Exercices 2022

I) ENS

1) Algèbre

Exercice 1 ★ ★ [ENS 2022] Soient $m, M, r \in \mathbb{N}$ avec $r \geq 3$, et $k_0, \dots, k_M \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{i=0}^{M} k_i r^i = \sum_{i=0}^{m} r^i$. Montrer que $\sum_{i=0}^{M} |k_i| \geq m+1$.

Démonstration. Unicité de la décomposition $\sum a_i b^i$ avec $a_i \in [\![-b/2, b/2]\!]$ (problème b pair) + celle-ci minimise $\sum |a_i|$. Par récurrence, regarder modulo b.
Plus simple : récurrence sur m ; regarder k_0, qui s'écrit $1 + ur$. □

Exercice 2 ★ ★ [ENS 2022] Pour $n \in \mathbb{N}^*$,on note c_n le nombre de nombres premiers $\leq n$, et $\pi_n = \prod_{p \leq n} p$.

1. Montrer que $\pi_n = O(4^n)$.
2. Montrer que $c_n^{c_n} = O(r_n)$.
3. En déduire que $c_n = O(\frac{n}{\ln n})$.

Démonstration. □

Exercice 3 ★ ★ [ENS 2022] On note φ la fonction indicatrice d'Euler.

1. a) Montrer que $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$, pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.
   b) Rappeler la formule explicite pour $\varphi(n)$.
   c) Calculer $\sum_{d|n} \varphi(d)$, pour $n \geq 1$.
2. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\varphi(nm)$ en fonction de $\varphi(m)$, $\varphi(n)$, $\varphi(n \wedge m)$ et $n \wedge m$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs premiers de n, et $\mu(n) = (-1)^{d_n}$ si n n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier, 0 sinon. Montrer que μ est multiplicative, et calculer $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.

Démonstration. □

Exercice 4 ★ ★ [ENS 2022] On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2},\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que A est euclidien, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $N \colon \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $a \in A$ et $b \in \setminus\{0\}$, il existe un couple $(q, r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ et $N(r) < N(b)$.
3. Énoncer et démontrer un théorème d'existence et d'unicité d'une décomposition en facteurs irréductibles dans A.

Démonstration. □

Exercice 5 ★ [ENS 2022] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\nu(\sigma)$ son nombre de points fixes. Calculer $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}$.

Démonstration. Considérer une matrice dont le déterminant est $\sum_\sigma \varepsilon(\sigma) x^{v(\sigma)}$. □

Exercice 6 ★ ★ [ENS 2022] Déterminer les inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\,[X]$.

Démonstration. Si n est premier, seules les constantes le sont, car $\deg PQ = \deg P + \deg Q$.
Sinon, les constantes premières avec n le sont. Et si on est inversible, on l'est modulo tous les premiers qui divisent n. Donc tous les coefficients sont divisibles par le radical.
On se ramène à $n = p^\alpha$, et même $\alpha = 2$, avec $P(0) = Q(0) = 1$. Alors $PQ = P + Q - 1$. C'est tout à fait possible : ils sont tous inversibles.
Pour $\alpha = 3$. Il faut $p \mid$ les coefficients, l'inverse a des coefficients modulo p^2 qui sont les opposés. $Q = 1 + \sum((-b_i)p + d_i p^2)X^i = 1 - P' + p^2 Q'$. Alors $PQ = (1 + P')(1 - P' + p^2 Q') = -P'^2 + p^2 Q'$. Tout à fait possible, tous inversibles.
Par récurrence, on montre que c'est possible, en partant d'une solution modulo $p^{\alpha-1}$.
Puis, lemme chinois, on est bon : il suffit d'être divisible par le radical. □

Exercice 7 ★ ★ [ENS 2022] Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est un L-groupe si c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$ tel que $\operatorname{Vect} A = \mathbb{R}^n$ et si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, $A \cap B(x, r)$ est fini.

1. Que dire dans le cas $n = 1$?
2. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On pose $L_e = \{a_1 e_1 + \dots + a_n e_n,\, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n\}$.
   a) Montrer que L_e est un L-groupe.
   b) À quelle condition a-t-on $L_e = L'_e$?

Démonstration. 1.

2. a) C'est de l'équivalence des normes.
   b) La matrice de passage est dans $GL_n(\mathbb{Z})$. □

Exercice 8 ★ ★ [ENS 2022] Soit $\varphi \colon SL_2(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme. Montrer que φ est à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. $SL_2(\mathbb{R})$ est engendré par des commutateurs. Pourquoi ? $\square$

Exercice 9 ★ ★ Décomposition KAN [ENS 2022] Pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, et $h \in H$, on pose $g.z = \frac{az+b}{cz+d}$.

1. Montrer que H est stable par l'action et que $g'.(g.z) = (g'g).z$.
2. Soit $K = SO_2(\mathbb{R})$, A le sous-groupe de SL_2 formé de matrices diagonales, et N les unipotentes supérieures. Montrer que tout élément $g \in G$ se décompose de manière unique $g = kan$.
   Indication : considérer $g(i)$.

Démonstration. $\square$

Exercice 10 [ENS 2022] Pour G un groupe, on note $\mathrm{sub}(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G. Soient G, H finis de cardinaux premiers entre eux. Montrer que $|\mathrm{sub}(G \times H)| = |\mathrm{sub}(G)| \times |\mathrm{sub}(H)|$.

Démonstration. On a une application injective. Réciproquement, si K est un sous-groupe de $G \times H$, de cardinal m, on a $m = (m \wedge n_1) \times (m \wedge n_2)$. $p_1(K)$ est un sous-groupe de G, et on est inclus dans le produit des projections. L'application $x \mapsto x_2^n$ est une bijection sur $p_1(K)$, et envoie K dans $p_1(K)$. Donc $K = p_1(K) \times p_2(K)$. $\square$

Exercice 11 ★ ★ [ENS 2022]

1. Soit (a_n) une suite sous-additive, montrer que $\frac{a_n}{n}$ converge.
2. Soit G un groupe multiplicatif, S une partie génératrice finie de G, stable par passage à l'inverse. Pour $x \in G$, on pose $L_S(x)$ le nombre d'éléments de S nécessaires pour l'engendrer. Pour Φ un endomorphisme de G, on pose $\Lambda_S(\Phi) = \max\{L_S(\Phi(x)),\ x \in S\}$. Montrer que $\frac{1}{n} \ln \Lambda_S(\Phi^n)$ converge vers une limite indépendante de S.

Démonstration.
1.
2. $\Lambda_S(\Phi^{p+q}) = \max\{L_S(\Phi^p(\Phi^q(x))), x \in S\} \leq \Lambda_S(\Phi^p)\Lambda_S(\Phi^q)$, d'où la convergence.
   Pour l'indépendance, si S_1, S_2 sont deux parties génératrices, on peut écrire l'un dans l'autre etc, ce qui donne deux constantes. $\square$

Exercice 12 [ENS 2022] Si A est un anneau commutatif, et I un idéal de A, on dit que I est premier si $A \backslash I$ est stable par multiplication.

1. Montrer que tout idéal maximal est premier.
2. Soit $n \geq 3$ premier, et $A = \mathbb{Z}[e^{2i\pi/n}]$. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

Démonstration.
1. Si I est maximal, pour tout c, $\langle I, c\rangle = A$, donc il existe b tel que $bc + i = 1$, donc $bc \not\in I$.
2. On a un polynôme annulateur : $1 + X + \cdots + X^{n-1}$. Soit I un idéal premier. On a $P(\omega)Q(\omega) \in I \Rightarrow P(\omega) \in I$ ou $Q(\omega) \in I$.
   $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\, I = A$, puisque c'est un idéal d'un corps (car irréductible).
   Donc A/I est fini, et intègre donc c'est un corps… $\square$

Exercice 13 ★ ★ [ENS 2022, ENS 2019]

1. Pour $n \geq 1$, montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(4n\theta) = \cos\theta \sin\theta P_n\big(\cos^2\theta\big)$.
2. Calculer $\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$ puis $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)$, puis $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Démonstration.
1. On a

$$\begin{aligned}\sin(4n\theta) = \mathrm{Im}(e^{i4n\theta}) &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1} \cos^{4n-2k-1} \\ &= \sin\cos \sum_{k=0}^{2n-1} \sin^{2k} \cos^{4n-2(k+1)} = \sin\cos \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} (-1)^k (1-\cos^2)^k \big(\cos^2\big)^{2n-(k+1)}.\end{aligned}$$

   D'où $P_n(X) = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} (-1)^k (1-X)^k X^{2n-(k+1)}$
2. P_n a une propriété de symétrie :

$$P_n(1-X) = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} (-1)^k X^k (1-X)^{2n-1-k} = \sum_{\ell=0}^{2n-1} \binom{4n}{2(2n-1-\ell)+1} (-1)^{2n-1-k} X^{2n-1-\ell} (1-X)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{2n-1} \binom{4n}{2\ell-1} ($$

   Les racines de P_n : $\sin(4n\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{4n}$, donc les $\cos^2 \frac{k\pi}{4n}$ sont racines de P_n, sauf pour $\sin\theta = 0$, ou $\cos\theta = 0$, donc pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$.
   Pour le dernier : on trouve $\frac{1}{2^n}$. $\square$

Exercice 14 ★ ★ [ENS 2022] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$. Montrer que P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \big(P^{(i)}(x)\big)^2 - P^{(i-1)}(x)P^{(i+1)}(x) > 0$.

Démonstration. Si scindé à racines simples, alors par récurrence : il suffit de vérifier $i = 1$: $a_1^2 - 2a_0a_2 > 0$; En divisant par le produit des racines : $(\sum \frac{1}{x_i})^2 > 2\sum_{i<j} \frac{1}{x_ix_j}$, ce qui est correct.

Réciproquement, par récurrence également. Si P vérifie les inégalités, on sait que P' est scindé à racines simples, et $P'(x)^2 > P(x)P''(x)$. En deux racines consécutives de P', on a $P(x)P''(x) < 0$, mais on sait que P'' change de signe, donc P change de signe. □

Exercice 15 [ENS 2022] On pose $\Phi_1 = X - 1$ et, pour $n \geq 2$, $\Phi_n = \frac{X^n - 1}{\prod_{d|n,\, d<n} \Phi_d(X)}$.

1. Montrer que $\Phi_n(X) = \prod_{k\wedge n=1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.
2. Montrer que $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.
3. Montrer que pour p, q premiers distincts, Φ_{pq} est à coefficients dans $[\![-1, 1]\!]$.
4. Donner le coefficient en X^7 dans Φ_{105}.

Démonstration.

-
-
- $\Phi_{pq}(X-1)(\sum_{i=0}^{q-1} X^i)(\sum_{i=0}^{p-1} X^i) = X^{pq} - 1$ $\Phi_{pq} = \frac{X^{pq}-1}{X^q-1}\frac{X-1}{X^q-1} = (X-1)(1 + X^q + \cdots + X^{q(p-1)})(1 + X^q + X^{2q} + \ldots)$. Donc le coefficient k est moins le nombre de façons d'écrire $k = \alpha q + \beta p$, plus le nombre de $k - 1 = \alpha q + \beta p$, avec α, β petits.
- On a $105 = 3 \times 5 \times 7$. On calcule $\Phi_{3,5,7}$, puis on fait la division euclidienne, en partant de la fin. □

Exercice 16 ★ ★ [ENS 2022] Soit p un nombre premier. On pose $\Phi_p = \frac{X^p-1}{X-1}$.

1. Montrer que Φ_p est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. On note $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. Montrer que si $Q \in \mathbb{Q}[X]$ et $R \in \mathbb{Q}[X]$ vérifient $Q(\zeta) = R(\zeta)$, alors $\Phi_p \mid Q - R$.
3. Montrer que $\mathbb{Q}[\zeta] = \{P(\zeta),\ P \in \mathbb{Q}_{p-1}[X]\}$ est un corps.
4. Montrer que si $Q \in \mathbb{Q}[X]$ et $R \in \mathbb{Q}[X]$ vérifient $Q(\zeta) = R(\zeta)$, alors pour tout entier k non multiple de p, $Q(\zeta^k) = R(\zeta^k)$.
5. Soient $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{Q}^p$. On pose $C = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \end{pmatrix}$. Montrer que si C est inversible, son inverse est de la même forme.

Démonstration. □

Exercice 17 [ENS 2022] On admet que tout polynôme de $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ se factorise de manière unique comme produit de polynômes irréductibles.

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & \ldots & X_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ X_2 & & \ddots & X_1 \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_0 \end{vmatrix}$.

Démonstration. $D = \prod_\omega (X_0 + \omega X_1 + \cdots + \omega^{n-1}X_{n-1})$: par exemple, si la somme vaut 0, c'est nul. On utilise que si P s'annule lorsque Q s'annule, et Q est irréductible, alors $P = Q \ldots$. C'est faux, car certains polynômes ne s'annulent pas. □

Exercice 18 ★ [ENS 2022] Soit $n \geq 2$. On note G_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dont 0 est racine simple.

1. Pour $P, Q \in G_n$, montrer qu'il existe un unique $T \in G_n$ tel que $X^n \mid P \circ Q - T$. On note alors $P \star Q = T$.
2. Montrer que $(G_n, \star)$ forme un groupe.

Démonstration.

1. Trivial.
2. □

Exercice 19 ★ ★ [ENS 2022] Soit $d \geq 1$ et $0 < a_1 < \ldots < a_d$ des entiers. On pose $P_n = \prod_{k=1}^d (X - na_k) - 1$.

1. Montrer que pour n assez grand, P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $n \geq 1$ pour lequel P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et tout $k \leq d$, on note $x_n^{(k)}$ la k-ième racine de P_n dans l'ordre croissant. Déterminer, pour $k \in [\![1, n]\!]$, un équivalent de $x_n^{(k)}$.
3. Montrer que P_n est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ pour tout $n \geq 1$.

Démonstration.

1. On prend le polynôme $Q_n = \prod_{k=1}^d (X - na_k)$, et on le translate de 1. Il suffit de justifier que ses maximaux sont > 1, quand la distance entre les racines consécutives est ≥ 2.
2. On a une info sur les racines de la dérivée, qui sont entre na_k et na_{k+1} ; c'est inutile.

   Les racines de P_n sont proches de celles de $\prod_{k=1}^d$, donc $x_n^{(k)} \sim aa_k$. Il suffit de justifier que $Q_n(na_k(1+\varepsilon)) > 1$: c'est $\varepsilon na_k \prod_{i\neq k}^d \cdots \geq \varepsilon na_k$.
3. Si $P_n = Q_nR_n$, on a $Q_n(na_k) = \pm 1$, et $R_n + Q_n$ a trop de racines. □

Exercice 20 ★ [ENS 2022] Soient a, b réels et $n \geq 3$ impair. Étudier, en fonction de n, a, b le nombre de racines réelles de $X^n + aX + b$.

Démonstration. □

Exercice 21 ★ ★ [ENS 2022] Soit $n \geq 1$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. À quelle condition existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^2 = M$ et $\forall i,\ M_{ii} = \lambda_i$.

Démonstration. Nécessairement $K = \sum \lambda_i \in [\![0, n]\!]$. Les cas 0 et n sont rigides : tous les λ_i doivent être égaux à 0 ou 1.

Pour $K = 1$, en prenant $(1\,1\,\dots\,1)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \dots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$, ça marche.

Donc pour $K = n-1$, ça marche : si p projecteur, $I_n - p$ est un projecteur.

On peut obtenir n'importe quel $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1)$, ou n'importe quel $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_{n-k})$, si les sous-sommes valent 1 chacune.

On pourrait essayer de conjuguer un bloc, par SL_2. On conjugue par une unipotente sup : c'est la fête, permet d'ajouter c à un coefficient diagonal, et retirer c à l'autre.

On prend une projection quelconque, et on modifie les coefficients petit à petit.

Pour le premier, s'il n'y a que des 0 plus bas, à moins que tous les vecteurs suivants soient dans l'image, on peut mettre un coefficient $\neq 0$ en dessous de a_{11}, puis transformer a_{11} en ce qu'on veut.

Idem à chaque fois. Si tous les vecteurs suivants sont dans l'image, c'est qu'initialement, on pouvait découper les λ_i cherchés en groupe dont la somme fait un entier, auquel cas, méthode précédente. □

Exercice 22 ★ [ENS 2022] Soit $n \geq 2$. On note U_n l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dont les coefficients diagonaux sont de module 1, et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices de permutation. On pose $\mathcal{N}_n = \{AB\,;\ (A, B) \in U_n \times \mathcal{S}_n\}$.

1. Montrer que $\mathcal{N}_n$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que le commutant du commutant de $\mathcal{N}_n$ est égal à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration.
1.
2. Il contient $\operatorname{Vect} \mathcal{N}_n$. □

Exercice 23 ★ [ENS 2022] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note P_σ la matrice de permutation associée. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales complexes de taille n dont les coefficients sont de module égal à 1. Les ensembles $\mathcal{M}_2 = \{P_\sigma D P_{\sigma'},\ \sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n, D \in \mathcal{D}_n\}$ et $\mathcal{M}_2 = \{P_\sigma D P_\sigma,\ \sigma \in \mathcal{S}_n, D \in \mathcal{D}_n\}$ forment-ils des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$?

Démonstration. Le premier oui, le second non, car l'ensemble des σ^2 n'est pas un sous-groupe. □

Exercice 24 [ENS 2022] Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{A}$, $\overline{M}^T \in \mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}'$ le commutant de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}''$ celui de $\mathcal{A}'$. Montrer que $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

Démonstration. Soit $X_0 \in \mathbb{C}^n$, et $F = \mathcal{A}X_0$. Alors F est stable par $\mathcal{A}$. Mais $M + \overline{M}^T$ et $M - \overline{M}^T$ préservent l'orthogonalité. Donc $F^\perp$ l'est.

Si $M \in \mathcal{A}''$, M commute avec les matrices diagonales par blocs, donc M préserve aussi F et $\mathcal{F}^\perp$.

Méga astuce : on considère l'action diagonale, et $X_0 = (E_1, \dots, E_n)$.

On remarque que si $M \in \mathcal{A}''$, alors $\operatorname{Diag}(M, \dots, M)$ est dans le bicommutant de l'action diagonale. Car si U commute avec $\operatorname{Diag}(\mathcal{A})$, alors tous les coefficients de U commutent avec $\mathcal{A}$.

Cela signifie que si $M \in \mathcal{A}''$, $A \mapsto MA$ commute avec la projection orthogonale sur $\mathcal{A}$. En particulier, $M \mapsto MA$ préserve $\mathcal{A}$, d'où $M \in \mathcal{A}$. □

Exercice 25 ★ ★ [ENS 2022] Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G alors F possède un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Démonstration. □

Exercice 26 [ENS 2022] Soit $P_1, \dots, P_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall i, j,\ P_iP_j = \delta_{i,j}P_i$ et $\sum_{i=1}^r P_i = I_n$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des réels distincts. On pose $A = \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i$.

Montrer que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = \sum_{i=1}^r P_iBP_i + AK - KA$.

Démonstration. On peut conjuguer le tout, pour que les P_i soient des projections sur des blocs consécutifs de la base canonique. Alors $\sum P_iBP_i$ est la partie diagonale par bloc de B, et A est une diagonale d'identité par blocs. On sait que A commute avec toutes les diagonales par blocs, et uniquement avec eux, et l'image du crochet est inclus dans les non diagonales par blocs. □

Exercice 27 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note q la multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique de A.

1. Montrer l'existence et l'unicité de $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XA$, $A^{q+1}X = A^q$ et $XAX = X$.
2. Que dire si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3. L'application $\varphi\colon A \mapsto X$ est-elle continue ?
4. Soit (A_k) une suite convergente de matrices complexes. CNS pour que $\varphi(A_k) \to \varphi(\lim A_k)$.

Démonstration.
1. $A^qP(A) = 0$ donc dans $\operatorname{Ker} A^q \oplus \operatorname{Ker} P(A)$, la matrice est diagonale par blocs.
   Unicité : Si on commute, on stabilise les deux espaces…
2. La même…

3. En O_n, non : l'inverse tend vers $+\infty$, pour $A = (0, \dots, 0, \varepsilon)$.
4. Si la multiplicité de 0 n'est pas constante APCR, non continue ?

   Si la multiplicité est constante, toute valeur d'adhérence de X_k est solution. Il faut exclure la possibilité que X_k tende vers $+\infty$. Mais si c'est le cas, il existe des vecteurs E_k tels que $X_k E_k \to +\infty$, avec E_k dans le bloc du bas, donc tel que $AX = \mathrm{Id}$, on obtient $A_k X_k E_k = E_k$, ce qui est impossible.

   Alternative : Expliciter X_k comme un polynôme en A, qui dépend du polynôme caractéristique.

   Réciproquement, on peut supposer que la multiplicité de la limite est 1 de moins. Très simplement, utiliser la trace de $A_k X_k$. Donc non continue. □

Exercice 28 [ENS 2022] Soit $n \geq 1$ impair, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $A + iB$ admet un vecteur propre réel.

Démonstration. $AX + iBX = (\lambda + i\mu)X$, c'est-à-dire $AX = \lambda X$ et $BX = \mu X$: c'est un vecteur propre commun, possible car n impair. A admet une valeur propre, dont l'espace caractéristique est de dimension impair. Dans cet espace, B admet une valeur propre, et A a forcément un vecteur propre là-dedans. □

Exercice 29 [ENS 2022] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose $F = P(X)^2$.

1. Montrer que $f\colon A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto F(A)$ n'est pas surjective.
2. Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $f^{-1}(\{N\})$ soit infini.
3. Montrer qu'il existe un ensemble E dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout $M \in E$, $|f^{-1}(\{M\})|$ soit fini et indépendant de M.

Démonstration. 1. Toutes les matrices ne sont pas des carrés : prendre une nilpotente de rang $n-1$.

2. Si $P(0) = 0$, $N = O_n$ fonctionne. Mais même en général, on a $(M - \alpha I_n)^2$ en facteur, et une infinité de matrices sont annulées par cela.
3. Si D est diagonale, à coefficients distincts, $P(M)^2 = D$ implique M commute avec D, donc M diagonale, et $P(m_i)^2 = d_i$, et en évitant les points critiques, (racines de la dérivée), cela a toujours le même nombre de solutions. □

Exercice 30 [ENS 2022] Soit $p \geq 1$, $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On dit que A est toute puissante si pour tout $n \geq 1$, il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^n = A$.

1. Traiter le cas $p = 1$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.
2. On suppose que $\chi_A = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
   a) Montrer qu'il existe $N_1, \dots, N_k$ nilpotentes telles que A soit semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i)$.
   b) Montrer que A est toute puissante si et seulement si les $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ le sont.
3. On dit que M est unipotente si $M - I_p$ est nilpotente.

   Pour A unipotente, on pose $\ln A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(A - I_p)^n$.
   a) Justifier la définition de $\ln A$. Montrer que $\exp$ réalise une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur les matrices unipotentes.
   b) Montrer que les matrices unipotentes sont toutes puissantes.

Exercice 31 [ENS 2022] 1. Quelle est la dimension maximale d'une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par une matrice nilpotente.

2. Soit $m \geq 1$ et $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentes qui commutent deux à deux. On note $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par les A_i. Montrer que $\dim \mathcal{A} \leq n(n - \min \operatorname{rang} A_i)$.

Démonstration. 1. n : Cayley-Hamilton.

2. On note r le rang minimal. Dans une base qui commence par l'image, les matrices ont des matrices triangulaires supérieures, donc on a déjà $nr - r^2$ comme dimension de 0. D'autre part, les deux blocs diagonaux vérifient les mêmes hypothèses, et on sait que la dimension d'une algèbre nilpotente qui commutent est $\leq \frac{n(n-1)}{2}$ (puisque co-trigonalisables) □

Exercice 32 ★ ★ [ENS 2022] Déterminer les morphismes d'algèbres de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est commutative. On prend un polynôme annulateur de $\varphi(f)$, et sa partie scindée annule également, je crois, donc diagonalisable, donc codiagonalisable, et on a des $f(x_i)$ sur la diagonale. □

Exercice 33 ★ ★ [ENS 2022] On note E l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ de carré sommable. On fixe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ et on considère l'opérateur $T_{a,b}\colon u \in E \mapsto (au_{n+1} + bu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T_{a,b} - \lambda \,\mathrm{Id}$ ne soit pas bijectif.

Démonstration. Revient à déterminer les a, b tels que $T_{a,b}$ ne soit pas bijectif.
Injectivité : si $a = 0$, si et seulement si $b \neq 0$. Si $a \neq 0$, si et seulement si $\left|\frac{b}{a}\right| \geq 1$.

Surjectivité : Si $a \neq 0$, on a $|a| \leq |b|$. Soit (v_n), on résout $T_{a,b}(u) = v$, équivalent à $u_1 = \frac{v_0 - bu_0}{a}$, $u_2 = \frac{v_1}{a} - \frac{b}{a^2}v_0 + \frac{b^2}{a^2}u_0$. Si cette quantité tend vers 0, comme elle s'écrit $\frac{b^n}{a^n}\left(u_0 - \frac{v_0}{b} + \frac{v_1 a}{b^2} - \dots\right)$, nécessairement u_0 est la somme de cette série. Donc elle doit converger, ce qui n'est pas le cas pour certains (v_n) dans le cas $|b| = |a|$. Mais en prenant deux suites (v_n) dont la série ait la même somme, et qui ne diffèrent qu'en deux termes, les deux ne peuvent pas tendre vers 0, si $|\frac{b}{a}| > 1$. □

Exercice 34 Groupe SU(2) [ENS 2022] Soit G l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{C}$ vérifient $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

1. Vérifier que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que G possède un unique sous-groupe distingué autre que G et $\{I_2\}$.
   Un sous-groupe H de G est distingué si pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} = H$.

Démonstration. 1.

2. Il contient $\{\pm I_2\}$ comme sous-groupe distingué.
   Réciproquement, si H est distingué. Il contient un élément e. Cet élément est diagonalisable, de valeurs propres dont la somme est réelle, est le produit fait 1. Donc e appartient à un $SO(2)$.
   $\begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta}|a|^2 + e^{-i\theta}|b|^2 & ab(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$. Donc, si $\theta \neq \pm 1$, on peut trouver n'importe quel coefficient sur l'antidiagonale, et si on le fixe, on a un autre paramètre pour faire varier a. □

Exercice 35 [ENS 2022] On note $G_n = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n$ et $V = \mathcal{F}(G_n, \mathbb{R})$.

1. Dimension de V ?
2. Pour $x \in G_n$, on note $v_x = \mathbb{1}_x$. Pour $x, y \in G_n$, on note $x \sim y$ si la liste $y - x$ a exactement un terme non nul. On définit un endomorphisme ψ de V par $\psi(v_x) = \sum_{y \in G_n | y \sim x} v_y$. Montrer que ψ est diagonalisable.
3. Montrer que tout morphisme de groupes de G_n vers $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un vecteur propre de ψ

Démonstration. 1.

2. ψ est symétrique. □

Exercice 36 ★ ★ Pfaffien [ENS 2022]

1. Montrer que si n est impair, alors $\mathcal{A}_n$ ne contient aucune matrice inversible.
2. On suppose n pair. On note $I = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Montrer qu'il existe une fonction polynomiale $P \colon \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ telle que $\det A = P^2\big((a_{ij})\big)$ pour tout $A \in \mathcal{A}_n$.

Démonstration. 1. Déterminant.

2. On peut faire une récurrence : écrire le bloc 2-2 en haut à gauche, et faire le pivot pour annuler ce qui est en dessous, puis ce n'est pas trivial, il faut discuter de l'homogénéité.
   Sinon. Quand on développe il ne reste que les termes pour lesquels toutes les orbites sont de longueurs paires. Que l'on peut regrouper par deux, l'un et son inverse, sauf si $\sigma^2 = 1$. Ces termes donnent des carrés. On note $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des partitions de $[\![1, 2n]\!]$ en paires. On intuite $P(A) = \sum_{\mathcal{P}_2} s(P) \prod_{(i<j) \in P} a_{ij}$, où $s(P)$ est un signe.
   Compliqué, mais si $P = (i_1, j_1), \dots (i_n, j_n)$ on prend pour $s(P)$ la signature de la permutation $1 \mapsto i_1$, $2 \mapsto j_1$, $3 \mapsto i_2$, etc.
   Quand on développe le carré, les carrés sont bons. Les autres termes sont de la forme $s(P_1)s(P_2) \prod_{(i<j) \in P_1} a_{ij} \prod_{(i<j) \in P_2} a_{ij}$.
   À (P_1, P_2) on peut associer une classe d'équivalence de permutations, en suivant les orbites (mais chaque orbite peut aussi être lue dans l'autre sens). On peut vérifier que les orbites sont paires. La signature de la permutation est bien égale à $s(P_1)s(P_2)$: il y a 2^m permutations dans la classe.
   Réciproquement, si σ est une telle permutation, alors elle correspond à plusieurs couples (P_1, P_2) : 2^m essentiellement : pour chaque orbite, on peut choisir dans lequel de P_1, P_2 est-ce qu'on met le premier élément.
   Autre approche : La méthode de Gauss permet de réduire une forme quadratique, comme somme/différence de carrés. On peut de même réduire la matrice antisymétrique, en $\sum b_i(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$, autrement dit, il existe P orthogonale, tel que $P^{-1}AP$ soit de cette forme. On obtient que $\det A$ est le carré d'une fraction rationnelle. Et si on admet la factorialité de $\mathbb{R}[a_{ij}]$, comme $\det A$ est un polynôme, c'est le carré d'un polynôme. □

Exercice 37 [ENS 2022] Soit E un espace euclidien, G un sous-groupe fini d'ordre $n > 1$ de $\mathcal{O}(E)$ et v un vecteur unitaire de E tel que $\|g(v) - v\|^2 < \frac{2n}{n-1}$ pour tout $g \in G$. Montrer qu'il existe un vecteur $w \in E \setminus \{0\}$ tel que $g(w) = w$ pour tout $g \in G$.

Démonstration. Considérer $\frac{1}{n} \sum g$: c'est un projecteur, et comme ce sont des isométries, l'image est l'ensemble des points fixes communs.
Sous l'hypothèse $\sum g = 0$, on écrit $\sum gv = 0$, et on isole l'identité. □

Exercice 38 [ENS 2022] Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes.

- Toute combinaison linéaire de A_1, A_2 est diagonalisable.
- Ou bien les matrices A_1, A_2 sont codiagonalisables, ou bien toute combinaison linéaire non nulle de A_1, A_2 admet deux valeurs propres réelles distinctes.
- Il existe $S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ telle que pour toute combinaison linéaire A de A_1 et A_2, on ait $SA \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration.
- $(i) \Rightarrow (ii)$: supposons qu'une combinaison linéaire non nulle des A_i admette deux valeurs propres égales $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = I_n$, alors A_1 et A_2 commutent, donc sont codiagonalisables.
- $(ii) \Rightarrow (iii)$: Si $A_1 = PD_1P^{-1}$ et $A_2 = PD_2P^{-1}$, on a $SA = SPDP^{-1}$, et cette matrice est symétrique si et seulement si $SPDP^{-1} = P^{-T}DP^TS$, c'est-à-dire si et seulement si P^TSP commute avec D. On peut donc bien choisir S qui convient.
  Si A_1 et A_2 admettent toujours deux valeurs propres distinctes. Alors, en rajoutant I_n, on obtient un sous-espace vectoriel de dimension 3 qui vérifie l'hypothèse. Il contient une matrice non inversible, que l'on peut conjuguer par une orthogonale en

$\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, et il contient une troisième matrice, que l'on peut écrire de la forme $\begin{pmatrix}0 & \beta\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. On obtient $\begin{pmatrix}\lambda & \lambda\alpha+\mu\beta\\ \mu & 0\end{pmatrix}$, de trace λ, de déterminant $-\mu\lambda\alpha-\mu^2\beta$, et on doit avoir $\lambda^2+4\mu\lambda\alpha+4\mu^2\beta\geq 0$. Donc le discriminant en λ est ≤ 0 : $\mu^2\alpha^2-\mu^2\beta\leq 0$, c'est-à-dire $\alpha^2\leq\beta$.

Si S, on a $SA=(S_1\alpha S_1)$, et $SB=(S_2\beta S_1)$. donc $S=\begin{pmatrix}1 & *\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$, et il faut que $(1+\beta)^2-4(\beta-\alpha^2)\geq 0$, c'est-à-dire $1-2\beta+\beta^2+4\alpha^2\geq 0$, c'est bien le cas. Et la trace est positive, donc les valeurs propres le sont.

- $(iii)\Rightarrow(i)$: une matrice SS_2 avec S def positive est toujours diagonalisable : écrire $S=PP^T$, et SS_2 est semblable à une matrice symétrique. □

Exercice 39 [ENS 2022] Soit $n\geq 1$. Quand c'est défini, on pose $f(B)=(I_n-B)(I_n+B)^{-1}$.

1. Si $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $f(A)$ est défini.
2. Si $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $f(A)\in SO_n(\mathbb{R})$ et que -1 n'est pas valeur propre de $f(A)$.
3. Réciproque de la question précédente.
4. Soit $A\in_n(\mathbb{R})$. Que vaut $f(f(A))$? Qu'en déduire ?
5. Expliciter $f(A)$ pour $n=2$.
6. Déduire de ce qui précède le théorème de réduction des matrices antisymétriques pour n pair.

Démonstration. 1. 0 est la seule valeur propre réelle possible.
2. $f(A)+I_n=2(I_n+A)^{-1}$ est inversible.
3. Pour $U\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont -1 n'est pas valeur propre, on résout $f(A)=U$; On trouve $A=f(U)$.
4. $f(f(A))=A$: bijection de $\mathcal{A}_n$ sur SO_n^+.
5. Si $A=\begin{pmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{pmatrix}$, on trouve $f(A)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, où $\theta=2\arctan t$.
6. Il existe $P\in O_n$ tel que $P^{-1}f(A)P$ est diagonale par blocs : avec de l'identité et des rotations. En reprenant l'image par f, on obtient A conjuguée, par P à des blocs $2-2$ antisymétriques. □

Exercice 40 Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A=OBO^{-1}$ si et seulement s'il existe P tel que $A=PBP^{-1}$ et $A^T=PB^TP^{-1}$

Démonstration. dans le sens dur, on obtient PP^T qui commute avec B, mais $P=OS$, avec S un polynôme en PP^T, d'où le O. □

Exercice 41 [ENS 2022] Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $U\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $U\overline{U}^T=I_n$ et $A=UB\overline{U}^T$. Montrer qu'il existe $O\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A=OBO^T$.

Démonstration. On utilise la caractérisation : $A=OBO^{-1}$, avec $O\in\mathcal{O}_n$ si et seulement s'il existe P tel que $A=PBP^{-1}$ et $A^T=PB^TP^{-1}$: dans le sens dur, on obtient PP^T qui commute avec B, mais $P=OS$, avec S un polynôme en PP^T, d'où le O.
Alors $A=UB\overline{U}^T$, et... □

Exercice 42 [ENS 2022] Soit $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et A_i la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la i-ième colonne de A. On note $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1\leq\cdots\leq\mu_{n-1}$ celles de A_i. Montrer que $\lambda_1\leq\mu_1\leq\lambda_2\leq\mu_2\leq\cdots\leq\mu_{n-1}\leq\lambda_n$.

Démonstration. Principe du minimax. □

Exercice 43 [ENS 2022] Pour $A\in\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(A)\geq\cdots\geq\lambda_n(A)$ son spectre. Pour $A,B\in\mathcal{S}_n$ et i,j tel que $i+j\leq n-1$, comparer $\lambda_{i+j-1}(A+B)$ et $\lambda_i(A)+\lambda_j(B)$.

Démonstration. Minimax. Pour $i=j=1$, on a $\lambda_1(A+B)\leq\lambda_1(A)+\lambda_1(B)$. Puis on utilise $\lambda_i=\inf_{\mathcal{E}_{n-i+1}}\max\langle u(x),x\rangle$, et on choisit $F_{n-(i+j-1)+1}=F_{n-i-j}$ en somme directe avec les i premiers vecteurs propres de A, et les j de B. □

Exercice 44 [ENS 2022] Soit $P=a_{2n}X^{2n}+\cdots+a_1X+a_0\in\mathbb{R}[X]$ de degré $2n$. Montrer que la fonction associée à P est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $A=(A_{i,j})_{0\leq i,j\leq n}\in\mathcal{S}_{n+1}^+(\mathbb{R})$ telle que $a_k=\sum_{i+j=k}A_{ij}$.

Démonstration. Si A existe, pour $X=(x^i)_{0\leq i\leq n}$, on a $X^TSX=P(x)\geq 0$.
Réciproquement, pour $n=2$ ça marche. Quitte à retirer une constante à P, on peut supposer qu'il s'annule, puis il faudrait pouvoir le translater, pour se ramener au cas où 0 est racine. Alors on peut faire une récurrence.
Ou on fait la récurrence sans le translater, ça a l'air plus simple peut-être : Si $P=Q(x+a)^2$, on a $a_k=b_{k-2}+a^2b_k+2ab_{k-1}$. Donc si Q est associé à une matrice S, P est associé à $a^2S+2aS^1+S^2$, où S^1 est la matrice où on tronque la dernière ligne/colonne, puis on met ajoute une première ligne/colonne nulle, S^2 on recommence. Si $a\geq 0$, les trois matrices sont positives. Si $a\leq 0$, on peut se ramener à l'autre cas en prenant $x\mapsto P(-x)$.
Plus simple : on peut écrire $P=A^2+B^2$, ce qui donne une expression des coefficients de S. □

Exercice 45 [ENS 2022] Soit $A\in\mathcal{A}_n$ et $B\in\mathcal{S}_n^+$. On suppose qu'il existe $K\in\mathcal{S}_n$ telle que le spectre de $KA-AK+B$ soit >0. Montrer qu'il existe $c,C>0$ tels que $\forall t\geq 0$, $\left\|e^{-t(A+B)}\right\|_{op}\leq Ce^{-ct}$, ou $\|\cdot\|_{op}$ est subordonnée à la norme euclidienne.

Démonstration. $KA-AK$ est symétrique de trace nulle. On a $e^{-t(A+B)}=e^{-t(A-(KA-AK))-t(KA-AK+B)}$.
Supposons $AK=KA$ (par exemple sur deux sous-espaces différents) et $B\in\mathcal{S}_n^{++}$. (En fait, revient à prendre $K=O_n$)
Alors l'hypothèse est $B\in\mathcal{S}_n^{++}$.
Avec Lie-Trotter, on peut traiter ce cas.
Via l'équation différentielle, c'est équivalent à montrer le résultat pour $t=1$, ou pour t très petit en fait.
Supposons que ce soit faux. Alors il existe X tel que $\langle e^{-\frac{A+B}{n}}X, e^{-\frac{A+B}{n}}X\rangle=1$, c'est-à-dire $\langle e^{-\frac{A+B}{n}}e^{-\frac{-A+B}{n}}X,X\rangle=1$. Au premier ordre, on obtient $\langle BX,X\rangle=0$, donc $X\in\operatorname{Ker}B$.
Non seulement, mais en plus, $AX\in\operatorname{Ker}B$. On en déduit qu'il existe un sous-espace vectoriel stable dans $\operatorname{Ker}B$, par A. Cela contredit l'existence de K, en effet, on doit avoir $\langle (KA-AK)X,X\rangle>0$, mais la matrice de K dans une BON adaptée à $\operatorname{Ker}B$ est symétrique, donc et ce K' a la même propriété, mais $K'A-AK'$ est de trace nulle. ☐

Exercice 46 [ENS 2022] Soit E euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$ symétrique. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée. Soit F un sous-espace vectoriel et A_F l'ensemble des projecteurs d'image F. Montrer que l'ensemble $\{\|u\circ p-p\circ u\|_{op}\,,\,p\in A_F\}$ admet un minimum.

Démonstration. On prend une suite p_n de projecteurs qui tend vers l'inf. On peut associer aux supplémentaires de F des BON, et en extraire une suite convergente. On a un problème si la famille obtenue n'est pas en somme directe avec F. Supposons que $e_i\to z$, avec $x\in F$. Alors $\langle up(x)-pu(x),y\rangle=\langle p(x),u(y)\rangle-\langle u(x),p^*(y)\rangle$.
On prend $y\in F^\perp$, ce qui annule $p^*(y)$. On prend $x=\frac{e_i-z}{\|e_i-z\|}$. On obtient que nécessairement, $\langle p(x),u(y)\rangle=0$.
Donc $e_i\to z$ dans une direction $\perp$ à $F^\perp$, ce qui est impossible, car on peut supposer $e_i-z\in F^\perp$. ☐

Exercice 47 [ENS 2022] Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les fonctions f de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$ possédant les propriétés suivantes :

- pour $S\in\mathcal{S}_n$ et $O\in\mathcal{O}_n$, $f(O^TSO)=f(S)$
- il existe une famille $(f_{i,j})_{i\le j}$ de fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que $\forall S,\ f(S)=\prod_{i\le j}f_{ij}(S_{ij})$

Démonstration. Il suffit essentiellement de traiter le cas $n=2$. On écrit $f\left(\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\right)=f_1(a)f_2(b)f_3(c)$.

En conjuguant par $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, on obtient f_2 paire. En conjuguant par $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, on obtient $f_1=f_3$.
On suppose $f_1(0)=1$.
On conjugue par une rotation. Si $a,c=0$, on obtient $f_1(0)^2f_2(b)=f_1(2b\sin\cos)f_1(-2b\sin\cos)f_2(b(\sin^2-\cos^2))=f_1(u)f_1(-u)f_2(v)$, avec $-u^2-v^2=-b^2$. En posant $\tilde{f_1}=f_1(x)f_1(-x)$, on obtient $f_2(b)=\tilde{f_1}(u)f_2(v)$, avec la condition $u^2+v^2=b^2$.
En fait, en posant $g=\sqrt{f(x)\times f(-x)}$, on peut supposer f_1 paire, donc $\tilde{f_1}=f_1^2$.
En prenant $a,b=0$, on obtient $f_1(c)=f_1(c\sin^2)f_1(c\cos^2)f_2\big(c(\sin^2-\cos^2)\big)$, donc $f_1(u)f_1(v)=\frac{f_1(u+v)}{f_2(w)}$, où $uv-w^2=0$.
En prenant $u=v$, et en combinant avec le précédent, on obtient $f_2(\sqrt{u^2+u^2})=f_1(2u)$: $f_2(\sqrt{2}u)=f_1(2u)$, donc $f_2(x)=f_1(\sqrt{2}x)$
Alors on réinjecte, en $f_1(\sqrt{2}b)=f_1(u)^2f_1(\sqrt{2}v)$, si $u^2+v^2=b^2$ En posant $h_1=\ln f_1(\sqrt{x})$, on a $h_1(2b^2)=2h_1(u^2)+h_1(2v^2)$; En prenant $v=0$, on obtient $h_1(x+y)=h_1(x)+h_1(y)$, donc h est un morphisme de $\mathbb{R}_+$ (n'importe lequel marchera), et $f_1=e^{h_1(x)^2}$.
Ensuite, sans la parité : La fonction h_2 précédente vérifie les mêmes hypothèses, donc quitte à multiplier par une des fonctions trouvées, on peut supposer $f_2=1$. Donc $f_1(-x)=f_1(x)^{-1}$, et $f_1(u)f_1(v)=f_1(u+v)$: donc f_1 est un morphisme.
Finalement, les solutions sont les $Ce^{h_1(\operatorname{Tr}S)}e^{h_2(\sum x_{ij}^2)}$, où h_1,h_2 sont des morphismes de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$.
Autre idée (RMS) :
Utiliser $\begin{pmatrix}x&y\\y&x\end{pmatrix}$ semblable à $\begin{pmatrix}x+y&0\\0&x-y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x&y\\y&-x\end{pmatrix}$ semblable à $\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2}&0\\0&-\sqrt{x^2+y^2}\end{pmatrix}$.
Cela donne $f_1(x^2)f_2(y)=f_1(x+y)f_1(x-y)$ et $f_1(x)f_1(-x)f_2(y)=f_1(\sqrt{x^2+y^2})f_1(-\sqrt{x^2+y^2})$ ☐

Exercice 48 [ENS 2022] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne. Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe $\delta>0$ tel que pour tous $n,d\ge1$, et $A,B\in\mathcal{O}_n$ vérifiant $A^d=I_n$ et $\left\|A^kB-BA^k\right\|\le\delta$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $B\in\mathcal{O}_n$ telle que $\|B_1-B\|\le\varepsilon$ et $AB_1=B_1A$.

Démonstration. Considérer $B'=\frac{1}{d}\sum A^kBA^{-k}$.
On a B' qui commute avec A, et $\|B'-B\|\le\delta$.
Si A n'a que des valeurs propres distinctes, on est bon.
Sur un espace propre de A. On a, pour tout $\|X\|=1$, $\|B'X\|-\|X\|\simeq0$.
Décomposition polaire, sur l'espace propre, $B'=OS$, et $\|S\|=\sup\operatorname{Sp}\le\varepsilon$, donc B' est proche d'une matrice orthogonale.
On a $S=\sqrt{B'^TB'}$, commute avec A, car B' et B'^T commutent avec A. ☐

Exercice 49 [ENS 2022] Soient $A,B\in\mathcal{S}_n$.

1. s Montrer que $\operatorname{Tr}\left((AB)^2\right)\le\operatorname{Tr}\left(A^2B^2\right)$.
2. s Pour $k\ge1$, montrer que $\operatorname{Tr}\left((AB)^{2^k}\right)\le\operatorname{Tr}\left((A^2B^2)^{2^{k-1}}\right)$.

Démonstration. 1. On prend A diagonale. Pour $k = 1$, c'est $a^2 + b^2 \geq 2ab$: on a à droite $\mathrm{Tr}((DB)^T DB) = \sum_{i,j} \lambda_i^2 b_{ij}^2$ et à gauche $\mathrm{Tr}(DBDB) = \mathrm{Tr}((BD)^T (DB)) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j b_{ij}^2$.

Alternative : $\mathrm{Tr}\left((AB)^2\right) = \langle AB, BA \rangle \leq \sqrt{\|AB\| \, \|BA\|}$, qui donne le résultat.

2. En général, on a, à gauche

$$\sum_{i_1, \ldots, i_{2^k}} b_{i_1 i_2} \ldots b_{i_{2^k} i_1} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_{2^k}}$$

Et à droite, une somme sur les mêmes indices, et les mêmes b, mais $\lambda_{i_1}^2 \lambda_{i_3}^2 \ldots$.

On regroupe les termes de mêmes produit en b, étant donné un 2^k-cycle, on peut le lire en partant de chaque point, et dans le sens inverse.

Si le produit des b est positif, l'IAG permet de conclure.

Il faut rajouter les termes en $b_{i_1 i_2}^{2^{k-1}} \lambda_{i_1}^{2^{k-1}}$, qui donnent de la positivité. Ou faire demi-tour à la moitié : $b_{i_1 i_2}^2 \ldots b_{i_{2^{k-1}-1} i_{2^{k-1}}}^2$, qui à gauche donnent $\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \ldots \lambda_{n/2}^2$ et à droite $\lambda_1^4 \lambda_3^4 \ldots$

Alors à gauche, la somme est positive (en tout), et c'est $(b_{i_1 i_2} \ldots b_{i_{n/2-1} i_n} \lambda_1 \ldots \lambda_{n/2-1} + b_{i_{n/2} i_{n/2+1}} \ldots)^2$ qui devrait être $\leq$ à la même chose, mais avec des λ_i au carré tous les deux termes. On a un problème si les deux sommandes n'ont pas le même signe… Irréparable : le terme de droite pourrait être nul.

Plutôt : récurrence. $\mathrm{Tr}(AB)^{2^k} = \mathrm{Tr}\left((ABAB)^{2^{k-1}}\right) \leq \mathrm{Tr}\left((ABAABAB^2)^{2^{k-2}}\right) = \mathrm{Tr}\left((ABA^2BAB^2)^{2^{k-2}}\right) = \mathrm{Tr}\bigg((BA^2BAB^2A$

Mais $\mathrm{Tr}\left((ST)^{2^{k-2}}\right) \leq \mathrm{Tr}\, S^{2^{k-2}} T^{2^{k-2}} \leq \sqrt{\left\|S^{2^{k-2}}\right\|} \sqrt{\left\|T^{2^{k-2}}\right\|}$, d'où le résultat. □

Exercice 50 [ENS 2022] On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n^+$ est un convexe fermé de $\mathcal{S}_n$, et préciser son intérieur dans $\mathcal{S}_n$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathcal{S}_n^+$ que l'on déterminera tel que $\forall M \in \mathcal{S}_n^+$, $\|A - P\| \leq \|A - M\|$.

Démonstration. 1.

2. Projection sur un convexe fermé. □

Exercice 51 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{S}_n$ et $a, b > 0$ tels que $aI_n - A$ et $A - bI_n$ soient positives. Soit X, Y dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\langle X, Y \rangle = 0$. Montrer que

$$\langle X, AY \rangle^2 \leq \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \langle X, AX \rangle \langle Y, AY \rangle.$$

Démonstration. En conjuguant par O, on peut supposer que $X = E_1$, et $Y = E_2$. On obtient l'inégalité

$$a_{12}^2 \leq \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 a_{11} a_{22}.$$

On est ramené au cas de dimension 2. Les racines sont celles du polynôme $(X - a_{11})(X - a_{22}) - a_{12}^2 = X^2 - (a_{11} + a_{22})X + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$
On a pris un polynôme scindé, on le descend verticalement. Au bout d'un moment, les racines sont trop écartées.
Au pire des cas, on a $a_{11} + a_{22} = \frac{a+b}{2}$, et même $a_{11} = a_{22} = \frac{a+b}{2}$, et a_{12} la valeur pour laquelle on obtient a et b comme racines. □

Exercice 52 ★ [ENS 2022] Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C(A)$ sa comatrice. Soient $U, V \in \mathbb{R}^n$ unitaires. On note P, Q les matrices des projections orthogonales sur $U^\perp$ et $V^\perp$. Montrer que $C(P)C(Q)C(P) = \langle U, V \rangle^2 C(P)$.

Démonstration. P est de rang $n-1$, donc $C(P)$ est de rang 1, et son image est incluse dans $\mathrm{Vect}\, U$, et $U^\perp$ est inclus dans le noyau de $C(P)$, donc $C(P)$ est la projection sur U, $\perp U^\perp$. D'où le résultat. □

Exercice 53 [ENS 2022] Une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne lorsque, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $h_{i,j} = \overline{h_{j,i}}$. Elle est positive si toutes ses valeurs propres sont réelles positives.

1. Déterminer les formes linéaires f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $f(I_n) = 1$ et $f(H) \in \mathbb{R}_+$ pour tout H hermitienne positive.
2. Déterminer les formes linéaires f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $f(I_n) = 1$ et $f(H) \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout H hermitienne strictement positive.

Démonstration. 1. La trace marche, les $M \mapsto M_{ii}$ marchent. On peut supposer que $f(M_{ii}) = \frac{1}{n}$, en ajoutant celles qui marchent, pour égaliser, puis en divisant.

Dans $\mathcal{M}_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique, positive. Donc $f(E_{12} + E_{21}) + f(E_{11}) + f(E_{22}) \geq 0$. Et $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ aussi, donc $if(E_{12} - E_{21}) + \cdots \geq 0$ On en déduit que $f(E_{ij}) = \overline{f(E_{ji})}$. $\begin{pmatrix} a & \lambda \\ \overline{\lambda} & b \end{pmatrix}$ est positive si et seulement si $a + b \geq 0$ et $ab \geq |\lambda|^2$. Sous cette condition, on doit avoir $af(E_{11}) + bf(E_{22}) + 2\,\mathrm{Re}\left(\lambda f(E_{12}\right) \geq 0$. C'est-à-dire $af(E_{11}) + bf(E_{22}) \pm 2\sqrt{ab} f(E_{12}) \geq 0$, c'est-à-dire $|f(E_{12})| \leq \sqrt{f(E_{11}) f(E_{22})}$, c'est-à-dire $\left(f(E_{ij})\right)_{i,j}$ est hemitienne.

Alors $f(A) = \sum a_{ij} f(E_{ij}) = \langle A, F \rangle$. Si F_1, F_2 sont ≥ 0 (nécessite diagonalisation, semble-t-il…).

Réciproquement, toute forme linéaire s'écrit $A \mapsto \langle A, F \rangle$. On a vu que F était hermitienne. Et si on la diagonalise avec un coefficient < 0, contradiction.

2. D'après la question précédente, on correspond à une hermitienne, qui doit être non nulle. Cela suffit. □

Exercice 54 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que AA^T est diagonalisable à valeurs propres positives. On note $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ ses valeurs propres non nulles (avec multiplicité), et $S(A) = \left(\sqrt{\sigma_1}, \ldots, \sqrt{\sigma_r}\right)$.
2. Comparer $S(A)$ à $S\left(A^T\right)$.
3. Montrer qu'il existe U dans $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et V dans $\mathcal{O}_p(\mathbf{R})$ telles que $U^T A V = R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, où $S(A) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.
4. On considère $A^\star = V R^* U^\top$, avec $R^* = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$. Interpréter géométriquement les matrices $AA^\star$ et $A^\star A$, en commençant par examiner le cas particulier où A est inversible.

Démonstration. 1. Cours.

2. Elles ont les mêmes traces de puissances.
   Ou, quitte à agrandir la matrice, on peut la supposer carrée, auquel cas AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   Ou, si E_λ est un espace propre pour AA^T, on a $A^T A A^T X = A^T \lambda X$, donc l'image par A^T est un espace propre pour $A^T A$ (sauf $\lambda = 0$).
3. Il existe une BON telle que $\langle A^T X, A^T X \rangle = \sigma_i^2$, ce qui donne exactement le résultat.
4. On a $A = URV^T$. Si A est inversible, $A^* A = I_n$. En général, c'est la matrice de projection orthogonale sur la somme des sous-espaces vectoriels des valeurs propres $\neq 0$. □

2) Analyse

Exercice 55 [ENS 2022] Soit $n \geq 1$.

1. Déterminer les plus petites constantes C et C' telles que
$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\|_2 \leq C \|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|X\|_{+\infty} \leq C' \|X\|_2 .$$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\|_2 \geq \|X\|_\infty$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|AX\|_2 \geq \sqrt{n}\,\|X\|_\infty$.
3. Pour deux espaces vectoriels normés E et F de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on note $\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$. Lorsque $\dim E = \dim F$, on note
$$d(E,F) = \inf\{\|f\|\,\left\|f^{-1}\right\|,\ f \in \mathcal{L}(E,F) \text{ bijective}\}.$$
   Déterminer $d(E,F)$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est muni de $\|\cdot\|_2$ et $F = \mathbb{R}^n$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. 1. $\|X\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|X\|_\infty$ et $\|X_n\|_i \leq \|x\|_2$.

2. Les colonnes de A sont unitaires. C'est la méthode probabiliste.
3. D'après la première question, $d(E,F) \leq \sqrt{n}$. D'après la seconde, $d(E,F) \geq \sqrt{n}$. □

Exercice 56 ★ ★ Continuité des racines [ENS 2022] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré n scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Pour $t \in \mathbb{C}$, on pose $P_t = X^n - tX - 1$. Montrer qu'il existe n fonctions continues $x_1, \ldots, x_n$ définies sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ sur lequel $P_t = \prod_{i=1}^n (X - x_i(t))$.

Démonstration. □

Exercice 57 [ENS 2022] Soit $f\colon x \mapsto 2x - \frac{1}{x}$. On pose $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}([-1,1])$. Montrer que K est un compact d'intérieur vide sans point isolé et que $f(K) = K$.

Démonstration. Compact : intersection de compacts.

Intérieur vide : la fonction est expansive sur $[-1,1]$, donc tout intervalle ouvert grossi.

Sans point isolé : on montre dense, par segments emboîtés.

$f(K) = K$ semble clair. □

Exercice 58 [ENS 2022] On note $\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées, que l'on munit de la norme infinie. Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire continue T de $\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ dont la restriction à $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ soit l'identité.

Démonstration. On postule l'existence d'une projection p continue, dont l'image est $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. C'est donc que $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ admet un supplémentaire fermé.

Réciproquement, si $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ admet un supplémentaire fermé, pourquoi est-ce que la projection est continue ? (c'est vrai dans un espace de Banach mais dur).

On construit une suite $\psi_n \in H$ et $\varphi_n \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tel que $\psi_n \to +\infty$ et $\psi_n - \varphi_n = O(1)$.

On va prendre ψ_n continue par morceau, dont les sauts sont ≤ 1, sauf en un nombre fini de points.

Soit e_a l'indicatrice de a. On écrit $e_a = h_a + c_a$, h_a a un unique point de discontinuité. Donc sur un voisinage, à droite ou à gauche de a, h_a est $\geq \frac{1}{3}$.

On construit une suite de telles fonctions, que l'on somme. On s'assure que la série des $\psi_n - \varphi_n$ converge absolument.

si P est la projection sur le supplémentaire de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\mathrm{v}_x \circ P$ est une forme continue sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ donc représentée par une mesure m_x.

Mais $\mathbb{1}_x$ est limite d'une suite de fonctions f_n continue, donc par convergence dominée (par rapport à m_x), on a donc $P\mathbb{1}_x = 0$, contradiction.

Cette convergence dominée, c'est le fait que si $f_n \to f$ simplement, alors $\updownarrow(Pf_n) \to \updownarrow(Pf)$. □

Exercice 59 L'espace des suites qui tendent vers 0 n'a pas de supplémentaire fermé dans l'ensemble des suites bornées.

Démonstration.
- Il existe une famille non dénombrable (U_a) de parties de $\mathbb{N}$ infinies, dont les intersections deux à deux sont finies. (prendre des suites de rationnels qui convergent vers un irrationnel).
- On prend φ_a la fonction caractéristique de U_a. Si g est une application continue qui est nulle sur $\rfloor_0$, alors $\{a \mid |g(\varphi_a)| \geq \varepsilon\}$ est fini. En effet, sinon, en les réorientant et les sommants et en rajoutant une suite qui tend vers 0, on obtient des suites de norme 1, pour lequel la valeur de g est $\geq m\varepsilon$, ce qui contredit la continuité.
- Donc $\{a \mid g(\varphi_a) \neq 0\}$ est dénombrable.
- Si $\rfloor_0$ avait un supplémentaire fermé H. Alors il réalise une bijection topologique entre les f

  Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère l'application $f_k : u \mapsto u_k$, qui est continue. On peut alors définir $\tilde{f_k} : x \mapsto f_k(p(x))$, la projection sur H (qui est continue, c'est dur vient de théorème sur les Banach : application ouverte qui découle de Baire).

  D'après ce qui précède, la famille des $\tilde{f_k}$ est non nulle uniquement sur un ensemble dénombrable. Donc il existe a tel que $\forall k,\ \tilde{f_k}(a) = 0$, donc $p(a) = 0$, contradiction. □

Exercice 60 [ENS 2022] Soit $f : M \mapsto 2M - M^2$. On note Γ l'ensemble des $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont limites d'une suite de la forme $f^k(M)$.

1. Déterminer Γ.
2. Pour $N \in \Gamma$, déterminer les X tels que $f^k(X) \to N$.

Démonstration.
1. Toute limite vérifie $A = 2A - A^2$, donc projecteur.
2. Les valeurs propres réelles possibles de X sont des 0 (ou 2), et n'importe quelle autre valeur dans]0,2[qui tendra vers 1.

   Si on autorise une valeur propre complexe, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$. On a $u_{n+1} - 1 = -(u_n - 1)^2$, ce qui permet de faire l'étude.

   D'autre part, si on se restreint à un espace caractéristique. Sur F_0, F_2 on peut être quelconque, mais sur F_a, comme $u_n(a) \to 1$, il faut que l'on soit diagonale. En fait non. On peut être quelconque : l'application est $N \mapsto 2N - N^2 - 2\lambda N = (2-2\lambda)N - N^2$, donc on tend vers 0 dans tous les cas. □

Exercice 61 [ENS 2022] Dunford, par la méthode de Newton Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{Q}^m)$, on pose s$\Psi_u(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u)}(X - \lambda)$. Étudier la bonne définition et la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = u$ et $u_{n+1} = u_n - \Psi_u(u_n) \circ \Psi_u'(u_n)^{-1}$.

Démonstration. On a $P'(u_0)$ inversible, car les valeurs propres de u_0 ne sont pas racines de P.

Le polynôme est bien à coefficients dans $\mathbb{Q}$, puisque c'est le quotient de χ_u avec le pgcd de sa dérivée.

Comme les u_i sont des polynômes en u, les espaces caractéristiques sont préservés, et même valeurs propres (les racines de P' sont $\neq \lambda_i$).

On a $u - P(u)P'(u)^{-1} - \lambda_k = Q(u)$, où λ_k est racine double de Q.

On en déduit que $P(u_n) = P(u)^{2^n} H(u)$. En particulier, $P(u_n) = 0$ APCR, donc la suite est constante APCR. Diagonalisable sur $\mathbb{C}$. C'est la décomposition de Dunford de u. □

Exercice 62 [ENS 2022] On munit $GL_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Déterminer le plus petit $a > 0$ tel qu'il existe un sous-groupe non trivial de $GL_n(\mathbb{C})$ inclus dans la boule fermée $B(I_n, a)$.

Démonstration. Forcément que des valeurs propres de module 1. Dans le cas où il n'y a que des 1, c'est forcément l'identité. Si une valeur propre est irrationnelle, on peut trouver un coefficient qui tend vers -1, auquel cas $\|M - I_n\| \geq 2$.

De même, on est forcément diagonalisable.

Donc les valeurs propres sont rationnelles. En prenant $D = \mathrm{Diag}(j)$, on a $a = |1 - j| = 1$. On ne peut pas faire mieux, car on aura une valeur propre à une distance > 1 de 1. □

Exercice 63 ★ ★ [ENS 2022] Soit E euclidien, et A une partie bornée non vide de E.

1. Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimal contenant A.
2. Qu'en est-il dans un evn quelconque ?

Démonstration. □

Exercice 64 [ENS 2022] On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme, et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. Montrer qu'il existe une base de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle les formes linéaires coordonnées sont unitaires.

Démonstration. $\|\ell\| = \sup_{\|x\|=1} \|\ell(x)\| = \frac{1}{\inf_{\|\ell(x)\|=1} \|x\|}$: on cherche des x_j tel que $\|x_i + \sum \alpha_j x_j\| \geq \|x_i\|$, pour tout α_j.
On choisit x_1 unitaire. La boule unité admet (au moins) un plan tangent en x_i, qui défini un espace L_1 de dimension $n-1$, supplémentaire à x_1. Alors si on complète en une base quelconque de L_1, la forme coordonnée en x_1 sera bien unitaire. D'autre part, en tout $y \in L_1$, on aura nécessairement x_1 qui appartiendra à (au moins un) plan tangent à y.
On recommence, en choisissant x_2 quelconque dans L_1, etc. □

Exercice 65 [ENS 2022] Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de matrices de déterminant 1 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ainsi qu'une norme arbitraire N sur $\mathcal{M}_2(R)$. On suppose que $(A_n)_{n\geq 1}$ est bornée. On considère, pour tout $k \geq 1$, la matrice produit $B_k = A_k A_{k-1} \dots A_1$. On suppose enfin que $\frac{1}{n} \ln N(B_n)$ tend vers un réel $\gamma > 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul v de $\mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{n} \ln \|B_n v\|_2$ tende vers $-\gamma$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration. On peut remplacer la norme par la norme subordonnée à la norme 2.
On a $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B_2\|$, mais également $\|AB\|_2$.
On note v_n tel que $B_n v_n$ soit de norme minimale, w_n telle que $B_n w_n$ soit maximale. En fait, v_n et w_n sont orthogonaux, sinon $\cos t w_n + \sin t v_n$ est de norme $1 + 2\cos t \sin t \langle u, v\rangle$ et son image, de norme $\cos^2 t M_n + \sin^2 M_n + 2\cos t \sin t$. IDK.
Comme la suite (A_n) est bornée, on a $\|B_{n+1} v_n\|$ qui est égale à $\|B_{n+1} v_{n+1}\|$, à une constante multiplicative près. Donc si on écrit $v_n = \alpha v_{n+1} + \beta w_{n+1}$, β a une décroissance géométrique, donc $\|v_n - v_{n+1}\| = O(c^n)$, donc (v_n) converge. □

Exercice 66 ★ ★ Corps p-adique [ENS 2022] On fixe un nombre premier p. On note v_p la fonction de valuation p-adique sur $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1. Pour $r = \frac{a}{b}$ un rationnel avec a, b entiers, on pose $|r|_p = p^{v_p(a) - v_p(b)}$ si $a \neq 0$, et $|r|_p = 0$ sinon. Montrer que la quantité ainsi définie ne dépend effectivement que de r et non du couple (a, b) envisagé.
2. Montrer que $|\cdot|_p$ vérifie $|r+s|_p \leq \max(|r|_p, |s|_p) \leq |r|_p + |s|_p$ pour tous r, s dans $\mathbb{Q}$, que $|-r|_p = |r|_p$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$, que $|\cdot|_p$ est à valeurs positives et ne s'annule qu'en 0. On définit à partir de là, et comme pour une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la notion de convergence vers 0 pour une suite à termes dans $\mathbb{Q}$.
3. Une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ à termes dans $\mathbb{Q}$ est dite de Cauchy lorsque, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $|a_n - a_m|_p \leq \varepsilon$ pour tous $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$. Montrer que si une telle suite ne tend pas vers 0, alors elle est à termes non nuls à partir d'un certain rang et la suite inverse $(1/a_n)_n$ est de Cauchy.
4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_p$ des suites de Cauchy à termes dans $\mathbb{Q}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.
5. Deux suites de Cauchy $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont dites équivalentes lorsque leur différence converge vers 0. Montrer que l'on définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. On considère l'ensemble quotient $\mathbb{Q}_p$ de l'ensemble des suites de Cauchy par cette relation d'équivalence. Montrer qu'il existe une unique structure d'anneau sur $\mathbb{Q}_p$ qui fasse de la projection canonique de $\mathcal{C}_p$ dans $\mathbb{Q}_p$ un morphisme d'anneaux.
6. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ est un corps, et mettre en évidence un unique morphisme injectif de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_p$.
7. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy à termes dans $\mathbb{Q}$. On appelle norme de a le réel : $N(a) = \lim_{n\to+\infty} \sup\left\{|a_k|_p \,; k \geq n\right\}$.
   Montrer que deux suites de Cauchy équivalentes ont la même norme, et en déduire une fonction $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{Q}_p$ telle que $N(a) = \|a\|$ pour toute suite de Cauchy a à termes dans $\mathbb{Q}$, dont on note $[a]$ la classe pour la relation d'équivalence précédente.
   Vérifier que $N(x+y) \leq \max(N(x), N(y))$ pour tous x, y dans $\mathbb{Q}_p$, que $N(-x) = N(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$, et enfin que N est positive et ne s'annule qu'en l'élément nul de $\mathbb{Q}_p$.
8. Soit $\sum a_n$ une série à termes dans Q_p. Montrer qu'elle converge au sens de N si et seulement si $(a_n)_{n\in N}$ converge vers 0 au sens de N.
9. Le corps $\mathbb{R}$ est-il isomorphe au corps $\mathbb{Q}_p$?

Démonstration. □

Exercice 67 ★ ★ [ENS 2022] Soit u une suite réelle. Déterminer une CNS pour qu'il existe une réindexation de u qui soit monotone APCR.

Démonstration. A une limite, et tous les termes sont du même côté de la limite APCR. □

Exercice 68 ★ ★ Formule de Lie-Trotter [ENS 2022] Soit $d \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Montrer que $\left(e^{A/n} e^{B/n}\right)^n \to e^{A+B}$.

Démonstration. □

Exercice 69 ★ ★ [ENS 2022] Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x. On pose $u_0 = 1$ et $u_n = 2u_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$ qui est une puissance de 2, et $u_n = \lceil \frac{u_{n-1}}{3} \rceil$ pour tout entier $n \geq 3$ qui est une puissance de 3 et enfin $u_n = u_{n-1}$ sinon. Montrer que u tend vers $+\infty$.

Démonstration. On a $u_n \geq \frac{2^{nbpuissde2}}{3^{nbpuissde3}} = \frac{2^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor}}{3^{\lfloor \ln_3(n) \rfloor}}$.
Notons v_p la suite qui vaut 1 en p, puis suit une récurrence $*2$, $/3$. En notant x_i les indices où on fait $+1/3$, ou $+2/3$, on a $u_n = \sum_X \frac{1,2}{3} v_{x_i}$.
Mais les v_p sont minorées, par $1/3$, (à partir de x_i) et il y a une infinité de x_i.
Alternative : par l'absurde, si on ne tend pas vers $+\infty$, on est bornée, mais alors, dans chaque indice où on est divisé par 3, mais pas parfaitement, on est multiplié par $\frac{1}{3}(1 + \frac{1}{K})$. On peut utiliser ça pour obtenir une minoration $u_n \geq \frac{u_N}{6}(1 + \frac{1}{K})^{\text{nb de fois}}$. □

Exercice 70 ★ Règle de Raabe-Duhamel [ENS 2022]

1. Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites de réels > 0. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Que dire des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$?
2. Soit (a_n) une suite de réels > 0. On suppose que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > -1$. Montrer que $\sum a_n$ converge.
3. Que dire si $\alpha < -1$?

Démonstration. □

Exercice 71 ★ [ENS 2022] Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille sommable de complexes, on pose $\|a\| = \sum_{\mathbb{Z}} |a_n|$.
Si (a_n) et (b_n) sont sommables, on pose $(a * b)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$.

1. Montrer que $a * b$ est bien définie, sommable, et que $\|a * b\| \leq \|a\| \, \|b\|$.
2. Montrer que $*$ est commutative, associative. Déterminer un neutre pour $*$.
   Si a est sommable, on pose, pour $|z| \leq 1$, $f_a(z) = \sum_{\mathbb{Z}} a_n z^n$.
3. Montrer que f_a est continue sur le disque unité fermé.
4. Si a est inversible pour $*$, montrer que f_a ne s'annule pas sur D.
5. On suppose que a est à support fini et que f_a ne s'annule pas sur D. Montrer que a est inversible pour $*$.

Démonstration.
1.
2.
3. Découper, avec un reste $< \varepsilon$.
4. Si $a * b = 1$, on a $f_a f_b = 1$.
5. f_a est polynomiale, donc $\frac{1}{f_a}$ □

Exercice 72 ★ ★ [ENS 2022] Soit $(a_n) \in \,]0,1[^{\mathbb{N}}$. Donner une CNS pour que pour tout $x \in \,]0,1[$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}^*$ telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(n)}}{2^n}$.

Démonstration. 0 et 1 sont valeurs d'adhérences. □

Exercice 73 [ENS 2022] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f\colon x \mapsto 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = a + b + c$.

Démonstration. C'est la FAF ; Facile. □

Exercice 74 ★ [ENS 2022] Donner une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.

Démonstration. $\frac{p}{q} \mapsto \frac{1}{q}$ □

Exercice 75 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et dont la dérivée n-ième s'annule en un unique $x_n > 0$, pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
2. Montrer que $x^n f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, pour tout $n \geq 0$.
3. Soit $g\colon x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des coefficients $c_{n,p}$ tels que $g^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} c_{n,p} \frac{f^{(n-p)(x)}}{x^{p+1}}$. Montrer alors que $(-1)^n g^{(n)}$ est strictement positive.

Démonstration.
1. Étant monotone APCR, les dérivées admettent des limites, qui doivent être nulles. f doit être croissante, puis décroissante. Donc f' est positive, puis négative, mais comme elle tend vers 0, donc elle est décroissante, puis croissante, vers 0. Donc f'' est négative, puis positive, donc croissante, puis décroissante.
   On obtient aussi la monotonie de (x_n).
2. C'est une récurrence. On a
   Si $|x^n f^{(n)}(x)| \geq \varepsilon$, on a $|f^{(n)}(x)| \geq \frac{\varepsilon}{x^n}$, et par monotonie, $\left|f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x/2)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2x^{n-1}}$. Cela contredit l'hypothèse au rang $n-1$.
3. On a $g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \left(\sum \binom{n}{p} (-1)^p p! f^{(n-p)}(x) x^{n-p}\right)$, donc $g^{(n)}(x) = o_0(\frac{1}{x^{n+1}})$.
   Pour $n = 1$, on a $g'(x) = \frac{xf'-f}{x^2} \leq 0$ pour x assez petit : si f' décroissante et positive, on a $f(x) = \int_0^x f'(t) \, \mathrm{d}t$ (utiliser FAF plutôt).
   D'autre part, en un 0, on a f' du même signe que f, donc f' est encore de la bonne monotonie. Impossible !
   L'expression trouvée permet de justifier que $x^{n+1} g^{(n)}(x) \xrightarrow[0,+\infty]{} 0$. Par ailleurs, on a $xg = f$, donc $xg^{(n)} + g^{(n-1)} = f^{(n)}$, donc $(xg^{(n)})' = xg^{(n+1)} + g^{(n)} = f^{(n)}$, donc s'annule une seule fois. On en déduit, par Rolle généralisé, que $g^{(n)}$ ne s'annule pas. □

Exercice 76 ★ ★ [ENS 2022] Soient I un intervalle ouvert et $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de continuité est dense dans I. Montrer que f, g ont un point de continuité commun.

Démonstration. On part d'un point x_0. Il existe un point x_1 de continuité de f tel que $|x - x_1| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| \leq 1$.
Il existe x_2 de continuité de f tel que $\exists \delta_2,\ |x - x_2| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_2)| \leq 1/2$. Et on peut supposer $\delta_2 \leq \frac{\delta}{2}$.
On continue, avec $\delta_3 \leq \frac{\delta_2}{2}$. Alors le point d'adhérence est un point de continuité de f.
En général, on reprend la construction, mais on alterne un point de continuité de f, et un de g. □

Exercice 77 ★ ★ Fonctions harmoniques [ENS 2022] Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{4}\big(f(x+1) + f(x-1) + f(x+\pi) + f(x-\pi)\big) = f(x)$.

Démonstration. Si f admet un maximum, minimum, par continuité, elle est constante, car $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est dense.

Sinon, pour M assez grand, le maximum sur $[-M, M]$ est forcément atteint à π du bord.

La fonction $M(x) = \max_{[x,x+\pi]} f(t)$ est croissante.

Soit y un point. Pour tout ε, on peut écrire $f(y)$ comme un barycentre symétrique de valeurs de f de points qui, pour un poids d'un moins $1-\varepsilon$, sont dans $[y+\pi, y+2\pi]$, et $[y-2\pi, y-\pi]$.

Si $M(x_0) > \varepsilon_1 + M(x_0 - \pi)$, alors si on suppose que le maximum est atteint en x_0, on a $M(x_0+2\pi) - M(x_0) > \varepsilon_1(1-\varepsilon)$, si le maximum est atteint en x_1, on a $M(x_1) - M(x_1 - 2\pi 2\pi) > \varepsilon_1(1-\varepsilon)$.

On peut recommencer. Il faut clarifier les constantes multiples de π, etc. □

Exercice 78 ★ [ENS 2022] Soit f une fonction de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $(f(x), f'(x)) \neq (0,0)$ pour $x \in [0,1]$. Déterminer la limite, lorsque δ tend vers 0^+, de $\frac{1}{\delta}\int_0^1 \mathbb{1}_{|f(t)|<\delta}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. Le nombre de zéros de f est fini. On devrait trouver 2 fois le nombre de zéros (compté une seule fois sur les bords). □

Exercice 79 ★ [ENS 2022] Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in [0,1]^2, xf(y) + yf(x) \leq 1$. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{4}$.

Démonstration. NB : l'inégalité en conclusion est atteinte pour $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Écrire l'inégalité en $(\sin\theta, \cos\theta)$ et intégrer entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Par changement de variable, c'est l'intégrale de f (deux fois). □

Exercice 80 ★ ★ [ENS 2022] Soit $f \in \mathcal{C}^0([-\pi,\pi], \mathbb{R})$ monotone et continue par morceaux. On pose, pour $n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x$. Montrer que la suite $(nc_n(f))_{n\in Z}$ est bornée.

Démonstration. Rmq : Si f $\mathcal{C}^1$, ok. Si f constante, ok.

On définit (x_n) de sorte que $f(x_{n+1}) - f(x_n) = \frac{1}{n}$. On écrit la somme, comme $\sum_{k=0}^{M/n} \frac{k}{n}\frac{e^{inx_{k+1}} - e^{inx_k}}{n}$, c'est bien borné.

Vrai pour des fonctions aux variations bornées. □

Exercice 81 [ENS 2022] Calculer $\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. On pose $G(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/d}\,\mathrm{d}t$. On a $\int_0^{+\infty} G(x)\,\mathrm{d}x = [xG(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.

Il faut quand même justifier l'IPP, par le fait que le crochet converge, par une majoration simple ($xe^{-x^2/2}$ par exemple). □

Exercice 82 [ENS 2022] Soit $f \in \mathcal{C}^0\,(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ strictement décroissante telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ $+\infty$.

Démonstration. Intuitivement, c'est du $\frac{f'}{f}$, donc en $\ln f$. On montre que si $f(x_1) \leq \frac{f(x_0)}{2}$ et $x_1 \geq x_0+1$, l'intégrale $\int_{x_0-1}^{x_1} \frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geq C$.

Cela revient à montrer que $\int_{x_0-1}^{x_1-1} \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ est loin de $(x_1 - x_0)$, mais par Cauchy-Schwarz

$$\int_{x_0-1}^{x_1-1} \frac{f(x+1)}{f(x)} \leq \sqrt{\int_{x_0}^{x_1} f(x)^2 \int_{x_0-1}^{x_1-1} \frac{1}{f(x)^2}} \leq (x_1 - x_0)f(x_0)\frac{1}{f(x_1)}.$$ □

Exercice 83 [ENS 2022] Déterminer les suites croissantes u à termes positifs telles que, pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable, on ait $u_n \int_{\mathbb{R}} \left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right|\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration. On prend f avec des pics de base v_k tout les k, de hauteur 1, avec $\sum v_k$ qui converge. On a $f' = \frac{1}{v_k}$.

L'intégrale en question est $\sum_{v_k \geq \frac{1}{n}} \frac{1}{v_k n^2} \leq \frac{\mathrm{Card}(v_k \geq \frac{1}{n})}{n}$. + $\sum_{v_k \leq \frac{1}{n}} v_k$ $\sum_{v_k \geq \frac{1}{n}} \frac{v_k}{v_k n} + \sum_{v_k \leq \frac{1}{n}} v_k$

Si (u_n) converge, par CVD, on tend vers 0.

On prend $v_k = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}$

On obtient $u_n\left(\frac{\mathrm{Card}(u_k \leq n)}{n} + \frac{1}{u_n}\right)$, qui ne tend pas vers 0. □

Exercice 84 [ENS 2022] Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \geq b > 0$.

1. Montrer que $1 \leq \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$, puis que $0 \leq \frac{\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}}$.
2. On pose $I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$. Calculer $I(a,a)$, puis démontrer que $I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.
3. On définit deux suites réelles $(a_n)_{nz0}$ et $(b_n)_{n20}$ par $a_0 = a, b_0 = b$ et, pour $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Étudier la convergence de $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$.
4. En déduire $I(a,b)$.

Démonstration. 1.

2. C'est du arctan. Partir de $I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$, poser $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{ab}{x}\right)$.
3.

4. Utilise la continuité par rapport aux paramètres. □

Exercice 85 [ENS 2022] Soit $f \in \mathcal{C}^0(]0,1],\mathbb{R})$ décroissante. On pose $r_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $I(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Trouver une condition suffisante pour que (r_n) converge.
3. Soit $f\colon x \to \frac{x^2-1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$. Calculer r_n et en déduire la limite de $\frac{n!^{1/n}}{n}$ sans utiliser Stirling.

Démonstration. 1. Trivial.

2. f intégrable en 0 et $xf(x) = o(1)$.
3. On a $r_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n}\ln\frac{n!}{n^n}$. Or on sait que f est intégrable, et $xf(x) = o(1)$. D'autre part, $f(1) = 0$, donc r_n a la même limite que $I(\frac{1}{n})$, que l'on calcule par IPP. □

Exercice 86 [ENS 2022] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ de carré intégrable et $g\colon x \mapsto f(x) - 2e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\int_0^{+\infty} g^2 = \int_0^{+\infty} f^2$.

Démonstration. On a $g(x) = f(x) - u(x)$, où $u' + u = 2f$. On écrit

$$\int g^2 = \int f^2 + \int u^2 - 2fu = \int f^2 + \int (uu'),$$

et $\int (uu') = \left[u^2\right]$, mais $u(0) = 0$, et on montre que $u^2(+\infty) = 0$. □

Exercice 87 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_{\mathbb{R}^+} f = 1$. On pose $g(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$). On suppose à présent que f est décroissante.
2. Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}^+$ tel que $\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \geq m$.

Démonstration. 1. IPP.

2. Simple, avec f décroissante.
3. La fonction g est décroissante, et $g' = -f$, donc g est convexe, avec $g(0) = 1$ et $g(+\infty) = 0$ et $g(m) = \frac{1}{2}$.
   Dessiner le graphe de g, il s'agit de montrer que l'intégrale de g est $\geq$ qu'un rectangle.
   Mais le graphe de g est au-dessus de sa tangente en ce point. Et l'inégalité découle de $2ab \leq a^2 + b^2$. □

Exercice 88 [ENS 2022] 1. s Déterminer l'ensemble des fonctions réelles qui sont limites uniformes sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes à coefficients positifs.

2. s Déterminer l'ensemble des fonctions réelles qui sont limites uniformes sur $[-1,0]$ d'une suite de polynômes à coefficients positifs.

Démonstration. 1. C'est les fonctions DSE à coefficients positifs.

2. Toutes les fonctions : il suffit de montrer que $-X$ est dans cette adhérence, via le polynôme $P_n = X\big((1+X)^n - 1\big)$. □

Exercice 89 [ENS 2022] Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_N : x \in \mathbb{R}\backslash Z \to \sum_{n=-N^N}^{N}\frac{1}{x+n}$.

1. Montrer que $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. On note g sa limite.
2. Montrer que g est continue.
3. Montrer que g est impaire, 1-périodique et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, g(x) = \frac{1}{2}\left(g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2})\right).$$

4. Montrer que $g(x) = \pi\operatorname{cotan}(\pi x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Démonstration. 1.

2.
3.
4. On considère la différence, qui vérifie la même équation fonctionnelle, et un DL en 0 montrer qu'elle se prolonge de manière continue, avec $D(0) = 0$.
   Puis considérer un maximum.
   On peut en déduire les valeurs de ζ, cf X MP B 2002. □

Exercice 90 [ENS 2022] On considère une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle $\sum e^{-\lambda/t}$ converge pour tout $t > 0$. On suppose en outre que $\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda/t} \sim_{t\to 0+} Bt^{-a}$ pour des réels $B > 0$ et $a > 0$. On note E l'espace des fonctions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues par morceaux et telles que $t \mapsto f(t)e^t$ soit bornée, et pour $f \in E$ on note $N(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|e^t$. On admet que (E,N) est un espace vectoriel normé.

Pour $f \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $L_l(f) = \sum_{j=0}^{+\infty} f(\lambda_j t)\, t^a$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les $f_k \colon \to \exp(-kt)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour $f \in E$, on note $L_0(f) = \frac{B}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} f(t) t^{a-1}\, \mathrm{d}t$ où $\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que L_t est bien définie, linéaire et continue sur E.
2. Montrer que L_0 est bien définie, linéaire, continue et que $L_1(f) \xrightarrow[t \to 0+]{} L_0(f)$ pour tout $f \in \overline{F}$.
3. Pour $x > 0$, on note $N_x := |\{j \in \mathbb{N}^*, \lambda_j \leq x\}|$. Montrer que $N_x \sim_{x \to +\infty} B \frac{x^a}{a\Gamma(a)}$.

Démonstration. 1. On a $|L_t(f)| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} N(f) e^{-\lambda_j t} t^a = CN(f)$, d'où la convergence et continuité.
De plus, $C_t = O(B)$
2. Définition, linéarité, continuité sans problème.
La question se pose seulement pour $f \in \overline{F}$. Pour $f \in F$, on va dire que c'est clair.
D'autre part, comme les L_t sont équicontinues, c'est bon.
3. On prend $f = \mathbb{1}_{u \leq 1}$. On a $L_{1/x}(f) = \frac{1}{x^a} N_x$, d'où le résultat. □

Exercice 91 [ENS 2022] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \in \,]0{,}1[$, $b > 1$ et $ab > 1$. On pose

$$f_{a,b} \colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\ln a}{\ln b}.$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}$, bornée et continue.
2. Montrer que $f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^{n-\alpha} \cos\left(b^n \pi x\right)$ pour tout x.
3. Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\forall x, y,\ |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leq C|x-y|^\alpha$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t) \cos\left(b^n \pi t\right) \mathrm{d}t$, pour $h = 2b^{-n}$.

Démonstration. 1. Trivial.
2. Trivial.
3. NB : on a $\alpha < 1$.
On a $|\cos(b^n \pi x) - \cos(b^n \pi y)| \leq \min(b^n |x-y|, 1) = \leq b^n \min(|x-y|, \frac{1}{b^n})$ Donc $|f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leq \sum_{n=1}^{-\ln_b |x-y|} b^{n-n\alpha}(x-y) + \sum_{-\ln_b |x-y|}^{+\infty} b^{-n\alpha} = b^{\ln_b |x-y| \alpha} = |x-y|^\alpha$
Il faudrait identifier où on utilise $\alpha < 1$…
4. On intervertit somme et intégrale, on obtient $\sum_m a^m (\frac{1}{b^n + b^m} + \frac{1}{b^n - b^m}) = \sum_m a^m \frac{2b^n}{b^{2n} - b^{2m}}$. On DSE à droite et à gauche de m ? □

Exercice 92 ★ ★ [ENS 2022] On pose $p(n) = \left|\left\{(k_1, \ldots, k_N) \in (\mathbb{N}^*)^N \mid k_1 + \cdots + k_N = n\right\}\right|$, et $p(0) = 1$. Montrer que pour $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n) z^n = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - z^k}.$$

Démonstration. On sait gérer les produits finis, puis limite. □

Exercice 93 [ENS 2022] Pour $z \in \mathbb{C}$ de module < 1, on pose $f(z+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$.

1. Soient $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $|u|, |v| < 1$ et $|u + v + uv| < 1$. Montrer que $f\big((1+u)(1+v)\big) = f(1+u) + f(1+v)$.
2. Soit $h(X) = (X - a_1) \ldots (X - a_n) \in \mathbb{C}[X]$, avec $a_i \neq 0$. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left|h\big(re^{it}\big)\right| \mathrm{d}t = \ln|h(0)| + \ln \frac{r}{|a_1 \ldots a_n|}$$

pour $r > \max(|a_i|)$.

Démonstration. 1. Produit de Cauchy, éventuellement on peut regarder les coefficients pour x réel.
2. Cela revient à $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|re^{it} - a_1|\, \mathrm{d}t = \ln r$, pour $r > 3|a_1|$.
On peut écrire cela comme $\int_0^{2\pi} \ln|re^{it} - a_1|^2\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(re^{it} - a) + f(re^{-it} - \overline{a})\, \mathrm{d}t$ $f(re^{it} - a) = re^{it} f(1 - a/re^{-it})$, puis DSE. □

Exercice 94 ★ ★ [ENS 2022] Soit (a_n) une suite réelle décroissante, positive de limite nulle telle que la suite $(a_n - a_{n+1})$ soit décroissante.
Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $\sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k x^k \leq x^{2n} \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k$.

Démonstration. Revient à montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k x^k \geq \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$. On se ramène à des choses positives : $\sum a_{2k+1}(1 - x^{2k+1}) \geq \sum a_{2k}(1 - x^{2k})$. On fait apparaître des différences :

$$(a_1 - a_2)(1 - x) + (a_3 - a_4)(1 - x^3) + \cdots \geq a_2(x - x^2) + a_4(x^3 - x^4) + \ldots$$

On divise par $1-x$:
$$(a_1-a_2)+(a_3-a_4)(1+x+x^2)+(a_5-a_6)\dots \geq a_2x+a_4x^3+\dots$$
On a
$$(a_1-a_2)+(a_3-a_4)(1+x+x^2)+(a_5-a_6)\dots \geq \frac{(a_1-a_3)}{2}+\frac{1}{2}(a_3-a_5)(1+x+x^2)+\frac{1}{2}(a_5-a_7)\dots$$
$\geq \frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}a_3(x+x^2)+\frac{1}{2}a_5(x^3+x^4)+\dots$ Mais $\frac{1}{2}(a_1+a_3x)\geq a_2x$, car la moyenne de a_1 et a_3 est $\geq a_2$. □

Exercice 95 [ENS 2022] Soient $C(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kx^k$ et $D(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}d_kx^k$ les sommes de deux séries entières à coefficients réels de rayon de convergence infini. Soit $a>0$ avec $a\neq 1$. On suppose que, pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}, C(a^n)=D(a^n)$.

1. On suppose que $c_k=d_k$ à partir d'un certain rang. A-t-on $C=D$?
2. On suppose $a\in]0,1[$. Montrer que $C=D$.
3. Donner un exemple de séries entières distinctes C et D, et de $a>1$ pour lesquels la propriété est vérifiée.
4. On suppose que $a>1$ et qu'il existe $r\in]0,1[$ tel que $c_k<r^{k^2}$ et $d_k<r^{k^2}$ pour tout entier $k\in\mathbb{N}$. Montrer que $C=D$.

Exercice 96 Valeurs du dilogarithme [ENS 2022] Pour $x\in[-1,1[$, on pose $L(x)=-\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la bonne définition de L sur $[-1,1[$ et montrer que L est prolongeable par continuité en 1.
2. Déterminer le développement en série entière de L en 0 et préciser son rayon de convergence.
3. Calculer $L(1)$.
4. Calculer $L(-1)$.
5. Exprimer à l'aide de L la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^nn^2}$.
6. Déterminer $L(1/2)$.

Démonstration. 1. Prolongeable par $L(1)$, qui existe.
2. $L(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^2}$.
3. Par continuité, $\frac{\pi^2}{6}$.
4. C'est $L(\frac{1}{2})$.
5. On trouve $L(x)+L(-x)=\frac{1}{2}L(x^2)$.
6. Faire une IPP et un changement de variable, on trouve $L(x)+L(1-x)=-\ln x\ln(1-x)-L(1-x)+L(1)$. □

Exercice 97 [ENS 2022] Soient $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini et $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $k\in\mathbb{N}^*$. Montrer l'existence d'une série entière de rayon de convergence infini et de somme g, et d'un polynôme $Q\in\mathbb{C}_{k-1}[X]$ tel que $\forall z\in\mathbf{C}, f(z)=g(z)P(z)+Q(z)$.

Démonstration. On veut $g=\frac{f-Q}{P}$. On choisit Q par interpolation. On note f_n la somme partielle. On fait la division euclidienne de f_n par Q, ses valeurs sont proches de celles de Q, et on peut dériver, donc cela converge vers Q. □

Exercice 98 [ENS 2022] Soit $f\colon\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ une fonction 1-périodique intégrable sur $]0,1[$.

1. Soit $n\geq 1$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une subdivision $(a_0,\dots,a_N)$ de $[0,1]$ telle que chacune des intégrales
$$\int_{a_i}^{a_{i+1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}f(t+k\theta)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t$$
soit bien définie.
On admet alors que leur somme ne dépend pas du choix de la subdivision envisagée, et on la note $\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}f(t+k\theta)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t$.
2. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{1}{n}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}f(t+k\theta)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t$.

Démonstration. 1. On découpe là où il faut, et si f_i intégrable, $(\sum f_i^2)^{1/2}$ est intégrable.
2. Si f est bornée c'est ok. La quantité considérée vérifie une inégalité triangulaire.
Si $\int|f|\leq\varepsilon$, alors $(\sum f_i^2)^{1/2}\leq\sum|f_i|$. Donc on majore par ε. □

Exercice 99 [ENS 2022] Soit $d\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne canonique. Soit $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}^d$ continues par morceaux. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers $f\colon[a,b[\to\mathbb{R}^d$. On suppose de plus qu'il existe $g\colon[a,b[\to\mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[a,b[, \|f_n(t)\|\leq g(t)$.

1. Montrer que $\int_a^b f$ et $\int_a^b f_n$, pour $n\in\mathbb{N}$, convergent. Montrer que $\int_a^b f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f$.
2. On pose $f_n\colon t\in\mathbb{R}^+\mapsto\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n 1_{t\in[0,\sqrt{n}]}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction f que l'on déterminera. Montrer que $\int_0^{+\infty}f_n\to\int_0^{+\infty}f$.
3. Donner une expression exacte de $\int_0^{+\infty}f_n$ et retrouver la limite à l'aide de Stirling.
4. Montrer la convergence uniforme de (f_n) à l'aide du théorème de Dini (et en le démontrant dans le cas général).

Démonstration. 1. Trivial.

2.
3. Wallis.
4. La convergence simple d'une suite monotone de fonctions implique l'uniformité, et la convergence simple d'une suite de fonctions monotones implique l'uniformité. □

Exercice 100 [ENS 2022] 1. Montrer que $\forall u \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} u^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.
2. Montrer que l'application $f\colon x \in [-1,1] \mapsto \int_0^\pi \ln\left((\cos(t)+x)^2\right) \mathrm{d}t$ est constante. On pourra poser $x = \cos(u)$ avec $0 \leq u \leq \pi$.
3. Que déduit-on des deux questions précédentes ?

Démonstration. 1.
2. On écrit $x = \cos u$, puis somme de deux cosinus, on obtient
$$f(x) = \int_u^{\pi+u} \ln(\cos^2(\frac{y}{2})) + \int_{-u}^{\pi-u} \ln(\cos^2(\frac{y}{2})).$$
D'où la dérivabilité, pour $u \in]0,\pi[$, et la continuité en 0 et π. La dérivée est bien nulle.
3. En posant $u = \cos t$, on obtient $f(x) = \int_{-1}^1 \frac{\ln\left((u+x)^2\right)}{\sqrt{1-u^2}}$.
En prenant $x = 0$, on obtient $f(0) = \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(u^2) u^{2n} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.
$\int_{-1}^1 \ln(u^2) u^{2n}$ se calcule. Donc on a d'une part une somme fixée.
D'autre part, $f(1) + f(-1) = \int_0^\pi \ln\left(\cos^2 t - 1\right)^2 \mathrm{d}t = 2\int_0^\pi \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$. Qui se calcule classiquement en disant que sa valeur est deux fois $\int_0^{\pi/2}$, puis la même que cos, puis calculer la somme. □

Exercice 101 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbf{C}$ continue et π-périodique. Sous réserve d'existence, on définit, pour $\varphi \in [-\pi,\pi]$ et $t \in \mathbb{R}$, $I_t(f)(\varphi) = \int_{-\pi}^{\varphi} \frac{f(\theta)}{(1-\cos(\theta-\varphi))^{t-\frac{1}{2}}} d\theta + \int_{\varphi}^{\pi} \frac{f(\theta)}{(1-\cos(\theta-\varphi))^{t-\frac{1}{2}}} d\theta$.
1. Pour quelles valeurs de t la quantité $I_t(f)(\varphi)$ est-elle définie quelle que soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue π-périodique et quel que soit $\varphi \in [-\pi,\pi]$?
2. Calculer, pour les réels t et φ en lesquels elle est définie, la quantité $I_t(1)(\varphi)$ en fonction de $\int_0^1 x^{-t}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer que $I_t(f)$ est continue pour tout réel $t < 1$.

Démonstration. 1. En $\theta = \varphi$, on est en θ^2, on veut $2(t-1/2) < 1$, c'est-à-dire $t < 1$.
2. $I_t(1)(\varphi) = \int_{-\pi-\varphi}^0 \frac{1}{(1-\cos(\theta))^{t-1/2}} + \int_0^{\pi-\varphi} \frac{1}{(1-\cos(\theta))^{t-1/2}}$, puis c'est deux fois $\int_0^\pi \frac{1}{(1-\cos(\theta))^{t-1/2}}\,\mathrm{d}\theta$. Puis on pose $u = 1-\cos\theta$, on obtient $\mathrm{d}u = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{1-(1-u)^2} = \sqrt{2u-u^2}$, donc $I_t(1)(\varphi) = \int_0^2 u^{-t}u^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/2}\sqrt{2-u}}$, puis poser $u = 2x$.
3. Faire le même changement de variable, pour mettre la singularité en 0, et passer un terme dans l'autre, pour avoir des bornes constantes, puis convergence dominée. □

Exercice 102 [ENS 2022] On pose $P(z,\theta) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \cup$ et $\theta \in [-\pi,\pi]$.
1. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} P(z,\theta) d\theta$ pour $|z| < 1$.
2. Soit $f\colon S_1 \to \mathbb{R}$ continue sur $S_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.
On pose $P(f)(z) = f(z)$ si $|z| = 1$ et $P(f)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) P(z,\theta) d\theta$ si $|z| < 1$. Montrer que $P(f)$ est continue sur S_1.

Démonstration. 1. On trouve 1 : développer en série entière $\frac{1}{|e^{i\theta}-z|^2}$ (c'est un produit de Cauchy de deux séries). Puis seuls les termes sans θ restent.
2. Sur $|z| < 1$, on a la continuité par CVD.
Si $z_n \to z_\infty \in \mathcal{C}^1$, on prend une boule de rayon η autour de z_∞, et on montre que le poids en dehors $\to 0$, ce qui est simple. □

Exercice 103 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et de limite nulle en $\pm\infty$.
1. Justifier qu'est correctement définie la fonction $u\colon (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) f(y) dy$
2. Montrer que u est prolongeable en une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Démonstration. 1.
2. On pose $u(0,x) = f(x)$. Changement de variable : $y' - x = \frac{y-x}{2\sqrt{t}}$, □

Exercice 104 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue à support compact d'intégrale 1. On note, pour g continue, $T(g)\colon x \mapsto \int_R f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$.
1. s Montrer que $T(g^2) \geq g^2$. Cas d'égalité ?
2. s Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $T(g) = g$. On pose $h = T(g^2) - g^2$. Montrer que $T(h) \geq h$.
3. Quelles sont les fonctions g continues et bornées telles que $T(g) = g$?

Démonstration. On note $T(g)\colon x \mapsto \int f(t)g(x-t)$.
On considère $h\colon x \mapsto \int_t f(t)\big(g(x-t)-g(x)\big)^2$, c'est-à-dire $h(x) = T((g-g(x))^2)(x)$.
Sous l'hypothèse $T(g) = g$, on obtient $h(x) = T(g^2) - 2g(x)T(g) + g(x)^2$, donc $h = T(g^2) - g^2$.
On a $T(h)\colon x \mapsto \int_t f(t) \int_u f(u)\big(g(x-u-t)-g(x-t)\big)^2 \,\mathrm{d}u\, T(h)(x) = \int_u f(u) \int_t f(t)\big(g(x-u-t)-g(x-t)\big)^2 \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$. Comme f est de moyenne 1, on a $\int_t f(t)\big(g(x-u-t)-g(x-t)\big)^2 \,\mathrm{d}t \geq \left(\int_t f(t)\big(g(x-u-t)-g(x-t)\big)\,\mathrm{d}t\right)^2 = (T(g)(x-u)-T(g)(x))^2$
Donc $T(h)(x) = \int_u f(u)\left(T(g)(x-u)-T(g)(x)\right)^2 \mathrm{d}u$, mais $T(g) = g$, donc $T(h)(x) \geq h(x)$.
Comme $T(h) \geq h$, on a $T^2(h) \geq T(h) \geq h$, mais $T^n(h) = T^{n+1}(g^2) - T^n(g^2)$, donc en télescopant, $T^n(g^2) \geq nh + g^2$, impossible, sauf si $h = 0$, ce qui donne $g = 0$. □

Exercice 105 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_n(C)$. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que A n'ait pas de valeur propre de module r. Donner une interprétation simple de la matrice $M(r) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta}\left(re^{i\theta}I_n - A\right)^{-1} d\theta$ en fonction de la matrice A (on montrera en particulier que $M(r)$ est un projecteur).

Démonstration. Par dunford, on peut se ramener au cas où A n'a qu'une valeur propre. Puis pour $|\lambda| < r$ ou $|\alpha| > r$, on DSE. On trouve, pour $|\lambda| < r$, I_n, et pour $|\lambda| > r$ on trouve 0.
Donc c'est la projection sur les espaces caractéristiques de valeurs propres $< r$. □

Exercice 106 [ENS 2022] On note E l'espace vectoriel des fonctions continues et intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in E$, on note $\hat{f}\colon x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$. On admet que $\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$ pour tout $f \in E$ tel que $\hat{f} \in E$. Déterminer les complexes λ tels que l'équation $\hat{f} = \lambda f$ ait une solution non nulle $f \in E \setminus \{0\}$.
Indication : On pourra introduire le sous-espace vectoriel des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $f^{(p)}(x) =_{x\to\pm\infty} O\left(|x|^{-n}\right)$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

Démonstration. Si $\hat{f} = \lambda f$, on a $\hat{\hat{f}} = 2\pi f(-x)$, puis $\lambda^4 = 4\pi$.
L'espace donné S est stable par $\hat{\cdot}$, on a $T^4 = \mathrm{Id}$, donc il existe une valeur propre telle que $T(f) = \lambda_i f$, puis les autres existent également, puisque sinon, $T - \lambda_j$ serait injectif, donc on aurait un polynôme annulateur de f de degré ≤ 3. Mais sur l'espace des fonctions paires ont est annulé par $X^2 - 2\pi$, donc le polynôme annulateur est un multiple de $X^2 - 2\pi$, et sur les fonctions impaires, on est annulé par $X^2 + 2\pi$, donc on est multiple. □

Exercice 107 [ENS 2022]
1. Soit $x \in {\mathbb{R}^+}^*$. Montrer que $\varepsilon \to \int_{-x}^{-\varepsilon} \frac{e^{-x-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie en 0^+, que l'on notera $I(x)$.
2. Déterminer un équivalent de I en 0^+.

Démonstration.
1. C'est un changement de variable sans guère d'intérêt ($u = -t$ à gauche, et on découpe). À vérifier…
   On obtient $-\int_\varepsilon^x \frac{e^{-x+t}}{t} + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^x \frac{e^{-x-t}-e^{-x+t}}{t} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-x-t}}{t}\,\mathrm{d}t$
   La partie de gauche est intégrable en 0.
2. On a $I(x) = \int_0^x 2\frac{e^{-x}\sinh(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-x-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. La partie de gauche tend vers 0 quand $x \to 0$, la partie de droite diverge.
   Elle est en e^{-x} fois $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + O(1)$, et on compare à $\int_x^1 \frac{1}{t}$, la différence est en $O(1)$. □

Exercice 108 [ENS 2022]
1. Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge vers un réel strictement positif noté γ. On pose $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.
2. Montrer que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$
4. Établir successivement les expressions suivantes pour $\Gamma'(1)$:
$$\Gamma'(1) = \lim_{y\to 0^+}\left[\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x + \ln y\right] = \int_0^{+\infty} e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1-e^{-x}}\right]\mathrm{d}x.$$
5. Montrer que $\Gamma'(1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} =_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}-e^{-(n+1)u}}{u}du + o(1)$, et conclure que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Démonstration.
1. Cours.
2. Intégrale à paramètre.
3. IPP sur l'expression précédente , qui est une limite quand $y \to 0$. $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ se primitive, et l'intégrale obtenue converge en 0.
4. On a le $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}$, et on écrit le $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx} + \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$ La différence de $\Gamma'(1)$ et de l'intégrale donnée est $-\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-(n+1)x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} + e^{-(n+1)x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right)$ La première partie fait ce qu'on veut. La seconde tend vers 0 par CVD. □

Exercice 109 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(*)$ l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$. En discutant suivant la matrice A, donner l'allure des solutions de $(*)$.

Démonstration. Si 2 racines complexe conjuguées, ou bien un escargot, ou bien un cercle. Si deux racines distinctes, une espèce d'hyperbole, si une seule racine, ou bien une droite, ou bien semblable à la trajectoire pour $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui doit donner le graphe d'une fonction exponentielle peut-être. ☐

Exercice 110 [ENS 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$.

1. Déterminer $E_+ = \left\{x \in \mathbb{C}^n ; e^{tA}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\right\}$ et $E_- = \left\{x \in \mathbb{C}^n ; e^{tA}x \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0\right\}$.
2. Si $E_+ = \mathbb{C}^n$, montrer qu'existe $C, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que
$$(*) : \quad \forall x \in \mathbb{C}^n,\ \left\|e^{tA}x\right\| \leq Ce^{-\delta t}\|x\|$$
.
3. Soit B une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(C)$ tendant vers 0 en $+\infty$.
Sous la même hypothèse que la question précédente, montrer que les solutions de l'équation différentielle $x'(t) = (A+B(t))x(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Démonstration. 1. C'est la somme des espaces caractéristiques de valeurs propres < 0, et de l'espace propre pour 0.

2. Nécessairement les parties réelles des valeurs propres de A sont
3. Si les valeurs propres de A sont < 0, utiliser la forme explicite.
Sinon, c'est faux : prendre $A = O_2$ et $B = \frac{1}{t}$, on a $x = t$. ☐

Exercice 111 [ENS 2022] Soient $\lambda > 0, T > 0$ et $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. On suppose l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\forall T^* > T, \sup_{t\in]0,T^*[} \frac{1}{t}\int_0^t u^2 a(u)$ d
α.

1. Énoncer le théorème de Cauchy linéaire. On admet que l'équation différentielle $x' = \lambda + a(t)x^2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ s'annulant en 0.
2. On suppose que $1 > 4a\lambda$. Soit $T^* > T$. On pose $r : t \in]0,T^*[\mapsto \sup_{s\in]0,t[} \frac{x(s)}{s}$.
   a) Montrer que r est positive, continue et prolongeable par continuité en 0.
   b) Montrer qu'il existe $\mu < \alpha$ tel que $\forall t \in]0,T^*[, r(t) < \lambda + \mu r^2(t)$.
   c) Montrer que, soit x est bornée, soit $T^* = +\infty$.

Démonstration. Pas très intéressant, énoncé pourri. Mais la méthode intérieure est ok.

1.
2. a) Positive, car x est positive au voisinage de 0. La continuité est classique.
   b) On a $x(s) = \int_0^s \lambda + a(t)x(t)^2\,\mathrm{d}t$, d'où $\frac{x(s)}{s} = \lambda + \frac{1}{s}\int_0^s x(t)^2 a(t)\,\mathrm{d}t$, et $\frac{x(t)}{t} \leq r(s)$.
   c) Le second degré précédent admet deux racines, et en $t = 0$, on est à gauche. On en déduit que r est bornée, donc x est prolongeable… ☐

Exercice 112 [ENS 2022] Stabilité de l'équation de diffusion avec source linéaire Soit $a < 2$ un réel, et $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que $u(t,0) = u(t,1) = 0$, pour tout $t > 0$, et $\partial_1 u(t,x) = (\partial_2)^2 u(t,x) + au(t,x)$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Montrer, pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, que $\int_0^1 \left((\partial_2)^k u(t,x)\right)^2 \mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Démonstration. On pose $G_0(t) = \int_0^1 u(t,x)^2\,\mathrm{d}x$. Dans le cas où $a = 0$, en utilisant le caractère $\mathcal{C}^3$, on a $G_0' = -2G_1$, $G_1' = -2G_2$, $G_2' = -2G_3$ d'une part, d'où la convexité et la décroissance de G_0 et G_1. Cela implique que leurs dérivées tendent vers 0, donc $G_1 \to 0$ et $G_2 \to 0$.
D'autre part, on a $G_1 = \int (\partial_2 u)^2$, donc $\int |\partial_2 u| \to 0$, par Cauchy-Schwarz, et comme u est nul au bord, $G_0 \to 0$.
Pour G_3, en fait on peut encore dériver, donc $G_3' = -2G_4$, G_2 est convexe, et $G_3 \to 0$.
En général, on remplace les équations par
$$G_0' = -2G_1 + 2aG_0 \quad \text{et } G_1' = -2G_2 + 2aG_1 \quad \text{et } G_2' = -2G_3 + 2aG_2$$
En posant $v(t,x) = u(t,x)e^{-at}$, la fonction v vérifie $\partial_1 v(t,x) = \partial_2^2 v$, donc tend vers 0. Il suffit de montrer une décroissance exponentielle dans le cas $a = 0$.
Mais $\int |\partial_2 u| \leq \sqrt{G_1}$, donc $u \leq \sqrt{G_1}$, donc $G_0 \leq G_1$, mais $G_1 = -\frac{G_0'}{2}$, donc $G_0 \leq -\frac{G_0'}{2}$, donc $2G_0 + G_0' \leq 0$, donc la dérivée de $e^{2t}G_0$ est ≤ 0. ☐

Exercice 113 [ENS 2022] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère des fonctions dérivables $y_1, \ldots, y_n$ et des réels $a_{i,j} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $y_i' = \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j$ et $\lim_{t\to+\infty} y_i(t) = 0$. Montrer que $(y_1, \ldots, y_n)$ est liée.

Démonstration. On écrit le système sous forme matricielle, avec une exponentielle. L'hypothèse dit que A est à coefficients positives. Si la famille est libre, alors il existe une base de valeurs en laquelle elle est libre (dur…), donc A n'a que des valeurs propres ≤ 0. ☐

Exercice 114 [ENS 2022] On munit $\mathbb{R}$ d'une structure de groupe de loi notée $*$, et de neutre noté e. On suppose que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x * y$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Rappeler la définition de la différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable.

2. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_2 f(x*y,e) = \partial_2 f(x,y)\partial_2 f(y,e)$.
3. Montrer l'existence de $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\Phi(x*y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   Ind. On pourra chercher Φ sous la forme $\Phi(x) = a\int_e^x \frac{dt}{\partial_2 f(t,e)}$.

Démonstration. 1.

2. Si on écrit $f(x*y,e) = f(x,y)$, $f(f(x,y),e) = f(x,y)$, on peut dériver, par rapport à x, on obtient
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x*y,e) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
   Par rapport à y, on obtient
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x*y,e)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
   Si on écrit plutôt $f(x*y,z) = f(x,y*z)$, et que l'on dérive par rapport à z, puis on prend $z = e$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(x*y,e) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,e)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
3. Justifier que $\partial_2 f(y,e)$ ne s'annule pas.
   Ou bien faire des changements de variables, ou bien dériver $\Phi(x*y) - \Phi(x)$, qui donne 0. □

Exercice 115 [ENS 2022] Soient $A = (A_{i,j})_{i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $D = \operatorname{Diag}(A_{1,1},\dots,A_{n,n})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle - \langle b,x\rangle$.

1. Montrer que f a un unique point critique, qui est un minimum global.
2. Montrer que $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. Soient $(\alpha_k)_{k=0}$ une suite réelle, $(x_k)_{k>0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = x_k + \alpha_k D^{-1}(b - Ax_k)$. Si $k \in \mathbb{N}$, soit $w_k = D^{-1}(b - Ax_k)$. Déterminer le signe de $\langle \nabla f(x_k), w_k\rangle$.
4. On suppose que x_k n'est pas point critique de f. Montrer qu'il existe un unique réel β_k en lequel $t \in \mathbb{R} \mapsto f(x_k + tw_k)$ est minimal.
5. On suppose qu'aucun des x_k n'est point critique de f et que, pour tout $k \in \mathbb{N}, \alpha_k = \beta_k$. Montrer que $(x_k)_{k=0}$ converge.

Démonstration. 1. $\nabla f = AX - b$ et $f(X) \to +\infty$

2. $\langle AE_i, E_i\rangle > 0$
3. On a $x_{k+1} = x_k + \omega_k$, et $\langle \nabla f(x_k), \omega_k\rangle \leq 0$.
4. Trivial : $f \to +\infty$.
5. $f(x_k)$ décroît, donc si x_∞ est une valeur d'adhérence, on a $\langle \nabla f(x_\infty), \omega_\infty\rangle = 0$, ce qui implique $\omega_\infty = 0$, donc $x_\infty = b$. □

Exercice 116 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \geq 0$. Montrer que la restriction de f à la boule unité euclidienne admet un maximum, atteint en un point de la sphère unité.

Exercice 117 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et minorée. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

1. Soit $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $g\colon x \mapsto f(x) + \frac{\varepsilon}{\ell}\|x - x_0\|$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.
2. On suppose f différentiable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(y_\varepsilon) \leq\in f + \varepsilon$ et $\|\nabla f(y_\varepsilon)\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Démonstration. 1. $\to +\infty$

2. On peut supposer $f \geq 0$.
   Soit y_ε tel que $f(y_\varepsilon) \leq \inf + \varepsilon$. On applique ce qui précède à $\sqrt{\varepsilon}$ et $x_0 = y_\varepsilon$
   On obtient un minimum x'_ε, à une distance $\leq \sqrt{\varepsilon}$ de y_ε.
   En ce minimum, le laplacien est nulle, donc $\nabla f(x_{\varepsilon'}) = -(x - y_\varepsilon)$, d'où le résultat. □

Exercice 118 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $L > 0$. Montrer l'équivalence entre

- f est convexe et son gradient est L-lipschitzien.
- $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq \frac{1}{L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$.

Démonstration. L'inégalité donnée est équivalente à $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\langle \frac{D\nabla}{\|d\nabla\|}, x - y\rangle$
Si elle est vérifiée, on obtient le caractère lipschitzien. D'autre part, en posant $g(t) = f(x + t(y-x))$, $g'(1) - g'(0) \geq 0$.
Réciproquement, si ∇f est L-lipschitzien, on a $\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\| \leq L\|x - y\|$, donc $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \leq L\|x - y\|^2$.
Plutôt : $f(y) - f(x) \leq \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{L}{2}\|y - x\|^2$,en intégrant.
La fonction $f_x(z) = f(z) - \langle \nabla f(x), z\rangle$ est convexe, de gradient nul en x, donc minimale en x. Elle est aussi L-lips donc $f_x(z) \leq f_x(y) + \langle \nabla f_x(y), z - y\rangle + \frac{L}{2}\|z - y\|^2$ Donc la partie de droite est $\geq f(x) - \langle \nabla f(x), x\rangle$ Mais elle est minimale pour $z - y$ anti-colinéaire à $\nabla f_x(y)$, de taille que l'on peut déterminer, et vaut finalement quelque chose. On obtient sûrement ce qu'on veut. □

Exercice 119 ★ ★ [ENS 2022] Soit $V\colon x \in \mathbb{R}^n \mapsto \det\left(x_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. On note B la boule unité euclidienne fermée, S la sphère unité, et H l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Montrer que V possède un maximum sur B, atteint en un point de $S \cap H$.

Démonstration. Sur B ok, il est sur S par homogénéité, et ensuite il faut la différentielle, j'imagine…
On vérifie $\frac{\partial V}{\partial x_k} = \sum_{j \neq k} \frac{V}{x_k - x_j}$ (dérivée logarithmique).
Donc $\sum_k \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0$. □

Exercice 120 [ENS 2022]
1. sV5 Montrer que pour tout BON $(e_1, \ldots, e_n)$, et S symétrique, on a $\mathrm{Tr}(e^S) \geq \sum_{k=1}^n e^{\langle Se_k, e_k \rangle}$.
2. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(e^S)$ est convexe

Démonstration.
1. C'est la convexité de exp.
2. Si $S = \lambda A + \mu B$, on a

$$\mathrm{Tr}\, e^S = \sum e^{\langle Se_k, e_k \rangle} = \sum^{\lambda\langle Ae_k, e_k \rangle + \langle Be_k, e_k \rangle} \leq \sum \lambda e^{\langle Ae_k, e_k \rangle} + \mu e^{\langle be_k, e_k \rangle}. \quad \square$$

3) Géométrie

Exercice 121 [ENS 2022]
1. Soit un polygone régulier à n sommets inscrit dans un cercle de rayon 1. Calculer le produit des longueurs des cordes reliant un sommet fixé à tous les autres.
2. Pour α et β réels, on pose $E = \left\{\alpha\zeta + \beta\zeta^{-1}, \zeta \in \mathbb{U}\right\}$. Montrer que les points d'affixe dans E décrivent une ellipse.
3. On s'intéresse à l'image des racines n-ièmes de l'unité par le paramétrage précédent. Calculer le produit des longueurs des cordes reliant l'une de ces images à toutes les autres.
   Indication : Considérer un polynôme P_n vérifiant $P_n(\alpha zeta + \beta\zeta^{-1}) = \alpha\zeta^n + \beta\zeta^{-n}$.

Démonstration.
1. $\prod(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$
2. C'est l'image d'un cercle par une transformation affine simple : diagonale, de coefficients $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$.
3. Il vérifie une relation de récurrence d'ordre 2. □

Exercice 122 ★ ★ [ENS 2022] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, S une partie de $\mathbb{R}^d$ de cardinal $\geq d + 2$. Montrer qu'il existe deux parties disjointes A et B de S telles que $\mathrm{Conv}(A) \cap \mathrm{Conv}(B) \neq \emptyset$.

Démonstration. Il suffit de trouver un point qui s'écrit de 2 façons différentes comme barycentre (l'écrire). On peut supposer A fini, et engendrant l'espace. Soit $x \in \mathrm{Conv}(A)$, strictement. Alors on peut rajouter un combinaison linéaire qui vaut 0. □

Exercice 123 ★ ★ Polyèdres [ENS 2022] Une partie bornée P de $\mathbb{R}^n$ est un polyèdre si et seulement s'il existe $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ tels que $P = \{x \in \mathbb{R}^n; \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \langle x, y_i \rangle \leq \alpha_i\}$. Si P est un polyèdre, on dit que $x \in P$ est un sommet de P si et seulement si, pour tout $y, z \in P$, on a $y + z = 2x$ si et seulement $x = y = z$. Montrer qu'un polyèdre a un nombre fini de sommets.

Démonstration. Si z est un sommet, l'ensemble des y_i pour lesquels il y a égalité engendre l'espace (sinon, on peut se déplacer selon un vecteur orthogonal). Alors z est entièrement déterminé par cet ensemble. □

Exercice 124 ★ ★ [ENS 2022]
1. Soit $n \geq 3$. Si $A = (A_1, \ldots, A_n)$ est un n-uplet de points du plan, on note $T(A) = (B_1, \ldots, B_n)$, où B_i désigne, si $1 \leq i \leq n$, le milieu de $[A_i A_{i+1}]$ (en convenant que $A_{n+1} = A_1$). Étudier la convergence de la suite $\left(T^k(A)\right)_{k=0}$.
2. Même question en fixant un élément α de $]0,1[$ et en considérant que, pour tout i, B_i est le barycentre de $((A_i, \alpha), (A_{i+1}, 1 - \alpha))$.

Démonstration. La distance max à 0 diminue.
Le centre de gravité est préservé, et la distance max diminue, donc on s'accumule sur un cercle, et… □

Exercice 125 [ENS 2022] On se place dans $\mathbb{R}^2$. Les éléments de $\mathbb{Z}^2$ sont les points entiers. On appelle polygone entier un polygone dont les sommets sont des points entiers. Montrer que l'aire d'un polygone entier est égale à $i + \frac{k}{2} - 1$ où i est le nombre de points entiers à l'intérieur (strict) du polygone et k le nombre de points entiers sur le bord du polygone.

Exercice 126 ★ ★ [ENS 2022] Soient E un espace euclidien, A une partie bornée non vide de E, d le diamètre de A, x un point de l'enveloppe convexe de A, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ tel que $\left\|x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leq \frac{d}{\sqrt{n}}$.

Démonstration. On peut supposer A fini, + méthode probabiliste. □

Exercice 127 [ENS 2022]
1. Soit $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tel que $(a, b, c) \neq 0$. On considère la partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. On suppose que $\mathcal{C}$ contient trois points non alignés et n'est pas incluse dans la réunion de deux droites. Montrer que, dans un repère orthonormal approprié, $\mathcal{C}$ possède une équation de l'une des trois formes suivantes : $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ (ellipse), $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ (hyperbole) ou $2pX - Y^2 = 0$ (parabole).
2. On considère un (vrai) triangle ABC de $\mathbb{R}^2$. On note A' (respectivement, B', C') le milieu de $[B, C]$ (respectivement, de $[C, A]$, de $[A, B]$). Montrer qu'une et une seule ellipse contient A', B', C' et est tangente à la droite (BC) (respectivement à (CA), à (AB)) en A' (respectivement en B', en C').

4) Probabilités

Exercice 128 Une urne comporte n bulletins. On effectue des tirages avec remise de loi uniforme. Déterminer l'espérance M_n du nombre de tirages nécessaires pour avoir vu tous les bulletins. Donner un équivalent de M_n.

Démonstration. Problème du collectionneur : M_n est la somme de variables, qui ont des lois géométriques. ☐

Exercice 129 ★ ★ [ENS 2022] Soit $n \geq 1$, et $(A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(1/2)$. Calculer l'espérance de $\det(A - A^T)$.

Démonstration. Donne une matrice antisymétrique, dont les coefficients suivent une loi $\mathcal{B}'$, symétrique.
On développe le déterminant. En prenant l'espérance, ne restent que les σ qui n'ont que des orbites de taille 2, et les signatures sont les mêmes. Reste à les compter : $(n-1)(n-3)\dots$. ☐

Exercice 130 [ENS 2022] On note $C_{n,k}$ le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ qui ont k cycles à supports disjoints dans leur décomposition (en comptant les points fixes).

1. Calculer $C_{n,n}$ et $C_{n,1}$.
2. Montrer que $C_{n+1,k} = nC_{n,k} + C_{n,k-1}$.
3. On note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de cycles d'une permutation choisie uniformément. Calculer la série génératrice de X_n.
4. Soit $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de loi $Y_i \sim \mathcal{B}(1/i)$. Montrer que $X_n \sim S_n$, où $S_n = \sum Y_i$.
5. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$. Que dire quand $n \to +\infty$?
6. Étudier la convergence en probabilité de la suite $\left(\frac{X_n}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$.
7. On pose $Z_n = \sum_{k=1}^{n} kY_k$. Exprimer, pour $\lambda > 0$, la limite, quand $n \to +\infty$, de $E\left(e^{-\lambda \frac{Z_n}{n}}\right)$.

Démonstration.
1.
2. Trivial.
3. $f(x) = \sum S_n x^n$, et $S_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} kC_{n,k}$ ☐

Exercice 131 On définit la fonction de Moebius $\mu \colon \mathbb{N}^* \to \{0, 1, -1\}$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ pour $n \geq 1$ divisible par le carré d'un nombre premier, et $\mu(n) = (-1)^{d_n}$ sinon, où d_n est le nombre de diviseurs premiers de n.

1. Montrer que pour $n \geq 2$, $\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0$.
2. Soit $\alpha \in \left]0,1\right[$ et X_α, Y_α deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{G}(\alpha)$. Pour $k \geq 1$, on note $q_k(\alpha) = P(k \mid X_\alpha)$. Déterminer $\lim_{\alpha \to 0} q_k(\alpha)$.
3. On note $f(\alpha) = P(X_\alpha \wedge Y_\alpha = 1)$. Montrer que $f(\alpha) = \sum_{d=1}^{+\infty} \mu(d) q_d(\alpha)^2$.

Exercice 132 [ENS 2022] Soit $\alpha \in \left]-1,1\right[$. On pose $f_\alpha \colon x \mapsto \frac{x+\alpha}{1+\alpha x}$. Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f_\alpha(u_n)$.

1. Variations et points fixes de f_α. Que dire de la limite éventuelle de la suite u selon la valeur de α ?
2. Exprimer u_n en fonction de α. Étudier la limite.
3. Soit $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs dans $\left]-1,1\right[$. On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f_{\alpha_n}(u_n)$. Que dire de la limite de u ?
4. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\left]-1,1\right[$. Que dire de la limite de u ?

Démonstration.
1. $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, f croissante.
2. En regardant les premières valeurs, on reconnaît les coefficients du binôme de Newton, et on trouve finalement $u_n = \frac{(1+\alpha)^n(1+x)+(1-\alpha)^n}{(1+\alpha)^n(x+1)+(1-\alpha)^n}$ donc la limite de (u_n) dépend de la position de α par rapport à 0. Si $\alpha = 0$, (u_n) est constante.
3. On ne peut rien dire, sauf si toutes les valeurs d'adhérence de la suite sont > 0.
4. Nécessairement la suite a comme valeur d'adhérence 1 ou -1 : si on est dans un compact, on a une probabilité strictement positive d'atteindre 1 ou -1.
   Ou bien la suite tend vers 1, ou bien elle tend vers -1, ou bien elle alterne indéfiniment. ☐

Exercice 133 [ENS 2022] Soit $\alpha \in [0, 1]$. Pour $z \in [0, 1]$, on pose $\varphi_a(z) = 1 - (1 - z)^\alpha$.

1. Montrer l'existence d'un variable aléatoire X_a à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\varphi_a(z) = E(z^{X_a})$, pour $z \in [0, 1]$.
2. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une famille d'évènements indépendants telle que $P(A_k) = \frac{a}{k}$. Montrer que X_a suit la même loi que la variable $I(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid \omega \in A_n\}$.
3. Soit $(E) \colon \forall z \in [0, 1]$, $\varphi_a(z) = z\varphi(\varphi_a(z))$ une équation d'inconnue φ, fonction génératrice d'une variable aléatoire.
   a) Montrer que si $a = \frac{1}{2}$, l'équation (E) admet une unique solution.
   b) Montrer que si $a = \frac{1}{3}$, l'équation (E) n'a pas de solution.

Démonstration.
1. DSE à coefficients positifs, de somme 1.
2. $P(I \geq n) = \prod(1 - \frac{a}{k})$
3. Revient à chercher Y tel que $X \sim \sum_{k=1}^{Y} X + 1$, ce qui donne l'unicité.
   Pour l'existence, revient à avoir $\varphi(y) = \frac{y}{1-(1-y)^{1/a}}$.
   a) Pour $a = \frac{1}{2}$, on obtient ce qu'on veut.

b) Pour $a = \frac{1}{3}$, on trouve un coefficient négatif en x^6… □

Exercice 134 1. Soit $n \geq 1$, $\sigma > 0$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles telles que $\forall t,\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ E(e^{tX_i}) \leq e^{t^2\sigma^2/2}$. Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ indépendant de n et σ tel que $E(\max_{i \leq n} |X_i|) \leq C\sigma\sqrt{\ln(2n)}$.

2. Soit X à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(X = k) = \alpha e^{-k^2/2}$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ E(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$.

Démonstration. 1. (inutile) Si $E(e^{tX_i}) \leq e^{t^2\sigma^2/2}$, alors par DL en 0, on obtient $E(X_i) = 0$ et $V(X) \leq \sigma^2$.

$$E(\max |X_i|) = \frac{1}{\beta} E(\ln e^{\beta \max |X_i|}) \leq \frac{1}{\beta} E(\ln(\sum e^{\beta |X_i|})) \leq \frac{1}{\beta} \ln E(\sum e^{\beta |X_i|}),$$

par concavité du ln.

D'autre part, $E(e^{\beta|X_i|}) \leq 2e^{\beta^2\sigma^2/2}$, d'où une majoration en $\frac{1}{\beta}\ln(2ne^{\beta^2\sigma^2/2}) = \frac{1}{\beta}\ln(2n) + \beta\sigma^2/2$, dont la valeur minimale est en $2\sqrt{\frac{\sigma^2 \ln(2n)}{2}}$.

2. On écrit $E(e^{tX})$, on obtient que la propriété est équivalente à ce que

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-(k-t)^2/2}$$

qui est 1-périodique soit maximale en 0.

En écrivant l'inégalité, il suffit de montrer que pour $t \in [0, 1]$, on a

$$e^{-k^2/2} + e^{-(k-1)^2/2} \geq e^{(k-t)^2/2} + e^{(k-1+t)^2/2}.$$

Celle-ci découle de la convexité de la fonction de droite, qui admet donc son maximum en $f(0) = f(1)$.

La RMS le fait en décomposant φ en série de Fourier : les coefficients $c_n(f)$ se calculent par dérivation d'une intégrale à paramètres. Puis comme $\sum |c_n(f)|$ converge, f est la somme de sa série de Fourier (elle existe, a les mêmes coefficients de Fourier, donc la différence est orthogonale aux polynômes trigonométriques, qui sont denses). □

Exercice 135 1. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles centrées admettant un moment d'ordre 2. Montrer que la matrice $(\mathrm{Cov}(X_i, X_j))$ est symétrique positive.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées, admettant un moment d'ordre 2 et telles que les $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ ne dépendent que de $i - j$. On suppose que $V(X_0) > 0$ et $\mathrm{Cov}(X_n, X_0) \to 0$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la matrice $(\mathrm{Cov}(X_i, X_j))$ est symétrique définie positive.

Démonstration. 1. C'est une matrice de Gram

2. Énoncé très bizarre.

Si le déterminant est nul, c'est qu'une combinaison linéaire des X_i a une variance nulle, donc est presque sûrement constante.

On a $V(\sum a_i X_i) = na_i^2 V(X_1) + (n-1)Cov(X_1, X_2) + \cdots + Cov(X_1, X_n)$ □

Exercice 136 [ENS 2022] Soit $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelle admettant des moments d'ordre 2, de mêmes espérances m telles que $\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = f(|k - \ell|)$.

1. On suppose que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(k) \to 0$. Pour $n \geq 1$, soit $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers m.
2. On suppose $\big(f(k)\big)_{k\geq 0}$ est sommable. Montrer que $\big(nV(Y_n)\big)_{n\geq 1}$ converge vers un réel à préciser.

Démonstration. 1. $P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n - m)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=0}^n (n-k)f(k)$. C'est la somme $\sum_{k=1}^n S_k$, et $S_k = o(k)$, implique que la somme est négligeable devant n^2.

2. On a $nV(Y_n) = f(0) + 2\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) f(k)$, et par convergence dominée, on tend vers $f(0) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$. □

Exercice 137 ★ [ENS 2022] On construit une permutation aléatoire σ de $\mathcal{S}_n$ de la manière suivante.

(i) On choisit $x \in [\![1, n]\!]$ de manière uniforme, et on pose $\sigma(1) = x$.

(ii) Si $\sigma(1) \neq 1$, on choisit de même $y \in [\![1, n]\!] \setminus \{\sigma(1)\}$ et on pose $\sigma(\sigma(1)) = y$. On réitère ce procédé $k - 1$ fois en tout jusqu'à retomber sur 1, de sorte que $\sigma^k(1) = 1$

(iii) Si $k < n$, on répète le processus, en partant du premier élément n'appartenant pas à $\{1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k-1}(1)\}$.

Les tirages étant supposés indépendants, montrer que la permutation σ ainsi construite suit la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$.

Démonstration. On trouve $P(X = \sigma)$, par récurrence sur la dimension. □

Exercice 138 [ENS 2022] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi d'espérance finie strictement positive. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que $P(\forall n \geq 1,\ S_n > 0) > 0$.

Démonstration.
- Si ce n'est pas le cas, presque sûrement on retourne toujours en négatif.
  Donc presque sûrement, on devient arbitrairement petit.
- Ça contredit la loi forte des grands nombres, avec hypothèses intégrables…
- On peut supposer X_n majorée, en tronquant, alors elle a un moment exponentiel, et on peut faire comme dans l'exercice suivant.
  Non, c'est dans le mauvais sens : il faudrait l'existence d'un moment exponentiel négatif ?

- $P(S_n \leq 0) = P(e^{-S_n} \geq 1) \leq E(e^{-S_n}) = \prod E(e^{-tX_i})$.
  Si X_i est bornée, il existe t_0 tel que $E(e^{-tX_i}) < 1$, et on a une majoration exponentielle.
  Plus précisément, si $|X_i| \leq M$, on a $|e^{-tx} - (1-tx)| \leq t^2x^2e^{tx} \leq t^2M^2e^{tM}$. On prend $t = \frac{1}{M}$.
  $E(Y_i^2) = E(X_i^2 \mathbb{1}_{|X_i| \leq i}) = o(i^2)$
  Sinon, on pose $Y_i = X_i \mathbb{1}_{|X_i| \leq i}$. $E(e^{-tY_i}) \leq 1 - \frac{E(Y_i)}{n} + \frac{i^2}{n^2}$
- En posant $Y_n = X_n 1_{|X_n| \leq n}$, on a $\sum P(Y_n \neq X_n)$ qui converge.
- $P(|S_n - E(S_n)| > E(S_n)) \leq \frac{V(S_n)}{E(S_n)^2} = \frac{V(S_n)}{n^2 E(X_1)^2}$ □

Exercice 139 Soit $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{R}(p)$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $pe^{t_0} + (1-p)e^{-t_0} < 1$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in]0,1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z},\ P(S_n \geq k) \leq \alpha^k \beta^n.$$

3. Montrer que S_n tend vers $-\infty$ presque sûrement.

Démonstration. 1. La dérivée en 0 est $2p - 1 < 1$.
2. $P(S_n \geq k) = P(e^{tS_n} \geq e^{tk}) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{tk}}$, d'où le résultat, avec $t = t_0$. On a $\beta < 1$, d'après la première question.
3. Borel Cantelli. □

Exercice 140 ★ [ENS 2022] Soit $n \geq 1$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer $P(XY = 0)$.

Démonstration. C'est $\prod_{p_i} P(p_i^{\alpha_i} \mid XY)$
et $P(X_k \geq k) = \frac{1}{p^k}$, donc $P(X_i + Y_i \geq \alpha_i) = \sum_{k=0}^{\alpha_i} \left(\frac{1}{p_i^k} - \frac{1}{p_i^{k-1}}\right) p_i^{\alpha-k} = \frac{\alpha_i + 1}{p_i^{\alpha_i - 1}} \left(\frac{1}{p_i} - 1\right)$ □

Exercice 141 ★ ★ [ENS 2022] Soient $n \geq m \geq 0$. On note A l'ensemble des injections $[\![1, m]\!] \to [\![1, n]\!]$ et B l'ensemble des surjections $[\![1, n]\!] \to 1, m$. Comparer $\frac{A}{n^m}$ à $\frac{B}{m^n}$.

Démonstration. On compte le nombre de couples (S, i) tel que $s \circ i = \mathrm{Id}$.
D'un cté, à i fixé, il y a $(n-m)^m$ surjections.
De l'autre, c'est la somme $\sum_s \prod_{\mathcal{O}_i} |\mathcal{O}_i|$, où $\mathcal{O}_i = s^{-1}(i)$. Et $\prod_{\mathcal{O}_i} |\mathcal{O}_i| \leq \left(\frac{\sum |\mathcal{O}_i|}{m}\right)^m = \left(\frac{n}{m}\right)^m$.
On obtient

$$\frac{|A|}{|B|} \leq \frac{(n/m)^m}{(n-m)^m}.$$

À comparer à $\frac{n^m}{m^n} = \frac{(n/m)^m}{m^{n-m}}$. □

Exercice 142 Définition de variables sous-gaussiennes Soit X une variable aléatoire réelle centrée. Montrer l'équivalence entre

- il existe $a > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ E(e^{\lambda X}) \leq e^{a\lambda^2}$.
- il existe $b > 0$ tel que $\forall t > 0,\ P(|X| \geq t) \leq 2e^{-bt^2}$.
- il existe $c > 0$ tel que $E(e^{cX^2}) < +\infty$

Démonstration. $(i) \to (ii)$: le 2 vient de la séparation en deux. On écrit $P(X \geq t) = P(e^{uX} \geq e^{ut}) \leq \frac{E(e^{uX})}{e^{ut}}$, et on minimise en u. $(ii) \Rightarrow (iii)$: On a $E(Z) = \sum P(X \geq k)$. Pour Z non à valeur dans $\mathbb{Z}$, on est fini si et seulement si ça converge. Donc $E(e^{cX^2}) \sim \sum P(e^{cX^2} \geq k) \sim \sum P(|X| \geq \sqrt{\frac{\ln k}{c}}) \sim \sum e^{-b/c \ln t}$, d'où le résultat.

$(iii) \Rightarrow (i)$: On peut supposer $\lambda \geq 0$. Quitte à multiplier X par une constante, on peut supposer $E(e^{X^2}) < +\infty$.
On a, par DSE, $e^u \leq u + e^{u^2}$, donc $E(e^{\lambda X}) \leq E(e^{\lambda^2 X^2})$. Si $\lambda \in [0,1]$, par concavité, on obtient c^{λ^2}, avec $c > 1$.
Si $\lambda > 1$, on utilise $\lambda X \leq \lambda^2 + X^2$, donc $E(e^{\lambda X}) \leq e^{\lambda^2} E(e^{X^2}) = Ce^{\lambda^2} \leq e^{a\lambda^2}$, pour un a… □

Exercice 143 Soient $\lambda, c \in]0,1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$ telles que $X_0 = c$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in [0,1]$, $P(X_{n+1} = \lambda + (1-\lambda)X_n \mid X_n = x) = x$ et $P(X_{n+1} = (1-\lambda)X_n \mid X_n = x) = 1 - x$. On note $u_n(p) = E(X_n^p)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \subset [0,1]$ de cardinal au plus 2^n tel que $P(X_n \in A_n) = 1$.
2. Montrer que $u_n(1) = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer qu'il existe $\lambda_2 > 0$ tel que $\forall n,\ |u_n(2) - c| \leq e^{-\lambda_2 n}$.
4. Montrer que $(1-\lambda)^{p-1}\big(1 + \lambda(p-1)\big) \in]0,1[$ pour tout $p \geq 2$.
5. Montrer que pour tout $p \geq 2$, il existe $\lambda_p > 0$ tel que $u_n(p) - c = O(e^{-\lambda_p n})$.

Démonstration. 1.
2. On a $E(X_{n+1} \mid X_n = x) = x(\lambda + (1-\lambda)x) + (1-x)(1-\lambda)x = x$

3. $(u_n(2)^2)$ vérifie une relation de récurrence affine, via

$$E(X_{n+1}^2) = E\Big(E(X_{n^1}^2 \mid X_n = X_n)\Big) = \cdots = cla^2 + E(X_n^2)(1-\lambda^2).$$

4. C'est Bernoulli.
5. Écrire la relation de récurrence vérifiée par X_n^p, à voir. □

Exercice 144 [ENS 2022] 1. Soit $n \geq 2$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Dénombrer les manières de choisir k nombres dans $[\![1, n]\!]$ sans prendre deux nombres consécutifs.

2. On installe n couples autour d'une table ronde, en alternant hommes et femmes. Montrer que la probabilité que personne ne soit assis à côté de son partenaire est

$$p_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!.$$

3. Déterminer la limite de (p_n).

Démonstration. 1. En utilisant $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, x_2 - 1, \ldots, x_k - k + 1)$, on trouve $\binom{n-k+1}{k}$.

2. On cherche la probabilité que k couples donnés soient assis côte à côte.
   Sous l'hypothèse que le premier élément d'un des couples soit assis à la place 1, donnée.
   Les autres premiers éléments d'un couple n'ont que $2n - 3$ possibilités. On choisit leurs places, avec $\binom{2n-3-(k-1)+1}{k-1} = \binom{2n-k-1}{k-1} = \binom{2n-k}{k}\frac{k}{2n-k}$ possibilités. On multiplie par $k!$ (réorganisation des couples). On multiplie par n (choix de la place 1). On divise par k (choix du couple singled out).
   Puis on place les autres, avec $2(n-k)!^2$ possibilités (le deux pour choisir femme homme du premier couple).
   Pour obtenir la probabilité, on divise par $2(n!)^2$.
   J'ai un problème de facteur 2.
   Ensuite, on fait de l'inclusion-exclusion, qui rajoute un facteur $\binom{n}{k}$.
3. On fixe k. Quand $n \to +\infty$, le terme est équivalent à $\frac{n^k}{k!}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$, donc on trouve e^{-1}. □

Exercice 145 ★ ★ [ENS 2022]

1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout variable aléatoire X à valeurs dans $[0, 1]$ non presque sûrement nulle, on ait

$$\sup_{t\geq 0} tP(X \geq t) \geq C\frac{E(X)}{\ln\big(2/E(X)\big)}.$$

2. Montrer qu'il existe une constante $C' > 0$ et une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[0, 1]$ non presque sûrement nulles telle que $E(X_n) \to 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{t\geq 0} tP(X \geq t) \leq C'\frac{E(X)}{\ln\big(2/E(X)\big)}$$

Démonstration. 1. On a $E(X) \simeq \sum_{k=-1}^{+\infty} P(X \in E(X)2^k, E(X)2^{k+1})E(X)2^k$. Le nombre de termes est en $\ln(E(X))$, donc il y en a un tel que $P(X \in E(X)2^k, E(X)2^{k+1})2^k \geq -\frac{1}{\ln E(X)}$.
   Et $\sup tP(X \geq t) \geq E(X)2^k P(X \geq E(X)2^k) \geq C\frac{E(X)}{\ln E(X)}$
2. □

II) X

1) Algèbre

Exercice 146 Valeurs rationnelles de $\cos(\pi r)$ [X 2021, X 2022] Soit $r \in \mathbb{Q}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 2\cos(2^n \pi r)$.

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.
2. On suppose que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{Z}$. En déduire les valeurs possibles de r.
3. Vérifier que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
4. Déterminer les éléments d'ordre fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}[i]$.

Démonstration. 1. On pose $r = \frac{p}{q}$. Après avoir retiré la partie 2-adique de q (prendre n assez grand), prendre m tel que $2^m \equiv 1[q]$.

2. On a $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, donc $4\cos^2\theta = 2 + 2\cos(2\theta)$, donc $a_n^2 = 2 + a_{n+1}$.
   Si $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, on obtient $q_{n+1} = q_n^2$, or a_n périodique APCR, donc (a_n) est entière dès le début. On obtient $2\cos(\pi r) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
3.
4. □

Exercice 147 [X 2021, 2022] 1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.
Une partie X d'un sous-groupe abélien G est dite sans somme s'il n'existe pas $x, y \in X$ tel que $x + y \in X$.

1. Soit p un nombre premier de la forme $3k + 2$. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ contient une partie sans somme de cardinal $k + 1$.
2. Soient A, B deux parties d'un corps fini $\mathbb{K}$. Calculer $\sum_{x \in \mathbb{K}^*} |A \cap xB|$.
3. Soit A une partie finie non vide de $\mathbb{Z}^*$. Montrer qu'il existe une partie B de A sans somme et de cardinal strictement supérieur à $\frac{|A|}{3}$.

Démonstration. 1. S'il n'y en a qu'un nombre fini, on considère $N = 3p_1 \dots, p_n - 1$, qui ne peut pas avoir que des diviseurs premiers congrus à 1 modulo 3.
2. $\{k, \dots, 2k\}$
3. Si $A, B \subset \mathbb{K}^*$, on trouve $|A||B|$, puisque chaque paire (a, b) est comptée une fois dans la somme.
   Écrire $|A \cap xB| = \sum_a \sum_b 1_{a=xb}$.
4. On prend p tel que $A \subset \{0, , 3k + 2\}$. On prend $\tilde{B}$ un ensemble sans somme, de cardinal k. Puis on regarde tous les $A \cap x\tilde{B}$.
   D'après c, l'un d'entre eux a un cardinal $> |A|$. ☐

Exercice 148 [X 2022] Soit $d > 0$. Pour $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on pose $T_a = \begin{pmatrix} 1 & d^{-1/4}\tan a \\ -d^{1/4}\tan a & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre $T_a T_b$ et T_{a+b}.
2. On suppose que d est un entier ≥ 2 et qu'il n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier.
   a) sV2 On note $A = \{a + b\sqrt{d},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que $\sigma\colon a + b\sqrt{d} \mapsto a - b\sqrt{d}$ est bien défini et un morphisme d'anneau. Il s'étend à un morphisme de $\mathcal{M}_2(A)$.
   b) sV1 Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & tx \\ t^{-1}x & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer deux vecteurs $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires tels que BX_i soit colinéaire à X_i.
   c) Soit p, q premiers entre eux, avec $p \neq 0$ et $q \geq 3$ impair. Montrer que $d^{-1/4}\tan(\frac{p\pi}{q})$ est irrationnel.

Démonstration. On a $T_aT_b = \begin{pmatrix} 1 - \tan a \tan b & d^{-1/4}\tan a + d^{-1/4}\tan b \\ -d^{1/4}\tan a - d^{1/4}\tan b & 1 - \tan a \tan b \end{pmatrix} = (1 - \tan a \tan b)T_{a+b}$. Supposons $d^{-1/4}\tan(a) \in \mathbb{Q}$. Alors $T_a \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}[\sqrt{d}])$.

D'autre part, T_a^q est un scalaire, rationnel. Mais, en notant σ le morphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q}[\sqrt{d}])$, on a $\sigma(T_a) = \begin{pmatrix} 1 & -d^{-1/4}\tan a \\ -d^{1/4}\tan a & 1 \end{pmatrix}$.
On peut en trouver les valeurs propres, $1 \pm \tan a$ ☐

Exercice 149 ★ ★ Erdős-Ginzburg-Ziv [X 2022] Soit p premier et $a_1, \dots, a_{2p-1}$ des entiers quelconques. On veut montrer qu'il existe une partie J de cardinal p telle que $p \mid \sum_{i \in J} a_i$. On pose $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrer que cela revient à montrer que les polynômes $P(X_1, \dots, X_{2p-1}) = \sum_{i=1}^{2p-1} X_i^{p-1}$ et $Q(X_1, \dots, X_{2p-1}) = \sum_{i=1}^{2p-1} a_i X_i^{p-1}$ admettent une racine commune non triviale.
2. Conclure en considérant $R = (1 - P^{p-1})(1 - Q^{p-1})$.
   On admettra que pour tout $j < p - 1$, $\sum_{x \in \mathbb{K}} x^j = 0$.

Démonstration. 1. Valeur de P : le nombre de X_i non nuls.
   S'il y a une racine commune non triviale, alors il y a un multiple de p de x_i qui sont non nuls et $Q(x_1, \dots x_{2p-1})$ vaut $\sum a_i = 0$. La réciproque est OK.
2. On veut montrer qu'il existe x tel que $R(x) = 1$, différent de 0. R vaut soit 0 soit 1. On a $R(0) = 1$, on montre qu'il y a une autre telle valeur.
   On montre que $\sum_{x \in \mathbb{K}^{2p-1}} R(x) = 0$. On a $\deg R = 2(p-1)^2 < (2p-1)(p-1)$ dans chaque monôme de R, il y a un X_i qui est de degré $< p - 1$, donc la somme fait 0. Plus simple : clairement, il n'y a aucun monôme avec tous les X_i. ☐

Exercice 150 [X 2022] Soient $a, c, m \in \mathbb{N}$ avec $m > 1$. $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = ax_n + c$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

1. Montrer que (x_n) est périodique APCR.
2. On suppose que (x_n) est m-périodique à partir d'un certain rang et que $m = p^\alpha$. Montrer que $a \equiv 1[p]$ et que $c \wedge p = 1$.
3. s On suppose que m est une puissance d'un nombre premier impair p et que $a \equiv 1[p]$. On pose $P = \sum_{k=0}^{p-1} x^k$. Montrer que $P(a)$ est divisible par p, mais pas par p^2.
   Manque la fin de l'énoncé.

Démonstration. 1. Il s'agit d'un système dynamique qui prend un nombre fini de valeurs.
2. Si on réduit modulo p, on est forcément p périodique : la période divise m, et ne peut pas être plus grande que p. Donc on peut supposer $m = p$.
   Ensuite on a une suite arithmético-géométrique, si $a \not\equiv 1[p]$, alors on est une suite géométrique, donc au plus $p - 1$-périodique, impossible, donc $a = 1$.
3. Il suffit d'écrire $P(a)$. RAV. ☐

Exercice 151 ★ ★ [X 2022] Soit $p \geq 3$ premier et $t \in \mathbb{N}^*$. On considère $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers congrus à 1 modulo p^t. On pose $a = 2p_1 \dots, p_r$ et $c = a^{p^{t-1}}$.

1. Montrer que $c \equiv 2[p]$.
2. Montrer que $m = 1 + c + \cdots + c^{p-1}$ et $c - 1$ sont premiers entre eux.
3. Soit q un facteur premier de m. Montrer que $q \equiv 1[p^t]$.
4. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo p^t.

Démonstration.
1. On a $c \equiv 2^{p^{t-1}}[p]$, et $u^p \equiv u[p]$
2. Si d est un diviseur commun, on a $c \equiv 1[d]$, donc $1 + c + \cdots + c^{p-1} \equiv p[d]$, donc $d \mid p$, mais $c \wedge p = 1$.
3. On a $q \mid 1 + c + \cdots + c^{p-1} = \frac{c^p - 1}{c-1}$, donc $q \mid c^p - 1$, donc $c^p \equiv 1[q]$, donc $a^{p^t} \equiv 1[q]$ et $a^{p^{t-1}} \not\equiv 1[q]$ donc l'ordre de a modulo q est p^t, qui doit diviser $q - 1$.
4. ☐

Exercice 152 [X 2022] Soit p premier. On considère $K = F_p[[X]]$ l'ensemble des séries formelles, c'est-à-dire $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$ muni du produit de Cauchy, qui en fait une algèbre.

1. Montrer que $(f + g)^p = f^p + g^p$.
2. Si $f = \sum a_n X^n$, alors $f^p = \sum a_n X^{np}$.
3. Pour $r \leq p - 1$, on pose $\Lambda_r(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{np+r} X^n$. Montrer que $\Lambda_r(f^p g) = f \Lambda_r(g)$ pour tous f, g.
4. Soit f et $k \geq 1$. On suppose qu'il existe des polynômes non tous nuls $Q_0, \dots, Q_k$ tel que $\sum Q_i f^{p^i} = 0$. Montrer qu'il existe une telle famille avec $Q_0 \neq 0$.
5. … Manque une suite.

Démonstration.
1. Binôme.
2. Si un polynôme tend vers f, au sens que la différence est divisible par une grosse puissance de X, alors $PQ \to fg$ ($d(F, G) = 2^{v(F-G)}$).
3. Écrire les produits de Cauchy…
4. Si $Q_0 = 0$, on le retire, et on prend le Λ_r. ☐

Exercice 153 [X 2022] On note $G = SL_2(\mathbb{Z})$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $G = \langle S, T \rangle$.
2. Soit $\varphi \colon G \to \mathbb{C}^*$ un morphisme. Montrer que $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{U}_{12}$.

Démonstration.
1. Vérifier par exemple que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est dans $\langle S, T \rangle$. Alors, en multipliant une matrice par S, T, on peut faire des opérations entières sur les lignes, ou les colonnes. Les deux coefficients de la première colonnes sont premiers entre eux, on applique l'algorithme d'Euclide, pour se ramener à une colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $(ST)^3 = S^2$, donc ST est d'ordre 12, et S d'ordre 4. ☐

Exercice 154 ★ ★ [X 2022] Soit A un anneau commutatif non nul. On dit que $b \in A$ est un diviseur de 0 si $b \neq 0$ et s'il existe $c \neq 0$ tel que $bc = 0$.

1. Montrer que si A est fini et n'admet aucun diviseur de 0 alors A est un corps.
2. On pose $B = A[X]$. Montrer que $P \in B \setminus \{0\}$ est un diviseur de 0 si et seulement s'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $aP = 0$.

Démonstration.
1. Les applications $x \mapsto ax$ sont injectives.
2. Si on peut écrire $QP = 0$, avec Q de degré minimal. Le coefficient dominant doit être nul, donc le coefficient dominant a_d de P est un diviseur de zéro. Mais on a également $a_d QP = 0$, avec $\deg a_d Q < \deg Q$, donc a_d annule tous les coefficients de Q. De même, a_{d-1} annule tous les coefficients de Q, etc. Au final, le coefficient dominant de Q annule tous ceux de P. ☐

Exercice 155 ★ ★ [X 2022]

1. Décomposer $X^5 - 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$.
2. Soit p premier, décomposer $X^p - 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$.

Démonstration.
1. $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$, car $\cos(2\pi/5)$ est irrationnel.
2. $1 + X + \cdots + X^{p-1}$ est irréductible : appliquer le critère d'Eisenstein à $P(X + 1)$. ☐

Exercice 156 ★ [X 2022] Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}$?

Démonstration. Passer $\sqrt{2}$ à droite, puis regrouper par parité des puissances, et utiliser $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est $\mathbb{Q}$-libre. ☐

Exercice 157 ★ ★ [X 2018, X 2022]

1. Déterminer l'ensemble des couples (f, g) de polynômes trigonométriques à coefficients réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$.

2. Déterminer les polynômes trigonométriques h tels que $\cos h$ soit un polynôme trigonométrique.

Démonstration. 1. On se ramène à des polynômes complexes, et a $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$. On regarde les coefficients de plus grand degré : on trouve que dès que ces degrés sont ≥ 0, ils doivent être les mêmes pour f et g. Idem pour les négatifs.
Au final $f = \frac{e^{nx} \pm e^{-nx}}{2}$.

2. Si $\cos h$ est un polynôme trigonométrique, $h' \sin h$ l'est également, et $h'^2 \sin^2 h + h'^2 \cos^2 h = h'^2$, et considérer le degré. □

Exercice 158 ★ ★ Entrelacement de racines [X 2022] Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que toute combinaison linéaire de A, B est scindée sur $\mathbb{R}$ ou nulle. Soit $x_1 < x_2$ deux racines de A. Montrer que $[x_1, x_2]$ contient au moins une racine de B.

Démonstration. Par l'absurde, si on suppose A, B positifs sur $[x_1, x_2]$, en considère $A - xB$, pour $x \to 0^+$ ça a deux racines dans $]x_1,x_2[$, et pour $x \to +\infty$, aucune, donc les racines «disparaissent», c'est-à-dire deviennent complexes.
Pour la réciproque, quitte à factoriser par les racines communes, les racines de $\lambda P + \mu Q$ sont celles de $\frac{\lambda P + \mu Q}{PQ} = \frac{\lambda}{Q} + \frac{\mu}{P}$. □

Exercice 159 [X 2022] Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang $\leq r$. Montrer que $\dim V \leq nr$.

Démonstration. Par équivalence, on peut supposer que V contient J_r. Toutes les matrices s'écrivent alors $\begin{pmatrix} A & C \\ L & O \end{pmatrix}$. Comme on peut rajouter I_r à A, il faut que les matrices C et L vérifient que toutes les lignes de L sont orthogonales à toutes les lignes de C (traiter le cas où $r = n - 1$).
En considérant une somme $L_1 + L_2 \perp C_1 + C_2$, donc $\langle L_1, C_2 \rangle + \langle L_2, C_1 \rangle$, au sens où si on choisit une ligne quelconque et une colonne quelconque, on a cela.
On considère $\varphi(M) = (L, C)$. La condition précédente implique que l'image est de dimension au plus la moitié, puisqu'il est orthogonal (en un certain sens) à l'ensemble des (C, L). □

Exercice 160 ★ ★ [X 2022] X un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $(f_i(x_j))$ est non inversible pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ alors $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.
2. Soient $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(g_1, \ldots, g_n)$ telles que pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ on ait $\det(f_i(x_j)) = \det(g_i(x_j))$. Montrer que l'une des deux conditions est vérifiée :
   (i) $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$
   (ii) $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(g_1, \ldots, g_n)$ sont liées

Démonstration. 1. Un sens trivial. L'autre sens par récurrence.

2. D'après la première question, si l'une des familles est libre, l'autre aussi.
Pour une autre fonction g, on regarde des déterminants de taille $n + 1$. En développant suivant la ligne des g, on obtient qu'ils sont égaux pour f_i, et pour les g_i. Mais ils sont nuls si et seulement si $g \in \mathrm{Vect}\, f_i$. □

Exercice 161 ★ ★ Discriminant d'un polynôme [X 2022] Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \prod(X - \lambda_i) \in \mathbb{C}[X]$. On pose $\Delta(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i \neq j}(\lambda_i - \lambda_j) = \prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2$.

1. Exprimer $\Delta(P)$ en fonction des a_k dans le cas $n = 2$.
2. Montrer que $\Delta(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n P'(\lambda_i)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \chi_A$. On pose $M = \left(\mathrm{Tr}(A^{i+j-2})\right)_{i,j \leq n}$. Montrer que $\det M = \Delta(P)$.
4. Montrer que $\Delta(P)$ est un polynôme à coefficients entiers en les a_k.

Démonstration. 1.

2.
3. Écrire M comme le produit de deux matrices de Vandermonde.
4. C'est les sommes de Newton. □

Exercice 162 ★ ★ [X 2022] Soit $n \geq 2$ et $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AC - BD = I_n$ et $AD + BC = O_n$.

1. Montrer que $CA - DB = I_n$ et $DA + CB = O_n$.
2. Montrer que $\det(AC) \geq 0$.

Démonstration. 1. L'hypothèse donne $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix} = I_{2n}$.

2. Si C inversible, en posant $U = CA$, on a $U = I_n + DB = I_n - DC^{-1}DA$, donc $I_n - DC^{-1}DC^{-1}U$, donc $U(I_n + (DC^{-1})^2) = I_n$, et déterminant de $I_n + B^2$ est toujours > 0, par factorisation.
Si C non inversible, le déterminant est nul. □

Exercice 163 [X 2022] Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $M_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$.

1. M est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que le sous-groupe de $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ engendré par M est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
3. Quel est l'indice de nilpotence de $M - I_{n+1}$?
4. Expliciter M^{-1}.

Démonstration. 1. non, il y a des 1 sur la diagonale
2. Montrer que $n \mapsto M^n$ est injectif.
3. L'indice est n.
4. penser à $P \mapsto P(X+1)$ □

Exercice 164 [X 2022] Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ et T l'endomorphisme de E qui à $(u_n)_{n\geq 1}$ associe $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k$.

1. Déterminer les éléments propres de T.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, déterminer $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id})^k$ pour $k = 2$, puis pour tout $k \geq 2$.

Démonstration. 1. Les valeurs propres sont les $\frac{1}{n}$, où n est le premier indice $\neq 0$.
Le vecteur propre pour $\frac{1}{n}$ est $\forall k \geq 0,\ u_{n+k} = \binom{n+k-1}{k}$.
2. On cherche v_n tel que $T(v_k) - \frac{v_k}{n} = u_k$. Pour des $k < n$, on obtient par récurrence que $v_k = 0$. Puis on a $\frac{v_n}{n} - \frac{v_n}{n} = 1$, ce qui n'est pas possible.
Donc les $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id})^k$ sont stationnaires, à $k = 1$. □

Exercice 165 [X 2022] Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Quels sont les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) \in GL(E)$?
2. À quelle condition sur u est-il vrai que $\mathbb{K}[u] \subset GL(E) \cup \{0\}$?

Démonstration. 1. P premier avec χ.
2. Le polynôme minimal est irréductible. □

Exercice 166 [X 2022] Théorème de Brauer Montrer que $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutation M_σ et $M_{\sigma'}$ sont conjuguées.

Démonstration. Si σ, σ' sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$, comme $\sigma \mapsto M_\sigma$ est un morphisme, M_σ et $M_{\sigma'}$ sont conjuguées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement, si M_σ et $M_{\sigma'}$ sont conjuguées : on a en particulier $\operatorname{Tr} M_\sigma = \operatorname{Tr} M_{\sigma'}$, ce qui implique que σ et σ' ont le même nombre de points fixes.
Plus généralement, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Tr} M_\sigma^k = \operatorname{Tr} M_{\sigma'}^k$, ce qui implique que σ^k et σ'^k ont le même nombre de points fixes. On en déduit par récurrence forte que pour tout k, σ et σ' ont le même nombre d'orbites de longueur k.
Cela implique que σ et σ' sont conjuguées. □

Exercice 167 [X 2022] Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose u diagonalisable. À quelle condition a-t-on $C(u) = \mathbb{K}[u]$?
2. Dans le cas général, montrer que si $\mathbb{K}[u]$ est de dimension n alors $C(u) = \mathbb{K}[u]$.
3. Réciproque ?

Démonstration. 1. Vps distinctes.
2. Endomorphisme cyclique : μ_x le polynôme minimal d'un vecteur. μ_x ne prend qu'un nombre fini de valeur, et $E = \bigcup_{\mu_x} \operatorname{Ker} \mu_x(u)$, donc il existe x tel que $\mu_x = \mu$. Un endomorphisme qui commute avec u est déterminé par sa valeur sur x.
3. On a toujours $\dim \mathcal{C}(u) \geq n$: via résolution du système d'équations $AX = XA$ dont les n coordonnées sur la diagonale sont forcément égales. □

Exercice 168 [X 2022] Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, et $p, q \in \mathcal{L}(E)$. On pose $c = pq - qp$ et on suppose que c commute avec p et q.

1. Montrer que c est nilpotente.
2. Montrer que p, q, c sont cotrigonalisables.
3. La conclusion de la première question subsiste-t-elle si E est de dimension infinie ?

Démonstration. 1. Si x est un vecteur propre de valeur propre λ, alors px et qx le sont. Donc E_λ est stable, et $pq - qp$ est de trace nulle, donc $\lambda = 0$.
2. Ker est stable, et récurrence.
3. Est-il possible que $pq - qp = \operatorname{Id}$ en dimension infinie : oui, sur $\mathbb{R}[X]$, prendre p la dérivation, et définir q petit à petit. □

Exercice 169 [X 2022] Soit V de dimension $2n$, σ une symétrie de V. On suppose qu'il existe (a, b) et $(a', b,)$ tels que $ab = ba$, $a'b' = b'a'$ et $b\sigma = \sigma a$ et $b'\sigma = \sigma a'$.
On suppose que a admet $2n - 1$ valeurs propres distinctes, et que a' admet $2n$ valeurs propres distinctes. On suppose que $\operatorname{Ker}(a - b)$ est un espace propre de a de dimension 2 sur lequel σ induit l'identité.

1. Calculer la trace de σ.
2. On suppose qu'aucun vecteur propre de a' n'appartient à $\operatorname{Ker}(\sigma + \operatorname{Id})$. Calculer la dimension de $\operatorname{Ker}(a' - b')$.

Démonstration. 1. a, b sont conjugués, et commutent, et sont diagonalisables, donc co-diagonalisables.
Sur l'espace propre de dimension 2, σ vaut l'identité. Sur chaque autre espace propre, a et b ont des valeurs propres distinctes, et l'écrire $a\sigma = \sigma b$ implique que le coefficient diagonal de σ est nul, donc la trace vaut 2.

2. Idem, a', b' co-diagonalisables, $\mathrm{Ker}(a'-b')$ est le nombre de coefficients diagonaux où ils sont égaux. En tout autre coefficient, le coefficient diagonal de σ est nul.

   En ces coefficients égaux, par unicité, on a $\sigma(e_i)$ colinéaire à e_i, donc $\sigma(e_i) = \pm e_i$, et l'autre est exclu.

   On obtient $\dim \mathrm{Ker}(a'-b') = 2$. □

Exercice 170 [X 2022] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie. On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ telles que $u \circ f - f \circ u = u^m$, où $m \geq 2$.

Démonstration. Si x est un vecteur propre de $u \circ f - f \circ u$, $u(x)$ l'est aussi, car u commute.
Si x valeur propre de u, on a $u(f(x)) = \lambda f(x) + \lambda^n x$, donc $(x, f(x))$ est stable par u, puis $u(f^2(x)) = u^n(f(x)) + f(u(f(x)))$, donc $(x, f(x), f^2(x))$ est stable. Dans cette base : $(x, f(x), \dots, f^k(x))$, u a une matrice triangulaire supérieure, avec des λ sur la diagonale. Donc l'espace caractéristique associé à λ est stable par f, semble-t-il. Mais en passant à la trace sur cet espace, on obtient $\lambda = 0$. Donc la seule valeur propre de u est 0.
Le noyau de u est stable par f, donc c'est une somme d'espaces propres de f (car les valeurs propres de f sont simples).
On obtient que pour $k \leq n$, les $\mathrm{Ker}\, u^k$ sont stables par f aussi (car u et f commutent dessus + récurrence).
Si $x \in \mathrm{Ker}\, u^{n+1}$, On a $u(f(x)) = f(u(x)) + u^n(x)$, donc $u(f(x)) \in \mathrm{Ker}\, u^n + \ker u$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\, u^{n+1}$.
Donc tous les $\mathrm{Ker}\, u^k$ sont stables par f.
Dans une base de diagonalisation de f, u est triangulaire supérieure, mais on vérifie que l'égalité $uf - fu = u^n$ est impossible si $u \neq 0$, en considérant un coefficient de u le plus proche de la diagonale possible. □

Exercice 171 [X 2022] Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On considère l'endomorphisme φ_A qui à $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par $X^n - 1$. Est-ce que φ_A est diagonalisable ?

Démonstration. La matrice dans la base canonique correspond à des permutations cycliques de la première colonne. Dans le cas où $A = X^p$, on est diagonalisable.
On prend les polynômes L_i de Lagrange en les racines de $X^n - 1$. Ils forment une base. Puis on remarque que $\varphi(L_i) = A(\omega_i) L_i$ donc diagonalisable et les valeurs propres sont les $A(\omega_i)$. □

Exercice 172 ★ [X 2022] Soit $n \geq 3$. caractériser les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ pour lesquels il existe une base dans laquelle u est représenté par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $M \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{K})$.

Démonstration. La condition est $\dim \mathrm{Ker}\, u \geq 2 + \dim \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u$. □

Exercice 173 [X 2022] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

- $\forall m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$
- B est nilpotente et $BA = O_n$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$: pour $M = O_n$, on obtient B nilpotente. Si l'image de A n'est pas incluse dans le noyau de B.
On écrit $\mathrm{Tr}(AM+B)^2 = \mathrm{Tr}(AM)^2$, ce qui donne $\mathrm{Tr}(AMB) = 0$, ou $\mathrm{Tr}(MBA) = 0$, pour tout M, donc $BA = O_n$.
Réciproquement, on a pour tout K, et tout M, $\mathrm{Tr}(AM+B)^k = \mathrm{Tr}(AM)^k$, donc ils ont les mêmes valeurs propres. □

Exercice 174 [X 2022] Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que $\sum_{i=1}^k s_{i,i} \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

Démonstration. $s_{i,i} = \langle AE_i, E_i \rangle$; C'est du minimax
par récurrence, $\lambda_1 = \sup_{\|x\|=1} (u(x)|x) \geq (u(e_1)|e_1)$ puis par le min-max, on a $\lambda_k = max_V min_{x \in V} (Ax|x)$ donc si $F = Vect(e_1, \dots, e_k)$, $\lambda_k \geq (u(\epsilon_k)|\epsilon_k)$. Puis on complète en (ϵ_i) base de F et A' matrice de l 'induit de u dans cette base. Par récurrence : $\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} \geq \sum a'_{i,i}$ et avec la relation sur ϵ_k, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geq \sum a'_{i,i}$ Or $\sum a'_{i,i} = \sum a_{i,i}$ en utilisant la trace. □

Exercice 175 [X 2022] Simplicité de $SO(E)$ Soit E un espace euclidien de dimension 3, et H un sous-groupe de $SO(E)$. On suppose que $\forall g \in SO(E), \forall h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.

1. On suppose que H contient une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Montrer que $H = SO(E)$.
2. Montrer que si H contient une rotation r d'angle obtus alors $H = SO(E)$.

   Indication : Considérer $x \neq 0$ tel que $\langle r(x), x \rangle = 0$, s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\, x$ et $u = srsr^{-1}$.
3. Montrer que $SO(E)$ est simple.

Démonstration.
1. Dans un plan contenant la droite, c'est une symétrie axiale, que l'on peut conjuguer par des rotations pour obtenir toutes les symétries axiales, puis on peut recommencer selon une autre droite. On obtient toutes les rotations comme produit de symétries.
2. On vérifie qu'avec un angle obtus, il existe bien un tel x. On cherche qui est $srsr^{-1}$ et on trouve que c'est une symétrie orthogonale et on est ramené à a)
3. Si contient une rotation d'angle pas obtus, on la compose avec elle-même pour avoir un angle obtus. (si l'angle est entre $\pi/2^n$ et $\pi/2^{n-1}$, c'est 2^n fois). □

Exercice 176 [X 2022] Soit $M \in SL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|MX\|_2 = \|X\|_2 = 1$.
2. Montrer qu'il existe $O, O' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que OMO' soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

Démonstration. 1. Le déterminant inférieur au produit des normes 2 des colonnes (Hadamard), donc on a trouvé un X tel que $\|MX\|_2 \geq 1$. Puis utiliser M^{-1}.
Alors $\|MX\| - 1$ prend des valeurs positives et négatives donc au moins une valeur nulle.
2. On choisit le X en question de norme 1 et on complète en une BON, puis on complète MX en une autre BON, avec les formules de changement de bases, on arrive à OmO' avec la première colonne avec un 1 en haut et des zéros en dessous. Ensuite on fait une récurrence avec la matrice en dessous.
3. $MO'E_1$ convient. □

2) Analyse

Exercice 177 [X 2022] Soit $\rho > 1$ et $A_\rho = \left\{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{\rho^n},\ (\varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}^*}\right\}$. Montrer que A_ρ est un compact de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Si on a une suite, on extrait ε_1 constant, puis ε_2 constant etc, cela définit une suite limite. Et par extraction diagonale, c'est une valeur d'adhérence. □

Exercice 178 [X 2022] Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et E un espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathcal{A}_r = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{rang} u = r\}$.

1. L'ensemble $\mathcal{A}_r$ est-il ouvert ? fermé ?
2. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathcal{A}_r$.

Démonstration. 1. Ni ouvert (sauf $r = n$), ni fermé (tend vers O_n) (sauf pour $r = 0$).
2. L'intérieur est vide, l'adhérence est l'ensemble des matrices de rang $\leq r$. □

Exercice 179 [X 2022] Pour $H, K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $f_{H,K} \colon Z \in \mathbb{C}^n \mapsto HZ + K\overline{Z}$.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   - $\forall Z,\ f_{H,K} \circ F_{H,K}(Z) = -Z$
   - $H^2 + K\overline{K} = -I_n$ et $HK + K\overline{H} = 0$
2. Montrer qu'il existe un voisinage de (iI_n, O_n) tel que pour tout couple (H, K) la condition précédente soit équivalente à l'existence d'une unique matrice B telle que

$$f_{H,K} = f_{B,K} \circ f_{iI_n,O_n} \circ f_{B,K}^{-1}.$$

Démonstration. 1. C'est du calcul.
2. Si on est conjugué, c'est clair. Réciproquement, c'est faux : comme on peut le voir pour $(H, K) = (iI_n, O_n)$, puisque les f_{A,O_n} commutent avec f_{iI_n,O_n}.
En manipulant les équations, on peut montrer que l'unicité nécessite que $H - iI_n$ et $\overline{K}$ n'aient pas de noyau en commun. Mais $\operatorname{Ker} \overline{K} \subset \operatorname{Ker}(H - iI_n)(H + iI_n)$. Si ce produit est inversible, on a bien l'unicité.

On peut les voir comme des applications de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$. Auquel cas on obtient le résultat, mais avec B, K'. Puis on peut changer l'application qui conjugue, exactement en multipliant par du centre de f_{iI_n,O_n}, qui sont les U, O_n. On peut annuler K' si on sait que K est inversible… □

Exercice 180 [X 2022] Soit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f = 0\right\}$. Pour $f \in E$, on pose $A(f) \in E$ définie par

$$A(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall f \in E,\ \|A(f)\|_\infty \leq C\,\|f\|_\infty$.
2. Déterminer la valeur optimale d'une telle constante C.

Démonstration. 1. Trivial.
2. La fonction $A(f)$ est bien d'intégrale nulle. Cela revient à considérer H d'intégrale nulle, vérifiant $H(0) = H(1)$. On suppose $\|H'\| = 1$, on veut maximiser $\|H\|_\infty$.
C'est obtenu pour A qui va de $-1/2$ à $1/2$ en $1/2$, puis redescend jusqu'à $-1/2$ en 1.
Pour montrer que c'est optimal : si on suppose $A(f)(0) < 0$,
   - d'une part elle ne peut pas atteindre de valeur $\leq -\frac{1}{2}$, sinon l'intégrale totale serait forcément ≤ 0, par une majoration
   - d'autre part, elle ne peut clairement pas atteindre de valeur $> \frac{1}{2}$. □

Exercice 181 ★ ★ [X 2022] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On dit qu'un endomorphisme T de E est positif si pour tout $f \in E$, $f \geq 0$ implique $T(f) \geq 0$. On pose, pour $i \in \mathbb{N}$, $e_i \colon x \mapsto x^i$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\,\|f\|_\infty}{\delta^2}(x - y)^2.$$

2. Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite d'endomorphismes positifs de E. On suppose que pour $i \in \{0,1,2\}$, la suite $(T_n(e_i))_{n\in\mathbb{N}}$ convergence uniformément vers e_i. Montrer que pour tout $f \in E$, la suite $(T_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Démonstration. 1. Prendre pour δ un module ε-UC de f.

2. Soit f une fonction, que l'on peut supposer positive. En tout point x_0, on peut lui ajouter une parabole très pointée, négative en x_0, de valeurs $-f(x_0)$. On obtient une fonction qui est positive, qui est donc envoyée sur une fonction positive, ce qui implique que $T(f)(x_0) \geq f(x_0)$. □

Exercice 182 ★ ★ [X 2022] Soit $f\colon [0,1]^d \to [0,1]^d$ telle que $\|f(x)-f(y)\|_\infty < \|x-y\|_\infty$ pour x, y distincts.

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Soit $x_0 = (0,\dots,0)$, montrer que la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge.

Démonstration. 1. Unicité triviale.

Pour l'existence, considérer une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, et α une valeur d'adhérence.

La suite $\|x_{n+1} - x_n\|$ est décroissante. Si elle tend vers 0, α est un point fixe. Sinon, elle tend vers c.

On considère, pour tout n, u_m tel que $\|u_m - \alpha\| \leq \frac{1}{n}$, et β une valeur d'adhérence de u_{m+1}. On a nécessairement $\|\alpha - \beta\| = c$. L'hypothèse de contraction appliquée à α et β donne une contradiction.

2. □

Exercice 183 [X 2022] On munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme infinie. On note B sa boule unité fermée. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1,\dots,x_N) \in [0,1]^N$. On pose $\Phi\colon f \cap E \mapsto \big(f(x_k)\big)_{1\leq k\leq N}$.
   Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1,\dots,f_p \in B \cap E$ telles que pour tout $g \in B\cap E$, $\min_{i\in[\![1,p]\!]} \|\Phi(g) - \Phi(f_i)\|_\infty \leq \delta$.
2. On suppose que tout élément de E de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose de plus qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall f \in E$, $\|f'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$. Montrer que E est de dimension finie.

Démonstration. 1. Supposons que ce ne soit pas le cas. On construit une suite de fonctions de $B \cap E$. Mais $B \cap E$ est compact, donc elle converge.

2. Prendre x_i une subdivision régulière, de sorte que si $\|\Phi(g)\| \leq \delta$, alors $\|g\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ (en utilisant le caractère C-lip).

   Prendre $g \in E \cap B$, lui retirer le f_i proche, alors $\|g - f_i\| \leq \delta$, et on réapplique ce procédé à $2(g - f_i)$. On obtient que g est la somme d'une série convergente, donc appartient à $\operatorname{Vect} f_i$. □

Exercice 184 ★ ★ [X 2022] Montrer que la distance de $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ à $\mathbb{Z}$ tend vers 0, lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration. □

Exercice 185 ★ ★ [X 2022] On considère la suite de Fibonacci, de premiers termes $F_0 = F_1 = 1$.

1. On pose $r = \frac{1}{9899} = 0,00010102030508132134\ldots$. Démontrer une relation entre ce développement décimal et la suite (F_n).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une configuration est une partition de $\{0,1\} \times [\![0,2n]\!]$ en sous-ensembles de l'une des formes suivantes : $\{\varepsilon\} \times \{i, i+1\}$ ou $\{0,1\} \times \{i\}$. Calculer, en fonction des termes de (F_n), la proportion q_n parmi les configurations, de celles qui contiennent $\{0,1\} \times \{n\}$. Montrer que $(q_n)_{n\geq 1}$ converge, et préciser sa limite.
3. La suite des classes de (F_n) modulo 100 est-elle périodique ?

Démonstration. 1. On a $r = \frac{1}{100^2 - 100 - 1} = \frac{1}{100^2}\frac{1}{1 - \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2}}$, puis DL. Pour le voir apparaître, on peut ou bien faire une décomposition en éléments simples.

2. Le nombre de configurations est la suite de Fibonacci, on tend vers φ.
3. □

Exercice 186 [X 2022] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $i(n)$ et $p(n)$ le nombre de diviseurs positifs impairs et pairs de n. Déterminer la limite, un équivalent, puis un développement asymptotique de la suite $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(i(k) - p(k)\big)$

Démonstration. Si n est impair, tous ses diviseurs sont impairs. Si $n = 2^\alpha m$, on a $d(n) = i(n) + i(n) + \cdots + i(n) = \alpha i(n)$. Dans ce cas, $i(k) - p(k) = -(\alpha - 1)i(n)$, ce qui est encore valable pour $\alpha = 0$.

En regroupant les termes, on a

$$\sum_{k=1}^n \big(i(k) - p(k)\big) = \sum_{d\,\text{imp}} \sum_{\alpha \mid d2^\alpha \leq n} -(\alpha - 1) = \sum_{d\,\text{imp}} \lfloor \ln_2(n/d) \rfloor - \frac{\lfloor \ln_2(n/d) \rfloor (\lfloor \ln_2(n/d) \rfloor - 1)}{2}.$$

On regroupe alors suivant la valeur de $\ln_2(n/d)$ □

Exercice 187 [X 2022] Si $A \subset \mathbb{N}$, on note $d(A) = \inf_{n>0} \frac{\left|A \cap [\![1,n]\!]\right|}{n}$.

1. Soit A contenant 0 et telle que $d(A) \geq \frac{1}{2}$. Montrer que tout élément de $\mathbb{N}$ s'écrit comme somme de deux éléments de A.
2. Soient A, B contenant 0. Montrer que $1 - d(A+B) \leq (1 - d(A))(1 - d(B))$.
3. Si $0 \in A$ et $d(A) > 0$, montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{N} = A + A + \cdots + A$ (r fois).

Démonstration. 1. n peut s'écrire $0+n$, $1+(n-1)$, etc. Si ça ne marchait jamais, on contredit.

2. Soit n. On a $|(A+B)\cap [\![1,n]\!]| \geq \ldots$. On note $\{a_1,\ldots,a_n\} = A$, et on écrit

$$|(A+B)\cap]a_i,a_{i+1}[| \geq d(B)(a_{i+1}-a_i-1)$$

3. Trivial. □

Exercice 188 [X 2022] Soit $A \subset \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si la famille $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in A}$ est sommable, alors A est de densité nulle, c'est-à-dire $\frac{1}{n}\left|A\cap [\![1,n]\!]\right| \to 0$.
2. Montrer que si les éléments de A sont deux à deux premiers entre eux, alors A est de densité nulle.

Exercice 189 ★ ★ [X 2022] Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ telle qu'il existe $d>0$ tel que $F(n) = \left|A\cap [\![1,n]\!]\right| \sim nd$. On pose $Q = \left\{\frac{a}{b},\, a,b\in A\right\}$.

1. Montrer que Q est dense dans $\mathbb{R}_+$.
2. On suppose que $d=1$. Montrer que $Q=\mathbb{Q}_+^*$.
3. Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe $A\subset\mathbb{N}^*$ telle que $Q\neq\mathbb{Q}_+^*$ et $F(n)\sim nd$, avec $d\geq 1-\varepsilon$.

Démonstration. 1. Pour tout ε, $A\cap[n,n(1+\varepsilon)]$ est non vide.

2. Il suffit de montrer que $\frac{1}{p}\in Q$. Si $\forall x\in A,\ px \not{i}nA$, on perd de la densité.
3. Prendre p premier, et A les éléments sans p dans leur décomposition. □

Exercice 190 [X 2022] Soit $A\subset\mathbb{N}^*$ et f,g définies pour $n\geq 2$ par

$$f(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k\in A} \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbb{1}_{k\in A}}{k}.$$

Pour $\ell\geq 0$, comparer les assertions $f(n)\to\ell$ et $g(n)\to\ell$.

Exercice 191 ★ ★ [X 2022] Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles, vérifiant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \int_0^1 \max(x,v_n)\,\mathrm{d}x$ et $v_{n+1} = \int_0^1 \max(x,u_n)\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence des deux suites.

Démonstration. Si $v_n\in[0,1]$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}v_n^2+\frac{1}{2}$. Si $v_n\geq 1$, $u_{n+1}=v_n$ et si $v_n\leq 0$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}$. Dans le cas intéressant, on a donc $u_{n+1}\geq v_n$, et $v_{n+1}\geq u_n$, donc le minimum des suites est croissant, s'il tend vers $+\infty$, c'est fini. Sinon, il tend vers ℓ, on prend un rang tel que $u_n\simeq\ell$, on a $v_{n+1}\simeq f(\ell)$, et $v_n\geq\ell$, donc $u_{n+1}\geq f(\ell)$, $\min(v_{n+1},u_{n+1})\geq f(\ell)$, donc $f(\ell)=\ell$. □

Exercice 192 ★ ★ [X 2022] Soit $n\geq 2$. On note $P(k,n) = \prod_{i=0}^{k}\left(1-\frac{i}{n}\right)$, pour $0\leq k<n$.

1. Montrer qu'il existe un plus petit $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que $P(k,n)\leq\frac{1}{2}$. On le note k_n.
2. Montrer que k_n tend vers l'infini.
3. Montrer que $k_n = o_{+\infty}(n)$

Démonstration. 1. Quand $k=n-1$, un des facteurs est $\leq\frac{1}{2}$.

2. (k_n) est croissant. Si k_n est majorée, on tend vers 1.
3. Il faut montrer que $\prod_{i=0}^{\alpha n}\left(1-\frac{i}{n}\right)\leq\frac{1}{2}$. C'est une somme de Riemann. □

Exercice 193 [X 2022] Pour $\alpha\geq 0$ on dit que $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ est α-Höldérienne si elle vérifie $|f(s)-f(t)|\leq C|s-t|^\alpha$.

1. Que dire de f dans les cas $\alpha=0$ et $\alpha>1$?
2. Soient $0\leq\alpha\leq\beta$. Montrer que si f vérifie (H_β), elle vérifie (H_α).
3. Soient $\alpha,\beta>0$, f vérifiant H_α et g vérifiant H_β. Montrer que la suite suivante converge.
   $\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right)\left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)$.

Démonstration. 1. $\alpha>1$ elle est forcément constante.

2.
3. On peut supposer que $\alpha=\beta$.
   On commence par montrer que cette suite est bornée.
   Considérer $I_n - I_{n+1} = \left(f\left(\frac{k}{2^n}\right)-f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right)\left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-g\left(\frac{2k+2}{2^{n+1}}\right)\right)$, $\leq\frac{1}{2^{2n\alpha}}$, dont la série converge. □

Exercice 194 ★ [X 2022] Soit $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ de même degré $d\geq 1$, av $P=\sum a_kX^k$ et $Q=\sum b_kX^k$. On suppose que $\frac{a_{d-1}}{a_d}\neq\frac{b_{d-1}}{b_d}$. Soit (u_n) une suite strictement positive vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{P(n)}{Q(n)}$ pour n assez grand. Montrer qu'il existe trois constantes a,b,c telles que $u_n\sim an^bc^n$ et $a>0$.

Démonstration. Développement asymptotique de $\sum\ln\frac{P(n)}{Q(n)}$. □

Exercice 195 ★ [X 2022]

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un couple $(x_n, y_n) \in]0{,}1[^2$ tel que

$$n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n+x_n} \qquad \text{et} \qquad n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{n+1}}{1+n+y_n}.$$

2. Montrer qu'il n'existe pas de triplet $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que $a + be + ce^2 = 0$.

Démonstration. 1. Inégalité simple ?

2. On aurait $ae + be^{-1} \in \mathbb{Z}$, on multiplie par $n!$, et on obtient $a\frac{1}{n+x_n} + b\frac{(-1)^{n+1}}{1+n+y_n} \in \mathbb{Z}$. □

Exercice 196 ★ ★ [X 2022]

1. Construire une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{Q}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction croissante de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration. 1. Soit (u_n) une énumération de $\mathbb{Q}$, et $f\colon x \mapsto \sum_n \mathbb{1}_{x \leq u_n} \frac{1}{2^n}$.

2. Dénombrabilité. □

Exercice 197 ★ ★ [X 2022] Soit $f\colon x \mapsto e^{-x^2}$. En combien de points de $\mathbb{R}$ la dérivée n-ième de f s'annule-t-elle ?

Démonstration. On a $P_{n+1} = -2XP_n + P_n'$, donc degré, et s'annule également en $\pm\infty$. □

Exercice 198 [X 2022] Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $c \in [0,1]$ tel que $f'(c) + \lambda f(c) = 0$.

Démonstration. $(e^{\lambda t} f)'$ □

Exercice 199 [X 2022] Soit E l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

1. Déterminer les éléments de E dérivables en 0.
2. Montrer que si un élément de E est dérivable en un point de $\mathbb{R}_+^*$, il est dérivable sur tout $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer les éléments de E dérivable en un point.

Démonstration. 1. $yf'(xy) = f(y) + yf'(x)$, puis $x = 0$, on obtient f nulle.

2. Si on est dérivable en $x_0 > 0$, alors en fixant $y \neq 0$, on est dérivable en $x_0 y$, de dérivée $\frac{1}{y}(f(y) + yf'(x_0)) = f'(x_0) + \frac{f(y)}{y}$
3. On obtient $yf'(y) = f(y) + yf'(1)$, on résout l'équation diff. □

Exercice 200 [X 2022] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $g\colon x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 201 [X 2022] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On note $E_f = \operatorname{Vect}(x \mapsto f(x+\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre

- E_f est de dimension finie.
- Il existe n et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que f soit n fois dérivable et $f^{(n)} = a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f$.

Démonstration. Si f est n fois dérivable, l'espace engendré par ses translatés est inclus dans l'ensemble des solutions.
Réciproquement. Si E_f est de dimension finie, on en considère une base. On peut écrire, pour chaque $j, \forall x, a,\ f_j(x+a) = \sum_i \lambda_{i,j}(a) f_i(x)$. On veut montrer que les $\lambda_{i,j}$ sont dérivables. Cela découle du lemme d'inversion : prendre des x_j tels que $(f_i(x_j))$ soit inversible. On obtient $f_j'(x+a) = \sum_i \lambda_{i,j}'(a) f_i(x)$, donc f_j' est dérivable, donc les f_j sont $\mathcal{C}^\infty$.
En fait surtout, elles restent dans le même espace vectoriel. Prendre un polynôme annulateur de l'endomorphisme de dérivation. □

Exercice 202 ★ Théorème des cordes [X 2022] Soit $a < b$ et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) = f(b)$.

1. Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il existe $a', b' \in [a,b]$ tels que $f(a') = f(b')$ et $b - a = n(b' - a')$.
2. Redémontrer le théorème de Rolle à l'aide de cette propriété.

Démonstration. 1. Théorème des cordes.

2. □

Exercice 203 [X 2022] Soient $\xi_n > \xi_{n-1} > \ldots > \xi_1 > 0$ et $a, \dots, a_n$ des réels non nuls. On pose $f\colon t \mapsto \sum_{k=1}^n a_k \sin(\xi_k t)$. On suppose que la suite $\left(\left\|f^{(N)}\right\|_\infty\right)$ est bornée, que $f'(0) = 1$ et que $\|f\|_\infty \leq 1$. L'objectif est de montrer que $f = \sin$.

1. Montrer que $\xi_n \leq 1$.
2. On pose $g = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{[-\xi_k, \xi_k]}$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x) e^{itx}\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. 1. Découle de $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq 1$.

2. C'est un calcul simple.

   La fonction g vérifie $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 1$, décroissante, $g(0^+) = 0$ et $\left|\frac{1}{2}\int_{-1}^1 g(x)e^{itx}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{t}$, utile pour t grand.

   On veut montrer que g est constante égale à 1. ☐

Exercice 204 [X 2022] Existe-t-il $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue telle que :

- f s'annule un nombre fini de fois sur chaque droite verticale,
- f s'annule un nombre infini de fois sur toutes les autres droites ?

Démonstration. Oui, considérer une réunion de demi-droites horizontales, aux ordonnées entières positives, à l'extérieur de la parabole $y = x^2$. Cela ne marche pas avec les droites horizontales, donc appliquer une petite rotation à une demi-droite sur deux. ☐

Exercice 205 [X 2022] 1. Montrer qu'il existe une unique fonction dérivable $v\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $v(0) = 0$ et $\forall t \geq 0,\ v'(t) = \int_0^1 \big(v(tx) + 1 - v(t)\big)\,\mathrm{d}x$.

2. On suppose qu'il existe une fonction dérivable $v\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que $v(0) = 0$ et $\forall t \geq 0,\ v'(t) = \int_0^1 \max\big(0, v(tx)+1-v(t)\big)\,\mathrm{d}x$. On pose $a = \max\{t \geq 0 \mid v(t) \leq 1\}$. Justifier l'existence de a. Montrer que pour tout $t \geq a$, il existe un unique réel positif $f(t)$ tel que $v(f(t)) + 1 = v(t)$.
3. On admet que f est dérivable sur $]a,+\infty[$ et que pour tout $t > a$, $f'(t)v'(f(t)) = v'(t)$. Montrer que v est de classe $\mathcal{C}^2$.

Démonstration. 1. En posant $h = \int_0^t v(t)$, on a $th'' + th' - h = t$. Avec les conditions $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$.

   $h = 1 \mapsto 1$, $h = t \mapsto 0$.

   On peut résoudre l'équation homogène. Si on écrit $h(t) = C(t)t$, on obtient $C''(t)t^2 + tC'(t) + t^2C'(t) = 0$, donc $C''(t)t + (1+t)C'(t) = 0$, donc $C'(t) = e^{t+\ln t} = te^t$. On a donc une paire de solutions de l'équation homogène, nulles en 0.

   Donc, si on trouve une solution particulière, il faut montrer qu'elle se prolonge en 0, avec $h(0) = 0$.

   On cherche une solution de la forme $t(\lambda(t)e^t + \mu(t))$, avec (variation des constantes), $\lambda'(t)e^t + \mu'(t) = 0$, $\lambda'(t)e^t = t$, donc $\lambda = \int_0^t ue^{-u}\,\mathrm{d}u$, et $\mu(t) = -\frac{t^2}{2}$, d'où le résultat.

   Manque la positivité (certaines ne sont pas positives...) : Au voisinage de 0, $v' \geq 0$, donc v croissant, donc v au-dessus de sa moyenne, donc $v' \leq 1$.

   On a toujours v au-dessus de sa moyenne, puisque si v est égal à sa moyenne, on a $v'(t) = 1$, donc il repasse au-dessus.

   Cela implique toujours v positive. Cela contredit l'unicité.

2. Si $\forall t,\ v(t) \leq 1$, $v'(t) \geq \frac{1}{t}\int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u$, et comme v est positive, on obtient une minoration de la forme $v'(t) \geq \frac{C}{t}$, donc v diverge.

   Pour la deuxième partie, on a v strictement croissante, c'est donc trivial.
3. Le faire à la main : séparer l'intégrale à la cassure, etc. ☐

Exercice 206 [X 2022] Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. On suppose qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x, y \geq 0,\ \left|\int_x^y f\right| \leq m$ et $\forall x > 0,\ |f(x)| \leq 2x^{-2}\int_0^x (x-y)|f(y)|\,\mathrm{d}y$ (hapothèse (H)).

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que $g\colon x \mapsto \sup_{y\geq x} |f(y)|$ a une limite finie $K \geq 0$ en $+\infty$.
3. Soit $\ell > 0$. Montrer qu'il existe $\ell' \in\ ]0,\ell[$ tel que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ de longueur ℓ, il existe un intervalle I', de longueur ℓ',non disjoint de I, tel que $\sup_{I'} |f(x)| \leq \frac{2m}{\ell}$.
4. On suppose $K > 0$. En considérant, pour un $k > 0$ bien choisi, la suite d'intervalles $\left(\left[\frac{pk}{4m}, \frac{(p+1)k}{4m}\right]\right)_{p\in\mathbb{N}}$, déduire une contradiction de l'hypothèse (H).
5. Conclure que f tend vers 0 en $+\infty$.

Démonstration. 1. On a f UC + $\left|\int_x^y f\right| \leq m$.

2. On a g décroissante, positive.
3. Sinon, on prend ℓ' assez petit pour qu'il n'y ait pas de chgmt de signe, donc sur tout interval de longueur $\geq \frac{2m}{\ell} - \varepsilon$, $\int_x^y \geq \ell(\frac{2m}{\ell} - \varepsilon)$.
4. (H) est une hypothèse de moyennage, avec un poids fort en 0, mais néanmoins. La question précédente donne une proportion non nulle sur laquelle f est petite.
5. Trivial. ☐

Exercice 207 [X 2022] Soit $a > 0$ et E l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $f^2 + a(f')^2$ soit intégrale sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}$, il existe $f \in E$ tel que $f(0) = v$.
3. Soit $v \in \mathbb{R}$. Déterminer
$$\inf\left\{\int_0^{+\infty} \big(f^2 + a(f')^2\big)\ ;\ f \in E \text{ et } f(0) = v\right\}.$$
4. Pour $A, B \in \mathcal{S}_n$, on pose $A \leq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^+$. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+$ telle que $A \leq B$. En utilisant les questions précédentes, montrer que $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$.

Démonstration. 1. Trivial.

2. ve^{-x}
3. $f^2+af'^2=(f+\sqrt{a}f')^2-\sqrt{a}2ff'$, et f^2 a une limite nulle en $+\infty$, donc la partie de droite s'intègre en $\sqrt{a}v^2$, et la partie de gauche est minimale pour $ve^{-x/\sqrt{a}}$.
   Autre possibilité : existence par compacité, puis on rajoute εg.
4. Si A, B sont strictement positives, on considère $f_S=e^{-t\sqrt{S}^{-1}}$, on a alors $\int_0^{+\infty} f_S^2+f_S'^T S f_S'=\sqrt{S}$ (on est ramené au cas diagonal).
   Si $B\geq A$, on a $f_B' B f_B' \geq f_B' A f_B'$.
   Donc $\sqrt{B}\geq \int_0^{+\infty} f_B^2+f_B'^T A f_B$.
   Pour X, on considère la quantité $\int_0^{+\infty} \|f_B X\|^2+\langle A f_B' X, f_B' X\rangle \,\mathrm{d}t$, et on montre qu'elle est minimale pour f_A, comme dans la question précédente. ☐

Exercice 208 [X 2022] Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P(0)\neq 0$ et $r>0$. Justifier la convergence de l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(\left|P(re^{it})\right|\right)\mathrm{d}t$, puis la calculer en fonction de $P(0)$ et des racines de P de module strictement inférieur à r.

Démonstration. On sépare les racines, puis c'est du DSE, séparer selon la position par rapport à r. Pour le cas où $|x_i|=r$, c'est de la CVD. ☐

Exercice 209 [X 2022] Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0, f développable en série entière sur $D(0,R)$, avec $R>0$, $p\geq 1$. On suppose que $f(z)=O_0(z^p)$. Montrer que pour $r>0$ assez petit, on peut trouver $2p$ nombres complexes z vérifiant $|z|=r$ et $f(z)\in\mathbb{R}$.

Démonstration. On a $f(z)=a_p z^p(1+\dots)$, $\arg(f(re^{i\theta}))\xrightarrow[r\to 0]{} g(\theta)$. Prendre $2p+1$ valeurs θ_i. ☐

Exercice 210 [X 2022] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, et $f\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|2^n=M<+\infty$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[-1,1]$, $\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}\leq M$.
2. Soit $n\geq 1$. on suppose que $\forall k\in[\![-n,n]\!]$, $f(k/n)=0$. Montrer qu'il existe une constante absolue C telle que $\forall x\in[-1,1]$, $|f(x)|\leq CM\frac{\sqrt{n}}{e^n}$.
3. s Soit $n\geq 1$. on suppose que $\forall k\in[\![-n,n]\!]$, $f(k/n)=0$. Montrer qu'il existe une constante absolue C telle que $\forall x\in[-1,1]$, $|f(x)|\leq CM\left(\frac{2}{e}\right)^n$.

Démonstration.
1. Découle de $\binom{n}{k}\leq 2^n$.
2. On peut écrire $|f(x)|=\prod_{k=1}^{2n+1}(x-a_k)\frac{f^{(2n+1)}(c_x)}{(2n+1)!}$.
   D'ailleurs, se contenter de prendre uniquement des a_k tels que $|x-a_k|\leq 1$.
   Alors, au pire des cas, f est maximale en un produit $\frac{n!}{n^n}\simeq\frac{\sqrt{n}}{e^n}$.
3. Énoncé d'origine. ☐

Exercice 211 [X 2022] Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\,]-1,1[$ distincts non nuls et $\beta_1,\dots,\beta_n\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite bornée (c_k) d'entiers relatifs telle que $f\colon t\mapsto\sum_{k=0}^{+\infty}c_k t^k$ vérifie $\forall i,\ f(\alpha_i)=\beta_i$.

Démonstration. Partir d'un polynôme d'interpolation, et lui ajouter un multiple de $\prod(X-\alpha_i)$. ☐

Exercice 212 ★ ★ [X 2022] Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2^n}$.

1. Déterminer les réels en lesquels f est définie.
2. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on écrit $f(x)^k=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n,k}x^n$. Montrer que pour tout $n\geq 1$, il existe k tel que $a_{n,k}\neq 0$.
3. Montrer que pour tous $k,n\geq 1$, $a_{n,k}\leq(1+\ln_2 n)^k$.
4. Soient $p,m\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![1,p]\!]$. On pose $N=(2^p-1)2^m$. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $N-2^m+1\leq n\leq N+2^m-1$. Montrer que $a_{n,k}=0$, sauf si $k=p$ et $n=N$.

Démonstration.
1.
2. Pour tout n, il existe k tel que n s'écrive comme somme de k puissances de 2.
3. Le nombre de façon d'écrire n comme somme de k puissances de 2 est $\leq(1+\ln_2 n)^k$.
4. $N=\underline{111110000}_2$, avec p uns et m zéros. Toute décomposition d'un entier n comme somme de puissance de 2 en nécessite strictement plus que sa décomposition en base 2, puisqu'on peut se ramener à sa décomposition en regroupant des termes. ☐

Exercice 213 [X 2022] Soit (a_n) complexe, $C>0$ et R le rayon de convergence de $\sum\frac{a_n}{n!}z^n$. Montrer l'équivalence entre

- $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,\ |a_n|\leq(C+\varepsilon)^n$.
- $R=+\infty$ et $\forall\varepsilon>0,\exists R_0>0,\forall|z|\geq R_0,\ |f(z)|\leq\exp\big((C+\varepsilon)|z|\big)$.

Démonstration. $\Rightarrow$: pas de difficulté.
$\Leftarrow$: Formule de Cauchy : $|a_n|\leq\frac{e^{(C+\varepsilon)R}R}{R^n}$ La fonction $x\mapsto\frac{e^{Kx}}{x^{n-1}}$ a pour dérivée $\frac{e^{Kx}}{x^{n-1}}(K-\frac{(n-1)}{x})$, elle s'annule en $x=\frac{(n-1)}{K}$, qui est $>R_0$ pour n assez grand. Et elle vaut alors $e^{(n-1)}\frac{K^{n-1}}{(n-1)^n}\simeq K^{n-1}$.
En prenant un peut de marge sur ε, on s'en sort. ☐

Exercice 214 [X 2022] Soit (a_n) réelle telle que $\sum a_n x^n$ soit de rayon 1. Pour $x\in\,]-1,1[$, on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.

1. On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
2. Donner un exemple de suite (a_n) telle que $f(x)$ admette une limite finie quand $x \to 1^-$ et que $\sum a_n$ diverge.
3. On suppose les a_n positifs et que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.
4. On suppose que $a_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

Démonstration. 1. Sommation d'Abel.
2. $\sum(-1)^n x^{2^n}$? Plus simple ?
3. Simple.
4. Taubérien… □

Exercice 215 [X 2022] On pose $g\colon x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.Pour $y > 0$, on pose $g_y\colon x \mapsto \frac{1}{y}g(x/y)$. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, nulle en dehors d'un segment.

1. Montrer que pour tout x, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g_y(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $f(x)$ en 0^+.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0,\delta[, \quad \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g_y(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

Exercice 216 [X 2022] Soit $n \geq 1$ et $J = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$. Soit $S \in \mathcal{S}_{2n}$ définie positive.

1. Montrer que toute solution du système différentiel $X' = JSX$ est bornée.
2. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que JS soit semblable à $\mathrm{Diag}(i\lambda_1, -i\lambda_1, \ldots, i\lambda_n, -i\lambda_n)$.

Démonstration. 1. Écrire $S = P^T P$, alors $PX' = PJP^T PX$, et $J' = PJP^T$ est antisymétrique, donc $e^{J'}$ est orthogonale.
2. Par l'absurde. D'une part les valeurs propres de JS ne peuvent pas avoir de partie réelle non nulle. D'autre part, si X appartient à $\mathrm{Ker}(JS - \lambda I_n)^2$ mais pas à $\mathrm{Ker}(JS - \lambda I_n)$, on contredit également la première question. □

Exercice 217 [X 2022] Soit $(E)\colon x'(t) = \cos(x(t)) + \cos(t)$. On admet que pour tout $a \in [0,\pi]$, il existe une unique solution φ_a de (E) telle que $\varphi_a(0) = a$. On admet également que s'il existe $a, b \in [0,\pi]$, $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi_a(t_0) = \varphi_b(t_0)$, alors $a = b$. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) à valeurs dans $[0,\pi]$ et 2π-périodique.

Démonstration. □

Exercice 218 [X 2022] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note (E_n) l'équation différentielle $-y'' + x^2 y = (2n+1)y$, dont on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$. On considère également, sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ les opérateurs $A\colon f \mapsto (x \mapsto f'(x) + xf(x))$ et $B\colon f \mapsto (x \mapsto -f'(x) + xf(x))$.

1. Qeu dire de l'espace des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$?
2. Résoudre (E_0) à l'aide des opérateurs A, B.
3. Déterminer les solutions de (E_0) qui sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.
4. On pose $f_0\colon x \mapsto e^{-x^2/2}$. Montrer que pour tout n, la fonction $f_n = B^n(f_0)$ est solution de (E_n).
   Indication : Commencer par donner une expression simplifiée de $AB^n - B^n A$.
5. Montrer que les solutions de carré intégrable de (E_n) sont les éléments de $\mathrm{Vect}\, f_n$.
6. Montrer que (f_n) est orthogonale pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} fg$.

3) Probabilités

Exercice 219 ★ ★ [X 2022]

1. Soit A, B, C un triangle du plan. On construit D tel que ABD soit isocèle en D avec un angle orienté en D égal à $\frac{2\pi}{3}$ et de même E, F relativement aux côtés BC et CA. Montrer que le triangle DEF est équilatéral.
2. Soit $n \geq 3$ et $k \in [\![1, n-2]\!]$. on note T_k l'application qui à un polgone $A_1 A_2 \ldots A_n$ associe le polygone $B_1 \ldots B_n$ tel que pour tout i, $A_i A_{i+1} B_i$ soit isocèle en B_i avec un angle de $\frac{2k\pi}{n}$. Montrer que, quel que soit le polygone initial, lorsqu'on lui applique tous les T_k, pour $1 \leq k \leq n-2$, on obtient un polygone régulier et que celui-ci ne dépend pas de l'ordre dans lequel on compose les T_k.

Démonstration. 1. On écrit $D = A + \overrightarrow{AB}e^{2i\frac{\pi}{3}}$, $E = B + \overrightarrow{BC}e^{2i\frac{\pi}{3}}$, etc, puis on écrit l'angle.
2. □

Exercice 220 ★ ★ [X 2022] Soit $n \geq 2$. Dénombrer les vrais triangles rectangles de $\mathbb{R}^n$ dont les trois sommets sont dans $\{0,1\}^n$.

Démonstration. □

Exercice 221 ★ ★ [X 2022] Soit $n \geq 3$. Quel est le cardinal du groupe des isométries affines du plan euclidien stabilisant un polygone régulier à n sommets ?

Démonstration. Si on stabilise le polygone, le centre est un point fixe. À une translation près, on peut le supposer centré en 0, donc l'application est linéaire.
On sait qu'il existe $2n$ tels transformations. En composant par l'une, on peut supposer que $f(1) = 1$, et que l'on préserve l'orientation. Mais alors on est l'identité, puisque $e^{2i\frac{\pi}{n}}$ ne peut être envoyé que sur lui-même, ou son symétrique. □

Exercice 222 ★ ★ [X 2022] Une urne contient des boules bleues rouges, noires. À chaque étape on retire deux boules de couleurs différentes, et on ajoute une boule de la troisième couleur.

1. Montrer que si à la fin du procédé il ne reste qu'une seule boule, sa couleur est déterminée par la configuration initiale.
2. À quelle condition est-il possible de finir avec une seule boule ?

Démonstration. 1. En notant n_{xy}, n_{yz} et n_{xz}, le nombre d'opérations à faire. On obtient un système $n_{xy} + n_{xz} - n_{yz} = x, \ldots$ avec $z - 1$. Si deux de ces systèmes avaient des solutions entières, on peut considérer la différence, $AZ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aurait une solution entière, ce n'est pas le cas (dans $\mathbb{Z}/2/Z$).
2. S'il y a plusieurs couleurs au début c'est bon. Si t'as deux couleurs, et si t'as au moins trois boules, tu peux toujours faire une opération après laquelle il y a au moins deux couleurs.
L'inverse de A est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc si x, y, z ont la même parité, pas de solution.
De même, si $y = z = 0$, on ne peut rien faire.
Réciproquement, si x, y, z n'ont pas tous la même parité. Cette propriété est préservée. Tant que tu as deux couleurs et au moins trois boules, on peut toujours faire une opération qui préserve le fait d'avoir au moins deux couleurs. On répète, jusqu'à avoir trois boules, et comme la propriété de parité est préservée, ce n'est pas trois boules de couleurs différentes. □

Exercice 223 [X 2022] Pour $\lambda > 0$, on note X_λ une variable suivant une loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Étudier le comportement de $P(X_\lambda > E(X_\lambda))$, quand $\lambda \to +\infty$.

Démonstration. C'est $e^{-\lambda} \sum_{n \geq \lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \simeq \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k n!}{(n+k)!}$.

Reste à trouver un équivalent du reste, $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(1+\frac{1}{\lambda})\ldots(1+\frac{k}{\lambda})}$. Par l'inégalité harmonique $\geq \left(\frac{\sum \frac{\lambda}{\lambda+k}}{n}\right)^k$, plutôt.

On a $P(X > \lambda a) = P(e^{tX} > e^{t\lambda a}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{t\lambda a}} = \frac{e^{\lambda(e^t-1)}}{e^{t\lambda a}} = e^{\lambda(e^t-1-ta)} = e^{\lambda(1-a)t + o_0(t)}$. En particulier, si on prend $a = 1 + \frac{K}{\lambda}$, on a $P(X > \lambda + K) \leq e^{-K}$.
D'autre part, la somme d'un nombre fini de termes (K) de la somme considérée tend vers 0. Donc $P(X_\lambda > \lambda) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$. □

Exercice 224 [X 2022] Soient $m, n \geq 2$, $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. On note A_n l'évènement «m divise $X_1 + \cdots + X_n$».

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$\sum_{\substack{k=0 \\ m|k}}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left(e^{\frac{2i\pi j}{m}} p + q\right)^n.$$
2. Montrer que $P(A_n)$ converge vers une limite ℓ à préciser.
3. Montrer que $\left|P(A_n) - \ell\right| \leq e^{-\frac{8pq}{m^2}n}$.

Démonstration. 1. Ok.
2. Tends vers $\frac{1}{m}$.
3. En majorant par la valeur pour $j = 1$, on obtient $|P(A_n) - \ell|^{2/n} \leq p^2 + q^2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)pq = 1 - 2(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right))pq = 2\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right))pq + 1 - 2pq$
Comme pq peut être arbitrairement petit, pour que l'inégalité cherchée soit vérifiée, il faut que $1 - 2pq(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)) \leq 1 - \frac{16pq}{m^2}$, $\Leftrightarrow \cos 2\frac{\pi}{m} \leq 1 - \frac{8}{m^2}$, ce qui découle d'une inégalité $\cos x \leq 1 - \frac{2x^2}{\pi^2}$ (parabole qui s'annule en 0 et en π) □

Exercice 225 ★ ★ [X 2022]

1. Soient $n \geq 2$, $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ avec τ une transposition. Comparer le nombre de cycles à supports disjoints de σ et de $\sigma \circ \tau$.
2. On munit $\mathcal{S}_n$ d'une distribution uniforme de probabilité. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, avec $i \neq j$. Calculer la probabilité que i et j soient dans un même cycle.

Démonstration. 1.
2. i, j sont dans le même cycle pour σ si et seulement si ils sont dans deux cycles différents pour $\sigma \circ (i\, j)$. Donc la probabilité vaut $\frac{1}{2}$. □

Exercice 226 ★ ★ [X 2022] Soit σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$.

1. Soit L_n la longueur du cycle de σ_n contenant 1. Déterminer l'espérance de L_n.

2. Quelle est la probabilité que 1 et 2 soient dans un même cycle de σ_n ?
3. On note c_n le nombre de cycles de σ_n. Montrer que $E(c_n) \sim \ln n$.

Démonstration. 1. $P(L_n = k) = \frac{1}{n}$, par dénombrement.
$E(L_n) = \sum \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$
2. On a $E(L_n) = 1 + (n-1)p$, $p = \frac{1}{2}$.
3. $E(c_n) = \sum_c \frac{(n-|c|)!}{n!} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(k-1)!$. ☐

Exercice 227 [X 2022] Soient G un groupe fini de neutre e, $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ indépendantes de même loi uniforme sur $G \setminus \{e\}$. Déterminer la loi de $Y_n = X_n \dots X_1$.

Démonstration. $a_n = P(Y_n = e)$; $b_n = P(Y_n = x)$, où $x \neq e$. $a_1 = 0$; $b_1 = \frac{1}{m-1}$.
$a_2 = \frac{m-1}{(m-1)^2} = \frac{1}{m-1}$; $b_2 = \frac{m-2}{(m-1)^2}$
$a_n = b_{n-1}$; $b_n = a_{n-1}\frac{1}{m-1}$ ☐

Exercice 228 [X 2022] Pour X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note

$$d(X,Y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big|P(X=n) - P(Y=n)\big|.$$

Soit $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$ et P de loi $\mathcal{P}(1)$. Montrer que $d(S_n, P) \to 0$.

Démonstration. C'est

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{e^{-1}}{k!} - \binom{n}{k}\Big(\frac{1}{n}\Big)^k\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{n-k}\right|.$$

Classiquement, chaque sommande tend vers 0, et on peut espérer avoir une domination… ☐

Exercice 229 [X 2022] Soit X_n suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note R_n le reste de la division euclidienne de n par X_n et $Y_n = \frac{R_n}{X_n}$. Montrer que $P(Y_n \geq 1/2) \to 2\ln 2 - 1$.

Démonstration. Si $n = qX_n + r_n$, on a $\frac{n}{q} = x_n + \frac{r_n}{q}$, donc $\frac{n}{q} \in [x_n + 1/2, x_n + 1[$.

Plutôt : $(q+1/2)x_n \leq n < (q+1)x_n$, donc $x_n > \frac{n}{q+1}$ et $x_n \leq \frac{n}{q+1/2}$, c'est-à-dire $x_n \in \left]\frac{n}{q+1}, \frac{n}{q+1/2}\right]$. On peut ignorer les cas d'égalités, qui sont en $o(n)$.

Donc $P(Y_n \geq 1/2) = \sum_{q=1}^n \lfloor\frac{n}{q+1/2}\rfloor - \lfloor\frac{n}{q+1}\rfloor = \sum_{q=1}^n \lfloor\frac{2n}{2q+1}\rfloor - \lfloor\frac{2n}{2q+2}\rfloor$. Si on peut retirer les parties entières, on obtient $2\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$, ce qu'il faut.
On peut négliger l'erreur pour $q \leq \sqrt{n}$, et même $q \leq \frac{n}{\ln n}$, et alors $\frac{n}{2q+1} - \frac{n}{2q+2} \leq \frac{n}{q^2}$, et idem sur les suivants, donc la plupart sont nuls. ☐

Exercice 230 ★ ★ [X 2022] Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On note p_d la probabilité que le polynôme $X^d + \sum_{i=1}^{d-1}\varepsilon_i X^i + 1$ possède une racine rationnelle. Montrer que $p_d \sim \sqrt{\frac{2}{\pi d}}$.

Démonstration. C'est la probabilité que $P(-1) = 0$. Revient à choisir uniformément une partie de $[\![1, d-1]\!]$ et à chercher la probabilité que le nombre d'éléments impairs soit égal au nombre d'éléments pairs plus deux. C'est donc

$$\frac{1}{2^{d-1}}\sum_k \binom{\lfloor(d-1)/2\rfloor}{k}\binom{\lceil(d-1)/2\rceil}{k+2} = \frac{1}{2^{d-1}}\sum_k \binom{\lfloor(d-1)/2\rfloor}{\lfloor(d-1)/2\rfloor - k}\binom{\lceil(d-1)/2\rceil}{k+2}$$

C'est le coefficient en $\lfloor(d-1)/2\rfloor + 2$ de $(X+1)^{\lfloor(d-1)/2\rfloor}(X+1)^{\lceil(d-1)/2\rceil}$, puis Stirling. ☐

Exercice 231 [X 2022] 1. Soit $n \geq 3$ un entier. Montrer que l'équation $x = n\ln x$ admet deux solutions > 0, que l'on note $a_n < b_n$.
2. Trouver une suite strictement croissante $(p_k)_{k\geq 2}$ d'entiers telle que $p_2 \geq 2$, que $\sum 2^{-(p_{k+1}-p_k)}$ diverge et qu'il existe $C > 2$ tel que pour $k \geq 2$, $\sum_{j=p_k}^{p_{k+1}}\frac{1}{\ln j} \geq C$.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher. Que dire de la convergence de $\sum \frac{X_n}{\ln n}$.

Démonstration. 1. Pour $x = 2$, on a $2 < n\ln 2$, donc il y a une solution dans $[1, \ln 2]$, qui tend vers 1, une autre dans $[\ln 2, +\infty[$, qui tend vers $+\infty$, de l'ordre de $n\ln n$.
2. On veut $p_{k+1} - p_k \simeq C\ln(p_k)$ et $\ln 2(p_{k+1} - p_k) \simeq \ln n$
Il suffit de prendre $p_n \sim n\ln n$; On a $p_{n+1} - p_n = \ln n$ et $\sum 2^{-\ln n}$ diverge.
3. On considère la suite précédente, et les évènements $A_k = \bigcap_{i=p_k}^{p_{k+1}-1}(X_i = 1)$. Alors $\sum P(A_k)$ diverge, et les A_k sont indépendantes, donc presque sûrement, A_k se réalise une infinité de fois, donc presque sûrement la série diverge. ☐

Exercice 232 ★ ★ [X 2022] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et X, Y, Z, σ telle que $X, Y, Z \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ et $\sigma \hookrightarrow \mathcal{U}(S_n)$. On note L_X le cardinal de l'orbite de X par σ.
Montrer que $P(L_X = L_Y = L_Z) \geq P(L_X = L_Y)^2$.

Démonstration. Si X, Y, Z sont indépendantes, $P(X = Y = Z) \geq P(X = Y)^2$, par Cauchy-Schwarz.
Les $L_{...}$ ne sont pas indépendantes.
Mais, conditionné à la valeur de σ, elles le sont. Alors

$$P(L_X = L_Y = L_z \mid \sigma = \tau) \geq P(L_X = L_Y \mid \sigma = \tau)^2.$$

Puis

$$P(L_X = L_Y = L_z) = \sum_\tau \frac{1}{n!} P(L_X = L_Y = L_z \mid \sigma = \tau) \geq \sum_\tau \frac{1}{n!} P(L_X = L_Y \mid \sigma = \tau)^2 \geq (\sum \frac{1}{n!} P(L_X = L_Y \mid \sigma = \tau))^2$$

où la dernière inégalité est Cauchy-Schwarz. □

Exercice 233 [X 2022] Soit $p \in \,]0,1[$. $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires indépendantes de même loi de même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $N_n : \omega \mapsto \mathrm{Card}\{k \mid X_k(\omega) = M_n(\omega)\}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $a \geq 1$, exprimer $P(M_n = k, N_n = a)$.
2. On suppose $1 - p = \frac{1}{t}$ pour un entier $t \geq 4$. Limite de $P(N_{t^m} = 1, M_{t^m} = m)$, quand $m \to +\infty$.

Démonstration. 1. $P(M_n = k, N_n = a) = \binom{n}{a} P(X = k)^a P(X < k)^{n-a}$.
2. $t^m P(X = m) P(X < m)^{n-1}$ □

Exercice 234 [X 2022] Soient $n, b \geq 2$, $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de même loi uniforme sur $[\![0, b-1]\!]$.

1. Déterminer $P(X_{i+1} < X_i)$.
2. Déterminer $P(X_{i+j} < X_{i+j-1} < \ldots < X_i)$

Démonstration. 1. $\frac{1-\frac{1}{b}}{2}$
2. Par dénombrement, c'est trivial. □

Exercice 235 [X 2022] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de même loi centrée et bornée, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $E(S_n^4) \leq Cn^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $P\left(\bigcup_{n\geq N} \left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right)\right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.
3. Donner une interprétation à l'évènement $\bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} \left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \frac{1}{k}\right)$, et calculer sa probabilité.

Démonstration. 1.
2. On majore par la somme des probabilités, et $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(S_n^4 > \varepsilon^4 n^4\right) \leq \frac{E(S_n^4)}{\varepsilon^4 n^4} = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}$, dont la série converge.
3. C'est l'évènement que $\frac{S_n}{n}$ ne tend pas vers 0. Sa probabilité est nulle. □

Exercice 236 [X 2022] Soient $A_1, \ldots, A_n$ des évènements, $x_1, \ldots, x_n \in \,]0,1[$ et $D_1, \ldots, D_n$ des parties de $[\![1, n]\!]$. On suppose que pour tout i, $\mathbb{1}_{A_i}$ est indépendante de la variable conjointe $(\mathbb{1}_{A_j})_{j \in [\![1,n]\!] \setminus D_i}$. On suppose aussi que $P(A_i) \leq x_i \prod_{D_i \setminus \{i\}} (1 - x_j)$, pour tout i.
Soit $E \subset [\![1, n]\!]$ et $i \in [\![1, n]\!] \setminus E$. On pose $B_E = \bigcap_E \overline{A_j}$, que l'on suppose non négligeable. Montrer que $P(A_i \mid B_E) \leq x_i$.

Démonstration. $P(A_i \mid B_E) = P(A_i \mid \cap_E \overline{A_j}) = P(A_i \mid \cap_{E\cap D_i} \overline{A_j} \cap_{E \cap \overline{D_i}} \overline{A_j})$
On a

$$P(A_i \mid B_E) = \frac{P(A_i \cap \ldots)}{P(\cap_E \overline{A_j})},$$

Si $D_i = \{i\}$, l'inégalité découle de $P(A_i) \leq x_i(1 - x_i) \Rightarrow P(A_i) \leq x_i$.
Si $D_i = E$, on a $P(A_i \mid B_E) = \frac{P(A_i \cap B_E)}{P(B_E)}$, et attention, les évènements de B_E ne sont pas indépendants.
D'une part, au numérateur, on peut majorer la probabilité par celle de $P(A_i \cap_{E \cap \overline{D_i}} \overline{A_j})$.
D'autre part, on montre que le dénominateur est $\geq \prod_E (1 - x_j)$. Pour cela, si dans l'intersection, il y a deux évènements indépendants ℓ, m, on les regroupe en un seul $A_L = A_\ell \cap A_m$, associé à $x = \min(x_\ell, x_m)$. D'une part, ces nouveaux A vérifie l'hypothèse : pour A_L, cela vient de $x_L \geq x_\ell x_m$. D'autre part pour les A_j : si A_j était dépendant de A_l, on avait du $P(A_j) \leq \ldots (1 - x_\ell) \leq (1 - x_L)$, car $x_L \leq x_\ell$.
D'autre part, on obtient comme conclusion que $P(\cap \overline{A_k}) \geq \ldots (1 - x_L) \geq \ldots (1 - x_m)(1 - x_\ell)$.
On a besoin d'avoir $P(\cap \overline{A_j}) \geq \prod (1 - x_j)$, c'est-à-dire $P(\cup A_i) \leq 1 - \prod (1 - x_j)$ S'ils sont tous non indépendants, cela découle exactement des inégalités données sur les x_i. □

III) Centrale

Exercice 237 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier la limite de la suite $\left(\left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

Exercice 238 [Centrale 2022] $Y_{n+1} = \sum_{i=0}^{Y} {}_n X_{i,n+1}$; $P(X > 1) > 0$ et d'espérance finie. G la fonction génératrice de X ; G_n celle de Y_n.

1. Montrer que G et G' sont strictement croissantes sur $[0, 1]$.
2. Montrer que $G_{n+1} = G_n \circ G$. En déduire une expression de $E(Y_n)$.
3. On pose $Z = \inf\{n \mid Y_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Montrer que $P(Z < +\infty)$ est le plus petit point fixe d G.
4. Montrer que $P(Z < +\infty) = 1$ si et seulement si $m \leq 1$.

Démonstration.
1.
2.
3. $(Z < +\infty) = \bigcup(Y_n = 0)$; $P(Y_n = 0) = G_n(0)$ □

Exercice 239 [Centrale 2022] Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre

- f est développable en série entière sur un voisinage de 0.
- il existe $\alpha > 0$, $M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $|f^{(n)}(x)| \leq M a^n n!$.

Démonstration. Si f est DSE, ok.
Si on a la majoration, écrire Taylor avec reste intégral. □

Exercice 240 [Centrale 2022] Soient , $b, c \in \mathbb{C}$ non entiers. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(a+k)(b+k)}{c+k}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum u_n z^n$.
2. Donner une CNS pour que la série entière converge absolument sur le cercle de centre 0 et de rayon R.

Démonstration.
1. On peut encadrer $|a + k| \leq |a| + k$ et $|a + k| \geq k - |a|$, donc le comportement est le même que des factorielles décalées, donc le rayon est 1.
2. C'est-à-dire pour que la série $\sum |u_n|$ converge. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}\right| = \left|\frac{(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{c}{n})}\right| = \left|1 + \frac{a+b-1-c}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right|.$$

Donne $1 + \operatorname{Re}\left(\frac{a+b-1-c}{n}\right) + O(\frac{1}{n})$. Si on a pas de chance, $\operatorname{Re} c = \operatorname{Re}(a + b)$, auquel cas, c'est la merde… □

IV) Mines

Exercice 241 [Mines 2022] Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \left(\frac{\sin n}{\alpha} + \alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

1. Nature de la série $\sum a_n$?
2. Racon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

Exercice 242 Montrer que les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, $2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ sont les applications de la forme $f(x, y) = g\left(\frac{x}{1+y^2}\right)$, où g est $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. On pose $\varphi(x, y) = \left(\frac{x}{1+y^2}, y\right)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, d'inverse $\mathcal{C}^1$. □

Exercice 243 [Mines 2022] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Étudier la limite de la suite $\left(\left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

Exercice 244 [Mines 2022] Soit $m \geq 1$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0,1[$. On pose $M = \inf\{n \mid S_n \geq m\}$.

1. Montrer que M est une variable aléatoire et évaluer $P(M = +\infty)$.
2. Montrer que $P(M \geq n) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}$.
3. Montrer que M est d'espérance finie et la calculer.
4. Calculer la variance de M.

Démonstration.
1.
2.
3. On a

$$E(M) = \sum_{n\geq 1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{m-1} p^k \sum_{n\geq 1} \binom{n-1}{k} q^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p^k}{(1-q)^k} = m,$$

car $\frac{1}{(1-q)^k} = \sum q^n \binom{n+k}{k}$ □

Exercice 245 [Mines 2022] Soit $n \geq 2$. On pose $J = \left(J_{i,j}\right)$, où $\forall i,\ J_{i+1,i} = J_{1,n} = 1$, et les autres coefficients sont nuls.

1. Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et les vecteurs propres de J.

2. E Soient $X_0, \dots, X_{n-1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On considère la matrice $M = \left(X_{i-j[n]}\right)_{i,j \leq n}$.
3. Exprimer M en fonction de J.
4. Pour $n = 2$, calculer $P(M \in GL_n(\mathbb{R}))$.
5. Déterminer le spectre complexe de M.
6. On suppose n premier, et on admet que le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Calculer $P(M \in GL_n(\mathbb{R}))$.

Démonstration. 1.

2.
3.
4.
5. On est non inversible si et seulement si le polynôme aléatoire P

annule l'une des racines n-ième de l'unité. On sait trouver la probabilité qu'il annule 1 : il faut que n soit pair, et que P ait autant de coefficients 1 que -1. S'il annule une autre racine ω, alors d'après la propriété de l'énoncé, c'est que c'est $\pm Q = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$. □