$. On écrit $P^2 + 1 = Q_1 \ldots Q_r$ ou les $Q_i$ sont dans $\mathbb{Z}[X]$. On pose $R = \sum_{i=1}^{r} {Q_i}^2 - r$. **SUP**

- Montrer que les $x_k$ sont racines au moins doubles de $R$.
- En déduire qu'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\deg(Q_i) \geq 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

*Démonstration.*

- $R' = \sum Q_i' Q_i$ ; $2PP' = (\prod Q_i) \sum \frac{Q_i'}{Q_i}$
- $R$ est de degré $\geq 2n$. Donc un des $Q_i$ est de degré $\geq n$. Si $n$ pair c'est bon.
  Si $n$ est impair, il faut montrer qu'un des $Q_i$ est de degré $n+1$. Cela vient du fait que $P^2 + 1 = \prod Q_i$, donc les $Q_i$ ne peuvent pas avoir de racines réelles. □

**Exercice 202** [X MP 2023 # 298] On se propose de donner une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss. **SUP**

- Montrer qu'il suffit de montrer le théorème pour les polynômes a coefficients réels. Dans la suite, on écrira le degré d'un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ sous la forme $2^n q$, ou $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ est impair. La preuve se fait par recurrence sur $n$.
- Montrer le théorème dans le cas ou $n = 0$.
  Dans la suite, on suppose le résultat vrai jusqu'au rang $n$, ou $n \geq 1$ est fixe.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2^n q$, ou $n \geq 1$. On admet l'existence d'une extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ sur laquelle $P$ est scinde, et on note $x_1, \ldots, x_d$ ses racines dans $\mathbb{K}$, distinctes ou non. Ayant fixe $c \in \mathbb{R}$, on pose $y_{ij}(c) = x_i + x_j + c x_i x_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq d$.
  - ▹ Montrer que le polynôme $Q_c = \prod_{i \leq j}(X - y_{ij}(c))$ est a coefficients réels.
  - ▹ Montrer que l'un des $y_{ij}(c)$ est élément de $\mathbb{C}$.
  - ▹ Montrer finalement que l'un des $x_i$ est élément de $\mathbb{C}$.

*Démonstration.*

- Considérer $Q\overline{Q}$.
- Tout polynôme de degré impair admet une racine.
-
  - ▹ Propriété de symétrie : prendre son conjugué.
  - ▹ Découle de la première question.
  - ▹ Pour tout $c \in \mathbb{R}$, un des $x_i + x_j + c x_i x_j$ est dans $\mathbb{R}$. Si $i = j$ c'est bon. Sinon, pour une infinité de $c$, c'est le même couple, donc $x_i + x_j \in \mathbb{C}$, et $x_i x_j \in \mathbb{C}$. □

**Exercice 203** [X MP 2023 # 299] Soient $F \in \mathbb{C}(X)$ et $q \in \mathbb{C}^*$. **SUP**

- On suppose que $q$ n'est pas une racine de l'unite. Montrer qu'il existe au plus deux fractions rationnelles $G \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F = 1 + G(qX)\, G(q^{-1}X)\, F(q^{-2}X)$, et que s'il y en a deux alors elles sont opposées l'une de l'autre.
- Montrer que le résultat precedent peut tomber en defaut si l'on ne suppose plus que $q$ n'est pas une racine de l'unite.

*Démonstration.*

- On a $G(qX)G(q^{-1}X) = \frac{F-1}{F(q^{-2}X)}$.
  Si $x_i$ sont les poles/racines de $G$, les poles/racines de $G(qX)G(q^{-1}X)$ sont les $qx_i$ et les $q^{-1}x_i$, de multiplicités $m(y_i) = m_{q^{-1}y_i} + m_{qy_i}$.
  Ces multiplicités déterminent entièrement les multiplicités d'origine, car $q$ n'est pas une racine de l'unité (… technique à écrire).
  Si on a l'égalité $G(qX)G(q^{-1}X) = G'(qX)G(^{-1}X)$, on a les mêmes poles/racines, et quitte à les retirer, on a la même constante, à $\pm$ près. □

**Exercice 204** [X MP 2023 # 300] Soit $G$ un groupe, $\mathcal{M}$ l'ensemble des morphismes de groupes de $G$ dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^G$.

**Exercice 205** [X MP 2023 # 301] On note $C$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont non nuls. Pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in C$, on pose $J(M) = \left(\dfrac{1}{m_{i,j}}\right)_{1 \leq i,j \leq 2}$. Soit $\varphi : C \to C$ qui a $M$ associe $J(M^{-1})$. Montrer que $\varphi$ est bien définie et trouver a quelle condition sur $M \in C$ la suite $(\varphi^n(M))_{n \geq 1}$ est stationnaire, ou bien perioddique a partir d'un certain rang.

*Démonstration.* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (ad-bc)\begin{pmatrix} 1/d & -1/b \\ -1/c & 1/a \end{pmatrix}$ Si on est un point fixe, on vérifie $a/b = -\frac{1/d}{1/b}$ , c'est-à-dire $b^2 = -ad$ et $c^2 = -ad$. Donc $b = \pm c$, mais si $b = -c$, $ad - bc = 0$, donc $b = c$.
et $ad - bc = 2ad = -2b^2$
Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$, donc pas de point fixe.

Si on applique une deuxième fois l'application, comme $\varphi(cx) = c\varphi(x)$, on obtient $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (ad-bc)\left(\frac{1}{da} - \frac{1}{bc}\right)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Donc on est point fixe si et seulement si $(ad-bc)(bc-ad) = adbc \Leftrightarrow (ad-bc)^2 = -adbc \Leftrightarrow X^2 + Y^2 = 3XY$. M'enfin, si c'est le cas, c'est directement le cas je dirais, peut-être. ☐

**Exercice 206** [X MP 2023 # 302] Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ non nulle et $M = I_n + 3R$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k \neq I_n$.

**Exercice 207** [X MP 2023 # 303] Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $p, u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $p$ est un projecteur et que $pu + up = u$. Montrer que $\operatorname{tr}(u) = 0$. **SUP**

*Démonstration.* On a $u(\operatorname{Ker} p) \subset \operatorname{Im} p$ et $u(\operatorname{Im} p) \subset \operatorname{Ker} p$. ☐

**Exercice 208** [X MP 2023 # 304] Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi_{A,B} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. **SUP**
Soit $T = \{\varphi_{A,B},\ (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.

- L'ensemble $T$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
- Montrer que l'espace vectoriel engendré par $T$ est $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

*Démonstration.*
- Non.
- On prend les $E_{ij} M E_{k\ell}$, ils forment une famille libre. ☐

**Exercice 209** [X MP 2023 # 305] Pour une matrice de projecteur $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $R_P = \det(I_n + (X-1)P)$. **SUP**

- Calculer $R_P$ en fonction de $P$.
- Soient $P, Q$ des matrices de projecteur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $PQ = QP = 0$. Montrer que $R_P R_Q = R_{P+Q}$.
- Soit $\varphi$ un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - ▷ Montrer que $\varphi(E_{i,i})$ est un projecteur de rang 1, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
  - ▷ Que dire du rang de $\varphi(E_{i,j})$, pour $i, j$ dans $[\![1, n]\!]$ ?
  - ▷ Montrer que $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^n \operatorname{Im} \varphi(E_{i,1})$.

*Démonstration.*
- $R_P = X^r$
- C'est-à-dire que $\operatorname{rang}(P+Q) = \operatorname{rang} P + \operatorname{rang} Q$.
- Pas de rapport avec ce qui précède.
  - ▷ ☐

**Exercice 210** [X MP 2023 # 306] Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $V$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une application $q\colon V \to \mathbb{C}$ telle que $u^2 = q(u)\operatorname{id}_E$ pour tout $u \in V$.

- Monter que, pour tous $u, v \in V$, il existe $B(u, v) \in \mathbb{C}$ tel que $uv + vu = 2B(u, v)\operatorname{id}_E$.
- Montrer que $B$ est une forme bilinéaire.
- Soient $d \geq 1$ et $u_1, \ldots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $(u_1, \ldots, u_d)$ est libre.
- Soient $d \geq 2$ et $u_1, \ldots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que les $u_i$ sont de trace nulle, et que $\dim E$ est paire.

*Démonstration.*
- $(u+v)^2$
- Se vérifie.
- Probablement comme si ils étaient orthogonaux…
- $u_i^2 = -\operatorname{Id}_E$ et $u_i u_j + u_j u_i = 0$ et les endomorphismes anti-commutent, donc $u_j$ envoie $E_i$ sur $E_{-i}$. ☐

**Exercice 211** [X MP 2023 # 307] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On suppose que $\varphi(I_n)$ est inversible et que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\,\varphi(B)$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(A) = PAP^{-1}$.

**Exercice 212** [X MP 2023 # 308]
- Caracteriser les endomorphismes $\varphi$ de $\mathbb{C}(X)$ vérifiant $(*)$ : $\forall F_1,\ F_2 \in \mathbb{C}(X)$, $\varphi(F_1F_2) = \varphi(F_1)\,\varphi(F_2)$.
- Déterminer les automorphismes de $\mathbb{C}(X)$ vérifiant $(*)$.

**Exercice 213** [X MP 2023 # 309] Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i, j, m_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$.

- Montrer que 1 est valeur propre de $M$ et que tout valeur propre de $M$ est de module $\leq 1$.
- On note $\mu = \min_{1 \leq i \leq n} m_{i,i}$. Montrer que le spectre de $M$ est inclus dans le disque de centre $\mu$ et de rayon $1 - \mu$.
- On suppose que $\mu > 0$ et que 1 est valeur propre de multiplicité 1 dans $\chi_M$. Montrer que $(M^p)_{p \geq 1}$ converge vers une matrice de rang 1 dont toutes les lignes sont égales.

- On se donne trois réels strictement positifs $p, q, r$ tels que $p+q+r=1$. On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $b_{i,i}=r$, $b_{i,i+1}=q$ si $i>2$, $b_{1,2}=p+q$, $b_{i+1,i}=p$ si $i<n-1$, $b_{n,n-1}=p+q$, et tous les autres coefficients sont nuls. Montrer que 1 est valeur propre simple de $B$, et expliciter la limite de $(B^k)_{k\geq 0}$.

**Exercice 214** [X MP 2023 # 310] Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, $F$ un sous-espace de $E$ stable par $f$. Montrer que l'induit par $f$ sur $F$ est cyclique.

**Exercice 215** [X MP 2023 # 311] Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $a, b \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ telles que $ab - ba = fv$.

- Que peut-on dire de $\det(ab-ba)$ ?
- Montrer que $a$ et $b$ sont cotrigonalisables.
- À quelle condition sur $u \in \mathcal{L}(E)$ existe-t-il $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uw - wv$ soit de rang 1 ?

*Démonstration.*
- $fv$ est un endomorphisme de rang 1, on note son image $\mathrm{Vect}(t)$.
- Si $\mathrm{Ker}\, b$ non stable par $a$, alors il existe $x$ tel que $-b(a(x)) \in \mathrm{Vect}\, t$, donc $t \in \mathrm{Im}\, b$. Alors $\mathrm{Im}\, b$ est stable par $a$.
  En appliquant ça à des $b - \lambda I_n$ répétitivement, on trouve un vecteur propre commun.
- Si $u$ a deux valeurs propres distinctes, en diagonalisant $u$ par blocs et en prenant une matrice $v$ avec un unique 1 à l'intersection, on obtient une matrice de rang 1.
  Si $u$ a une unique valeur propre, on peut supposer $u$ nilpotente. Alors, si $u$ est non nulle, on peut prendre $v$ de rang 1, qui envoie un élément de l'image de $u$ sur un élément du noyau de $u$, et on obtient $uv - vu$ de rang 1. □

**Exercice 216** [X MP 2023 # 312] Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout vecteur $x \in E$, l'ensemble $\{f^n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

- Montrer que, si $f \in \mathrm{GL}(E)$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = \mathrm{Id}$.
- On revient au cas général. Montrer l'existence de $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $f^{p+k} = f^p$.

*Démonstration.*
- Les valeurs propres sont des $\mathbb{U}_k$, et si elle n'était pas diagonalisable... □

**Exercice 217** [X MP 2023 # 313] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de permutation associée a $\sigma$. Montrer que, si $\sigma$ et $\sigma'$ sont dans $\mathcal{S}_n$, $\sigma$ et $\sigma'$ sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si $P_\sigma$ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

**Exercice 218** [X 2023 # 314] Soient $p$ et $q$ deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien $E$.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
2. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, q + (\mathrm{Im}\, q \cap \mathrm{Ker}\, p)$.
3. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
4. Montrer que le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0,1]$.

*Démonstration.* □

**Exercice 219** [X MP 2023 # 315] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $L_n = D^n((X^2-1)^n)$, ou $D$ designe l'operateur de derivation des polynômes.

- Déterminer le degré de $L_n$. Montrer que $\int_{-1}^1 L_n(t)\, P(t)\, dt = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Montrer que $L_n$ est scinde a racines réelles simples $x_1 < \cdots < x_n$ avec $x_1 > -1$ et $x_n < 1$.
- Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_{-1}^1 P(t)\, dt = \sum_{k=1}^n a_k P(x_k)$.

**Exercice 220** [X 2023 # 316] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\right\}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes.

- $\alpha = 2$.
- $\forall n \geq 1, \forall\, (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n) \in \left(S^2\right)^{3n}, \exists p \in S^2$ tel que
$$\sum_{i=1}^n \|p - a_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|p - b_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|p - c_i\|^\alpha$$

*Démonstration.* Pour $\alpha = 2$, on veut montrer que si on prend $3n$ points dans la sphère unité, il existe un point tel que la somme des distances au carré soient égales.
Pour $n = 1$ : c'est l'intersection de la droite passant par l'origine et le centre du cercle circonscrit au triangle.
!! Pour $n = 2$, On peut $P_a(x) + P_a'(y) = P_b(x) + P_b'(y) = \ldots$ □

**Exercice 221** [X MP 2023 # 317] Existe-t-il $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{Q})$ telle qu'il n'existe pas $B \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{Q})$ vérifiant $B^2 = A$ ?

*Démonstration.* S'il en existe une, son opposé marche aussi. On a $\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$, si on pouvait appliquer ça à chaque fois, problème de taille du dénominateur. □

**Exercice 222** [X MP 2023 # 318] Soient $E$ un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{S}(E)$, $\Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \|f(v)\|^2 - \langle f(v), v\rangle^2 \end{array}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi$ admette un extremum.

*Démonstration.* Si $\lambda$ est valeurs propres, $\Phi(tv_\lambda) = \lambda^2 t^2 - \lambda t^2 = (\lambda^2 - \lambda)t^2$. Il est donc nécessaire, ou bien que toutes les valeurs propres sont $\in [0,1]$, ou bien toutes dans le complémentaire. □

**Exercice 223** [X MP 2023 # 319] On considère dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

- Soit $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $K^2 = -I$. Montrer que $K^T J \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $J = K^T J K$.
- On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telles que $K^2 = -I$ et $K^T J \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $K \in \mathcal{C}$. Montrer que $K + J$ est inversible et que $(K+J)^{-1}(K-J)$ est symétrique.
- Soit $K \in \mathcal{C}$. On pose $S = (K+J)^{-1}(K-J)$. Montrer que $SJ + JS = 0$.

**Exercice 224** [X MP 2023 # 320] Montrer que $\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2, \det(A+B) \geq \max(\det(A), \det(B))$.

*Démonstration.* Simple ? Écrire $A = PDP^T$ et $B = PP^T$, si $\det B > 0$. ☐

**Exercice 225** [X MP 2023 # 321] Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\operatorname{tr}\left(e^A e^B\right) > 0$.
- Montrer que $\operatorname{tr}\left(e^{A+B}\right) \leq \operatorname{tr}\left(e^A e^B\right)$.

**Exercice 226** [X 2023 # 322] Soit $t_1, \ldots, t_n$ des réels.

1. Montrer que la matrice $A = (t_i t_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. On suppose $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$. Montrer que la matrice $B = (\min(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. On suppose $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$. Montrer que $M = B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

*Démonstration.*
1. $X^T A X = (\sum t_i x_i)^2$
2. $\int \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i}\right)^2$
3. Il s'agit de montrer que $\int_0^1 \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i}\right)^2 \geq (\sum t_i x_i)^2$, c'est-à-dire $\int h^2 \geq \left(\int h\right)^2$, car l'intégrale est sur $[0,1]$. ☐

**Exercice 227** [X MP 2023 # 323] On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire standard et on note $\|A\| = \sup_{X \in B_f(0,1)} \|AX\|$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\|A\| = \sup_{(X,Y) \in B_f(0,1)^2} |\langle AX, Y \rangle|$.
- On prend $A = \left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_0 \cdots x_n)^T$ et $Y = (y_0 \cdots y_n)^T$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, donner une interpretation de $\langle AX, Y \rangle$ a l'aide d'une intégrale faisant intervenir $P : t \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{k=0}^n x_k e^{ikt}$ et $Q : t \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{k=0}^n y_k e^{ikt}$.
- En déduire que $|||A|| \leq 2\pi$.
- Montrer que l'on a meme $|||A||| \leq \pi$.

*Démonstration.*
- 
- 
- \$⟨ AX, Y⟩ = \$ ☐

## 2) Analyse

**Exercice 228** [X MP 2023 # 324] Trouver $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, discontinue en $(0,0)$, dont la restriction a toute droite passant par $(0,0)$ est continue.

*Démonstration.* $f(x,y) = \frac{x^4}{y^2 + x^6}$ ☐

**Exercice 229** [X 2023 # 325] Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un convexe fermé non vide.

1. On suppose $K$ borné. Montrer que $K$ s'écrit comme intersection de carrés fermés.
2. On suppose $K$ non borné et $K \neq \mathbb{R}^2$. Donner des exemples de tels convexes. Montrer que si $K$ contient deux droites, celles-ci sont parallèles.
3. On suppose toujours $K$ non borné. Montrer que $K$ contient une demi-droite.

*Démonstration.*
1. Si $x \notin K$, on peut trouver une droite séparant $x$ de $K$, donc un carré contenant $K$ et non $x$.
2. Si $K$ contient deux droites non parallèles, $K = \mathbb{R}^2$. La partie au dessus du graphe de $x \mapsto e^x$.
3. Fixer $y \in K$, et une suite $(x_n) \in K$ qui tend vers $\infty$, et prendre une valeur d'adhérence des segments $[y, x_n]$. ☐

**Exercice 230** [X MP 2023 # 326] Déterminer les endomorphismes continus du groupe $\mathbb{C}^*$.

**Exercice 231** [X MP 2023 # 327] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de la structure euclidienne canonique. On définit une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ en posant, pour $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sup\left\{\|Mx\| \,;\, x \in \mathbb{R}^d,\ \|x\| = 1\right\}$.

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.
- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On suppose que la série de terme général $|u_n - 1|$ converge.
  Montrer que la suite de terme général $\prod_{k=0}^n u_k$ converge.

Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On suppose que la série de terme général $\|M_n - I_d\|$ converge. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_n$.

- Montrer que la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ converge.

- Soit $\sigma$ une permutation de $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la suite de terme général $M_{\sigma(0)} \times \cdots \times M_{\sigma(n)}$ ?
- Soit $E = \left\{\prod_{k=0}^{+\infty} M_{\sigma(k)},\ \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})\right\}$. Existe-t-il une suite de matrices pour laquelle $E$ n'est pas ferme ?
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Existe-il $(M_n)_{n\geq 0} \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que $E$ possede exactement $k$ composantes connexes ?

*Démonstration.* ! ! □

**Exercice 232** [X MP 2023 # 328] On définit la longueur d'un intervalle borne $I$ de bornes $a$ et $b$ par $\ell(I) = |b-a|$. - Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $I_1, \ldots, I_N$ des intervalles bornes de $\mathbb{R}$ tels que $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^N I_i$. Que peut-on dire de $\sum_{i=1}^N \ell(I_i)$ ?

- Soit $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p = 1$, $t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $x_{q-1} \leq t_q \leq x_q$ et $x_q - x_{q-1} \leq \delta(t_q)$.
- Soit $(I_n)_{n\geq 1}$ une suite d'intervalles bornes de $\mathbb{R}$ telle que $[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Que peut-on dire de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n)$ ?

*Démonstration.* •

- Incompréhensible. Quel sens pour $x_1$ ? Il faudrait que $\delta$ soit continue ?
- Si $\sum \ell(I_n) < 1$, on montre que ce n'est pas possible. On considère une suite $(\varepsilon_n)$ telle que $\sum \ell(I_n) + \varepsilon_n < 1$.
  On choisit $x_0 = 0$, puis le plus grand intervalle restant qui contient (n'existe pas ...) $x_0$, puis $\ell(I_{n_0}) < x_1 < \ell(I_{n_0}) + \varepsilon_{n_0}$, puis le plus grand qui le contient etc. □

**Exercice 233** [X MP 2023 # 329] Dans $\mathbb{R}^2$, on note $D$ le disque unite ferme pour la norme infinie, $C$ la sphere unite pour la norme infinie. On cherche a montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $r : D \to C$ telle que la restriction de $r$ a $C$ soit l'identite.

- On considère une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, antisymmetrique (i.e. $f(x,y) = -f(y,x)$), et $A = (a_{i,j})_{i,j\leq n}$ une matrice réelle telle que : $\forall i,j \in [\![1,n-1]\!]$,

$f(a_{i,j}, a_{i+1,j}) + f(a_{i+1,j}, a_{i+1,j+1}) + f(a_{i+1,j+1}, a_{i,j+1}) + f(a_{i,j+1}, a_{i,j}) = 0.$
Montrer que :
$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i,1}, a_{i+1,1}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{n,j}, a_{n,j+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1,n}, a_{i,n}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{1,j+1}, a_{1,j}) = 0$

- Soit $M \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & & & & 3 \\ \vdots & & M' & & \vdots \\ 1 & & & & 3 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ ou $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

est a coefficients dans $\{1,2,3\}$. Montrer qu'au moins un des petits carrés de $M$ comporte trois valeurs differentes.

- Montrer qu'on dispose d'un $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in D$ vérifiant $\|x-y\|_\infty \leq \eta$, on a $\|r(x) - r(y)\| \leq \frac{1}{10}$.
- Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{n-1} \leq \eta$. Pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, on pose

$v_{i,j} = \left(1 - 2\frac{i-1}{n-1}, 1 - 2\frac{j-1}{n-1}\right)$.
Montrer que, pour tous $i,j \in [\![1,n-1]\!]$, $v_{i,j}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}, v_{i,j+1}$ sont contenus dans une boule de rayon $1/10$.

- En utilisant une fonction bien choisie de $C$ dans $\{1,2,3\}$, aboutir a une contradiction et conclure.
- Utiliser ce résultat pour montrer que toute fonction continue de $D$ dans $D$ admet un point fixe.

**Exercice 234** [X 2023 # 330] On dit qu'une famille $(D_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de disques fermés de $\mathbb{R}^2$ vérifie $(\mathcal{P})$ si

- pour tous $s,t \in \mathbb{R}^+$ distincts, $D_s$ et $D_t$ ont des centres distincts,
- pour tous $s,t \in \mathbb{R}^+$ tels que $s < t$, $D_s \subset D_t$.

1. Existe-t-il une telle famille ?
2. Soit $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ une fonction $C^1$ et injective. Existe-t-il une famille $(D_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ vérifiant $(\mathcal{P})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $A(t)$ soit le centre de $D_t$ ?
3. Le résultat subsiste-t-il si $A$ est seulement supposée continue ?

*Démonstration.* 1. Cercles de centre $(x,0)$, de rayon $x$.
2. Prendre $D_t$ de rayon la longueur de la courbe de $A(0)$ à $A(t)$.
3. Prendre une fonction non réglée. □

**Exercice 235** [X MP 2023 # 331] Dans tout l'enonce, $\mathbb{K}$ designe $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne une $\mathbb{K}$-algèbre $A$ de dimension finie, et on identifie $\mathbb{K}$ a une sous-algèbre de $A$ via $\lambda \mapsto \lambda.1_A$. On suppose donnée sur $A$ une norme multiplicative $\|\ \|$, autrement dit une norme vérifiant $\forall (a,b) \in A^2,\ \|ab\| = \|a\|\,\|b\|$. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Soit $x \in A$. Montrer qu'il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ \|z_0 - x\| \leq \|z - x\|$.
- On suppose $\|a\| = 2$ pour $a = z_0 - x$. Montrer que $\|a - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\| \geq 2$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
- En déduire que $\|a - 1\| = 2$.
- En déduire que $A = \mathbb{C}$.
- Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant des polynômes annulateurs.

Dans la suite, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Est-ce que $A$ est nécessairement égale a $\mathbb{R}$ ?
- On admet qu'il existe une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ ayant une base de la forme $(1, i, j, k)$ ou $i, j, k$ anticommutent deux a deux et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. On considère la symétrie $x \mapsto \overline{x}$ par rapport a $\mathbb{R}$ parallélément a $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$, et on considère la norme $N : q \mapsto \sqrt{\overline{q}q}$. Montrer que $N$ est bien définie, est effectivement une norme, et qu'elle est multiplicative.
- Montrer que $A$ est isomorphe, en tant que $\mathbb{R}$-algèbre, a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

**Exercice 236** [X 2023 # 332] Soient $a, b, c$ des entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^4 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{N}$.

*Démonstration.* Dérivée discrète. □

**Exercice 237** [X MP 2023 # 333] Pour $n \geq 2$, on note $\ell_n = \min \left\{ k \in [\![1, n]\!] \mid \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{1}{2} \right\}$.

- Montrer que $\ell_n = o(n)$.
- Donner un équivalent de $\ell_n$.

*Démonstration.*
- C'est montrer que $\forall c$, $\prod_{i=1}^{cn} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{1}{2}$ APCR. Ou bien par comparaison $\sum / \int$, ou somme de Riemann un peu technique.
- La comparaison $\sum / \int$ devrait marcher… □

**Exercice 238** [X 2023 # 334] Soient $(a_n)$ et $(b_n)$, deux suites réelles positives telles que la série de terme général $b_n$ converge, que la série de terme général $na_n$ diverge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k}$.
2. Montrer que $(u_n)$ est bornée.
3. Montrer que, si $(u_n)$ converge, alors sa limite est 0.

*Démonstration.* Cf une année précédente. □

**Exercice 239** [X MP 2023 # 335] On considère la suite réelle définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que $x_n \sim C^{2^n} n^2$ quand $n \to +\infty$.

*Démonstration.* !! □

**Exercice 240** [X MP 2023 # 336] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par $a_0 = 1, a_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = 2a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2}$. Donner un équivalent de $a_n$.

**Exercice 241** [X MP 2023 # 337] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 = \pi/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Nature de la série de terme général $a_n^2$ ?

*Démonstration.* On a $a_{n+1} - a_n \sim a_n^3$, donc $\sum a_n^3$ converge. Il faut trouver un équivalent de $a_n$, via la méthode usuelle. □

**Exercice 242** [X MP 2023 # 338] Soit $\sum u_n$ une série convergente de réels positifs. Existe-t-il une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs tendant vers $+\infty$ telle que la série $\sum u_n v_n$ converge ?

**Exercice 243** [X MP 2023 # 339] Soit $(x_n)$ une suite réelle. On suppose que $(x_n y_n)$ est sommable pour toute suite réelle $(y_n)$ de carré sommable. Montrer que $(x_n)$ est de carré sommable.

**Exercice 244** [X MP 2023 # 340] Soit $\sigma$ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

**Exercice 245** [X MP 2023 # 341] Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{\sin(\ln n)}{n}$.

**Exercice 246** [X MP 2023 # 342] On pose $u_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $n \geq 1$.

- Montrer que $u$ converge vers une limite $\ell$.
- Montrer que $\ell = -(\sqrt{2} + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.
- Montrer que $u_n = \ell + \frac{1}{2n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
- Montrer que $\ell = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2}$.
- Étudier les variations de $u$.
- Déterminer un développement asymptotique similaire pour la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
- Soit $\alpha \in ]0, 1[$. Donner un développement asymptotique à trois termes pour $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

**Exercice 247** [X 2023 # 343] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

*Démonstration.* La série $\sum \frac{1}{f(n)}$ a la même nature que $\int \frac{1}{f}$. On peut raccorder $f$ de manière $\mathcal{C}^1$, puis on pose $u = f(t)$ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{uf'(f^{-1}(u))}\,\mathrm{d}u,$$

puis IPP. □

**Exercice 248** [X MP 2023 # 344] • Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{m}}{(m+n)\sqrt{n}} \leq \pi$.

Ind. : Dans $\mathbb{R}^2$, considérer les points $x_n = (\sqrt{m}, \sqrt{n})$ et l'intersection $r_n$ du cercle $C(0, \sqrt{m})$ avec le segment $[0, x_n]$.

- Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites de carré sommable et a termes positifs. On note $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ et $B = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$. Montrer que $\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi\sqrt{AB}$.

*Démonstration.* • Se fait par comparaison intégrale.

Méthode géométrique : $\frac{1}{m+n}$ est l'inverse de la longueur de l'hypothénuse. IDK

- !! À Relier, Carlemann. □

**Exercice 249** [X MP 2023 # 345] • Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(xy) = f(x)\, f(y)$.

- Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall x \neq y \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$.

*Démonstration.* •

- !! □

**Exercice 250** [X 2023 # 346] Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique ?

*Démonstration.* Easy. □

**Exercice 251** [X MP 2023 # 347] Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $|f'| + |f + 1| \leq 1$.

*Démonstration.* ?? On obtient $f \leq 0$, $f = 0 \to f' = 0$, la fonction est coincée entre $-2$ et $0$.
On peut juste poser $g = f + 1$, auquel cas $|g| + |g'| \leq 1$. La fonction $g$ peut osciller tranquillement… □

**Exercice 252** [X MP 2023 # 348] Pour $x \geq 1$, on note $\Theta(x) = \sum_{p\in\mathcal{P},\ p\leq x} \ln(p)$. Montrer que $\Theta(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x)$. **SUP**

*Démonstration.* Utiliser $\binom{2n}{n}$. □

**Exercice 253** [X MP 2023 # 349] Soit $F$ un ferme de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction $f$ de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

*Démonstration.* $e^{-1/d(x,F)}$ □

**Exercice 254** [X MP 2023 # 350] Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de $[0, 1]^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour toute permutation $\sigma$ de $\mathbb{N}$, il existe une fonction continue $f : [0, 1] \to [0, 1]^2$ et une suite strictement croissante $(t_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $[0, 1]$ telle que $f(t_n) = x_{\sigma(n)}$ pour tout $n \geq 0$.

**Exercice 255** [X MP 2023 # 351] Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$.

**Exercice 256** [X MP 2023 # 352] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $L_n$ la derivée $n$-ième de $(X^2 - 1)^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_{-1}^1 PL_n = 0$.
- Montrer que $L_n$ possede $n$ racines distinctes $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ dans $]-1, 1[$.
- Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_{-1}^1 P = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(x_i)$.

**Exercice 257** [X MP 2023 # 353] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^3$.

- On suppose $n$ impair. Montrer que $I_n = 0$.
- On suppose $n$ multiple de 4. Montrer que $I_n > 0$.
- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{4^{3n-1}}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2n}(x)\, \sin^{2n}(y)\, \sin^{2n}(x + y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

.

*Démonstration.* • Changement de variable, à extraire ?

- Il suffit $\binom{n}{k}^3 \leq \frac{1}{2}\left(\binom{n}{k-1}^3 + \binom{n}{k+1}^3\right)$, $\frac{1}{k^3(n-k)^3} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-k)^3(n-k+1)^3} + \frac{1}{k^3(k+1)^3}\right)$ Par l'AM-GM, il suffit $\frac{1}{k^3(n-k)^3} \leq \frac{1}{(n-k+1)^3(k+1)^3}$, ce qui est faux. !!
- □

**Exercice 258** [X MP 2023 # 354] • Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que$H_n : (a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \int_0^{2\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) - f(t)\right)^2 dt$ admet un minimum, atteint en un unique point, et donner une expression simple de ce point en fonction de $f$.

▷ Déterminer la limite de $\min H_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 259** [X MP 2023 # 355] Justifier l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{dt}{2+\lfloor\frac{1}{t}\rfloor}$.

**Exercice 260** [X 2023 # 356] Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f(x) < \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que $f(x) > \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}$ pour tout $x > 0$.

3. Donner un développement limité à quatre termes de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

*Démonstration.* ☐

**Exercice 261** [X 2023 # 357] Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Pour $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{|u|, |v|\}$, calculer $I_r(u,v) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(u-re^{i\theta})(v-re^{i\theta})}$.

*Démonstration.* ☐

**Exercice 262** [X MP 2023 # 358] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ intégrable, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. On suppose que $f'$ s'annule en un unique $M \in \mathbb{R}$.

- Donner le tableau de variations de $f$. Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^{m} f(t)dt = \frac{1}{2}$.
- Montrer que, pour tout $\ell \in ]0, f(M)[$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 < M < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2) = \ell$.
- Supposons que, pour tout $\ell \in ]0, f(M)[$, $f'(x_1) + f'(x_2) > 0$. Montrer que $m > M$.

*Démonstration.*
- $f$ est croissante, puis décroissante, puisque sa limite est nulle en $\pm\infty$.
-
- Revient à montrer que $\int_{-\infty}^{M} f(t)\,\mathrm{d}t < \int_{M}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, via un changement de variable. ☐

**Exercice 263** [X MP 2023 # 359]
- Soient $a$ et $b$ deux suites réelles telles que $b - a$ converge vers 0. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $m \geq 0$, il existe un entier $N_m$ tel que $\forall n \geq N_m,\ a_m \leq f_n \leq b_m$. Montrer que $(f_m)$ converge uniformément vers une fonction constante.
- On note $H$ l'ensemble des fonctions continues $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes et telles que $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $H$ forme un groupe pour la composition des fonctions.
- Soit $f \in H$. Montrer que $\sup\{f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}\} < 1 + \inf\{f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}\}$.

*Démonstration.*
- Suite de Cauchy. ☐

**Exercice 264** [X MP 2023 # 360] On note $F$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$, $C$ l'ensemble des fonctions continues de $F$. On note aussi $I = \{f \in F\ ;\ \forall a \in [0,1],\ \{x \in [0,1],\ f(x) \leq a\}$ est ferme$\}$ et $S = \{f \in F\ ;\ \forall a \in [0,1],\ \{x \in [0,1],\ f(x) \geq a\}$ est ferme$\}$.

Pour $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $L_n(f) : x \in [0,1] \mapsto \inf_{y\in[0,1]} (f(y) + n|x-y|) \in [0,1]$.

- Montrer que $C = I \cap S$.
- Montrer que, si $f \in F$, $L_n(f)$ est une suite croissante d'applications continues.
- Soit $f \in F$. Montrer que $f \in I$ si et seulement s'il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions de $C$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

*Démonstration.* !! ☐

**Exercice 265** [X MP 2023 # 361] Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ de classe $C^1$ telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \sim \dfrac{a}{x}$ quand $x \to +\infty$.

- Rappeler le théorème d'intégration des relations de comparaison.
- Donner un équivalent de $\ln f(x)$ quand $x \to +\infty$.
- Déterminer le domaine de définition de la fonction $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) e^{-nx}$.
- Déterminer les limites de $u$ aux bornes de son intervalle de définition.
- Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \sim \dfrac{C}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$.

**Exercice 266** [X MP 2023 # 362] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{n+4}{n+1} a_{n+1} + \frac{3n+7}{n+2} a_n.$$

- Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif.
- Déterminer la valeur de ce rayon de convergence.

*Démonstration.*
- On $a_{n+2} \leq C a_{n+1} + D a_n$.
- On a $a_{n+2} \geq a_{n+1} + 3a_n$, et pour tout $\varepsilon$, $a_{n+2} \leq (1+\varepsilon) a_{n+1} + (3+\varepsilon) a_n$. ☐

**Exercice 267** [X MP 2023 # 363] Pour $x$ réel, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ sous reserve de convergence.

- Déterminer le domaine de définition de $f$.
- Étudier la continuité puis la dérivabilité de $f$.
- Donner un équivalent simple de $f$ en $1^-$.
- Montrer que $f$ est développable en série entière, et preciser le développement associé.

*Démonstration.*
- $]-1,1[$
- pas de soucis.
- Comparaison $\sum / \int$. ☐

**Exercice 268** [X MP 2023 # 364] • Soient $U$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ somme d'une série entière. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(z) = O(z^k)$ quand $z$ tend vers 0. Montrer que, pour $r$ voisin de $0^+$, il existe au moins $2k$ nombres complexes $z$ de module $r$ tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

- Soient $A$ et $B$ deux polynômes a coefficients réels dont toute combinaison linéaire a coefficients réels est scindée ou nulle. Soient $x < y$ deux racines de $A$. Montre que $[x, y]$ contient au moins une racine de $B$.

**Exercice 269** [X MP 2023 # 365] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal a 1 et de somme $f$.

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall r \in [0, 1[, \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| d\theta \leq C$.

Montrer que $\int_0^1 |f(t)| dt < +\infty$.

*Démonstration.* Formule de Cauchy donne $(a_k k)$ bornée, donc $\sum |a_k|/k$ converge. □

**Exercice 270** [X 2023 # 366] Soit $P = a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{Z}[X]$ avec $a_1$ impair.

1. Montrer l'existence d'une suite réelle $(b_k)_{k\geq 0}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(P(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$.
2. Montrer que les $b_k$ sont tous non nuls.

*Démonstration.* 1.

2. Quand on dérive successivement $e^P$, on trouve une quantité qui vaut toujours 1 modulo 2. □

**Exercice 271** [X MP 2023 # 367] Pour $x$ et $q$ dans $]0, 1[$, on pose $(x, q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^k x)$.

- Montrer que la suite de terme général $(x, q)_n$ converge vers un réel $(x, q)_\infty > 0$.
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{(x,q)_n}{(q,q)_n} z^n$. On notera $f_{x,q}$ sa somme sur le disque ouvert de convergence, et $D$ son disque ouvert de convergence.
- Etablir l'identife $f_{x,q}(z) - f_{x,q}(qz) = (1 - x) z f_{x,q,q}(z)$ pour tout $z \in D$.
- Etablir l'identife $f_{x,q}(z) = \frac{1-xz}{1-z} f_{x,q}(qz)$ pour tout $z \in D$.
- Démontrer que $f_{x,q}(z) = \frac{(zx,q)_\infty}{(z,q)_\infty}$ pour tout $z \in D$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Déterminer, pour tout $z \in D$, la limite de $f_{q^\alpha,q}(z)$ quand $q$ tend vers $1^-$.

**Exercice 272** [X MP 2023 # 368] • Pour $x \geq 0$ on pose $f(x) = \operatorname{card}\left\{(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, n^2 + m^2 \leq x\right\}$. Trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

▷ On pose $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2}$. Trouver un équivalent de $g$ en $1^-$ en utilisant $g^2$.

*Démonstration.* •

- Considérer $(\sum t^n) g(t)$. □

**Exercice 273** [X MP 2023 # 369] Soit $p$ un nombre premier. Pour tout $F \in \mathbb{F}_p[X]$, on pose $|F| = p^{\deg F}$.

- Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > 1$. Montrre que la famille $\left(|F|^{-s}\right)$, indexée par les polynômes $F \in \mathbb{F}_p[X]$ unitaires, est sommable et calculer sa somme, qu'on notera $z(s)$.
- On note $A$ l'ensemble des polynômes unitaires de $F \in \mathbb{F}_p[X]$ sans facteur carré, c'est-a-dire tels que : $\forall D \in \mathbb{F}_p[X]$, $D^2 | F \Rightarrow \deg D = 0$. Montrer que $\sum_{F\in A} |F|^{-s} = \frac{z(s)}{z(2s)}$.
- En déduire, pour tout $d \in \mathbb{N}$, la proportion de polynômes sans facteur carré parmi les polynômes unitaires de degré $d$ de $\mathbb{F}_p[X]$.

*Démonstration.* !! todo □

**Exercice 274** [X MP 2023 # 370] Soit $f$ continue sur $[0, 1]$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{1+xt} dt$ pour $x \geq 0$. On suppose $f(0) \neq 0$.

- Donner un équivalent de $g$ lorsque $x \to +\infty$.
- On suppose $f$ de classe $\mathcal{C}^1$. Majorer l'ecart avec l'équivalent trouve.
- Que peut-on dire de plus si $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ ?

*Démonstration.* • CVD □

**Exercice 275** [X MP 2023 # 371] • Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2x} \, dt$.

▷ Montrre, pour tout réel $x > 0$, l'égalité $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{u \exp\left(-u^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{1-e^{-u^2}}} du$.

**Exercice 276** [X MP 2023 # 372] • Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) \, dt$ pour tout réel $x$.

- On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\,(1+t^2)} \, dt$. Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\forall x > 0,\ F''(x) = F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$
- Donner une expression simplifiée de $F$.

**Exercice 277** [X MP 2023 # 373] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ de carré intégrable. On pose $S_f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y} dy$.

- Justifier la bonne définition de $S_f$.
- Montrer que $S_f$ est de carré intégrable.

*Démonstration.* • CS

- Relier à des semblables. □

**Exercice 278** [X MP 2023 # 374] Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t-xt^\alpha}\, dt$.

- Déterminer la limite et un équivalent de $I$ en $+\infty$.
- Donner un développement asymptotique de $I$ a tout ordre.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce développement soit la somme partielle d'une série convergente pour tout $x > 0$.

**Exercice 279** [X MP 2023 # 375] • Soient $K$ un segment et $f : K \to K$ une fonction continue croissante. Montrer que $f$ admet un point fixe.

▷ On considère l'équation différentielle non linéaire $(E)$ : $x' = \cos(x) + \cos(t)$. On admet que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution $\varphi_a$ de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(0) = a$, et que, pour tous $a, b$ réels distincts, les fonctions $\varphi_a$ et $\varphi_b$ ne coincident en aucun point. Montrer que $(E)$ possede une solution $2\pi$-périoddique.

**Exercice 280** [X MP 2023 # 376] Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $a \in [0, 1]$.

- Justifier qu'il existe une unique fonction $x_a \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x'(t) = f(t) - (f(t) + g(t))\, x(t)$ et $x(0) = a$.
- On suppose que $f$ et $g$ ont une limite finie strictement positive en $+\infty$. Montrer que $x_a$ tend vers 0 en $+\infty$.
- Montrer que $f$ et $g$ peuvent être choisies de telle sorte que $x_a$ n'ait pas de limite en $+\infty$.
- On suppose que l'une des fonctions $f$ et $g$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $x_1 - x_0$ tend vers 0 en $+\infty$.

*Démonstration.* 1. On peut exprimer la solution, via exp.
2. Utiliser l'expression.
3. Prendre $f + g$ constante, et $f$ qui oscille.
4. Expression intégrale. □

**Exercice 281** [X MP 2023 # 377] Soient $v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact et $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = v(t)$ dont on note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions.

- Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $f^+_{a,b}$ (resp. $f^-_{a,b}$) de $(E)$ telle que $f^+_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ pour tout $t$ dans un voisinage de $+\infty$, (resp. $f^-_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ pour tout $t$ dans un voisinage de $-\infty$.
- Montrer que $\mathcal{S}_E = \{f^+_{a,b}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{f^-_{a,b}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
- On pose $c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\cos(\omega t)\, dt$ et $s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\sin(\omega t)\, dt$, et on définit l'application $S_\omega \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par : $f^-_{a,b} = f^+_{S_\omega(a,b)}$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Expliciter l'application $S_\omega$ en fonction de $c(\omega)$ et $s(\omega)$.
- On suppose que $S_\omega = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ pour tout $\omega > 0$. Montrer que $v$ est identiquement nulle.

*Démonstration.* 1. Appliquer les conditions aux bords du compact.
2. Pas de difficulté.
3. Méthode de variation de la constante je pense, à écrire. □

**Exercice 282** [X MP 2023 # 378] Soient $q_1, q_2$ deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \le q_2$. On considère l'équation différentielle $(E_i) : y'' + q_i(t)\, y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.

- Soient $y_1, y_2$ des solutions respectives de $(E_1)$ et $(E_2)$ sur $I$. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros de $y_1$. Montrer que $y_2$ s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
- Soient $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, $m, M$ deux réels strictement positifs tels que $m \le q \le M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs d'une solution non nulle $x$ de $y'' + q(t)\, y = 0$.
- Montrer que les zeros de $x$ fortner une suite strictement croissante $(t - n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \le t_{n+1} - t_n \le \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 283** [X MP 2023 # 379] • Soit $p$ un projecteur d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $pu + up = u$. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

- Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \ge 1$. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. On note $G$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $E$ de rang $r$. Soit $p \in G$. Déterminer l'espace vectoriel tangent à $G$ en $p$.

*Démonstration.* • $pup = 0$

- $u$ symétrique + $pu + up = u$ (puisque c'est le noyau de l'application linéaire).

  En conjuguant par une matrice orthogonale, on se ramène à $u = J_r$.

  On considère $\mathcal{G} = \{S \in \mathcal{S}_n \mid J_r S + S J_r = S\}$. Matriciellement, $\mathcal{G} = \left\{\begin{pmatrix} O & U \\ U^T & O \end{pmatrix}\right\}$.

  On a l'inclusion de l'espace tangent dans $\mathcal{G}$.

  Réciproquement, $J_r$ est la projection sur $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$.

  Étant donné des coefficients $u_{ij}$, et $t \in \mathbb{R}$, on peut considérer $F_t = \mathrm{Vect}(e_1 + \sum_{j \ge r+1} u_{1j} e_j, \ldots, e_r + \sum_{j \ge r+1} u_{rj} e_j)$, et $P_t$ la projection orthogonale sur $F_t$.

  En utilisant l'expression de la matrice de $P_t$ via des produits scalaires, on obtient (?). □

**Exercice 284** [X MP 2023 # 380] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considère le carré de coins $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. On choisit trois points $A$, $B$ et $C$ sur ce carré.

SUP

- Montrer qu'il existe une disposition des points $A$, $B$ et $C$ maximisant l'aire du triangle $ABC$.
- Caracteriser une telle disposition.

*Démonstration.* •
- Si $A$ n'est pas dans un coin, il faut nécessairement que le côté $BC$ soit parallèle au côté sur lequel $A$ est. □

## 3) Géométrie

**Exercice 285** [X MP 2023 # 381] Pour $n \geq 2$, on note $P_n$ le perimêtre d'un polygone regulier a $2^n$ cotes inscrit dans le cercle unite.

- Calculer $P_n$ et étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n\geq 2}$.
- Etablir une relation de recurrence entre $P_n$ et $P_{n+1}$.
- Estimer l'erreur $2\pi - P_n$.
- Proposer une methode d'approximation de $\pi$ par exces.

**Exercice 286** [X MP 2023 # 382] On se donne un triangle direct $ABC$ du plan complexe. On note respectivement $a, b, c$ les mesures principales des angles orientes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On note $P$ l'unique point tel que $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB})$ ; $Q$ l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AC})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ})$ ; $R$ l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ et $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BA})$. L'objectif est de montrer que le triangle $PQR$ est equilateral.

- On note $f, g, h$ les rotations de centres respectifs $A, B, C$ et d'angles de mesures respectives $\frac{2a}{3}$, $\frac{2b}{3}$ et $\frac{2c}{3}$. Montrer que $P$ est l'unique point fixe de $g \circ h$.
- Montrer que $(f^3 \circ g^3 \circ h^3)(z) = z$ pour tout nombre complexe $z$.
- On note $f : z \mapsto a_1 z + b_1$, $g : z \mapsto a_2 z + b_2$ et $h : z \mapsto a_3 z + b_3$. Experimer $P, Q, R$ en fonction des $a_i$ et des $b_i$.
- Conclure.

## 4) Probabilités

**Exercice 287** [X MP 2023 # 383] Déterminer le nombre moyen de 2-cycles, de 3-cycles, de $p$-cycles, d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

**Exercice 288** [X MP 2023 # 384] • Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle partition de $n$ toute liste decroissante $(\lambda - 1 \leq k \leq n$ d'entiers naturels non nuls de somme $n$. On note $P(n)$ le nombre de telles listes.
  Montrer que $P(n) \leq 2^{n-1}$.
- On fixe $n \geq 1$ et on considère une variable aléatoire $X$ suivant la loi uniforme sur l'ensemble des partitions de $n$. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$. On pose $N_k = |\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : X_i = k\}|$.
  Exprimer $\mathbf{P}(N_k \geq j)$ comme un quotient $\frac{P(a)}{P(b)}$ pour des entiers $a$ et $b$ a preciser.
- Calculer $\sum_{i=1}^{n} iN_i$.

*Démonstration.* !! todo □

**Exercice 289** [X MP 2023 # 385] On considère la suite $(a_n)$ définie par $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

- Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$.
- On lance une piece non truquée. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X$ qui donne l'instant de premiere apparition du motif Face-Face.
- Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
- Donner un équivalent de $\mathbf{P}(X = n)$.

**Exercice 290** [X MP 2023 # 386] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{S}_n$ de la loi uniforme, et on note $N$ la variable aléatoire associant a tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ le nombre de ses orbites.

- Calculer $\mathbf{P}(N = 1)$ et $\mathbf{P}(N = n)$.
- Donner une formule simple pour la fonction génératrice de $N$.
- Donner un équivalent de $\mathbf{E}(N)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
- Donner un équivalent de $\mathbf{V}(N)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 291** [X MP 2023 # 387] Soient $n \geq 2$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $f_{(X_1,\ldots,X_n)}$ la variable aléatoire a valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ telle que, pour tout $i$, $f_{(X_1,\ldots,X_n)}(e_i) = e_{X_i}$.

- Déterminer $\mathbf{E}\left(\mathrm{rg}\left(f_{(X_1,\ldots,X_n)}\right)\right)$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, soit $\mu_z$ la multiplicité de $z$ comme valeur propre de $f_{(X_1,\ldots,X_n)}$. Calculer $\mathbf{E}(\mu_z)$.

**Exercice 292** [X MP 2023 # 388] Soient $b, n \in \mathbb{N}^*$. On considère $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 0, b-1 \rrbracket$. On note $S$ l'ensemble des descentes de la suite $B$ c'est-a-dire $S = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid B_i > B_{i+1}\}$.

- Pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, calculer $\mathbf{P}(B_i > B_{i+1})$.
- Soit $j \in \llbracket 1, n-j-1 \rrbracket$. Calculer $\mathbf{P}(B_1 > B_2 > \cdots > B_{j+1})$.

- Pour $I \subset [\![1, n]\!]$, on pose $\alpha(I)$ (resp. $\beta(I)$) le nombre de suites a $n$ éléments à valeurs dans $[\![0, b-1]\!]$ qui vérifient $S \subset I$ (resp. $S = I$). Exprimer $\alpha$ en fonction de $\beta$, puis $\beta$ en fonction de $\alpha$.

**Exercice 293** [X MP 2023 # 389] Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ et $k \in \{1, \ldots, 2n\}$, on note $s(\sigma, k)$ le segment de $\mathbb{C}$ qui joint les points $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ et $e^{\frac{i\sigma(k)\pi}{n}}$. On note $b(\sigma)$ le nombre de segments qui ne croisent aucun autre segment (ou on dit que deux segments se croisent s'ils ont un point d'intersection qui n'est pas une extremite).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma_n$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_{2n}$. Déterminer $\mathbf{E}(b(\sigma_n))$ et en donner un équivalent.

**Exercice 294** [X 2023 # 390] Soient $p \in [0, 1/2]$, $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p$. On cherche $p$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i = 0\right) \geq \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i = b\right)$.

1. Montrer que $p \leq \frac{1}{3}$, puis que $p < \frac{1}{3}$ et enfin que $p \leq \frac{1}{4}$.
2. Si $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_X : \theta \mapsto \mathbf{E}\left(e^{iX\theta}\right)$. Exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de $\Phi_X$.
3. En déduire que $p \leq \frac{1}{4}$ est une condition suffisante.

*Démonstration.*
1. On regarde les probabilités, jusqu'à $n = 3$.
2. $\Phi_X(\theta) = \sum P(X = k)e^{ikt}$ et formule de Cauchy.
3. 

□

**Exercice 295** [X MP 2023 # 391] Soient $n$ et $d$ des entiers tels que $1 \leq d < n$, et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[\![0, d]\!]$. On note $S_n$ la classe de $X_1 + \cdots + X_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- La variable aléatoire $S_n$ est-elle uniformément distribuée sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ?
- Calculer la loi de $S_n$.

*Démonstration.*
- Non, cf $d = 1$, c'est une loi binomiale.
- Fonction génératrice.

□

**Exercice 296** [X MP 2023 # 392] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1, d]\!]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

- Soient $Y$ une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbb{Z}$, $r \in [\![0, d-1]\!]$, $\omega = e^{2i\pi/n}$.
  Montrer que $\mathbf{P}(Y \equiv r\,[d]) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\omega^{kr}} \mathbf{E}\left(\omega^{kY}\right)$.
- Soit $[\![0, d-1]\!]$. Donner une expression de $\mathbf{P}(S_n \equiv r\,[d])$.
- Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathbf{P}(S_n \equiv 0[d])$.

**Exercice 297** [X MP 2023 # 393] Soit $n \geq 1$.

- On se donne deux variables aléatoires indépendantes $X_n$ et $Y_n$ suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^2$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Déterminer la probabilité $u_n(r)$ pour que $X_n$ et $Y_n$ soient deux points distincts et le coefficient directeur de la droite $(X_n Y_n)$ soit égal a $r$. Donner un équivalent de $u_n(r)$ lorsque $n \to +\infty$.
- On se donne quatre variables aléatoires indépendantes $X_n, Y_n, A_n, B_n$ suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^2$. On note $p_n$ la probabilité pour que $X_n \neq Y_n$, $A_n \neq B_n$ et les droites $(X_n Y_n)$ et $(A_n B_n)$ soient parallèles. Montrer que $p_n = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$.

*Démonstration.* !!
- C'est la probabilité que $\frac{a_n - b_n}{c_n - d_n} = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire $p(c_n - d_n) = q(a_n - b_n)$. Les différences suivent des lois

□

**Exercice 298** [X MP 2023 # 394]
- Soit $a \in [1, 2]$. On pose $f_a : x \mapsto |1 + x|^a - |2x|^a - ax$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) \leq 1$.
- Soit $X$ une variable aléatoire réelle centrée et admettant un moment d'ordre 2. Montrer : $\forall c \in \mathbb{R}, \mathbf{E}\left(|c + X|^a\right) \leq 2^a \mathbf{E}(|X|^a) + |c|^a$.
- Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires centrées admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^a\right) \leq 2^a \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(|X_i|^a)$.

**Exercice 299** Urne de Polya [X MP 2023 # 395] Une urne contient $a$ boules jaunes et $b$ boules rouges. On effectue une succession de tirages d'une boule dans l'urne avec remise. À chaque tirage, on ajoute une boule de la couleur de celle tirée dans l'urne. On note $X_n$ le nombre de boules jaunes dans l'urne apres $n$ tirages et $T_n$ l'évènement «tirer une boule jaune au $n$-ième tirage».

1. s Calculer $P(T_1 \mid T_2)$.
2. Déterminer la loi de $X_n$.
3. Calculer $P(T_n)$.
4. Pour $n_1, ..., n_p, m_1, ..., m_q$ tous distincts, calculer $P(T_{n_1} \cap \cdots \cap T_{n_p} \cap \overline{T_{m_1}} \cap \cdots \cap \overline{T_{m_q}})$.

*Démonstration.*
1. 
2. $P(X_n = a) = \frac{b}{a+b} \frac{b+1}{a+b+1} \cdots \frac{b+n-1}{a+b+(n-1)}$
   $P(X_n = a+1) = n \frac{b}{a+b} \frac{b+1}{a+b+1} \cdots \frac{b+n-2}{a+b+(n-2)} \frac{a}{a+b+(n-1)}$.
   En général, $P(X_n = a+k) = \binom{n}{k} \frac{(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!} \frac{(b+n-k-1)}{(b-1)!} \frac{a+k-1!}{(a-1)!}$.
3. dur dur, $E(X_n)$
4. 

□

**Exercice 300** [X 2023 # 396] Soient $n \geq 1$ et $A, B, C$ des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{0,1\}^n$.

1. Pour $n \geq 2$, calculer la probabilité $p_n$ que $ABC$ soit un triangle équilatéral.
2. Déterminer un équivalent de $p_n$.

*Démonstration.* Relier à un précédent.

1. On prend $A = \vec{0}$. Alors on veut $B, C$ avec autant de termes 1, et autant de différences entre les deux.
   On considère les ensembles $B \subset [\![1,n]\!]$, $C[\![1,n]\!]$, et $B \oplus C$.
   Les parties $U = B \setminus C$, $V = C \setminus B$ et $W = B \cap C$ vérifient $u + w = v + w = u + v$, donc ils sont de même cardinaux, et disjoints. ☐

**Exercice 301** [X MP 2023 # 397] On munit l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $[1,n]$ de la probabilité uniforme. Soit $X_n$ la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

- Calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$.
- Déterminer la loi de $X_n$.
- Étudier la convergence en loi de la suite $(X - n \in \mathbb{N}^*$.
- Calculer les espérance et variance de la variable aléatoire $X_n$.

**Exercice 302** [X MP 2023 # 398] Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ une matrice aléatoire ou $(a+1) \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $(b+1) \sim \mathcal{P}(\beta)$, $(c+1) \sim \mathcal{P}(\gamma)$ et $(d+1) \sim \mathcal{P}(\delta)$.

- Calculer la probabilité que la matrice $M$ soit inversible.
- Calculer la probabilité que la matrice $M$ soit inversible et diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 303** [X MP 2023 # 399] Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires a valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbf{P}(X \geq Y) = 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\mathbf{P}(X = n) > 0$ et $\mathbf{P}(Y = i | X = n) = \dfrac{1}{n+1}$.

- Montrer que, si $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i, X - Y = j)$, puis que $X - Y \sim Y$.
- Montrer que $\mathbf{P}(Y = 0) > 0$.
- On suppose que $X - Y$ et $Y$ sont indépendantes. Déterminer la loi de $Y$, puis celle de $X$.

**Exercice 304** [X MP 2023 # 400] Soit $n \geq 3$ un entier. Si $k \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{k}$ la reduction de $k$ modulo $n$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes a valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k$ suit la loi uniforme sur $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. Soit $F$ l'application aléatoire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-meme telle que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $F(\overline{k}) = \overline{k} + X_k$. Calculer la probabilité que $F$ soit bijective.

**Exercice 305** [X MP 2023 # 401] On cherche a collectionner $N$ jouets. À chaque achat, chaque jouet a une probabilité uniforme d'être obtenu. Pour $i \in [\![1,N]\!]$, on note $T_i$ le temps d'attente pour obtenir $i$ jouets différents.

- Calculer l'espérance de $T_N$.
- Calculer la variance de $T_N$.
- Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{T_N}{N \ln N} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$.

**Exercice 306** [X MP 2023 # 402] Soit $(X - n \in \mathbb{N}^*$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles centrées.
On suppose que $\mathbf{E}(X_1^4) < +\infty$.

- Montrer que $\mathbf{E}\left((X_1 + \cdots + X_n)^4\right) = O(n^2)$.
- Pour $\varepsilon > 0$, quelle est la nature de la série de terme général $\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} > \varepsilon\right)$ ?

**Exercice 307** [X MP 2023 # 403] Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X - k \geq 1$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{P}(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $S_n = \sum_{k=1}^n X_k, T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

- Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geq x)dx = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.
- On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(T_n \geq x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$. Retrouver la formule de Stirling.