Exercices 2023

I) ENS MP-MPI

Exercice 1 [1] Soient S et T des ensembles finis non vides et f une application de S dans T. On pose $X = \{(x,y) \in S^2, f(x) = f(y)\}$. Montrer que $|X| \geq \max\left(\frac{|S|^2}{|T|}, \left(\left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil\right)^2 + |S| - \left\lceil \frac{|S|}{|T|} \right\rceil\right)$.

Démonstration. Pour le terme de gauche, il s'agit de montrer que $\sum_y n_y^2 \geq \frac{\left(\sum_y n_y\right)^2}{\sum_y 1}$, c'est Cauchy-Schwarz.
Pour le terme de droite, c'est un principe des tiroirs, puis compter pour 1 les éléments qui ne sont pas dans le tiroir. □

Exercice 2 [2] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et S un sous-ensemble non vide de $1, n$ tels que $\left|m - \sum_{i \in S} x_i\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

Démonstration. S sera un sous-ensemble d'entiers consécutifs : considérer les sommes partielles $S_0, \ldots, S_n$. □

Exercice 3 [3] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E(n)$ la valuation 5-adique de $\prod_{k=1}^n k^k$. Donner un équivalent de $E(n)$, quand $n \to +\infty$.
SUP

Exercice 4 [5] Soit n un entier premier > 1. Montrer que -1 est un carré modulo n si et seulement si n est somme de deux carrés d'entiers.

Démonstration. Si p est somme de deux carrés d'entiers, $p \equiv 1[4]$, et a est un carré si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.
Réciproquement, si $n \mid m^2 + 1$, dur, dur. ! ! □

Exercice 5 [6]
1. Soit p un nombre premier impair. Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ contient $(p-1)/2$ carrés.
2. Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ s'écrit comme la somme de deux carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Soit n un entier impair. Montrer que tout élément de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ s'écrit comme somme de deux carrés.
   Indication : Commencer par le cas où n est sans facteur carré.

Exercice 6 [7] Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Si p est un nombre premier et si $r \in \mathbb{Q}^*$ s'écrit $\frac{a}{b}$ de manière irréductible, on définit la p-valuation $v_p(r)$ comme $v_p(a) - v_p(b)$.
1. Montrer que si $p \geq 3$ est premier, alors $v_p(H_{p-1}) \geq 1$.
2. Montrer que si $p \geq 5$ est premier, alors $v_p(H_{p-1}) \geq 2$.
3. Montrer que si $p \geq 5$ est premier, alors $v_p(H_{(p-1)}p) \geq 1$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $v_2(\ H_{\ })$.

Exercice 7 [9]
1. Calculer $\sum\limits_{d \mid n} \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.
2. Calculer $\sum\limits_{d \mid n} \mu(d)$ où μ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1, \mu(p) = -1, \mu\left(p^k\right) = 0$ pour $k \geq 2$ si p est un nombre premier et $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ si $n \wedge m = 1$. On pose $F\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \left|\left\{\frac{p}{q} \in [0,1]; q \leq x\right\}\right|$.
3. Montrer que $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln x)$.

Démonstration.
1. $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$
2. $\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0$, ou 1 pour $n = 1$.
3. Par inversion de Möbius, on a $\varphi(d) = \sum\limits_{d' \mid d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) d'$. □

Exercice 8 [10] Soient p, q deux nombres premiers distincts. On note $v_p(n)$ la valuation p-adique d'un entier n. On pose, pour $m \in \mathbb{N}^*, N(m) = (1-q)\left(1-q^2\right)\ldots(1-q^m)$. Trouver une constante $c > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*, v_p(N(m)) \leq cm\ln(m)$.

Démonstration. Relier à 423 (LTE).
On a $v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(n)$ (pour $p \neq 2$).
Donc $v_p(N(m)) = \sum_{k=1}^m v_p(1-q) + v_p(m!)$, plus formule de Legendre. □

Exercice 9 [11] Si X est un ensemble fini, on note $X^* = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^k, c\colon (X^*)^2 \to X^*$ la concaténation et $\ell\colon X^* \to \mathbb{N}$ la longueur. Soient A et B deux ensembles finis et $\varphi\colon A^* \to B^*$ telle que, pour tous $a, a' \in A, \varphi(c(a,a')) = c(\varphi(a), \varphi(a'))$.
1. On pose $A = \{a,b,c,d\}$ et $B = \{0,1\}$. Étudier l'injectivité des applications définies sur les lettres de A puis étendues sur A^* par $\varphi\colon A \to B^*$ telles que $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 01, \varphi(c) = 10, \varphi(d) = 10011$, et $\psi\colon A \to B^*$ telle que $\psi(a) = 01, \psi(b) = 10, \psi(c) = 11, \psi(d) = 00$.
2. Montrer que, si φ est injective, alors $\sum_{a \in A} |B|^{-\ell(\varphi(a))} \leq 1$.

Démonstration.
1. La première est non injective : 0100110 peut être lu de deux façons.
   La seconde l'est.

2. On note C_N le nombre de choix possibles, de mots, dont la longueur totale N.
   On doit avoir $C_N \leq |B|^N$. Mais C_N vérifie une relation de récurrence : $C_N = \sum_{a \in A} C_{N-\ell(a}$.
   Donc les racines de cette récurrence doivent être $\leq |B|$, ce qui implique qu'en $|B|$ la valeur est négative, d'où le résultat. □

Exercice 10 [12] 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition $(1\,2)$ et le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

2. La transposition $(1\,3)$ et le cycle $(1\,2\,3\,4)$ engendrent-ils $\mathcal{S}_4$?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq a < b \leq n$ tels que $\tau = (ab)$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{S}_n$. Montrer que $b-a$ et n sont premiers entre eux.
4. Montrer la réciproque de la propriété précédente.

Démonstration. 1.

2. Non.
3. Si $p \mid b - a \wedge n$, alors $\sigma(a) - \sigma(b) \equiv a - b[p]$.
4. Facile de se ramener à un cycle $(u\, u+1)$ □

Exercice 11 [14] Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, on pose $X^{-1} = \left\{x^{-1}, x \in X\right\}$ et $XY = \{xy, (x,y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.

1. On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
2. On suppose que $\left|XX^{-1}\right| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

Démonstration. 1. Si X a un seul élément, ok. Sinon, alors pour tous $a, b \in X$, les ensembles aX et bX ne sont pas disjoints, donc il existe u, v tels que $au = bv \Leftrightarrow a^{-1}b = uv^{-1}$. D'où le résultat.

2. $X^{-1}X$ contient l'élément neutre, et stable par inverse.
   Si ce n'est pas un sous-groupe, c'est qu'il existe $u^{-1}va^{-1}b$ qui ne s'écrit pas de cette forme.
   ! !
   Quitte à translater, on peut supposer que $e \in X$. Alors XX^{-1} contient tous les éléments de X, et leurs inverses. Au moins la moitié des éléments de X ont leurs inverses dans X ! □

Exercice 12 [15] Soient A un anneau et $B \subset A$ finie non vide. On note $E(B) = \left|\{(a,b,c,d) \in B^4 \mid ab = cd\}\right|$. Montrer que $E(B) \geq \frac{|B|^4}{|BB|}$.

Exercice 13 [16] 1. Montrer que $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$.

2. Soit $m \geq 2$. Montrer que le morphisme $\pi \colon SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjectif.

Exercice 14 [17] Soit p un nombre premier. On admet qu'il existe un anneau commutatif A dans lequel $p^2.1_A = 0_A$ et il existe un élément inversible x tel que :

- tout élément de A s'écrive $P(x)x^{-k}$ pour un $P \in \mathbb{Z}[X]$ et un $k \in \mathbb{N}$;
- pour deux polynômes P, Q dans $\mathbb{Z}[X]$ et deux entiers naturels k, l, l'égalité $P(x)x^{-k} = Q(x)x^{-\ell}$ équivaut à ce que X^kQ et $X^\ell P$ aient même réduit modulo p^2 (autrement dit, tous les coefficients de $X^kQ - X^\ell P$ sont des multiples de p^2).

1. Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Caractériser l'inversibilité de $P(x)x^{-k}$ dans A.
2. Montrer que le groupe multiplicatif $A^\times$ ne possède pas de partie génératrice finie.

Démonstration. □

Exercice 15 [18] Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$. On pose $S_q = \sum\limits_{\substack{0 \leq a < q \\ a \wedge q = 1}} \sum\limits_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi a f(n)}{q}}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $q \wedge q' = 1$, alors $S_{qq'} = S_q S_{q'}$.

Démonstration. Les $a \in [\![1, qq']\!]$ premiers avec q et q' sont les $bq + aq'$, avec a premier avec q et b premier avec q'. □

Exercice 16 [19] On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{C}$ est intégrable si : $\forall (x,y) \in X^2, |x-y| \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble intégrable X composé de n points tous sur un même cercle.

Démonstration. On veut que les $\sin(\frac{\theta_i - \theta_j}{2})$ soient rationnels, c'est-à-dire les $\sin\frac{\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_j}{2} - \sin\frac{\theta_j}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}$.
Il suffit donc de prendre les doubles d'une infinité de points rationnels sur le cercle. □

Exercice 17 [20] Soit $z \in \mathbb{C}$ annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers. Soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $Q(z)$ est annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers.

Exercice 18 [21] Soit $n = 2m+1 \geq 1$ un entier impair. Expliciter un polynôme P_m de degré $2m$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sin(nx) = (\sin x)^n P_m(\operatorname{cotan} x)$.

1. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^m \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^m \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Démonstration. Easy. □

Exercice 19 [22] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. **SUP**

1. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si n est impair, alors P_n possède exactement une racine réelle, et qu'elle appartient à $[-n, -1]$.
3. On suppose n pair. Le polynôme P_n a-t-il une racine réelle ?
4. Déterminer les variations et la convexité de $x \mapsto P_n(x)$.

Exercice 20 [23] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$.

1. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, nP(x)P''(x) \leq (n-1)P'(x)^2$.
2. Donner un polynôme ne vérifiant pas le résultat de la question précédente, puis un polynôme non scindé le vérifiant.

Démonstration. 1.

2. Ajouter à un précédent. □

Exercice 21 [24] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On factorise P sous la forme $P = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k = \sum_{i=1}^{n} z_i^k$. Montrer que, si $k > n$, $S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_0 S_{k-n} = 0$ et que, si $k \leq n$, $S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1}S_1 = -ka_{n-k}$.

Exercice 22 [25] Une suite d'entiers $(a_n)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme si pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, $m - n \mid a_m - a_n$.

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $\big(P(n)\big)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme.
2. Montrer que $\big(\lfloor n!e \rfloor\big)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme.
3. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et que la suite $\big(P(n)\big)_{n\geq 1}$ ne soit pas un pseudo-polynôme.

Exercice 23 [26] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{n+1}$ tel que, pour tout $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$, le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Easy, à relier. □

Exercice 24 [27] Deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont entrelacées si

- $-P$ et Q sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$,
- P et Q n'ont aucune racine réelle commune,
- entre deux racines consécutives de P (respectivement Q) il y a une unique racine de Q (respectivement P).

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, $\lambda P + \mu Q$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P et Q sont entrelacés.

Démonstration. À relier. □

Exercice 25 [28] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. On note D_r le disque complexe ouvert de centre 0 et de rayon r. Montrer que $D_{1/n} \subset P(D_1)$.

Démonstration. $X + X^2 Q(X) - z_i = 0$ avec $|z_i| < \frac{1}{n}$ admet toujours une racine, < 1.
Vient des relations coefficients-racines. □

Exercice 26 [31]

- CNS sur n pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.
- On suppose cette condition satisfaite. Combien y a-t-il de polynômes de degré $d \in \mathbb{N}$ fixé dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- Soit p premier. Montrer qu'il existe des polynômes irréductibles de degré 2 et 3 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 27 [32] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps, et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang ≤ 1. Montrer que V est de dimension $\leq n$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 28 [33] Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(X, Y) \in V^2$, on ait $\mathrm{Tr}(XY) = 0$.

Exercice 29 [35] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même rang telles que $A^2 B = A$. Montrer que $B^2 A = B$.

Démonstration. □

Exercice 30 [38] Soient $n \geq 1$ et E une partie de $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

1. On suppose que E est stable par différence symétrique. Que dire de $C = \{m1_A\}$ comme partie de l'espace vectoriel $\big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)^n$?
2. On ne fait plus l'hypothèse précédente, mais on suppose que $A \cap B$ est de cardinal pair pour tous $A, B \in E$. Montrer que $|E| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Exercice 31 [39] Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $|a_i| \geq 2$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i$, $a_{ii} = a_i$, $a_{ij} = 1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Montrer que A est inversible et que son déterminant a le même signe que $\prod a_k$.
2. Montrer que la conclusion tient encore si l'on suppose $|a_{ij}| \leq 1$ si $|i - j| = 1$ au lieu de $a_{ij} = 1$.

Exercice 32 [40] On considère $\varphi : \big(\mathbb{R}^4\big)^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui à (u, v) associe la matrice dont le coefficient en (i, j) vaut $\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$.

1. Que peut-on dire si $\varphi(u,v) = \varphi(u',v') \neq 0$?
2. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que A s'écrit comme $\varphi(u,v)$ avec (u,v) libre si et seulement si $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$ et $A \neq 0$.
4. Décrire l'image et le noyau d'une telle matrice.

Démonstration. □

Exercice 33 [41] Soient a, b, m, p des entiers naturels tels que $a^2 + b^2 - pm = -1$. On pose $A = \begin{pmatrix} p & a+ib \\ a-ib & m \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(i))$ telle que $A = B^*B$ où $B^* = \bar{B}^T$. Même question avec B dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Démonstration. On a une matrice hermitienne, de déterminant 1. Donc diagonalisable ? □

Exercice 34 [42] Soient $n \in \mathbb{N}^*, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^2$. Pour $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $f_g : (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mapsto \varphi_1(g(x_1)) \times \cdots \times \varphi_n(g(x_n))$, application de $(\mathbb{R}^2)^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

- il existe une suite $(g_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}^2$, $f_{g_k}(x_1, \dots, x_n) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,
- il existe une droite vectorielle L telle que $|\{i, L \subset \mathrm{Ker}(\varphi_i)\}| > \frac{n}{2}$.

Démonstration. Si il existe une droite L, en prenant $g_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ selon L et n'importe quel supplémentaire, ça devrait être bon.

Réciproquement, ! ! □

Exercice 35 [43] Soit G l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $ad - bc = 1$ et $a \equiv d \equiv 1 - c \equiv 1 \bmod 3$. Montrer que G est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Démonstration. Facile ? Attention : faux pour 2. □

Exercice 36 [45] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C_A \colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX - XA$. Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors C_A l'est aussi.

Exercice 37 [46] Soient A et B deux matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec A et B. Montrer que $BA = \pm AB$.

Démonstration. $\Leftarrow$ Ok.
Si $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec un Vect de dimension 2. Si $AB = \lambda BA$, c'est bon. Sinon, alors le commutant de $ABA^{-1}B^{-1}$ est $\mathrm{Vect}(I_n, C)$, donc $B = \lambda A + \mu I_n$, puis faire de la réduction. □

Exercice 38 [47] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ leurs multiplicités. On note $P_k = (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et $F_k = \mathrm{Ker}\, P_k(A)$.

1. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.
2. Montrer que P_k est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur F_k.
3. Montrer que A se décompose en $D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente et $ND = DN$.

Exercice 39 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et m la multiplicité de 0 dans χ_A. Montrer l'équivalence entre

- $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^2$.
- il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^m = A$.
- pour tout $k \geq 1$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^k = A$.

Exercice 40 [49] Soit $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ dont toutes les valeurs propres sont de module ≤ 1. Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $M^k - I_n$ soit nilpotente.

Exercice 41 [51] Soit $n \geq 1$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = \left(\delta_{i+1,j}\right)_{i,j}$ la matrice de permutation associée. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que $\forall A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})GL_n(\mathbb{C}), \quad f(PAP^{-1}) = f(A)$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f \colon \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que $f(P_\sigma D P_\sigma^{-1}) = f(D)$. Expliciter un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$.

Exercice 42 Décomposition de Jordan [52] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $m, x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $\left(f^k(x)\right)_{0 \leq k \leq m-1}$ est libre. On note V le sous-espace de E engendré par cette famille.
2. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(f^{m-1}(x)) \neq 0$, W le sous-espace de E^* engendré par $(\varphi \circ f^i)_{0 \leq i \leq m-1}$, $W^\perp$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $\forall \psi \in W^\perp, \psi(y) = 0$. Montrer que $W^\perp$ est un supplémentaire de V dans E stable par f.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme J_k avec $k \in \mathbb{N}^*$, où $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la sur-diagonale qui sont égaux à 1.

Démonstration. □

Exercice 43 [53] Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$. Un élément $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ soit une base de E.

1. Quels sont les endomorphismes de E diagonalisables et cycliques ?
2. Montrer que si u est cyclique, le commutant de u est égale à $\mathbb{K}[u]$.
3. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des sous-espaces $E_1, \dots, E_r$ de E stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ et que, pour tout i, u_{E_i} soit cyclique.

Exercice 44 [54] Soient $r \in \mathbb{N}^*, d_1, \dots, d_r$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $d_1 | d_2 | \dots \mid d_r$. Déterminer le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contienne un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$.

Démonstration. $n = r$ convient. Réciproquement, si G contient un tel groupe, on peut codiagonaliser. □

Exercice 45 [55] Le groupe $GL_2(\mathbb{Q})$ contient-il un élément d'ordre 5 ?

Exercice 46 [56] On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle.

1. Montrer que $\forall M \in H$, $e^M \in SL_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall M \in H$, $\operatorname{Tr} e^M \geq -2$.
3. A-t-on $\exp(H) = SL_2(\mathbb{R})$?
4. Montrer que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit d'une matrice de $SO_2(\mathbb{R})$ et d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0.
5. En déduire que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit de deux exponentielles de matrices de H.

Exercice 47 [57] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, h_1 et h_2 deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une norme sur E pour laquelle h_1 et h_2 sont des isométries et que $[h_1, h_2] = h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ commute avec h_1 et h_2. Montrer que l'espace des vecteurs de E fixes par h_1 et h_2 admet un supplémentaire dans E stable par h_1 et h_2.

Démonstration. On peut supposer que l'ensemble F des points fixes est de dimension 1. Donc est le noyau d'une forme linéaire φ. ! !
Notons C le commutateur. On a $Ch_2 = h_1 h_2 h_1^{-1}$.
Si h_1 et h_2 commutent.
Si $h_1 = h_2$. □

Exercice 48 [58] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

1. Montrer que $\sum |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.
2. Montrer que $|\det A| \leq n^{n/2} \sup |a_{ij}|$.

Exercice 49 [59] Soient $(E, \langle\rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E tels que, pour tout $(i,j) \in 1, m^2$, $\langle u_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$. On note p le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$. Montrer que $\forall x \in E, \sum_{i=1}^n \langle u_i, x\rangle \langle x, p\,(v_i)\rangle = \|p(x)\|^2$.

Démonstration. Easy, on a $\langle x, p(v_i)\rangle = \langle p(x), v_i\rangle = \langle u_i, x\rangle$. □

Exercice 50 [ENS 60] On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$. On pose $F = \mathrm{Vect}\,(X, X^2, \dots, X^n)$ et on note Q la projection orthogonale de 1 sur F.
On ecrit $Q = -\sum_{k=1}^n a_k X^k$ et $P = 1 + \sum_{k=1}^n a_k (X+1)\dots(X+k)$.

- Determiner $\langle Q-1, X^k\rangle$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ et montrer que $P(k) = 0$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.
- Calculer $\inf_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 e^{-x}\,dx$.

Exercice 51 [61] Soient $(E, \langle\rangle,) unespaceeuclidien, m \in \mathbb{N}^*, u, u_1, \dots, u_m$ des vecteurs de E. Montrer que $u \in \mathbb{R}^+ u_1 + \cdots + \mathbb{R}^+ u_m$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\{x \in E; \forall i \in 1, m, \langle u_i, x\rangle \leq 0\} \subset \{x \in E; \langle u, x\rangle \leq 0\}$.

Démonstration. $\Rightarrow$: Easy.
$\Leftarrow$: Si les vecteurs u_i sont libres, on peut prendre un élément x orthogonal à tous sauf 1.
Sinon, si u_m est combinaison linéaire des précédents, avec un coefficient < 0. ! ! □

Exercice 52 [ENS 62] Montrer que, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, M s'ecrit d'une unique facon QR avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire superieure a termes diagonaux dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 53 [ENS 63] [Rennes sur dossier] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymetrique et inversible.

- Que peut-on dire de l'entier n ?
- En considerant M^2, montrer que M admet un plan stable puis qu'il existe une matrice orthogonale $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $O^T M O$ soit une matrice diagonale par blocs de la forme $\mathrm{diag}(R_{a_1}, \dots, R_{a_k})$, avec $R_a = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.
- Qu'en est-il si M n'est plus supposee inversible ?

Exercice 54 [ENS 64] Soit $n \geq 1$. Determiner les matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^k = A^T$ pour tout entier $k \geq n$.

Exercice 55 [65] Soient $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de réflexion dans $\mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. On pose $A' = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Calculer $\chi_{A'}(1)$ en fonction de la première colonne de M et de χ_A.

Démonstration. $\chi_{A'}(1) = \det(I_{n+1} - M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}).!!$ □

Exercice 56 [ENS 66] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On suppose que A et $A + vv^T$ n'ont pas de valeur propre commune. Sous reserve d'existence, on pose $F(x) = 1 + v^T(A - xI_n)^{-1}v$ pour x reel.

- Montrer que les zeros de F sont les valeurs propres de $A + vv^T$.
- On note $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les valeurs propres de A. Montrer que chaque intervalle $]\lambda_1, \lambda_2[,\ldots,]\lambda_{n-1}, \lambda_n[,]\lambda_n, +\infty[$ contient exactement une valeur propre de $A + vv^T$.

Exercice 57 [ENS 67] Soient $n \in \mathbb{N}$ impair, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $A + M$ soit nonversible. Montrer que $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 58 [68] Soient A, B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'ont pas -1 pour valeur propre et telles que AB n'ait pas 1 pour valeur propre. Montrer que $(A - I_n)(BA - I_n)^{-1}(B - I_n)$ est antisymétrique.

Démonstration. Classique □

Exercice 59 [ENS 69] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

- Determiner les valeurs propres de J et leur multiplicite.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
- Que peut-on dire de la matrice BJB ?
- Lorsque A est diagonale, calculer les valeurs propres de JA.
- Montrer plus generalement que toute valeur propre d'une matrice antisymetrique reelle est imaginaire pure.

Exercice 60 [70] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A non nécessairement distinctes. Montrer que $\forall k \in \Big[1, n, \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^k \lambda_{n+1-i}$.

Démonstration. □

Exercice 61 [71]

1. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ Montrer que AB est diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles.
2. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $f_{A,B} : X \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(AX) + \mathrm{Tr}\left(BX^{-1}\right)$. Montrer que $f_{A,B}$ admet un minimum $\mu_{A,B}$ atteint en une unique matrice $M_{A,B}$. Expliciter $\mu_{A,B}$ et $M_{A,B}$.

Démonstration. □

Exercice 62 [ENS 72] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On definit $p(A)$ comme la dimension maximale d'un sous-espace V sur lequel $\forall x \in V \setminus \{0\}$, $\langle Ax, x \rangle > 0$. On definit de meme $q(A)$ avec la condition $\langle Ax, x \rangle < 0$.

- Montrer que $p(A) + q(A) = \mathrm{rg}\, A$.
- Montrer que, si A est inversible, alors p et q sont constantes sur un voisinage de A dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on suppose que $f : t \mapsto \det(A + tB)$ n'a que des racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet au moins $|p(B) - q(B)|$ racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 63 [ENS 73] On note $\lambda_1(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonne d'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Si $1 \leq i, j \leq n$ et $i + j \geq n + 1$, que dire du signe de $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$?[MISSING$_{\text{PAGEFAIL}}$:1]# 80

Soient $a \leq b$ deux reels, et $(O - i \in I$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. On note X l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels qu'il existe une partie finie $J \subset I$ verifiant $[a, x] \subset \bigcup_{j \in J} O_j$. Montrer que $X = [a, b]$.

Exercice 64 [74] Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonné de M.

1. On considère $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. Montrer que, si $i + j < n + 2$ alors $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) < 0$.
2. Généraliser à $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1 + \cdots + A_d \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. telle que $B = P^T AP$.

Démonstration. □

Exercice 65 [75] On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne. Soit $S \in \mathcal{S}_n$. On suppose que $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid S = M^T M - MM^T\}$ est non vide. On note $\gamma(S) = \inf_{M \in E} \|M\|^2$. Montrer que $\|S\| \leq \gamma(S) \leq 2\|S\|$.

Exercice 66 [76]

1. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^T AP$.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Proposer une définition naturelle de $f(A)$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Pour A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on pose $d(A, B) = \left\|\ln\left(\sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}\right)\right\|$. Justifier la définition, et montrer que d est une distance sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $d\left(P^T AP, P^T BP\right) = d(A, B)$.

Démonstration. □

Exercice 67 [77] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}\, X^T Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $L(M)\colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MX$. Montrer que L est un morphisme d'algèbre injectif.
3. Soit $|||\cdot|||_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, et $|||\cdot|||$ la norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ subordonnée à $\|\cdot\|$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $|||L(M)||| \leq |||M|||_2$.
4. Montrer que $\left|\left|\left|M^T\right|\right|\right|_2 = |||M|||_2$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 68 [78] On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associée à la norme $X \mapsto \sqrt{\bar{X}^T X}$.

1. Soient A, B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left\|e^{iA} - e^{iB}\right\| \leq \|A - B\|$.
2. Démontrer le même résultat sous l'hypothèse que A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\bar{A}^T = A$ et $\bar{B}^T = B$.

Démonstration. □

Exercice 69 [79] Soit $p > 1$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\Big\|x = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$.

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une norme.
2. Montrer l'inégalité de Hölder.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner la boule unité de la norme p pour plusieurs valeurs de p.

Exercice 70 [80] Soient $a \leq b$ deux réels, et $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_i O_i$. On note X l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $[a, x] \subset \bigcup_{j \in J} O_j$. Montrer que $X = [a, b]$.

Exercice 71 [ENS 81] Soient K un compact convexe non vide d'un espace norme E, f un endomorphism continu de E tel que $f(K) \subset K$. Montrer que f admet un point fixe dans K.

Exercice 72 [82] Peut-on écrire $]0{,}1[$ comme réunion dénombrable disjointe de segments d'intérieurs non vides ?

Démonstration. Non. Par l'absurde, on fait de la dichotomie, entre des segments, dont la distance tend vers 0, alors la limite n'appartient à aucun segment. □

Exercice 73 [83] Pour tout réel x dans $[0{,}1[$, on note $0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ le développement décimal propre de x. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i$. Soit a un réel tel que $0 < a < 9$. On définit $P_n = \{x \in [0{,}1[; S_n(x) \leq na\}$ et $P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} P_n$. Montrer que P est compact, non vide, d'intérieur vide et sans point isolé.

Démonstration. P est borné et fermé, car S_n est continue inférieurement. Clairement non vide et d'intérieur vide. Si $x \in P$, en retirant 1 a un chiffre de x arbitrairement grand, on reste dans P. Possible sauf si x est décimal, auquel cas on peut ajouter 1. □

Exercice 74 [ENS 84] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que la classe de similitude de A est fermee si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 75 [ENS 85]

- On note D le disque unite du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Demontrer qu'il existe une suite $(C - i \in \mathbb{N}$ de parties de D telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble C_i soit un carre de $\mathbb{R}^2$ dont les cotes sont paralleles aux axes ;
  - ▷ les C_i soient d'interieurs deux a deux disjoints ;
  - ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Aire}(C_i) = \pi$.
- On note $C = [-1, 1]^2$. Demontrer qu'il existe une suite $(D - i \in \mathbb{N}$ de parties de C telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble D_i soit un disque ferme de $\mathbb{R}^2$;
  - ▷ les D_i soient d'interieurs deux a deux disjoints ;
  - ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Aire}(D_i) = 4$.

Exercice 76 [ENS 2023 86] Soit $d \geq 1$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{R}[X]$.

1. On pose $A = \{(P, x) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}; P(x) = 0\}$ et $P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de A dans $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}$.
2. On pose $B = \{P \in \mathcal{P}; \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \neq 0$ ou $P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de B dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Démonstration.

1. Par translation, on peut passer de (P, x) à $(\tilde{P}, 0)$. Alors $P = X^n + Q + \alpha X$, avec $\alpha \neq 0$. On peut ramener Q à 0, et α à ± 1. Deux composantes connexes, selon le signe de $\alpha = P'(x)$.
2. B est l'ensemble des polynômes unitaires à racines simples. Le nombre de racines simples est un invariant, et réciproquement, ces morceaux sont clairement connexes par arcs. □

Exercice 77 [87] Soient $(M_k)_{k \geq 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables les unes aux autres, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\|M_k\| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et une extractrice $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\frac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|} \to N$.

Démonstration. On peut extraire $\frac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|}$ convergent, vers Π.

Si Π a une valeur propre complexe X, comme $\left\|\frac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|} - \Pi\right\| \leq \varepsilon$, on a une valeur propre complexe proche de λ, donc $M_{\varphi(k)}$ a une valeur propre qui tend vers $+\infty$. □

Exercice 78 [88] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module < 1. Montrer qu'il existe une norme \|\| sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour la norme d'opérateur associée, on ait $\|A\| < 1$.

Démonstration. Trigonaliser, puis conjuguer par une matrice diagonale pour n'avoir que des petits coefficients hors de la diagonale. □

Exercice 79 [89] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de lignes $L_1, \dots, L_n$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que, pour tout $i \in 1, n$, $\|L_i\|_2 = 1$ et la distance euclidienne canonique de L_i au sous-espace engendré par les L_j, pour $j \neq i$, est supérieure ou égale à ε. Montrer que A est inversible et que $\sup \left\{ \left\|A^{-1}x\right\|_2 ; x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = 1 \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Démonstration. A est inversible car aucune ligne n'est combinaison linéaire des autres.
Si $x = E_i$, on considère les colonnes de A^{-1}, notées C_i. On $\langle C_i, L_i \rangle = 1$ et C_i orthogonal aux autres lignes, ce qui donne $\|C_i\|_2 \leq \frac{1}{\varepsilon}$, peut-être.
Ensuite, utiliser une convexité ? □

Exercice 80 [ENS 90] On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornees de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\| \ \| \ \|_\infty$. On fixe $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ non nulle a support compact, et on note $W(g)$ l'espace vectoriel engendre par les fonctions $x \mapsto g(x-n)$, n decrivant $\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des reels t lets que $\left\{ x \mapsto f(x-t), f \in \overline{W(g)} \right\} = \overline{W(g)}$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.

Exercice 81 [91] Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles de limite 1 et (u_n) une suite réelle strictement positive telle que, pour tout n, $u_{n+2} = a_{n+1}u_{n+1} + b_{n+1}u_n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \frac{\ln(u_n)}{n}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent.

Démonstration. Soit m. On peut écrire $u_{a+n} = G_n u_a + G_{n+1} u_{a-1}$ et $u_{a+n+1} = G_{n+1} u_a + G_{n2} u_{a-1}$, où $G_n \xrightarrow[a \to +\infty]{} F_n$, ce qui devrait implique ce que l'on veut.
w_n s'obtient à partir de v_n par Cesàro. □

Exercice 82 [ENS 2023 92] 1. Si $n \geq 2$ est un entier, montrer que $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor = \sum_{j=2}^n \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor$.

2. Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor$, puis un développement asymptotique à deux termes.

Démonstration. 1. Le premier compte les puissances de k inférieures à n, dont k^1.
Le second compte les puissances j-èmes inférieures à n.

2. En coupant la somme en $k = \sqrt{n}$, on a du $\sqrt{n}\ln n + (n - \sqrt{n})n$, d'où un équivalent à n.
En suite, on prend l'autre expression, on retire n. Le premier terme est $\sqrt{n}$. Les termes non nuls correspondent à $\sqrt[j]{n} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 2^j$, donc les autres termes sont au plus en $\sqrt[3]{n}\ln n$, d'où le DSA $n + \sqrt{n} + o_{+\infty}(\sqrt{n})$. □

Exercice 83 [ENS 93] Soient $\alpha > 0$ et $(a - n \in \mathbb{N}$ une suite strictement decroissante a valeurs dans $]0,1[$. Soit $(u - n \in \mathbb{N}$ une suite definie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(u_n^\alpha + a_n)$. Montrer qu'il existe un unique $u_0 > 0$ tel que la suite $(u - n \in \mathbb{N}$ converge vers un reel strictement positif.

Exercice 84 [ENS 94] Soit (u_n) une suite definie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin(\ln n)$. On note V l'ensemble des valeurs d'adherence de (u_n).

- Montrer que, pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$.
- Montrer que $u_{n+1} - u_n \to 0$.
- Montrer que V est un intervalle inclus dans $[-1,1]$, puis que $V = [-1,1]$.

Exercice 85 [ENS 95] Si A est une partie de $\mathbb{N}^*$, on dit que A admet une densite si la suite $\left(\frac{|A \cap 1, n|}{n}\right)_{n \geq 1}$ admet une limite. Cette limite est alors notee $d(A)$.

- Si $m \in \mathbb{N}^*$, quelle est la densite de l'ensemble des multiples de m dans $\mathbb{N}^*$?
- Soient A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ admettant une densite. Montrer que $A \cup B$ admet une densite que l'on precisera.
- Donner un exemple de partie de $\mathbb{N}^*$ n'admettant pas de densite.

Exercice 86 [ENS 96] On considere une suite $a \in \{2,3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n-ieme occurrence de 2 et la $(n+1)$-ieme occurrence de 2 soit egal a a_n.
Etudier la convergence de la suite de terme general $\frac{1}{n}\left|\{k \in 1, n, \ a_k = 3\}\right|$.

Exercice 87 [97] On considère une suite $a \in \{2,3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n-ième occurrence de 2 et la $(n+1)$-ième occurrence de 2 soit égal à a_n. Montrer qu'il existe un unique irrationnel α tel que les indices $n \geq 1$ tels que $a_n = 2$ soient exactement les entiers de la forme $\lfloor m\alpha \rfloor + 1$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. □

Exercice 88 [98] Une suite réelle (x_n) est dite équirépartie modulo 1 si elle vérifie, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$, $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N e^{2ik\pi x_n} = 0$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(n\alpha)$ est équirépartie modulo 1.
2. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_{n+h} - x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie ; on veut montrer que (x_n) est équirépartie modulo 1.
   a) Soit (a_n) une suite de complexes de module ≤ 1. Montrer, pour tous $N, H \in \mathbb{N}^*$: $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N a_n\right| \leq \left|\frac{1}{H}\sum_{h=0}^{H-1}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N a_{n+h}\right| + \frac{2H}{N}$.

b) Montrer que $\left|\frac{1}{H}\sum_{h=0}^{H-1}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_{n+h}\right| \leq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=0}^{H-1}\frac{a_{n+h}}{H}\right|^2}$.

c) Conclure.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et de coefficient dominant irrationnel. Montrer que $(P(n))_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1.
4. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle équirépartie modulo 1, et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$.
5. On reprend les hypothèses de la question 3. Montrer que la distance de $P(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$ est nulle.

Démonstration. 1.

2.

3.

4.

5. ?? □

Exercice 89 [ENS 99] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on note A_n la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ ou, pour tout $k \in 1, n-1$, $a_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Determiner la limite de $(\mathrm{tr}\,(A_n^q))_{n\geq 2}$.

Exercice 90 [100] Montrer la convergence et calculer $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left\lfloor\frac{\ln(k)}{\ln(2)}\right\rfloor$.

Démonstration. Écrit quelque part… □

Exercice 91 [101] On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$. On se donne une suite presque nulle $v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ainsi qu'une suite $(u_k)_k$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ (l'élément u_k est donc noté $(u_{k,i})_{i\in\mathbb{N}}$). On suppose que, pour tout entier $p \geq 2$, la suite de terme général $w_k = \sum_{n=0}^{+\infty}(u_{k,n})^p$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty}(v_n)^p$. Montrer que $\inf_{\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_{k,\sigma(n)} - v_n\right)^2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. Écrit quelque part…

On peut supposer que les (v_n) sont décroissants, par réordonnement. □

Exercice 92 [102] Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et telle que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

Démonstration. Facile. □

Exercice 93 [103] Soient I un intervalle ouvert, $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable et $[a,b] \subset I$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que la tangente au graphe de f en c passe par le point $(a, f(a))$.

Démonstration. On peut supposer $f'(a) = f'(b) = 0$. À relier. □

Exercice 94 [ENS 104] Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit derivable en aucun point.

Exercice 95 [105] Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geq 2$, f^n (puissance) soit polynomiale.

Démonstration. f^2 et f^3 polynomiales, donc f est une fraction rationnelle, $f \in \mathbb{Q}(x)$ et $f^2 \in \mathbb{Q}[X]$ impliquent $f \in \mathbb{Q}[X]$. □

Exercice 96 [ENS 106] Soit $p > 1$ un reel. Montrer qu'il existe une constante $k_p > 0$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x|^p + |y|^p = 2$, on ait $(x-y)^2 \leq k_p\left(4 - (x+y)^2\right)$.

Exercice 97 [ENS 107] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(sx - f(x))$ et $f^*(x) = \sup_{s\in\mathbb{R}}(sx - f^*(s))$.

Montrer que $f^*(x) = \sup_{a \text{ affine } \leq f} a(x)$.

Exercice 98 [ENS 108] Soient I un ensemble fini et $(P - i \in I$ une famille de polynomes reels stable par derivation. On definit une fonction signe par $\mathrm{sign}(x) = \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $\mathrm{sign}(0) = 0$.

Pour $\varepsilon \in \{-1,1,0\}^I$, soient $A_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ \forall i \in I,\ \mathrm{sign}(P_i(t)) = \varepsilon(i)\}$ et $B_\epsilon = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ \forall i \in I, \mathrm{sign}(P_i(t)) \in \{\varepsilon(i), 0\}\}$.

- Montrer que A_ε est soit vide, soit reduit a un point, soit un intervalle ouvert.
- Si A_ε est non vide, montrer que B_ε est l'adherence de A_ε. Si A_ε est vide, montrer que B_ε est soit vide suit un singleton.

Exercice 99 [ENS 109] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

- Soient $x_0, \ldots, x_n$ des points de I. On note $V(x_0, \ldots, x_n)$ le determinant de Vandermonde associe a $(x_0, \ldots, x_n)$. Montrer qu'il existe $\tau \in I$ tel que
$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!} V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$
- On suppose que $n = 2$, que I est un segment et que f est strictement convexe. On note $\Gamma_f = \{(x, f(x)); x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de f. Montrer qu'il existe une constante C, dependant uniquement de I et f, telle que le nombre de points de $\Gamma_f \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^2$ soit majore par $C\,N^{2/3}$ pour tout entier $N \geq 1$.

Exercice 100 [ENS 110] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx$.

- Montrer que $(w - n \geq 0$ est decroissante.
- Etablir une relation de recurrence entre w_{n+2} et w_n.
- Sans utiliser la formule de Stirling, determiner un equivalent simple de w_n.
- Determiner le rayon de convergence de la serie entiere $\sum w_n x^n$.

Exercice 101 Théorème de Rouché [111] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$.

1. Montrer que le nombre de racines de P de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité n'est autre que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}P'(e^{it})}{P(e^{it})}$ d
2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$ et tel que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$. Montrer que P et Q ont même nombre de racines de module strictement inférieurs à 1 comptées avec multiplicité.

Démonstration. □

Exercice 102 [ENS 112] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,dx$ et $B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n}(x)\,dx$. On admet que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2nA_n = (2n-1)A_{n-1}$.

- Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{2B_0}{A_0} - \frac{2B_n}{A_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En deduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ puis que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 103 [113] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et presque périodique c'est-à-dire telle que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x+nT) - f(x)| \leq \epsilon$. Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et presque périodique.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t f$ possède une limite quand $t \to +\infty$.

Démonstration. 1. Easy.

2. !! □

Exercice 104 [ENS 114] Soit f une fonction continue par morceaux et croissante de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^1 f(x)e^{i\lambda x}dx \underset{\lambda\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Exercice 105 [ENS 115] Soient $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$ des fonctions de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Soit A la matrice de terme general $A_{i,j} = \int_0^1 f_i(x)g_j(x)\,dx$.
On pose $B(x_1, \ldots, x_n) = \det\left(f_i(x_j)\right)$ et $C(x_1, \ldots, x_n) = \det\left(g_i(x_j)\right)$.Montrer que $\int_{[0,1]^n} B(x_1, \ldots, x_n)\,C(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = n!\det(A)$.

Exercice 106 [ENS 116 - La fonction f • Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et telle que f' est uniformement continue. Est-ce que f' a une limite en $+\infty$?

Exercice 107 [ENS 117] [Rennes sur dossier] Soient $d, N \in \mathbb{N}$ tels que $N > d$. Soient $(P - n \in \mathbb{N}$ une suite de polynomes a coefficients reels de degre au plus d et $x_1, ..., x_N$ des reels distincts. On suppose que pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, la suite $(P_n(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornee. Montrer que l'on peut extraire de $(P - n \in \mathbb{N}$ une suite $(Q - n \in \mathbb{N}$ qui converge uniformement sur $[0,1]$ vers un polynome de degre au plus d.

Exercice 108 [ENS 118] Montrer que la suite de fonctions de terme general $f_n : x \mapsto (\sin x)^n \cos(x)$ converge uniformement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 109 [ENS 119] On note I (resp. S) l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ telles que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in [0,1], f(x) \leq a\}$ est ferme (resp. de meme avec l'inegalite dans l'autre sens).

- Montrer que $S \cap I$ est l'ensemble C des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
- Soit $f : [0,1] \to [0,1]$. On pose $f_n : x \mapsto \inf(\{1\} \cup \{f(y) + n|x-y|, y \in [0,1]\})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n est continue pour tout n, que la suite (f_n) est croissante et que $f \in I$ si et seulement si la suite (f_n) converge simplement vers f.

Exercice 110 [120] Soit $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(n) = \ln(p)$ si $n = p^k$ avec p premier et $k \in \mathbb{N}^*$, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.
2. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^s}$.

3. Montrer que, pour tout $s>1$, $\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{\ln(p)}{p^s}\underset{s\to1+}{=}\frac{1}{s-1}+O(1)$.
4. Montrer que, pour tout $s>1$, $\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p^s}\underset{s\to1^+}{=}\ln\left(\frac{1}{s-1}\right)+O(1)$. Qu'en déduire ?

Démonstration. □

Exercice 111 [ENS 121] Soit $q\geq 2$ entier. On se donne un caractere non trivial χ sur le groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, c'est-a-dire un morphisme de groupes non constant $\chi:((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times,\times)\longrightarrow(\mathbb{U},\times)$. Pour $m\in\mathbb{Z}$, on pose alors $\widetilde{\chi}(m)=0$ si q n'est pas premier avec m, et $\widetilde{\chi}(m)=\chi(\overline{m})$ sinon (ou $\overline{m}$ designe la classe de m modulo q).

- Montrer que la serie $\sum_{n\geq1}\frac{\chi(m)}{m^s}$ converge si et seulement si $s>0$. - Montrrer que la fonction $s\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi(m)}{m^s}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 112 [122] Soient $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle en $+\infty$ et $g\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nf(nx)$. Quelle est la limite de g en 0^+ ?

Démonstration. C'est $\sum f(2nx)-f((2n+1)x)=\sum\int_{2nx}^{(2n+1)x}f'(t)\,\mathrm{d}t$. Cela tend vers $\frac{1}{2}f(0)$, en découpant sur un segment, et en utilisant l'uniforme continuité de f'. □

Exercice 113 [ENS 123] Pour tout polynome trigonometrique $P:\theta\mapsto\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(P)e^{ik\theta}$ (somme a support fini) et pour tout $d\in\mathbb{R}$, on pose $\|P\|_{h^d}^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(P)|^2(1+|k|)^{2d}$.
On admet que $\|\ \|_{h^d}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{T}$ des polynomes trigonometriques pour tout $d\in\mathbb{R}$. Soit E l'espace des fonctions continues par morceaux et 2π-periodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On definit le produit de convolution de deux fonctions $f,g\in E$ par : $f\star g:\varphi\mapsto\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)g(\varphi-\theta)\mathrm{d}\theta$. Enfin, on pose, pour $f\in E$, $\|f\|_2^2=\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2\mathrm{d}\theta$.

- Montrrer qu'il existe $d\in\mathbb{R}$ et $c=c(d)\in\mathbb{R}^+$ tels que, pour tous $f,g\in\mathcal{T}$,

$\|f\star g\|_2\leq c(d)\|f\|_{h^d}\|g\|_2$.

- Determiner tous les reels d verifiant la condition de la question precedente.
- Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-periodique. On pose, pour $k\in\mathbb{Z}$, $c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta$ et, pour tout $d\in\mathbb{R}$, $\|f\|_{h^d}^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(f)|^2(1+|k|)^{2d}$. Determiner les $d\in\mathbb{R}$ tels que $\|f\|_{h^d}<+\infty$.
- Soient f,g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-periodiques et $d\in\mathbb{R}$. Calculer $\|f\star g\|_{h^d}$.

Exercice 114 [ENS 124] Soient $p\geq2$ et $q\geq2$ deux entiers tels que $p\wedge q=1$. Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, on pose $f(z)=\frac{1-z^{pq}}{(1-z^p)(1-z^q)}$. Ecrire $f(z)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$ et trouver le plus grand $n\geq0$ tel que $c_n=0$.

Exercice 115 [125] Soient $R\in\mathbb{R}^{+*}$, f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-R,R[$ telles que $\forall x\in]-R,R\left[,\int_0^xf(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t=0\right.$. Montrer que l'une au moins des deux fonctions f et g est identiquement nulle sur $]-R,R[$.

Démonstration. □

Exercice 116 [ENS 126] Soient $f:z\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$ et $g:z\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}z^{2^n}$.

- Determiner les rayons de convergence de f et g.
- Trouver les complexes $z\in\mathcal{S}(0,1)$ tels que $f(z)$ converge.
- Montrrer que f admet un prolongement $\bar{f}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, developpable en serie entiere en tout point de $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.
- Montrrer que $|g(r)|\to+\infty$ quand $r\to1$ avec $r\in\mathbb{R}$. - Montrrer que, si $z\in\mathcal{B}(0,1)$, alors $g(z^2)=g(z)-z$.
- Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{U}_{2^n}$. Montrrer que $|g(r\alpha)|\to+\infty$ quand $r\to1$ avec $r\in\mathbb{R}$.
- Soit $h:z\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2^n+1}}{2^n+1}$. Montrrer que h est continue sur $\overline{\mathcal{B}}(0,1)$.
- Montrrer que, pour tout $z_0\in\mathcal{S}(0,1)$, $\varepsilon>0$ et $\tilde{h}$, prolongement de h sur $\overline{\mathcal{B}}(0,1)\cup\mathcal{B}(z_0,\varepsilon)$, la fonction $\tilde{h}$ n'est pas developpable en serie entiere en z_0.

Exercice 117 [ENS 127] Soit $\alpha=(\alpha-i\geq1$ une suite de $\mathbb{Z}$ nulle a partir d'un certain rang. Pour $n\geq1$, on pose $u_n=\prod_{i\in\mathbb{N}^*}((in)!)^{\alpha_i}$.

- Determiner, selon la valeur de α, le rayon de convergence R de la serie entiere $\sum_{n\geq1}u_nz^n$.

Dans la suite, on note f la somme de cette serie entiere.

- Expliciter f si $\alpha=(-\delta_{i,1})_{i\geq1}$.
- Pour une somme g de serie entiere sur un intervalle $]-a,a[$ non trivial, on pose $\Delta(g):z\mapsto zg'(z)$. Expliciter $P(\Delta)(g)$ lorsque $g:z\mapsto z^k$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $P\in\mathbb{R}[X]$.
- Soit $v\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite complexe, et $P\in\mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n\geq1$, $v_{n+1}=\frac{v_n}{P(n+1)}$. Montrrer que $\sum_{n\geq1}v_nz^n$ a un rayon de convergence non nul et donner une methode simple pour trouver une equation differentielle lineaire non triviale a coefficients polynomiaux dont sa somme est solution.
- Resoudre le meme probleme qu'en (d) lorsqu'il existe P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ telles que $v_{n+1}=\frac{Q(n+1)}{P(n+1)}v_n$ pour tout $n\geq1$, et en supposant cette fois-ci que $\deg(Q)\leq\deg(P)$.
- Justifier que le cadre de la question - s'applique bien a la suite $(u-n\geq1$ lorsque $R>0$.

Exercice 118 [ENS 128] Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\frac{n!\,(30n)!}{(15n)!\,(10n)!\,(6n)!}$.

- Montrrer que, pour $n\in\mathbb{N}$, u_n est un entier.

- Determiner le rayon de convergence de la serie entiere $\sum u_n x^n$.
- Trouver une equation differentielle verifiee par la somme de la serie entiere precedente.

Exercice 119 [129] Existe-t-il une partie A de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n\in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$?

Démonstration. Cf un précédent □

Exercice 120 [ENS 130] • Soit $f\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une serie entiere de rayon $R > 0$. Montrrer que, pour tout $0 < r < R$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$.

- ▷ Soit f une fonction developpable en serie entiere de rayon de convergence egal a 1. On suppose que f est prolongeable par continuite sur le disque ferme $D_f(0,1)$. Expliquer pourquoi la formule de Cauchy ci-dessus reste vraie pour $r = 1$. - Soit $f : x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}e^{-\frac{1-x}{1+x}}$. Montrer que f est developpable en serie entiere au voisinage de 0.
- ▷ On admet que le rayon de convergence du developpement de f en 0 vaut 1. Montrer que les coefficients du developpement en serie entiere en 0 de f sont bornes par $M > 0$. Experimer M en fonction de f.

Exercice 121 [ENS 131] Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ a l'aide de la transformation de Laplace.

Exercice 122 [132] Soit $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^-$ tel que $\forall x \in [0,1], 1 + ax + bx^2 \geq 0$.

1. Si $a \in \mathbb{R}^+$, montrer que $n\int_0^1 \left(1+ax+bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Si $a \in \mathbb{R}^{-*}$, montrer que $n\int_0^1 \left(1+ax+bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{a}$.

Démonstration. □

Exercice 123 [133] Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{e^{2x}\cos^2(t)+e^{-2x}\sin^2(t)}}$. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq (ax+b)e^{-x}$.

Démonstration. □

Exercice 124 [ENS 134] Pour x reel, on pose $J(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin t)\,dt$.

- Calculer $J(0)$.
- Montrer que J est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- En estimant $\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \cos(x\sin t)\,dt$ pour un ε a choisir convenablement en fonction de x, etablir que $J(x) = O(x^{-1/2})$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 125 [ENS 135] Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f\star g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt$. Montrer que $f\star g$ est derivable et donner une expression de sa derivee.

Exercice 126 [ENS 136] Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geq 1$ et $s < t$ dans $]0,1[$, on pose
$a_n(f,s,t) = \frac{2}{t-s}\int_s^t f(u)\cos\left(\frac{2n\pi}{t-s}(u-s)\right)\,du.$

- On suppose f strictement convexe. Montrer que $a_1(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$.
- On suppose f strictement convexe. Montrer que $a_n(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Reciproquement, on suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ et $a_1(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$. Montrer que f est strictement convexe.

Exercice 127 [ENS 137] Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'equation differentielle sur $\mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^n y^{(k)} = 0$.
A quelle condition sur n tout element de $\mathcal{S}$ possede-t-il une limite en $+\infty$?

Exercice 128 [138] Soit I un (vrai) intervalle de $\mathbb{R}$. Si $r \in \mathbb{N}^*$ et $f_1,\ldots,f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$, on pose $W_r(f_1,\ldots,f_r) = \det\left(\left(f_j^{(i-1)}\right)_{1\leq i,j\leq r}\right)$.
Soient $r \in \mathbb{N}^*, f_1,\ldots,f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$. Montrer que $W_r(gf_1,\ldots,gf_r) = g^r W_r(f_1,\ldots,f_r)$.
2. On suppose que, pour tout $k \in 1,r, W_k(f_1,\ldots,f_k)$ ne s'annule pas. Montrer que, pour tout $(a_1,\ldots,a_r) \in \mathbb{R}^r$ non nul, la fonction $a_1f_1+\cdots+a_rf_r$ s'annule au plus $(r-1)$ fois sur I.
3. On suppose que $W_r(f_1,\ldots,f_r)$ est identiquement nul sur I et que $W_{r-1}(f_1,\ldots,f_{r-1})$ ne s'annule pas. Montrer que $(f_1,\ldots,f_r)$ est liée.

Démonstration. □

Exercice 129 [ENS 139] On considere l'equation differentielle $(D_\lambda) : y^{''} + (\lambda - r)y = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}, r \in C^\infty(I,\mathbb{R})$, ou I un intervalle contenant $[0,1]$. On considere E_λ l'espaces des solutions y de (D_λ) telles que $y(0) = 0, y(1) = 0$.

- Quelles sont les dimensions possibles de E_λ ?
- Caracteriser le cas $\dim(E_\lambda) = 1$. (On souhaite une condition portant sur y_λ, solution du probleme de Cauchy (D_λ), $y_\lambda(0) = 0$, $y'_\lambda(0) = 1$.)
- Montrer que, a r fixe, les E_λ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg$.
- On note N_λ le nombre de zeros de y_λ sur $[0,1]$. Pourquoi est-il fini ?
- Calculer N_λ dans le cas $r = 0$, $\lambda > 0$.

- Dans le cas general, etudier le comportement de N_λ.

Exercice 130 [ENS 140] Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et a, b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On considere l'equation differentielle $(E) : x^{''} + a(t)\, x' + b(t)\, x = 0$.

- Soit x une solution non nulle de (E). Montrer que les zeros de x sont isoles.
- On suppose a de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe z de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$, et $q : I \to \mathbb{R}$ continue telles que $x \mapsto [t \mapsto x(t)\, e^{z(t)}]$ definisse une bijection de l'ensemble des solutions de (E) sur celui des solutions de $y^{''} + q(t)\, y = 0$.
- Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \leq q_2$. On considere l'equation differentielle $(E_i) : y^{''} + q_i(t)\, y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs de y_1. Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
- Soient $q : I \to \mathbb{R}$ continue, et m, M deux reels strictement positifs tels que $m \leq q \leq M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs d'une solution non nulle de $y^{''} + q(t)y = 0$. Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$.# 141

Soient A une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M l'unique application derivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(0) = I_n$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ M'(t) = A(t)M(t)$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \det(M(t)) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}\, A\right)$.

Exercice 131 [ENS 142] Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, π-periodique et telle que $\int_0^\pi p(t)dt \geq 0$ et $\int_0^\pi |p(t)|dt \leq \frac{\pi}{4}$. Montrer que l'equation $u^{''} + pu = 0$ n'admet pas de solution u non nulle sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, u(t + \pi) = \lambda\, u(t)$.

Exercice 132 [ENS 143] Soit $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A_0 + A_0^T) \subset \mathbb{R}^-$.

On admet l'existence d'une unique fonction $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(0) = A_0$ et $\forall t \geq 0,\ A'(t) = (A(t))^2 - \left(A(t)^T\right)^2$. Montrer que la fonction A a une limite en $+\infty$ et expliciter cette limite.

Exercice 133 [ENS 144] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Decrire le comportement asymptotique en $+\infty$ des solutions de l'equation differentielle $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 134 [ENS 145] On considere l'equation differentielle $(1) : X'(t) = P(t)X(t)$ ou P est une application continue et periodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Resoudre (1) si \$∀ t∈R,\ P(t)=( ) .\$$Onrevientaucasgeneral.SoitT \in \mathbb{R}^{+*}$ une periode de P. On note $X_1, \dots, X_n$ une base de l'espace des solutions de (1) et, si $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t + T) = M(t)C$.
- Avec les notations de la question precedente, montrer qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t)e^{-tA}$ soit T-periodique.

Exercice 135 [ENS 146]
- Soit $f : (x, y) \mapsto \left(\ln\left(x^2 + y^2\right), \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$. Donner le domaine de definition Ω de f. Etudier la continuite et la differentiabilite de f.
  - ▷ On identifie naturellement $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$. Montrer que, si $(x, y) \in \Omega$, $df_{(x,y)}$ est $\mathbb{C}$-lineaire.

Exercice 136 [ENS 147] Calculer $\sup_{a,b,c>1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^b + \left(1 - \frac{1}{2b}\right)^c + \left(1 - \frac{1}{3c}\right)^a$.

Exercice 137 [ENS 148] Trouver $\sup_{a,b,c\geq 1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^b \left(1 - \frac{1}{2b}\right)^c \left(1 - \frac{1}{3c}\right)^a$.

Exercice 138 [ENS 149] [Rennes sur dossier] Soient $q \in \mathbb{R}^+$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y = 1\}$, Determiner $\min_{(x,y)\in D}(x^q + y^q)$.

Exercice 139 [ENS 150] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

Determiner les extrema de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

Exercice 140 [151] Soient f une application différentiable convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq 0$.
2. On suppose que l'application ∇f est L-lipschitzienne.

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq \frac{1}{L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$.

Exercice 141 [ENS 152] Soit $p > 1$. Montrer qu'il existe $K_p \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x|^p + |y|^p = 2$, on a $(x - y)^2 \leq K_p(4 - (x + y)^2)$.

Exercice 142 [ENS 153] Soient f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ telle que df_x soit injective. Montrer qu'il existe un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel f est injective.

Exercice 143 [ENS 154] On identifie $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 et telle que $\Delta f = 0$. Montrer que $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt$.

Exercice 144 [155] On munit $\mathbb{R}^n$ de la nome euclidienne canonique et on note B unité fermée de cet espace. Soient f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(u, v) \in B^2$, $\|-f(0) + v - df_u(v)\| \leq \frac{1}{2}$. Montrer que f s'annule exactement une fois sur B.

Démonstration. □

1) Géométrie

Exercice 145 [ENS 156] • Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(2\ \cos(\theta)) = 2\ \cos(n\theta)$.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, quel est le terme de plus haut degre de T_n ? En deduire les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.
- Determiner les triangles du plan euclidien dont les cotes ont des longueurs rationnelles et les angles sont des multiples rationnels de π.

Exercice 146 [157] Soit G un groupe d'isométries affines de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout point x, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$. Montrer que G contient une translation autre que l'identité de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Faux pour $G = O_2$. □

Exercice 147 [158] Soit S le groupe (pour la composition) des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe de S vérifiant les conditions suivantes :

- si $g \in G, g(0)$ est nul ou de module supérieur ou égal à 1 ;
- l'ensemble des $b \in \mathbb{C}$ tels que $z \mapsto z + b$ appartienne à G contient deux éléments $\mathbb{R}$ linéairement indépendants.

Montrer que l'ensemble $\{a \in \mathbb{U} \mid \exists b \in \mathbb{C},\ z \mapsto az + b \in G\}$ est fini.

Démonstration. Sinon, il existe une suite (a_n) qui s'accumule. On peut supposer qu'elle s'accumule sur 1, puis on peut borner les (b_n), puis extraire une suite convergence, donc elle est constante à partir d'un certain rang. Donc on a une infinité de $z \mapsto a_n z$, ce qui est impossible. □

Exercice 148 [ENS 159] Soit L la courbe du plan complexe d'equation $|z|^2 = \cos(2\arg(z))$.

- Trouver une equation cartesienne reelle definissant L.
- En deduire une parametrisation de $L \cap (\mathbb{R}^+)^2$ sous la forme $\{(x(r), y(r)),\ r \in [0,1]\}$. - Montrrer que la longueur de la courbe L entre le point $(0,0)$ et le point $(x(r), y(r))$ s'ecrit : $A(r) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
- Montrre que A definit une bijection de $[-1,1]$ dans un intervalle de la forme $[-w, w]$ ou $w > 0$.
- On definit $B = A^{-1}$. Montrer que B verifie une equation differentielle du second ordre.

Exercice 149 [ENS 160] Soit (e_1, e_2) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $L =_1 +_2$ et on note $\mathrm{Vol}(L) = |\det(e_1, e_2)|$.

- Soit A un disque ferme de $\mathbb{R}^2$, d'aire strictement superieure a $\mathrm{Vol}(L)$. Montrer qu'il existe deux elements distincts x et y de A tels que $x - y \in L$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe dans $L \setminus \{0\}$ un element ℓ tel que $\|\ell\| \leq \frac{2+\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mathrm{Vol}(L)}$.
- Soit p un nombre premier congru a 1 modulo 4.
- Montrrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}$ tel que p divise $1 + \omega^2$.
- Montrrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$.

Exercice 150 [ENS 161] • On note D le disque unite du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Demontrer qu'il existe une suite $(C - i \in \mathbb{N}$ de parties de D telle que :

- ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble C_i soit un carre de $\mathbb{R}^2$ dont les cotes sont paralleles aux axes ;
- ▷ les C_i soient d'interieurs disjoints ;
- ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Aire}(C_i) = \pi$.
- ▷ On note $C = [-1,1]^2$. Demontrer qu'il existe une suite $(D - i \in \mathbb{N}$ de parties de C telle que :
- ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble D_i soit un disque ferme de $\mathbb{R}^2$;
- ▷ les D_i soient d'interieurs disjoints ;
- ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Aire}(D_i) = 4$.

2) Probabilités

Exercice 151 [ENS 162] On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de A de $\mathbb{N}$ telles que $\lim_{n \to +\infty} \frac{|A \cap [\![1,n]\!]|}{n}$ existe. Est-ce que $\mathcal{A}$ est une tribu ?

Exercice 152 [ENS 163] On pose, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, $d(\sigma) = \sum_{k=1}^n |\sigma(k) - k|$ et on note, pour $p \in \mathbb{N}$, $q_{n,p} = |\{\sigma \in S_n,\ d(\sigma) = p\}|$. Montrer que, si $p \geq 2n$, alors $q_{n,p}$ est pair.

Exercice 153 [ENS 164] Un derangement est une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sans point fixe. On note D_n le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ forme des derangements.

- Soit X une variable aleatoire suivant la loi uniforme sur D_n. Calculer la probabilite que X soit une permutation paire.

Indications.

- On donne la formule d'inversion de Pascal : si (a_n) et (b_n) sont deux suites telles que$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.
- On pourra calculer la difference du nombre d'elements pairs et impairs de D_n.
  - ▷ Soit Y une variable aleatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Calculer la probabilite de $(Y \in D_n)$ sachant que Y est paire.

Exercice 154 [165] Soient $m \geq 1$ et $r \geq 1$ deux entiers. On munit l'ensemble des morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de la loi uniforme. Donner une expression simple de la probabilité de l'événement «le morphisme φ est surjectif».

Démonstration. Le faire pour $m = p$, puis lemme Chinois. □

Exercice 155 [ENS 166] Deux joueurs A et B lancent une piecee truquee donnant pile avec une probabilite egale a $5/9$. Les regles de gain sont les suivantes : pile rapporte 5 euros et face 4 euros. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chacun des joueurs effectue $9n$ lancers independants ; on note A_n (resp. B_n) la variable aleatoire donnant le gain du joueur A (resp. B).*

- Trouver un equivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de \$P$\Big(A_{\text{n}} = B_{\text{n}}).\$ Montrerque \mathbf{P}\left(A_n \geq B_n\right) \geq \frac{1}{2}$. Vers quoi tend $\mathbf{P}\left(A_n < B_n\right)$?

Exercice 156 [ENS 167] On joue a pile ou face avec une piecee pipee : la probabilite de tomber sur pile est $p < 1/2$. On effectue plusieurs lancers a la suite. Le score est le nombre de fois ou l'on est tombe sur pile. On gagne le jeu si, au bout de $2n$ lancers, le score est superieur a $n + 1$. Trouver n qui maximise la probabilite de gagner le jeu au bout de $2n$ lancers.*

Exercice 157 [168] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{E}(X) = 1$, $\mathbf{E}\left(X^2\right) = 2$ et $\mathbf{E}\left(X^3\right) = 5$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{P}(X = 0)$?

- *Démonstration.* !!
On a $E(X)E(X^3) \geq E(X^2)^2$. En fait, mieux, $E(X)E(X^2) \geq ($
On a $(\sum p_i x_i^2)(\sum p_i) \geq (\sum p_i x_i)^2$, donc $2\sum p_i \geq 1$, donc $\sum p_i \geq \frac{1}{2} : p_0 \leq \frac{1}{2}$. □

Exercice 158 [ENS 169] Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier impair ≥ 3, $(X - m \geq 0$ une suite de variables aleatoires a valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que $X_0 = 0$, et pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_{m+1} = k + 1 \,|\, X_m = k) = \mathbf{P}(X_{m+1} = k - 1 \,|\, X_m = k) = \frac{1}{2}$. Montrer que $(X - m \geq 1$ converge en loi vers la loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Exercice 159 [ENS 170] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ c'est-a-dire le nombre de couples (i, j) avec $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

- Montrer que $P_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X^{I(\sigma)} = \prod_{k=1}^{n-1}(1 + X + \cdots + X^k)$.
- On pose $f(n) = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ (n+1) \text{ divise } I(\sigma)\}|$. Exprimer $f(n)$ a l'aide de P_n.
- Montrer qu'il existe une infinite de nombres premiers p tels que $f(p-1) < \frac{(p-1)!}{p}$ et de meme une infinite de nombres premiers p tels que $f(p-1) > \frac{(p-1)!}{p}$.

Exercice 160 [ENS 171] Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, P une variable aleatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des polynomes unitaires de degre n de $\mathbb{F}_p[X]$, N le nombre de racines de P dans $\mathbb{F}_p$ (sans tenir compte des multiplicites). Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.

Exercice 161 [172] Dans tout l'exercice, les variables aléatoires considérées sont supposées réelles, discrètes et à loi de support fini. Pour deux telles variables X et Y, on note $X \leq_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leq \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Soient X une variable aléatoire vérifiant les conditions de l'exercice et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(f(X))$.
2. Donner un exemple de couple (X, Y) pour lequel $X \leq_c Y$ mais $X \neq Y$.
3. Montrer que si $X \leq_c Y$ alors $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X) \leq \mathbf{V}(Y)$.
4. Montrer que $X \leq_c Y$ si et seulement si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et
$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geq x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. □

Exercice 162 [173] On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. On choisit de façon équiprobable $u_1 \in 1, N$, puis $u_2 \in 1, u_1 - 1$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $u_\ell = 1$ avec nécessairement $\ell \leq N$. On note $E_N = \{u_j, 1 \leq j \leq \ell\}$.

1. Calculer $\mathbf{P}\left(k \in E_N\right)$ pour $1 \leq k \leq N$.
2. Calculer $\mathbf{P}\left(2 \in E_N \mid 3 \notin E_N\right)$.
3. Calculer $\mathbf{E}\left(|E_N|\right)$ et $\mathbf{V}\left(|E_N|\right)$.

Démonstration.
1. $P(k \in E_{k+1}) = \frac{1}{k}$, puis $P(k \in E_n) = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\big(P(k \in E_{N-1}) + \cdots + P(k \in E_{k+1})\big)$. On trouve $P(k \in E_N) = \frac{1}{k}$.
2. On a $P(2 \in E_N \mid 3 \in E_N) = \frac{1}{2}$.
3. Semble facile. □

Exercice 163 [ENS 174] Dans tout l'enonce, on fixe un entier $p \geq 1$.

- Developpper $(x_1 + \cdots + x_N)^p$ pour toute liste $(x_1, \ldots, x_N)$ de nombres reels.
- Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aleatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$. Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leq (2p)^p(\mathbf{E}(X^2))^p$.
- Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leq p^p(\mathbf{E}(X^2))^p$.
- Soit $(a - k \geq 1$ une suite reelle telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = 1$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $Y_x = \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx)\, X_i$.

Montrer que $\omega \mapsto \int_0^{2\pi} Y_x(\omega)^{2p}\, dx$ prend au moins une valeur inferieure ou egal a $2\pi p^p$.

Exercice 164 [ENS 175] suivant la loi uniforme sur $\{1,-1\}$. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aleatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher, et $a_1,\dots,a_n$ des reels. On pose $Y=\sum_{k=1}^n a_kX_k$.

- Montrer que $\mathbf{E}(|Y|)^2\leq\mathbf{E}(Y^2)$.
- Montrer que $\mathbf{E}(Y^2)=\sum_{k=1}^n a_k^2$.
- Montrer que si $\sum_{k=1}^n a_k^2=1$ alors $\mathbf{E}(Y^2)\leq e\,\mathbf{E}(|Y|)^2$.
- Montrer que $\mathbf{E}(Y^2)\leq e\,\mathbf{E}(|Y|)^2$ en toute generalite.

Exercice 165 [ENS 176] Une variable aleatoire discrete reelle X est dite decomposable s'il existe deux variables aleatoires discretes reelles non presque surement constantes et independantes X_1 et X_2 telles que $X\sim X_1+X_2$. - Une variable aleatoire de Bernoulli est-elle decomposable ? Une variable aleatoire binomiale est-elle decomposable ?

- Montrer que le polynome T^4+2T+1 ne peut se factoriser comme produit de deux polynomes de degre 2 a coefficients dans $\mathbb{R}^+$. En deduire une variable aleatoire reelle discrete decomposable X telle que X^2 ne soit pas decomposable.
- Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aleatoire suivant la loi uniforme que $[\![0,n-1]\!]$. Donner une condition necessaire et suffisante sur n pour que X soit decomposable.

Exercice 166 [ENS 177] Soit $p\in\,]0,1/2[$. Soit $(X-k\geq 1$ une suite de variables de Bernoulli i.i.d. de parametre p. On pose \$ S_n=∑_{k=1}^nX_k\$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Determiner la plus grande valeur prise par la suite $(\mathbf{P}(S_{2n}>n))_{n\geq1}$.

Exercice 167 [ENS 178] On fixe $n\in\mathbb{N}^*$ et on pose \$ X=[\!![1,n]\!]\$. Soient A et B des variables aleatoires independantes uniformement distribuees sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X.

- Determiner la loi, l'esperance et la variance de la variable aleatoire $|A|$ (cardinal de A).
- Montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, $\mathbf{P}\left(|A|\geq\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)n\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
- Pour $i\in[\![1,n]\!]$, on note $\mathbf{1}_{\{i\}}$ la fonction indicatrice du singleton $\{i\}$. Determiner la loi de $\mathbf{1}_{\{i\}}(A)$.
- Calculer $\mathbf{P}(A\subset B)$. Commenter.

Exercice 168 [ENS 179] Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in[0,1]$. On considere un echiquier $n\times n$. On calorie chaque case en rouge (resp. en bleu) avec probabilite p (resp. $1-p$). On note $Q(p)$ la probabilite pour qu'il existe un chemin joignant le bord gauche au bord droit constite uniquement de cases rouges (il est entendu que les deplacements ne se font pas en diagonale). Que dire de la fonction Q ?

Exercice 169 [ENS 180] Soit $(X-n\geq 1$ une suite de variables aleatoires independantes de loi de Rademacher. On pose \$ S_n=X_1+⋯+X_n\$ pour $n\geq 1$.

- Calculer l'esperance du nombre R de retour en zero de la suite $(S-n\geq 1$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{R}$. Montrer que la probabilite qu'il existe $n\geq 1$ tel que $S_n\notin I$ est egale a 1.
- Montrer que l'evenement $(R=+\infty)$ est presque sdr.

Exercice 170 [ENS 181] Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ un espace probabilise et $(m-k\in\mathbb{N}$ une suite de reels positifs de somme 1. On considere un arbre aleatoire sur cet espace tel que chaque noeud ait un nombre aleatoire X de successive avec, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X=k)=m_k$. Ces variables aleatoires correspondant au nombre de succcesseurs sont mutuellement independantes. On note X_1 la variable aleatoire comptant le nombre de succcesseurs de la racine. Caracteriser le fait que la longueur de l'arbre soit presque surement finie.

Exercice 171 [ENS 182] On construit iterativement et aleatoirement un arbre aleatoire sur l'ensemble de sommets $[\![1,n]\!]$ (graphe oriente) selon le procede suivant : a l'etape k, on choisit aleatoirementun point dans $1,k$ (avec probabilite uniforme) et on rajoute une arete orientee de ce point vers $k+1$. Ces choix s'effectuent de maniere independante les uns des autres.

- On note X_n la variable aleatoire donnant le nombre d'aretes partant du point 1. Determiner l'esperance et la variance de X_n.
- On suppose $n\geq 2$. On note S_n la variable aleatoire donnant le nombre de descendants (directs ou non) du sommet 2. Determiner la loi de S_n.
- Calculer l'esperance du nombre de feuilles de l'arbre.

Exercice 172 [183] Soient E un ensemble fini, $V:E\to\mathcal{P}(E)$ une fonction de E vers les parties de E et $f\colon E\to\mathbb{R}$ une fonction. Un point $a\in E$ est un minimum local si $f(a)\leq f(b)$ pour tout $b\in V(a)$. Soit M un entier tel que $M\geq\sqrt{|E|}$. Soient $b_1,\dots,b_M$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans E. Soit k tel que $f(b_k)=\min_{1\leq i\leq M}f(b_i)$. Soit $(u_n)_{n\geq0}$ une suite de E telle que $u_0=b_k$ et, pour tout $n\geq 0$:

- si u_n est un minimum local, alors $u_{n+1}=u_n$;
- sinon $u_{n+1}\in V(u_n)$ et $f(u_{n+1})<f(u_n)$.

Montrer que u_M est un minimum local avec probabilité au moins $1/2$.

Démonstration. La donnée est celle d'un graphe. Étant donné l'algorithme, on peut retirer des arêtes, de sorte que les voisins de a vérifient $f(b)<f(a)$. Auquel cas il n'y a plus de cycles.

Alors on choisit $\sqrt{n}$ sommets du graphe, puis le minimum. On veut montrer la plus longue chaîne décroissante à partir de celui-ci est de longueur $\leq\sqrt{n}$ avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On peut attribuer à chaque sommet sa valeur par f, et on peut supposer que c'est injectif.

Puis on peut ajouter des arêtes, vers ceux qui sont $<s$. Puis on peut retirer les arêtes, sauf celle juste en dessous. On est ramené à un graphe $n\to n-1\to\ldots\to 1$. $\square$

Exercice 173 [ENS 184] Une variable aleatoire reelle X est infiniment divisible si X admet un moment d'ordre 2, et si, pour tout $n \geq 2$, il existe $(X_{i,n})_{i \in 1,n}$ i.i.d. et admettant des moment d'ordre 2 telles que $X \sim \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$. Montrer que si X est bornee et infiniment divisible, alors X est presque surement constante.

Exercice 174 [ENS 185] On se donne une suite $(X - i \geq 1$ de variables aleatoires independantes. On suppose que pour tout $i \geq 1$, il existe $a_i \in]0, 2]$ et $p_i \in [0, 1]$ tels que X_i soit a valeurs dans $\{0, a_i, -a_i\}$ et $\mathbf{P}(X_i = a_i) = \mathbf{P}(X_i = -a_i) = \frac{p_i}{2}$.

- Quelle relation doivent verifier a_i et p_i pour que $\mathbf{V}(X_i) = 1$? Dans toute la suite, on suppose cette relation verifiee et on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Calculer la variance de $n^{-1/2} S_n$.
- Montrer que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2} t S_n)) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\cos(n^{-1/2} t X_i))$.
- En deduire que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2} t S_n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2/2}$.

Exercice 175 [ENS 186] On fixe un entier $n \geq 1$. On considere la relation d'ordre partielle $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^n$ definie par $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \forall i \in 1, n,\ x_i \leq y_i$. Une fonction $f \colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ est dite croissante lorsque $f(x) \leq f(y)$ quels que soient x, y dans $\{0,1\}^n$ tels que $x \preccurlyeq y$.

- Donner un exemple de fonction croissante non constante de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- Dans la suite, on se donne une liste $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aleatoires i.i.d. suivant $\mathcal{B}(1/2)$. Soit $f \colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ croissante. On suppose $n \geq 2$.

Montrer que $\mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_n)) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_{n-1}, 0) + \mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_{n-1}, 1))\Big)$. - Soit $f \colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ croissantes.
Montrer que $\mathbf{E}((fg)(X_1, \ldots, X_n)) \geq \mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_n))\, \mathbf{E}(g(X_1, \ldots, X_n))$.

Exercice 176 [ENS 187] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit S_n de la distribution uniforme de probabilite. On note $A_i = \{\sigma \in S_n,\ \sigma(i) = i\}$ et N la variable aleatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation.

- Soit $I \subset 1, n$. Calculer $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)$.
- Exprimer N avec des indicatrices. Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.
- Soient $k \in 1, n$ et $F \subset 1, n$. Calculer $\sum\limits_{I \subset 1,n,\ |I| = k} \prod\limits_{i \in I} \mathbf{1}_F(i)$.
- Soit $k \in 1, n$. Calculer $\mathbf{E}(N(N-1) \cdots (N-k+1))$.
- Soient $X \sim \mathcal{P}(1)$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbf{E}(X(X-1) \cdots (X-k+1))$.
- Calculer $\mathbf{P}(N = 0)$.

Exercice 177 [ENS 188] On considere une suite i.i.d. $(X - n \geq 1$ de variables aleatoires suivant toutes la loi uniforme sur $\{1, 2\}$. On definit $(S - n \geq 0$ par $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.
<u>a) i)</u> Determiner l'esperance et la variance de S_n.

- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|S_n - 3n/2| \geq \varepsilon n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|S_n - 3n/2| \geq \varepsilon n^{2/3})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- On considere la variable aleatoire $T_n : \omega \mapsto \min\{k \in \mathbb{N},\ S_k(\omega) \geq n\}$. Determiner l'ensemble des valeurs prises par T_n.
- Soit $k \geq 2$. Montrer que $\mathbf{P}(T_n = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-2} = k-1)$.
- Calculer l'esperance de T_n.

Exercice 178 [189] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 3$. On pose $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S = \{\pm e_i, 1 \leq i \leq d\}$, où e_i désigne l'élément de G dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème, égale à $\overline{1}$. Soient enfin $f \colon G \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et X une variable aléatoire uniformément distribuée sur G.
Montrer que $\mathbf{E}(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))|) \leq \frac{nd}{2} \max_{s \in S} \mathbf{E}(|f(X) - f(X+s)|)$.

Démonstration. C'est simple : On peut passer d'un somme à un autre en au plus $\frac{nd}{2}$ pas. $\square$

II) ENS PSI

1) Algebre

Exercice 179 [ENS PSI 191] Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, annule par un polynome Q tel que $Q(0) = 0$ et $Q'(0) \neq 0$. Montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplementaires.

Exercice 180 [ENS PSI 192] • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et les autres valent 1 ou -1. Montrer que si n est pair alors A est inversible.

  ▷ Soit $B = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. On suppose que, pour toute partie P de B de cardinal $2n$, on peut trouver Q_1 et Q_2 contenues dans P, chacune de cardinal n, telles que $\sum_{x \in Q_1} x = \sum_{x \in Q_2} x$. Montrer que tous les x_i sont eaux.

Exercice 181 [ENS PSI 193] Soient E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\forall g \in \mathcal{L}(E), \varphi_f(g) = f \circ g - g \circ f$.

- Calculer $\varphi_f^n(g)$ pour $g \in \mathcal{L}(E)$.
- Montrer que $f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} f^k (f \circ g - g \circ f) f^{n-k}$.
- On suppose f non inversible. Montrer que f est nilpotente si et seulement si φ_f l'est.

- Montrer que, si f possede une unique valeur propre, alors φ_f est nilpotente. Etudier la reciproque.

Exercice 182 [ENS PSI 194] Soient $n \in \mathbb{N}^*, c_0, c_1, \cdots, c_{2n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $c_n = 1$ et $c_{n+1} = \cdots = c_{2n-1} = 0$. Soit $Q = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$. On definit les matrices A, B, P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+1=j \\ -c_{i-1} & \text{si } j=n \end{cases}$, $b_{i,j} = c_{i+j-1}$ et $p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j-1=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- Montrer que $Q(A) = 0$ en calculant $A^k e_1$ ou $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$.
- Soit $R(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \; ; \; \exists P \in \mathbb{R}[X], \; P(A) = M\}$. Montrer que $R(A)$ est de dimension n.
- Montrer que PB est triangulaire puis en deduire que B est inversible.
- Montrer que $AB = BA^T$.
- Montrer que A^T est semblable a A.
- Montrer que A s'ecrit comme le produit de deux matrices symetriques.

Exercice 183 [ENS PSI 195] • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que, pour tout polynome P a coefficients complexes, la matrice $P(A)$ est diagonalisable. - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Decrire l'ensemble des matrices inversibles P telles que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

  ▷ Soient A et B deux matrices codiagonalisables. On suppose que B a des valeurs propres deux a deux distinctes. Montrer qu'il existe un polynome $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(B)$.

  ▷ On suppose toujours A et B codiagonalisables mais on ne suppose plus B a valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe une matrice C et deux polynomes P et Q tels que $A = P(C)$ et $B = Q(C)$.

  ▷ La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle le carre d'une matrice reelle ?

Exercice 184 [ENS PSI 196] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = \mathrm{Com}(A)^T$.
Ind. Commencera par A inversible.

Exercice 185 [ENS PSI 197] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que \$f^ f=-\$id.

- Donner un exemple d'application f verifiant les hypotheses en dimension 2.
- Montrer que f n'a pas de valeur propre reelle. Montrer que E est de dimension paire.
- Montrer qu'il existe $(e_1, \ldots, e_p)$ telle que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_p, f(e_p))$ soit une base de E avec $d = 2p$. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 186 [ENS PSI 198] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = A$.

- Montrer que $A^k B - BA^k = kA^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- On definit l'application $\varphi_B : M \mapsto MB - BM$.
- Verifier que φ_B est un endomorphisme et caracteriser son noyau.
- Montrer que, si $A^p \neq 0$, alors p est une valeur propre de φ_B.
- La matrice A est-elle nilpotente ? Justifier.

Exercice 187 [ENS PSI 199] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| \right\}$.

Exercice 188 [ENS PSI 200] On note $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques : $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{S}$ si $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = 1$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres.

- Montrer que les elements de $\mathcal{S}$ ont tous une valeur propre commune.
- Montrer que $\mathcal{S}$ est convexe, ferme, borne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et qu'il est stable pour le produit.

c) i) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{S}$, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$.
Ind. Si $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre, considerer $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

- Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ telle que $|\lambda| = 1$. Montrer que λ est une racine ℓ-ieme de l'unite avec $\ell \leq n$.
- On suppose que $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}$ est telle que $a_{i,j} > 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.
- Montrer que 1 est une valeur propre de A et que $\dim \ker (A - I_n) = 1$.
- Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$ alors $|\lambda| < 1$. - On dit que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ verifie $(\mathcal{P})$ si : $\forall (i,j) \in 1, n^2, b_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} \leq 1$.
- Montrer que si $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ verifie $(\mathcal{P})$ alors $|\det B| \leq 1$.
- Determiner l'ensemble des matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui verifient $(\mathcal{P})$ ainsi que $|\det B| = 1$.
- Determiner l'ensemble des matrices stochastiques dont la valeur absolue du determinant vaut 1.

Exercice 189 [ENS PSI 201] Soient $(E, \langle \; \rangle)$ un plan euclidien, $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de E de norme 1 telle que $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = \ldots = \langle v_n, v_1 \rangle$. Soit $\mathbb{D}_{2n}$ l'ensemble des isometries vectorielles de E qui laissent invariantes la famille $\mathcal{V}$, c'est-a-dire :
$\mathbb{D}_{2n} = \{\sigma \in \mathcal{O}(E) \; ; \; \forall i \in 1, n \, \sigma(v_i) \in \mathcal{V}\}$.

- Trouver, pour $1 \leq i < j \leq n$, la valeur de l'angle $\langle v_i, v_j \rangle$.
- Montrer que $\mathbb{D}_{2n}$ est un sous-ensemble finie de $\mathcal{O}(E)$.

- Montrer que $\mathbb{D}_{2n}$ est stable par composition et passage a l'inverse.
- Exprimer $\mathbb{D}_6$ et $\mathbb{D}_8$.
- Si $\sigma \in \mathbb{D}_{2n}$ verifie $\sigma(v_1) = v_i$, montrer que $\sigma(v_2) = v_{i-1}$ ou $\sigma(v_2) = v_{i+1}$.
- En deduire que le cardinal de $\mathbb{D}_{2n}$ est $2n$.
- Montrer que $\mathbb{D}_{2n} = \{\mathrm{id}, r, sr, r^2, sr^2, r^3, sr^3, \dots\}$ ou s est une reflexion et r une rotation d'angle Arccos $(\langle v_1, v_2\rangle)$.
- On note $D = \bigcup_{n\geq 3} D_{2n}$. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{O}(E)$, il existe une suite $(\sigma - k \geq 0 \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $\sigma = \lim_{k\to+\infty} \sigma_k$.

Exercice 190 [ENS PSI 202] • On note φ l'application $M \mapsto M^T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ▷ Montrer que φ est un automorphisme.
- ▷ Determiner les valeurs propres de φ.
- ▷ L'application φ est-elle diagonalisable ? Justifier.
- ▷ On fixe un reel $\mu > 0$. Soit f l'application $t \mapsto (4\mu t^2, 2\mu t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que t_0 et t_1 sont deux reels tels que les tangentes au support de la courbe parametree definies par f sont orthogonales.
- ▷ Montrer que $4t_0t_1 + 1 = 0$.
- ▷ Montrer que le point d'intersection des tangentes en $f(t_0)$ et $f(t_1)$ appartient a une droite fixe.
- ▷ Soient $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- ▷ Montrer que $(QX)^T(QY) = X^TY$.
- ▷ Determiner les valeurs propres reelles de Q puis montrer que deux vecteurs propres associés a des valeurs propres reelles distinctes sont orthogonaux.
- ▷ Soit $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer, qu'a similitude pres, M peut prendre exactement trois formes distinctes. Pour chacune d'entre elles donner la transformation geometrique du plan correspondante.

Exercice 191 [ENS PSI 203] • Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ de rang k. Montrer qu'il existe des vecteurs $U_1, \dots, U_k$ lineairement independants dans $\mathbb{R}^n$ tels que $A = \sum_{j=1}^k U_jU_j^T$.Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Leur produit d'Hadamard $A \circ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de terme general $a_{ij}b_{ij}$.

- ▷ Montrver que, si A et B sont des matrices symetriques de rang 1, alors $A \circ B$ est symetrique de rang au plus 1.
- ▷ Montrver que, si A et B sont symetriques positives, alors $A \circ B$ est symetrique.
- ▷ Si A et B sont symetriques positives, montrer que $A \circ B$ est symetrique positive.

Exercice 192 [ENS PSI 204] On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(c_0, \dots, c_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $c_n = 1$ et $c_{n+1} = \ldots = c_{2n-1} = 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^n c_kX^k$. On considere enfin les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivantes : $A = (a_{i,j})$, ou $a_{i,j} = 1$ si $j = i-1$, $a_{i,j} = -c_{i-1}$ si $j = n$ et $a_{i,j} = 0$ sinon ; $B = (c_{i+j-1})$ et $C = (\delta_{i+j,n+1})$.

- Montrver que $Q(A) = 0$. Ind. Calculer A^ke_1 pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
- On pose $\mathbb{R}[A] = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;\, \exists P \in \mathbb{R}[X],\ M = P(A)\}$. Montrer : $\dim \mathbb{R}[A] = n$.
- Montrver que CB est triangulaire. En deduire que B est inversible.
- Montrver que $AB = BA^T$.
- Montrver que A est semblable a sa transposee.
- Montrver que A s'ecrit comme le produit de deux matrices symetriques.

Exercice 193 [ENS PSI 205] <u>a) i)</u> Soit m un entier ≥ 2. Montrer que $\int_1^{m-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(m-x)}} \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{k(m-k)}}$.

- Calculer $\int_1^{m-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(m-x)}}$ l'aide du changement de variables $x = \frac{m}{1+t^2}$.
- Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme general $\frac{1}{i+j-1}$.
- Montrver que $A_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Soit λ_n la plus petite des valeurs propres de A_n. Montrer qu'il existe $a, b > 0$ tels que $\forall n \geq 1,\ 0 \leq \lambda_n \leq \frac{1}{n}\big(a + b\ln(n)\big)$.
- Soient μ_n la plus grande valeur propre de A_n et $X = (1/\sqrt{1}, 1/\sqrt{2}, \dots, 1/\sqrt{n})^T \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\langle A_nX, X\rangle \geq 2\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\arctan(\sqrt{i}$ ou $\langle\ \rangle$ designe le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
- Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t = -i\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$. En deduire que, pour tout $Q = \sum_{k=0}^d a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 Q^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{-1}^1 Q^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \pi\sum_{k=0}^d a_k^2$.
- En deduire que $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \pi$.

Exercice 194 [ENS PSI 206] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On considere des reels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que : $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $M_i = (\lambda_i, \lambda_i^{-1})$.On considere $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\|_2 = 1$ et on note M le barycentre des M_i pondere par les coefficients y_i^2.

- Montrver que $M = (a, b)$ ou $a = \langle Dy, y\rangle$ et $b = \langle D^{-1}y, y\rangle$ ou $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
- Montrver que $a^{-1} \leq b \leq -\dfrac{a}{\lambda_1\lambda_n} + \lambda_1^{-1} + \lambda_n^{-1}$.
- En deduire que $1 \leq ab \leq \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2$.
- On considere $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que $\|x\|_2^4 \leq \langle Ay, y\rangle\langle A^{-1}y, y\rangle \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|_2^4$.

- Soient $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c$. Montrver que f admet un minimum atteint en un unique point, et determiner sa valeur.

2) Analyse

Exercice 195 [ENS PSI 207] On pose $A_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\sin(t)dt$, $B_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\cos(t)dt$ et $X_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Montrver que A_n et B_n existent et que $|A_n|^2 + |B_n|^2 \leq (2n)!$.
- Trouver A_0 et B_0.
- Montrver qu'il existe une matrice de rotation $R(\theta_0)$ telle que $(n+1)X_n = \sqrt{2}R(\theta_0)X_{n+1}$.
- Exprimer A_n et B_n en fonction de n.
- Trouver une condition pour que $A_n = B_n$.
- Montrver qu'il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ distinctes telle que

$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n g_1(t)dt = \int_0^{+\infty} t^n g_2(t)dt$

Exercice 196 [ENS PSI 208] Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$ et $F = \mathcal{D}^1([0,1], \mathbb{C})$. On definit T comme l'operateur qui, a tout $f \in E$ associe : On note E_λ le sous-espace propre de T pour une valeur propre λ.

a) i) : Montrver que T est un endomorphisme.

- Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $T^n(f)$ a l'aide d'une somme.
- Montrver que $(T^n(f))_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction ℓ.

b) i) : Montrver que E_1 est l'ensemble des fonctions constantes.

- Montrver que $E_\lambda = \{0\}$ si $|\lambda| \geq 1$ et $\lambda \neq 1$.
- Soit λ tel que $|\lambda| < 1$.
- Montrver que $f_\lambda : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \cos(2^k \pi x)$ est definie et continue sur $[0,1]$.
- Montrver que $f_\lambda \in E_\lambda$.
- On note $D_\lambda = E_\lambda \cap F$.
- Montrver que, si $|\lambda| < \frac{1}{2}$, $D_\lambda \neq \{0\}$. - Comparer $T(f')$ et $(Tf)'$ pour $f \in F$.

iii) : Montrrer que, si $|\lambda| \geq \frac{1}{2}$ et $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $D_\lambda = \{0\}$.

Exercice 197 [ENS PSI 209] Soit $(u - n \geq 0$ la suite de fonctions definie par :
$\forall x \in \mathbb{R}\ u_0(x) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

- Etudier la convergence de $\sum u_n$.
- Sur quel domaine a-t-on $(\sum u_n)' = \sum u_n'$?
- La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est-elle derivable en 0 ?

Exercice 198 [ENS PSI 210] On fixe $p > 1$. On note q l'unique reel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et non identiquement nulle tel que $\int_0^{+\infty} f(t)^p e^t\, dt$ converge.

- Soient $t \in]0,1[$ et $(u,v) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Montr re que $u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v$.

Ind. Utiliser un argument de convexite ou une etude de fonction.
b) i) : Soit $A > 0$, et soient g et h deux fonctions continues de $[0,A]$ dans $\mathbb{R}$.
Montr re que la suite (u_n) est bien definie et qu'il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que
$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ |u_n| \leq K \left(\frac{p}{q}\right)^n (I(nq))^{1/q}$.

- En deduire que $\sum |u_n|^{-1/n}$ diverge.
- On suppose que $p = 1$. Montr re que $\sum |u_n|^{-1/n}$ diverge.

Exercice 199 [ENS PSI 211] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $g_\alpha : t \in]0, +\infty[\mapsto e^{-t}t^\alpha$.

- Donner les valeurs de α tels que $\int_0^{+\infty} g_\alpha(t)dt$ converge.
- Calculer $I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt$, avec $p \in]0, +\infty[$.
- Justifier l'existence de $\frac{d^k I}{dp^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- En deduire $\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Retrouver ce resultat en integrant par parties $\int_\varepsilon^x g_n(t)dt$ pour $0 < \varepsilon < x$.# 212

Soit $a > 0$. On pose $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - a^2/t^2}\, dt$ et $J(a) = a\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2-a^2/t^2}}{t^2} dt$.

- Montrrer que ces integrales convergent.

- Montrver que $I(a) = J(a)$,
- En deduire que $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{t^2}\right) e^{-(t-a/t)^2} dt$
- Montrver que $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$. La valeur de l'integrale de Gauss etait donnee.

Exercice 200 [ENS PSI 213] Soient $a > 0$ et $q \in \mathcal{C}^2([a, +\infty[, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $\int_a^{+\infty} \sqrt{q(t)}\, dt = +\infty$. Soit (E) l'equation differentielle $y^{''} + qy = 0$.

- Soient y_1 et y_2 deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui n'ont pas de zeros en commun. On pose $\Phi = y_1 + iy_2$ et $\Phi(a) = r_0 e^{i\theta_0}$. Montrver que $\forall x \geq a$, $\Phi(x) = e^{\Psi(x)}$ ou $\Psi(x) = \int_a^x \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\, dt + \ln(r_0) + i\theta_0$.
- Montrver que l'on peut ecrire $y_1(x) = r(x)\cos(\theta(x))$ et $y_2(x) = r(x)\sin(\theta(x))$ ou $r(x) = \sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)}$ et $\theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1^{'}}{y_1^2 + y_2^2}$.
- On pose $x \mapsto f(x) = \int_a^x \sqrt{q(t)}\, dt$. Montrver que f realise une bijection de $[a, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit y une solution de (E), non identiquement nulle. On pose $Y = y \circ f^{-1}$. Montrver que $Y^{''} + vY' + Y = 0$ ou $v : t \mapsto \frac{q'(f^{-1}(t))}{2(q(f^{-1}(t)))^{3/2}}$.
- Montrver que Y et Y' n'ont pas de zero en commun et que l'on peut ecrire $Y = r\cos(\theta)$ et $Y' = r\sin(\theta)$ ou r, θ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Montrver que $(r^2)' = -2vr^2\sin^2(\theta)$. En deduire que y et y' sont bornees.

Exercice 201 [ENS PSI 214] On considere une solution u de l'equation de transport :
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$ ou $u(x,0) = u_0(x)$.

- Montrver alors que si u est solution de l'equation homogene, alors u est constante le long de la droite $x = x_0 + ct$. En deduire qu'il existe une unique solution de l'equation homogene, et que celle-ci est : $u(x,t) = u_0(x - ct)$.
- On suppose f non nulle. Montrver que pour une solution u, on a :

$u(x,t) = u_0(x_0) + \int_0^t f(x_0 + c\theta, \theta)\, d\theta$.

- En deduire que : $u(x,t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t-\theta), \theta)\, d\theta$. On considere maintenant une solution u de l'equation des ondes :

$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t) = 0$ ou $u(x,0) = g(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$.

<u>b) i)</u> : On suppose u de classe $\mathcal{C}^2$. Montrver que :$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - c^2\{\partial^{2u}\}\{\partial^{2x}\}$.$

- En deduire qu'une solution u de l'equation s'ecrit : $u(x,t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct)$.
- On pose $v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$. Montrer que v est solution d'une equation de transport dont on precisera le parametre c ainsi que les conditions initiales.
- Experimer u en fonction de v et deduire :

$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x - ct) + g(x + ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau)\, \mathrm{d}\tau$.

<u>c) i)</u> Trouver toutes les solutions $\mathcal{C}^2$ de l'equation d'onde a variables separees, de la forme : $u(x,t) = \varphi(t)\psi(x)$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $g : x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k \sin(k\pi x)$ et $h = 0$. Determiner $u(x,t)$.

Exercice 202 [ENS PSI 215] On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. On dit que f est differentiable sur l'ouvert Ω si ∇f existe et est continu.

- Soient C ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^d$, $f : C \to \mathbb{R}$ differentiable. On suppose que ∇f est L-lipschitzien. Soient $w, v \in C$ et $g : t \mapsto f(v + t(w - v))$.
- Experimer $g'(t)$.
- Montrer que $f(w) - f(v) = \int_0^1 \langle \nabla f(v + t(w - v)), w - v\rangle\, \mathrm{d}t$.
- Montrer que $f(w) \leq f(v) + \langle \nabla f(v), w - v\rangle + \frac{L}{2}\|w - v\|$.
- Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si

$\forall w, v \in \mathbb{R}^d$, $f(w) \geq f(v) + \langle \nabla f(v), w - v\rangle$. Ind. Commencer par $d = 1$.

- Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differentiable. On pose $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2L}\|\nabla f(v_n)\|^2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(v_{n+1}) \leq f(v_n) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(v_n)\|^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- On suppose de plus f convexe.
- Montrer que $\forall w \in \mathbb{R}^d$, $f(v_{n+1}) \leq f(w) + \langle \nabla f(v_n), v_n - w\rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(v_n)\|^2$.
- Montrer que $f(v_n) - f(w) \leq \frac{L}{2}(\|v_n - w\|^2 - \|v_{n+1} - w\|^2)$.
- Montrer que $f(v_n) - f(w) \leq \frac{L}{2n}\|w\|^2$.
- Soit v_* un point critique de f. Montrer que v_* est un minimum local de f et que la suite (v_n) converge vers v_*.

3) Probabilites

Exercice 203 [ENS PSI 216] Soit $n \geq 2$. On note $n = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}$ sa decomposition en facteurs premiers. On munit $\Omega = \{1, \dots, n\}$ de la loi uniforme. Pour tout diviseur d de n, on note A_d l'ensemble des multiples de d contenus dans $Ω :A_d= \kd\,,\ k≤n_{\frac{}{d}}\.$

a) i) Montrer que si d et d' sont deux entiers premiers entre eux alors $A_d \cap A_{d'} = A_{dd'}$, et en deduire que A_d et $A_{d'}$ sont independants. - On note $B = \{k \in \Omega,\ k \wedge n = 1\}$. Exprimer B en fonction des A_{p_i} et en deduire une expression de $\mathbf{P}(B)$ puis de $|B|$. Cette valeur sera notee $\varphi(n)$.

- Soient n et m deux entiers premiers entre eux. Montrer que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
- On note $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_n$ ou $\mathbb{U}_n$ designe l'ensemble des racines n-iemes de l'unite. Pour z dans $\mathcal{U}$, on note $n_z = \inf\{n \in \mathbb{N}\ z \in \mathbb{U}_n\}$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, montrer qu'il existe une suite $(z - k \in \mathbb{N}$ a valeurs dans $\mathcal{U}$ telle que $\lim_{k \to +\infty} z_k = z$.
- Pour tout entier naturel n on note $P_m = \{z \in \mathcal{U},\ n_z = m\}$. Montrer que P_m est fini et de cardinal $\varphi(m)$, et que si n et m sont distincts $P_m \cap P_n = \emptyset$.
- Montrer que $\mathcal{U} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} P_m$.

Exercice 204 [ENS PSI 217] Soit X une variable aleatoire definie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Soient $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ deux probabilites sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P_1}(\{n\}) > 0$, $\mathbf{P_2}(\{n\}) > 0$, $\mathbf{P_1}(X = n) > 0$ et $\mathbf{P_2}(X = n) > 0$. Soit $A = \{n \in \mathbb{N}, \mathbf{P_1}(\{n\}) \leq \mathbf{P_2}(\{n\})\}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n(X) = \mathbf{P_2}(X = n) \ln\left(\frac{\mathbf{P_2}(X=n)}{\mathbf{P_1}(X=n)}\right)$.

Enfin, on pose $\ell(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(X)$ si cette serie converge, $\ell(X) = +\infty$ sinon.

- Soit $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ avec $C \neq \mathbb{N}$ et $C \neq \emptyset$. Montrer que $0 < \mathbf{P_1}(C) < 1$ pour $i = 1, 2$.
- On suppose que X suit la loi de Poisson de parametre λ_1 pour $\mathbf{P_1}$ et de parametre λ_2 pour $\mathbf{P_2}$.
- Calculer $u_n(X)$ en fonction de n, λ_1, λ_2.
- Montrer que $\sum u_n(X)$ converge et exprimer sa somme $\ell(X)$ en fonction de λ_1, λ_2.
- Montrer que $\ell(X) \geq 0$.
- Montrer que $\{n \in \mathbb{N}, n \geq \max(\lambda_1, \lambda_2)\} \subset A \subset \{n \in \mathbb{N}, n \leq \min(\lambda_1, \lambda_2)\}$.
- On revient au cas general. Montrer que $\sum u_n(X)$ converge et que $\ell(X) \geq 0$.
- Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbf{P_2}(X = n) - \mathbf{P_1}(X = n)| = 2(\mathbf{P_2}(X \in A) - \mathbf{P_1}(X \in A))$.

Exercice 205 [ENS PSI 218] Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aleatoires a valeurs reelles, identiquement distribuees, centres, de variance finie σ^2 et independantes. On suppose de plus $\mathbf{P}(|X_1| > 1) = 0$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

- Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aleatoires independantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Pour $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $X_i = aY_i + b$. A quelle condition sur a et b les X_i verifient-elles les conditions precedentes ?
- Montrer $\forall u \in]-\infty, 2],\ e^u \leq 1 + u + \frac{u^2}{2}(1 + \max(0, u))$.
- Dans le cas general, montrer $\forall t \in [0, 2],\ \mathbf{E}(e^{tX_1}) \leq 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2}(1 + t) \leq e^{\sigma^2 t^2 (1+t)/2}$. - En deduire que $\forall t \in [0, 2],\ \mathbf{E}(e^{tS_n}) \leq e^{n\sigma^2 t^2 (1+t)/2}$,
- Soit α tel que $0 < \alpha < 6\sigma^2$. Montrer $\mathbf{P}(S_n/n \geq \alpha) \leq e^{-n\alpha^2/6\sigma^2}$.

III) ENS PC

1) Algebre

Exercice 206 [ENS PC 219] ★ Soit A une partie de cardinal n de $\mathbb{R}$. On pose $B = A + A = \{a + a',\ a, a' \in A\}$. Montrer que $2n - 1 \leq \text{card}(B) \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$. Generaliser a $B = kA = A + A + \dots + A$ (k fois).

Exercice 207 [ENS PC 220] Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers distincts. Trouver tous les polynomes $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P(a) = b$ et $P(b) = a$.

Exercice 208 [ENS PC 221] ★ Soient $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il n'existe aucun voisinage ouvert de 0 sur lequel on ait simultanement i) $\forall x < 0,\ P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$
ii) $\forall x > 0,\ P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$.

Exercice 209 [ENS PC 222] [PL] Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le determinant de l'application $\Phi\colon M \in E \mapsto M^T \in E$.

Exercice 210 [ENS PC 223] Considerons des reels $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$. Montrer qu'il existe des reels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(x_k)$.

Exercice 211 [ENS PC 224] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $A + iB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- Si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 212 [ENS PC 225] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

Exercice 213 [ENS PC 226] Soient $\varepsilon \in \left]0\,;\frac{1}{4}\right[$ et M la matrice $M = \begin{pmatrix} 1-2\varepsilon & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 1-2\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$

- Quel est le spectre de M ?
- Determiner la limite de la suite $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 214 [ENS PC 227] Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui preserve le produit scalaire canonique :
$\forall(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Montrer que f est une isometrie lineaire.# 228 Soit $A \in S_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = 3, \mathrm{tr}(A^2) = 5$, $\mathrm{tr}(A^3) = 9$. Determiner la borne inferieure de $\mathrm{tr}(M^2)$ lorsque M decrit $\{M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})\ ;\ \mathrm{tr}(AM) = 1 \text{ et } \mathrm{tr}(A^2M) = 1\}$,

Exercice 215 [ENS PC 229] Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $s \in \mathbb{R}^{+*}$,
$\mathrm{tr}\left((sI_2 + A)^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left((sI_2 + B)^{-1}\right)$. Montrer que A et B sont semblables. Est-ce toujours vrai en dimension n ?

2) Analyse

Exercice 216 [ENS PC 230] On note $\|\ \ \|_1$ la norme sur $\mathbb{R}^n$ definie par :
$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$.

- Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Montrer que $\|x+y\|_1 + \|x-y\|_1 = 2(\|x\|_1 + \|y\|_1)$ si et seulement si $\forall k \in 1, n,\ x_k y_k = 0$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui preserve la norme $\|\ \ \|_1$: $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\|_1 = \|x\|_1$. Montrer que la matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ de f sur la base canonique est une matrice de permutation signee, c'est-a-dire qu'il existe une permutation σ de $1, n$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ verifiant $\forall (i,j) \in 1, n^2,\ a_{i,j} = \varepsilon_j \delta_{i,\sigma(j)}$.

Exercice 217 [ENS PC 231] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ avec $d \geq 2$ et $p \in [1, +\infty[$. On definit la norme $\|\ \ \|_p$ sur $\mathbb{R}^d$ par $\forall X \in \mathbb{R}^d$, $\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p\right)^{1/p}$. Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose
$\rho(X,Y,t) = \frac{1}{2}(\|X+tY\|_p + \|X-tY\|_p) - 1$ et $\overline{\rho}(t) = \sup_{\|X\|_p = \|Y\|_p = 1} \rho(X,Y,t)$.

- On suppose que $p \in [1,2]$ et qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ \overline{\rho}(t) \leq Ct^2$. Montrer que $p = 2$.
- On suppose que $p = 2$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\overline{\rho}(t) \leq Ct^2$.

Exercice 218 [ENS PC 232] Soit E l'espace des fonctions $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \|f + f'\|_\infty$.

- Montrer que $\|\ \ \|$ est une norme sur E.
- Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, on ait $\|f\|_\infty \leq a\,\|f\|$.
- Les normes $\|\ \ \|$ et $\|\ \ \|_\infty$ sont-elles equivalentes sur E ?

Exercice 219 [ENS PC 233] Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel norme de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n f^k$. Etudier le comportement de s_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 220 [ENS PC 234] Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $D : E \to E$ defini par
$\forall u \in E,\ D(u) = u'$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = u_{n+1} - u_n$.

- L'endomorphisme D est-il injectif ? surjectif ? Quels sont ses valeurs propres et ses vecteurs propres ? - On pose $F = \{u \in E\ ,\ \sum u_n^2$ con
Pour $u, v \in F$, on pose $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ et $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Montrter que F est stable par D puis determiner l'ensemble

\$H= \ $\dfrac{\langle u, D(u)\rangle}{\|u\|^2}$\;;\;u ∈ F\ \0\\.\$

Exercice 221 [ENS PC 235] On considere la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ definie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ puis $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrere que tout entier $N \in \mathbb{N}^*$ s'ecrit de maniere unique $N = F_{p_1} + F_{p_2} + \cdots + F_{p_m}$ avec des entiers p_i tels que $p_{i+1} - p_i \geq 2$ pour tout $i \in 1\,;\,m-1$ et $p_1 \geq 2$. Prouver l'unicite de cette ecriture.

Exercice 222 [ENS PC 236] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\prod_{k=n}^{2n} k^k\right)^{1/n}$

- Determiner un equivalent de $\ln(u_n)$ lorsque n tend vers l'infini.
- Determiner un equivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 223 [ENS PC 237] Quelle est la nature de la serie $\sum \sin(2\pi\, n!\, e)$?

Exercice 224 [ENS PC 238] Quelle est la nature de la serie $\sum \tan(2\pi\, n!\, e)$?

Exercice 225 [ENS PC 239] Nature, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, de $\sum |\sin(2\pi e n!)|^\alpha$.

Exercice 226 [ENS PC 240] Quelle est la nature de la serie de terme general $\dfrac{\sin^2(n)}{n}$?

Exercice 227 [ENS PC 241] Soit $\sum a_n$ une serie convergente de reels positifs. Montrere que la serie $\sum \dfrac{a_n^x}{n}$ converge pour tout $x > 0$.

Exercice 228 [ENS PC 242] Soit $(a - n \in \mathbb{N}$ une suite reelle telle que $\sum \exp(a_n)$ converge.
Determiner $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(ka_n)$.

Exercice 229 [ENS PC 243] Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction derivable et ℓ un reel.
On suppose que $f(x) + f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Etudier la limite de f et de f' en $+\infty$.

Exercice 230 [ENS PC 244] Soient $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que : $F(0) = 1$ et $\forall x \in [0,1]$, $|F'(x)| = F(x)g(x)$. Determiner les valeurs possibles de $F(1)$.

Exercice 231 [ENS PC 245] Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que les fonctions $af' + bf$ et $cf' + df$ soient bornees. A quelle condition sur (a,b,c,d) la fonction f est-elle bornee ?[MISSING$_{\text{PAGEFAIL}}$:1]# 256 [PL] Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$. On definit $\Phi\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \ln\left(\int_0^1 e^{xt} g(t)\, \mathrm{d}t\right)$.

- Montrer que Φ est convexe.
- On suppose maintenant que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Trouver un equivalent et un developpement asymptotique de Φ en $+\infty$.

Exercice 232 [ENS PC 257] Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f^{(k)}$ est bornee sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $F : \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\, \mathrm{d}t$. Determiner un developpement asymptotique de $F(\lambda)$ lorsque $\lambda \to +\infty$.

Exercice 233 [ENS PC 258] Soit f une fonction developpable en serie entiere au voisinage de 0 avec un rayon > 1. Soient $\varphi \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \varphi(y) f(x-y)\, \mathrm{d}y$. Montrer que g est developpable en serie entiere au voisinage de 0.

Exercice 234 [ENS PC 259] Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On cherche les applications $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^2 verifiant $(*)$: $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$ et $f(0,x) = P(x)$.

- Montrer qu'il existe une solution de $(*)$ polynomiale en x.
- On suppose P scinde a racines simples sur $\mathbb{R}$. Soit f une solution de $(*)$ polynomiale en x. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, \varepsilon[$, $x \mapsto f(t,x)$ est aussi scinde a racines simples.

Exercice 235 [ENS PC 260] Soient $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

- Donner un exemple de telles fonctions u et v.
- On suppose que u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\Delta u = \Delta v = 0$.
- Montrer que, pour tout $r > 0$, $u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, \mathrm{d}\theta$.
- Soit V un ouvert contenant $(0,0)$. Soit u de classe $\mathcal{C}^2$ sur V telle que $\Delta u = 0$ sur V. On admet que sous ces conditions, l'egalite de - est encore valable pour $r > 0$ suffisamment petit.

On note D le disque unite ouvert et C le cercle unite. Soit g une fonction continue sur D et f une fonction continue sur C. Montrer qu'il existe au plus une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur le disque unite ferme, de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et telle que $\Delta u = g$ sur D et $u = f$ sur C.

3) Geometrie

Exercice 236 [ENS PC 261] Montrer qu'un polygone convexe a n sommets inscrit dans le cercle unite est d'aire maximale si et seulement si le polygone est regulier.

Exercice 237 [ENS PC 262] • Sur le cercle trigonometrique $\mathcal{C}$, on place A de coordonnees $(-1,0)$ et $P \neq A$ de coordonnees (x,y). Soit Q le point d'intersection de la droite (AP) avec l'axe des ordonnees. On note t l'ordonnee de Q. Exprimer t en fonction de x et y. - Exprimer x et y en fonction de t. Que reconnait-on ? Expliquer cela geometriquement. Peu-on parametrer les points de $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ a l'aide de fractions rationnelles ?

▷ Peut-on parametrer un arc Γ (non reduit a un point) du cercle $\mathcal{C}$ a l'aide de polynomes a coefficients reels c'est-a-dire existe-t-il un intervalle I et deux polynomes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que le point de coordonnees (x,y) appartienne a Γ si et seulement s'il existe $t \in I$ tel que $x = P(t)$ et $y = Q(t)$? Et a l'aide de polynomes a coefficients complexes ?

4) Probabilites

Exercice 238 [ENS PC 263] On retourne une par une les cartes d'un jeu de 52 cartes. Trouver l'esperance du nombre de cartes retournees avant d'obtenir le premier as (on demande un raisonnement intuitif sans calcul de la loi).

Exercice 239 [ENS PC 264] On considere deux capteurs independants, qui detectent chacun en moyenne 5000 evenements par an. Quelle est la probabilite que les deux detecteurs detectent un evenement pendant la meme seconde ?

Exercice 240 [ENS PC 265] Soient σ une variable aleatoire suivant la loi uniforme sur le groupe symetrique $\mathcal{S}_n$ et $A \subset 1, n$. On pose $k = |A|$. Calculer $\mathbf{P}(A = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\})$.

Exercice 241 [ENS PC 266] Soient X, Y deux variables aleatoires a valeurs dans $\{1,2,3\}$ telles que Y suive la loi uniforme sur $\{1,2,3\}$ et $\mathbf{P}(X=1) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(X=2) = \mathbf{P}(X=3) = \frac{1}{4}$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{E}((X-Y)^2)$?

Exercice 242 [ENS PC 267] Existe-t-il des variables aleatoires X, Y telles que $X \sim \mathcal{B}(p)$, $Y \sim \mathcal{P}(p)$ et telles que l'on ait $\mathbf{P}(X = Y) = 1 - p + pe^{-p}$?

Exercice 243 [ENS PC 268] On considere X de loi $\mathcal{B}(p)$ et Y de loi $\mathcal{P}(p)$ avec $p \in [0,1]$. Majorer $\mathbf{P}(X = Y)$ et trouver des variables X et Y pour lesquelles cette majoration est atteinte.

Exercice 244 [ENS PC 269] Soient X, Y deux variables aleatoires entieres independantes qui suivent la meme loi.

- On suppose que X suit une loi geometrique commencant a zero, c'est-a-dire qu'il existe $p \in]\,0\,;1\,[$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = (1-p)^k p$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in 0\,;\,n$, $\mathbf{P}(X = k \,|\, X+Y=n) = \frac{1}{n+1}$.

- Prouver la reciproque.

Exercice 245 [ENS PC 270] On considere $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$, ou X et Y independantes avec X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y de loi $\mathcal{G}(p)$.

- Determiner la probabilite que M soit inversible.
- Determiner la probabilite que M soit diagonalisable. Dans ce cas, preciser spectre et espaces propres.
- Determiner la probabilite que $M^8 = I_2$.
- Determiner la probabilite qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ admettant un minimum local strict en $(0,0)$ et dont la matrice Hessienne en $(0,0)$ est M.# 271

★ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aleatoires a valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 1) \neq 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\mathbf{P}(4 \text{ divise } S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.

Exercice 246 [ENS PC 272] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On considere dans le plan un graphe non oriente aleatoire de n sommets. On note $X_{i,j} = 1$ si les points d'indices i et j sont relies, et 0 sinon. On suppose les $X_{i,j}$ independantes et de meme loi $\mathcal{B}(p)$. On note T_n le nombre de triangles formes par ces n points. On pose $a_n = \binom{n}{3}p^3$.

Calculer $\mathbf{E}(T_n)$ et montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$.

Exercice 247 [ENS PC 273] On considere une matrice aleatoire $M = (m_{i,j})$ de taille $n \times n$ qui est symetrique, ou chaque variable aleatoire $m_{i,j}$ suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et ou les variables aleatoires $(m_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ sont independantes.

- Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M))$, $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M^2))$ et $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M^3))$.
- Montrer que $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(M^4)) = \mathcal{O}(n^3)$.
- On note λ_1 la plus grande valeur propre de M.

Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbf{P}(\lambda_1 \geq n\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 248 [ENS PC 274] On note $\langle\ \rangle$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ et $\|\ \|$ la norme euclidienne associee.

- Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit λ_1 la plus grande valeur propre de A. Si $\langle Ax, x\rangle \geq a\,\|x\|^2$, montrer que $\lambda_1 \geq a$.
- Soit $M = (m_{i,j})$ une variable aleatoire a valeurs dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que les $m_{i,j}$ suivent une loi de Bernoulli de parametre $1/2$ et telle que les $(m_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ soient independantes. Soit λ_1 la plus grande valeur propre de M.

Pour tout reel $\varepsilon > 0$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\Big(\lambda_1 \geq \frac{n}{2}(1-\varepsilon)\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

IV) École Polytechnique - MP - MPI

Exercice 249 [X MP 275] On note $p(n)$ le nombre de partitions de n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Monter que $p(n) \leq 2^{n-1}$.

Exercice 250 [X MP 276] Soient $e_r > \cdots > e_2 > e_1 \geq 0$ des entiers, $n = \sum_{k=1}^r 2^{e_k}$ et $X = \{s \in \mathbb{N};\ 2^s \,|\, n!\}$.

- Montrer que $\max X = n - r$.
- Montrer que le nombre d'entiers k tels que $\binom{n}{k}$ est impair est 2^r.

Exercice 251 [X MP 277] ★

- Montrer que l'equation $a^2 - 2b^2 = 1$ admet une infinite de solutions $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

Determiner l'ensemble des solutions.

- Que dire de l'ensemble des solutions de $a^2 - 2b^2 = -1$?# 278

Si G est un groupe, les elements d'ordre fini forment-il un sous-groupe ?

Exercice 252 [X MP 279] • Trouver deux groupes G_1 et G_2 non isomorphes de cardinal $2023 = 7.17^2$.

  ▷ Soit p premier. Montrer qu'un groupe de cardinal p^2 est isomorphe a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou â $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
  ▷ Soient G, H deux groupes finis et $\psi : G \to H$ un morphisme surjectif.

Montrer que $|G| = |H| \times |\operatorname{Ker}\psi|$.

- On suppose que G est un groupe de cardinal 2023, que $H = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et que $\varphi : G \to H$ est un morphisme surjectif. Montrer que G est isomorphe a $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \operatorname{Ker}\varphi$.
- Montrer que tout groupe de cardinal 2023 est isomorphe a G_1 ou G_2.

Exercice 253 [X MP 280] Soit G un groupe fini de neutre 1. Soit φ un automorphisme de G sans point fixe c'est-a-dire tel que : $\forall x \in G$, $\varphi(x) = x \Rightarrow x = 1$. On note n l'ordre de φ ; c'est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^n = \mathrm{id}$.

- Montrer que $\forall x \in G$, $x\,\varphi(x)\,\varphi^2(x)\,\cdots\,\varphi^{n-1}(x) = 1$.
- Si $n = 2$, que peut-on dire du groupe G ? Donner un exemple.
- Si $n = 3$, montrer que, pour tout $x \in G$, x et $\varphi(x)$ commutent.

Exercice 254 [X MP 281] Soient G un groupe et T l'ensemble des elements de G d'ordre fini.

- En general, T est-il un sous-groupe de G ?
- Soit S une partie finie de G stable par conjugaison munie d'une relation d'ordre totale $\leq$. Montrer que, pour tous $s_1,\ldots, s_r \in S$, il existe $s_1',\ldots, s_r' \in S$ tels que $s_1' \leq s_2' \cdots \leq s_r'$ et $s_1 s_2 \cdots s_r = s_1' s_2' \cdots s_r'$.
- Avec la question precedente, montrer que, si T est fini, alors T est un sous-groupe de G.

Exercice 255 [X MP 282] • Soit $s : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, t \mapsto t^{-1}$. Determiner le groupe engendre par s.

▷ On definit les applications $s_1 : (t,u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto (t^{-1}, tu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et

Montrer que le sous-groupe qu'elles engendrent est isomorphe a $\mathcal{S}_3$.

- Retrouver le resultat de la question precedente en considerant le quotient A de $(\mathbb{R}^*)^3$ par la relation de colinearite, la bijection $f : A \to (\mathbb{R}^*)^2$ qui associe a la classe de (x_1, x_2, x_3) le couple $(x_1/x_2, x_2/x_3)$, et enfin les permutations de A induites par $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1, x_3)$ et $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3, x_2)$.
- Soit $n \geq 3$. Determiner le groupe engendre par les bijections $(s{-}1 \leq i \leq n$ de $(\mathbb{R}^*)^n$ definies par $s_i(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{i-2}, t_{i-1} \times t_i, t_i^{-1}, t_i \times t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_n)$ si $1 < i < n$, $s_1(t_1, \ldots, t_n) = (t_1^{-1}, t_1 \times t_2, t_3, \ldots, t_n)$ et $s_n(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1} \times t_n, t_n^{-1})$.

Ind. Considerer $f : (\mathbb{R}^*)^{n+1} \to (\mathbb{R}^*)^n$ definie par $f(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \left(\dfrac{t_2}{t_1}, \ldots, \dfrac{t_{n+1}}{t_n}\right)$ et chercher des bijections simples s_i' de $(\mathbb{R}^*)^{n+1}$ telles que $s_i \circ f = f \circ s_i'$.

Exercice 256 [X MP 283] Soit G un groupe fini d'ordre n. On note, pour tout diviseur positif d de n, $n_d(G)$ le nombre d'elements de G d'ordre d.

- Montrer que $n = \sum_{d|n} n_d(G)$.
- Calculer les $n_d(G)$ lorsque G est cyclique.
- Montrer que, si pour tout diviseur positif d de n, $|\{x \in G,\ x^d = 1\}| \leq d$, alors G est cyclique. - Soient $\mathbb{K}$ un corps et G un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$. Montrer que G est cyclique.

Exercice 257 [X MP 284] On pose $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib\ ;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- Montrver que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
- Determiner les elements de $\mathbb{Q}[i] \setminus \{0\}$ qui sont d'ordre fini.

Exercice 258 [X MP 285] • Soient $\mathbb{K}$ un corps, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $P = X^2 - aX - b$. On considere la $\mathbb{K}$-algebre A admettant une base sur $\mathbb{K}$ de la forme $(1, x)$ avec $x^2 = ax + b$. A quelle condition cette algebre est-elle un corps ?

▷ On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ ou p est un nombre premier. Combien de $\mathbb{F}_p$-algebres non isomorphes peut-on obtenir ainsi ?

Exercice 259 [X MP 286] Soit p un nombre premier. On suppose que, pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A, il existe un endomorphisme u_A de A de sorte que, pour tout couple (A, B) de $\mathbb{F}_p$-algèbres et tout morphisme τ de $\mathbb{F}_p$-algèbres de A dans B, on ait $\tau \circ u_A = u_B \circ \tau$. Que dire des u_A ?

Démonstration. Pour tout isomorphisme $\tau\colon A \to$, u_A commute avec τ. □

Exercice 260 [X MP 287] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$.
Montrer que $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k = 2^{n-1} P_n\left(\frac{X+1}{2}\right)$.

Exercice 261 [X MP 288] • Montrrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynome $S_n \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\forall N \in \mathbb{N},\ S_n(N) = \sum_{k=0}^{N-1} k^n$. Dans la suite, on note b_n le coefficient de S_n devant X.

▷ Donner une relation de recurrence exprimant b_n en fonction de $b_0, \ldots, b_{n-1}$.

▷ Pour $n \geq 1$, donner une relation entre S_n'' et S_{n-1}'.

▷ En deduire une expression explicite des coefficients de S_n en fonction de $b_0, \ldots, b_n$.

Exercice 262 [X MP 289] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$.
On pose $F : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \prod_{k=1}^n (1 + q^{2k-1} z)(1 + q^{2k-1} z^{-1})$.

- Montrver qu'il existe une unique list $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ telle que

$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ F(z) = \sum_{k=0}^n c_k (z^k + z^{-k})$.

- Donner une relation de recurrence entre c_k et c_{k+1}, et en deduire une expression de c_k a l'aide d'un produit. Ind. Exprimer $F(q^2 z)$ en fonction de $F(z)$.

Exercice 263 [X MP 290] Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(X + Y)^n$ soit congru a $X^n + Y^n$ modulo p.

Exercice 264 [X MP 291] Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(0) \neq 0$. Soit $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrver qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que X^n divise $P^k - f$.# 292 Soit p un nombre premier. Pour deux polynomes P, Q dans $\mathbb{Z}[X, Y]$, on note $P \equiv Q\ [p]$ pour signifier que $P - Q$ a tous ses coefficients (devant les $X^k Y^l$) divisibles par p. On adopte une definition similaire pour les polynomes a une indeterminee.

- Exhiber un polynome $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$, $P \not\equiv T\ [p]$ et $P \not\equiv 0\ [p]$.
- Exhiber un polynome $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$, $P(X + Y) \equiv P(X) + P(Y)\ [p]$, $P \not\equiv T\ [p]$ et $P \not\equiv 0\ [p]$.
- Determiner tous les polynomes $P \in \mathbb{Z}[T]$ tels que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$ et $P(X + Y) \equiv P(X) + P(Y)\ [p]$.

Exercice 265 [X MP 293] Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des complexes deux a deux distincts. Soient $n_1, \ldots, n_r$ dans $\mathbb{N}^*$ et $H_1, \ldots, H_r$ dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un $H \in \mathbb{C}[X]$ tel que $(X - \alpha_i)^{n_i}$ divise $H - H_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 266 [X MP 294] • Soient $N_1, \dots, N_r$ des entiers premiers entre eux deux a deux, et $f_1, \dots, f_r$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier F tel que $F \equiv f_i\ [N_i]$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

- ▷ Soient $N_1, \dots, N_r$ des elements de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux deux a deux, et $f_1, \dots, f_r$ des elements de $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe $F \in \mathbb{C}[X]$ tel que N_i divise $F - f_i$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.
- ▷ Soient f, g deux elements de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $h \in \mathbb{C}[X]$ tel que g divise $h^n - f$.

Exercice 267 [X MP 295] Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynome $X^{n+1} - nX^n + 1$ est-il irreductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 268 [X MP 296] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynome unitaire dont les racines complexes ont un module inferieur ou egal a 1. Montrer que les racines de P sont des racines de l'unite.

Exercice 269 [X MP 297] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ possedant n racines distinctes $x_1, \dots, x_n$. On ecrit $P^2 + 1 = Q_1 \dots Q_r$ ou les Q_i sont dans $\mathbb{Z}[X]$. On pose $R = \sum_{i=1}^{r} {Q_i}^2 - r$.

- Montrer que les x_k sont racines au moins doubles de R.
- En deduire qu'il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\deg(Q_i) \geq 2 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Exercice 270 [X MP 298] On se propose de donner une preuve du theoreme de d'Alembert-Gauss.

- Montrer qu'il suffit de montrer le theoreme pour les polynomes a coefficients reels. Dans la suite, on ecrira le degre d'un polynome non constant de $\mathbb{R}[X]$ sous la forme $2^n q$, ou $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ est impair. La preuve se fait par recurrence sur n.
- Montrer le theoreme dans le cas ou $n = 0$.

Dans la suite, on suppose le resultat vrai jusqu'au rang n, ou $n \geq 1$ est fixe.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degre $2^n q$, ou $n \geq 1$. On admet l'existence d'une extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ sur laquelle P est scinde, et on note $x_1, \dots, x_d$ ses racines dans $\mathbb{K}$, distinctes ou non. Ayant fixe $c \in \mathbb{R}$, on pose $y_{ij}(c) = x_i + x_j + c x_i x_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq d$.
- Montrer que le polynome $Q_c = \prod_{i \leq j} (X - y_{ij}(c))$ est a coefficients reels. - Montrrer que l'un des $y_{ij}(c)$ est element de $\mathbb{C}$.
- Montrer finalement que l'un des x_i est element de $\mathbb{C}$.

Exercice 271 [X MP 299] Soient $F \in \mathbb{C}(X)$ et $q \in \mathbb{C}^*$.

- On suppose que q n'est pas une racine de l'unite. Montrer qu'il existe au plus deux fractions rationnelles $G \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F = 1 + G(qX)\, G(q^{-1}X)\, F(q^{-2}X)$, et que s'il y en a deux alors elles sont opposees l'une de l'autre.
- Montrer que le resultat precedent peut tomber en defaut si l'on ne suppose plus que q n'est pas une racine de l'unite.

Exercice 272 [X MP 300] Soit G un groupe, $\mathcal{M}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^G$.

Exercice 273 [X MP 301] On note C l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont non nuls. Pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in C$, on pose $J(M) = \left(\dfrac{1}{m_{i,j}}\right)_{1 \leq i,j \leq 2}$. Soit $\varphi : C \to C$ qui a M associe $J(M^{-1})$. Montrer que φ est bien definie et trouver a quelle condition sur $M \in C$ la suite $(\varphi^n(M))_{n \geq 1}$ est stationnaire, ou bien periodique a partir d'un certain rang.

Exercice 274 [X MP 302] Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ non nulle et $M = I_n + 3R$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k \neq I_n$.

Exercice 275 [303] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $p, u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que p est un projecteur et que $pu + up = u$. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

Démonstration. On a $u(\mathrm{Ker}\, p) \subset \mathrm{Im}\, p$ et $u(\mathrm{Im}\, p) \subset \mathrm{Ker}\, p$. □

Exercice 276 [X MP 304] Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi_{A,B} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$.
Soit $T = \{\varphi_{A,B},\ (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.

- L'ensemble T est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
- Montrer que l'espace vectoriel engendre par T est $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$.

Exercice 277 [X MP 305] Pour une matrice de projecteur $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $R_P = \det(I_n + (X - 1)P)$.

- Calculer R_P en fonction de P.
- Soient P, Q des matrices de projecteur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $PQ = QP = 0$. Montrer que $R_P R_Q = R_{P+Q}$.
- Soit φ un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algebre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Montrer que $\varphi(E_{i,i})$ est un projecteur de rang 1, pour tout $i \in 1, n$.
- Que dire du rang de $\varphi(E_{i,j})$, pour i, j dans $1, n$?
- Montrer que $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, \varphi(E_{i,1})$.

Exercice 278 [X MP 306] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une application $q : V \to \mathbb{C}$ telle que $u^2 = q(u)\,\mathrm{id}$ pour tout $u \in V$.

- Monter que, pour tous $u, v \in V$, il existe $B(u, v) \in \mathbb{C}$ tel que $uv + vu = 2B(u, v)\,\mathrm{id}_E$.
- Montrer que B est une forme bilineaire. - Soient $d \geq 1$ et $u_1, \dots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in 1, n$. Montrer que $(u_1, \dots, u_d)$ est libre.
- Soient $d \geq 2$ et $u_1, \dots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in 1, n$. Montrer que les u_i sont de trace nulle, et que $\dim E$ est paire.

Exercice 279 [X MP 307] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On suppose que $\varphi(I_n)$ est inversible et que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\,\varphi(B)$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(A) = PAP^{-1}$.

Exercice 280 [X MP 308] • Caracteriser les endomorphismes φ de $\mathbb{C}(X)$ verifiant $(*)$: $\forall F_1,\ F_2 \in \mathbb{C}(X), \varphi(F_1F_2) = \varphi(F_1)\,\varphi(F_2)$.

▷ Determiner les automorphismes de $\mathbb{C}(X)$ verifiant $(*)$.

Exercice 281 [X MP 309] Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i, j, m_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$.

- Montrer que 1 est valeur propre de M et que tout valeur propre de M est de module ≤ 1.
- On note $\mu = \min_{1\leq i\leq n} m_{i,i}$. Montrer que le spectre de M est inclus dans le disque de centre μ et de rayon $1 - \mu$.
- On suppose que $\mu > 0$ et que 1 est valeur propre de multiplicite 1 dans χ_M. Montrer que $(M^p)_{p\geq 1}$ converge vers une matrice de rang 1 dont toutes les lignes sont egales.
- On se donne trois reels strictement positifs p, q, r tels que $p + q + r = 1$. On considere la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definie par $b_{i,i} = r$, $b_{i,i+1} = q$ si $i > 2$, $b_{1,2} = p + q$, $b_{i+1,i} = p$ si $i < n - 1$, $b_{n,n-1} = p + q$, et tous les autres coefficients sont nuls. Montrer que 1 est valeur propre simple de B, et expliciter la limite de $(B^k)_{k\geq 0}$.

Exercice 282 [X MP 310] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, F un sous-espace de E stable par f. Montrer que l'induit par f sur F est cyclique.

Exercice 283 [X MP 311] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $a, b \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ telles que $ab - ba = fv$.

- Que peut-on dire de $\det(ab - ba)$?
- Montrer que a et b sont cotrigonalisables.
- A quelle condition sur $u \in \mathcal{L}(E)$ existe-t-il $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uw - wv$ soit de rang 1 ?

Exercice 284 [X MP 312] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout vecteur $x \in E$, l'ensemble $\{f^n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

- Montrer que, si $f \in \mathrm{GL}(E)$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = \mathrm{id}$.
- On revient au cas general. Montrer l'existence de $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $f^{p+k} = f^p$.

Exercice 285 [X MP 313] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de permutation associee a σ. Montrer que, si σ et σ' sont dans $\mathcal{S}_n$, σ et σ' sont conjuguees dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

Exercice 286 [314] Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
2. Montrer que $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q + (\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p)$.
3. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
4. Montrer que le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0, 1]$.

Démonstration. □

Exercice 287 [X MP 315] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $L_n = D^n((X^2 - 1)^n)$, ou D designe l'operateur de derivation des polynomes.

- Determiner le degre de L_n. Montrer que $\int_{-1}^{1} L_n(t)\, P(t)\, dt = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. - Montrer que L_n est scinde a racines reelles simples $x_1 < \cdots < x_n$ avec $x_1 > -1$ et $x_n < 1$. - Montrer qu'il existe des reels $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} P(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$.

Exercice 288 [316] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\right\}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes.

- $\alpha = 2$.
- $\forall n \geq 1, \forall\, (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n) \in \left(S^2\right)^{3n}, \exists p \in S^2$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \|p - a_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \|p - b_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \|p - c_i\|^\alpha$$

Démonstration. □

Exercice 289 [X MP 317] Existe-t-il $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{Q})$ telle qu'il n'existe pas $B \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{Q})$ verifiant $B^2 = A$?

Exercice 290 [X MP 318] Soient E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{S}(E)$, $\Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \|f(v)\|^2 - \langle f(v), v\rangle^2 \end{array}$. Donner une condition necessaire et suffisante pour que Φ admette un extremum.

Exercice 291 [X MP 319] On considere dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

- Soit $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $K^2 = -I$. Montrer que $K^T J \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $J = K^T JK$.
- On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telles que $K^2 = -I$ et $K^T J \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $K \in \mathcal{C}$. Montrer que $K + J$ est inversible et que $(K + J)^{-1}(K - J)$ est symetrique.
- Soit $K \in \mathcal{C}$. On pose $S = (K + J)^{-1}(K - J)$. Montrer que $SJ + JS = 0$.

Exercice 292 [X MP 320] Montrer que $\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2, \det(A+B) \geq \max(\det(A), \det(B))$.

Exercice 293 [X MP 321] Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\operatorname{tr}\left(e^A e^B\right) > 0$.
- Montrer que $\operatorname{tr}\left(e^{A+B}\right) \leq \operatorname{tr}\left(e^A e^B\right)$.

Exercice 294 [322] Soit $t_1, \dots, t_n$ des réels.

1. Montrer que la matrice $A = (t_i t_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. On suppose $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$. Montrer que la matrice $B = (\min(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. On suppose $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$. Montrer que $M = B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration. 1. $X^T A X = (\sum t_i x_i)^2$

2. $\int \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i}\right)^2$
3. Il s'agit de montrer que $\int_0^1 \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i}\right)^2 \geq (\sum t_i x_i)^2$, c'est-à-dire $\int h^2 \geq \left(\int h\right)^2$, car l'intégrale est sur $[0,1]$. $\square$

Exercice 295 [X MP 323] On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire standard et on note $\|A\| = \sup_{X \in B_f(0,1)} \|AX\|$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrver que $\|\|\|\|$ definit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrver que $\|\|A\| = \sup_{(X,Y) \in B_f(0,1)^2} | \langle AX, Y \rangle |$.
- On prend $A = \left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_0 \cdots x_n)^T$ et $Y = (y_0 \cdots y_n)^T$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, donner une interpretation de $\langle AX, Y \rangle$ a l'aide d'une integrale faisant intervenir $P : t \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{k=0}^n x_k e^{ikt}$ et $Q : t \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{k=0}^n y_k e^{ikt}$.
- En deduire que $\|\|A\| \leq 2\pi$.
- Montrver que l'on a meme $\|\|A\| \leq \pi$.

1) Analyse

Exercice 296 [X MP 324] Trouver $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, discontinue en $(0,0)$, dont la restriction a toute droite passant par $(0,0)$ est continue.

Exercice 297 [325] Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un convexe fermé non vide.

1. On suppose K borné. Montrer que K s'écrit comme intersection de carrés fermés.
2. On suppose K non borné et $K \neq \mathbb{R}^2$. Donner des exemples de tels convexes. Montrer que si K contient deux droites, celles-ci sont parallèles.
3. On suppose toujours K non borné. Montrer que K contient une demi-droite.

Démonstration. 1. Si $x \notin K$, on peut trouver une droite séparant x de K, donc un carré contenant K et non x.

2. Si K contient deux droites non parallèles, $K = \mathbb{R}^2$. La partie au dessus du graphe de $x \mapsto e^x$.
3. Fixer $y \in K$, et une suite $(x_n) \in K$ qui tend vers ∞, et prendre une valeur d'adhérence des segments $[y, x_n]$. $\square$

Exercice 298 [X MP 326] Determiner les endomorphismes continus du groupe $\mathbb{C}^*$.

Exercice 299 [X MP 327] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de la structure euclidienne canonique. On definit une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ en posant, pour $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sup\left\{\|Mx\| \,;\, x \in \mathbb{R}^d, \ \|x\| = 1\right\}$.

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Montrver que $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.
- Soit $(u - n \geq 0$ une suite reelle. On suppose que la serie de terme general $|u_n - 1|$ converge.

Montrer que la suite de terme general $\prod_{k=0}^n u_k$ converge.
Soit $(M - n \geq 0$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On suppose que la serie de terme general $\|M_n - I_d\|$ converge. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_n$.

- Montrver que la suite $(B - n \geq 0$ converge.
- Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la suite de terme general $M_{\sigma(0)} \times \cdots \times M_{\sigma(n)}$?
- Soit $E = \left\{\prod_{k=0}^{+\infty} M_{\sigma(k)}, \ \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})\right\}$. Existe-t-il une suite de matrices pour laquelle E n'est pas ferme ?
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Existe-il $(M - n \geq 0 \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que E possede exactement k composantes connexes ?

Exercice 300 [X MP 328] On definit la longueur d'un intervalle borne I de bornes a et b par $\ell(I) = |b - a|$. - Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $I_1, \dots, I_N$ des intervalles bornes de $\mathbb{R}$ tels que $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^N I_i$. Que peut-on dire de $\sum_{i=1}^N \ell(I_i)$?

- Soit $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p = 1, t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in 1, p$, $x_{q-1} \leq t_q \leq x_q$ et $x_q - x_{q-1} \leq \delta(t_q)$.
- Soit $(I - n \geq 1$ une suite d'intervalles bornes de $\mathbb{R}$ telle que $[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Que peut-on dire de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n)$?

Exercice 301 [X MP 329] Dans $\mathbb{R}^2$, on note D le disque unite ferme pour la norme infinie, C la sphere unite pour la norme infinie. On cherche a montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $r : D \to C$ telle que la restriction de r a C soit l'identite.

- On considere une fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, antisymmetric (i.e. $f(x,y) = -f(y,x)$), et $A = (a_{i,j})_{i,j \leq n}$ une matrice reelle telle que : $\forall i, j \in 1, n-1$,

$f(a_{i,j}, a_{i+1,j}) + f(a_{i+1,j}, a_{i+1,j+1}) + f(a_{i+1,j+1}, a_{i,j+1}) + f(a_{i,j+1}, a_{i,j}) = 0.$
Montrer que :
$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i,1}, a_{i+1,1}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{n,j}, a_{n,j+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1,n}, a_{i,n}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{1,j+1}, a_{1,j}) = 0$

- Soit $M \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & & & & 3 \\ \vdots & & M' & & \vdots \\ 1 & & & & 3 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ ou $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

est a coefficients dans $\{1, 2, 3\}$. Montrer qu'au moins un des petits carres de M comporte trois valeurs differentes.

- Montrer qu'on dispose d'un $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in D$ verifiant $\|x - y\|_\infty \leq \eta$, on a $\|r(x) - r(y)\| \leq \frac{1}{10}$.
- Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{n-1} \leq \eta$. Pour tous $i, j \in 1, n$, on pose

$v_{i,j} = \left(1 - 2\frac{i-1}{n-1}, 1 - 2\frac{j-1}{n-1}\right)$.
Montrer que, pour tous $i, j \in 1, n-1$, $v_{i,j}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}, v_{i,j+1}$ sont contenus dans une boule de rayon $1/10$.

- En utilisant une fonction bien choisie de C dans $\{1, 2, 3\}$, aboutir a une contradiction et conclure.
- Utiliser ce resultat pour montrer que toute fonction continue de D dans D admet un point fixe.

Exercice 302 [330] On dit qu'une famille $(D_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de disques fermés de $\mathbb{R}^2$ vérifie $(\mathcal{P})$ si

- pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ distincts, D_s et D_t ont des centres distincts,
- pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ tels que $s < t, D_s \subset D_t$.

1. Existe-t-il une telle famille ?
2. Soit $A \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ une fonction C^1 et injective. Existe-t-il une famille $(D_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ vérifiant $(\mathcal{P})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $A(t)$ soit le centre de D_t ?
3. Le résultat subsiste-t-il si A est seulement supposée continue ?

Démonstration. 1. Cercles de centre $(x, 0)$, de rayon x.
2. Prendre D_t de rayon la longueur de la courbe de $A(0)$ à $A(t)$.
3. Prendre une fonction non réglée. □

Exercice 303 [X MP 331] Dans tout l'enonce, $\mathbb{K}$ designe $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne une $\mathbb{K}$-algebre A de dimension finie, et on identifie $\mathbb{K}$ a une sous-algebre de A via $\lambda \mapsto \lambda.1_A$. On suppose donnee sur A une norme multiplicative $\| \ \|$, autrement dit une norme verifiant $\forall (a, b) \in A^2, \ \|ab\| = \|a\| \, \|b\|$. Jusqu'a la question - incluse, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Soit $x \in A$. Montrer qu'il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, \ \|z_0 - x\| \leq \|z - x\|$.
- On suppose $\|a\| = 2$ pour $a = z_0 - x$. Montrer que $\|a - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\| \geq 2$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
- En deduire que $\|a - 1\| = 2$.
- En deduire que $A = \mathbb{C}$.
- Retrouver le resultat de la question precedente en utilisant des polynomes annulateurs.

Dans la suite, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Est-ce que A est necessairement egale a $\mathbb{R}$?
- On admet qu'il existe une $\mathbb{R}$-algebre $\mathbb{H}$ ayant une base de la forme $(1, i, j, k)$ ou i, j, k anticommutent deux a deux et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. On considere la symetrie $x \mapsto \overline{x}$ par rapport a $\mathbb{R}$ parallelement a $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$, et on considere la norme $N : q \mapsto \sqrt{\overline{q}q}$. Montrer que N est bien definie, est effectivement une norme, et qu'elle est multiplicative.
- Montrer que A est isomorphe, en tant que $\mathbb{R}$-algebre, a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Exercice 304 [332] Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^4 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{N}$.

Démonstration. Dérivée discrète. □

Exercice 305 [X MP 333] Pour $n \geq 2$, on note $\ell_n = \min \left\{ k \in 1, n, \ \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{1}{2} \right\}$.

- Montrer que $\ell_n = o(n)$.
- Donner un equivalent de ℓ_n.

Exercice 306 [334] Soient (a_n) et (b_n), deux suites réelles positives telles que la série de terme général b_n converge, que la série de terme général na_n diverge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k}$.
2. Montrer que (u_n) est bornée.
3. Montrer que, si (u_n) converge, alors sa limite est 0.

Démonstration. Cf une année précédente. □

Exercice 307 [X MP 335] On considere la suite reelle definie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un reel $C > 1$ tel que $x_n \sim C^{2^n} n^2$ quand $n \to +\infty$.# 336 Soit $(a - n \geq 0$ la suite reelle definie par $a_0 = 1, a_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = 2a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2}$. Donner un equivalent de a_n.

Exercice 308 [X MP 337] Soit $(a - n \geq 0$ definie par $a_0 = \pi/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Nature de la serie de terme general a_n2 ?

Exercice 309 [X MP 338] Soit $\sum u_n$ une serie convergente de reels positifs. Existe-t-il une suite $(v - n \geq 0$ de reels positifs tendant vers $+\infty$ telle que la serie $\sum u_n v_n$ converge ?

Exercice 310 [X MP 339] Soit (x_n) une suite reelle. On suppose que $(x_n y_n)$ est sommable pour toute suite reelle (y_n) de carre sommable. Montrer que (x_n) est de carre sommable.

Exercice 311 [X MP 340] Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Determiner la nature de la serie $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 312 [X MP 341] Etudier la convergence de la serie de terme general $\frac{\sin(\ln n)}{n}$.

Exercice 313 [X MP 342] On pose $u_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $n \geq 1$.

- Montrer que u converge vers une limite ℓ.
- Montrer que $\ell = -(\sqrt{2}+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.
- Montrer que $u_n = \ell + \frac{1}{2n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
- Montrer que $\ell = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2}$.
- Etudier les variations de u.
- Determiner un developpement asymptotique semblable a celui de la question - pour la suite de terme general $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
- Soit $\alpha \in]0,1[$. Donner un developpement asymptotique a trois termes pour $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 314 [343] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Démonstration. La série $\sum \frac{1}{f(n)}$ a la même nature que $\int \frac{1}{f}$. On peut raccorder f de manière $\mathcal{C}^1$, puis on pose $u = f(t)$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{uf'(f^{-1}(u))}\,\mathrm{d}u,$$

puis IPP. □

Exercice 315 [X MP 344]

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{m}}{(m+n)\sqrt{n}} \leq \pi$.

  Ind. : Dans $\mathbb{R}^2$, considérer les points $x_n = (\sqrt{m}, \sqrt{n})$ et l'intersection r_n du cercle $C(0, \sqrt{m})$ avec le segment $[0, x_n]$.
- Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites de carre sommable et a termes positifs. On note $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ et $B = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$. Montrer que $\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi\sqrt{AB}$.

Exercice 316 [X MP 345]

- Trouver les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(xy) = f(x)\,f(y)$.
- Trouver les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall x \neq y \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$.

Exercice 317 [346] Que dire d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique ?

Démonstration. Easy. □

Exercice 318 [X MP 347] Trouver les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $|f'| + |f+1| \leq 1$.

Exercice 319 [X MP 348] Pour $x \geq 1$, on note $\Theta(x) = \sum_{p\in\mathcal{P},\ p\leq x} \ln(p)$. Montrer que $\Theta(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x)$.

Exercice 320 [X MP 349] Soit F un ferme de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 321 [X MP 350] Soit $(x - n \geq 0$ une suite de points de $[0,1]^2$. Donner une condition necessaire et suffisante pour que, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, il existe une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]^2$ et une suite strictement croissante $(t - n \geq 0$ d'elements de $[0,1]$ telle que $f(t_n) = x_{\sigma(n)}$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 322 [X MP 351] Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$.

Exercice 323 [X MP 352] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n la derivee n-ieme de $(X^2-1)^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} PL_n = 0$.
- Montrer que L_n possede n racines distinctes $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ dans $]-1,1[$.
- Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(x_i)$.

Exercice 324 [X MP 353] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose \$ $I_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ {n}{k}^{3}\$.

- On suppose n impair. Montrer que $I_n = 0$.
- On suppose n multiple de 4. Montrer que $I_n > 0$.
- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'egalite

$ I2n=(-1)n{43n-1}{π2}∫02π∫02π sin2n(x)\,sin2n(y)\,sin2n(x+y)\,dx\,dy$.

Exercice 325 [X MP 354] • Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que$H_n : (a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \int_0^{2\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) - f(t)\right)^2 dt$ admet un minimum, atteint en un unique point, et donner une expression simple de ce point en fonction de f.

▷ Determiner la limite de $\min H_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 326 [X MP 355] Justifier l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{dt}{2+\lfloor \frac{1}{t} \rfloor}$.

Exercice 327 [356] Soit $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f(x) < \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que $f(x) > \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}$ pour tout $x > 0$.
3. Donner un développement limité à quatre termes de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Démonstration. □

Exercice 328 [357] Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Pour $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{|u|, |v|\}$, calculer $I_r(u, v) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(u-re^{i\theta})(v-re^{i\theta})}$.

Démonstration. □

Exercice 329 [X MP 358] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ integrable, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. On suppose que f' s'annule en un unique $M \in \mathbb{R}$.

- Donner le tableau de variations de f. Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^{m} f(t)dt = \frac{1}{2}$.
- Montrer que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 < M < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2) = \ell$.
- Supposons que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$, $f'(x_1) + f'(x_2) > 0$. Montrer que $m > M$.

Exercice 330 [X MP 359] • Soient a et b deux suites reelles telles que $b - a$ converge vers 0. Soit $(f - m \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $m \geq 0$, il existe un entier N_m tel que $\forall n \geq N_m,\ a_m \leq f_n \leq b_m$. Montrer que (f_m) converge uniformement vers une fonction constante.

▷ On note H l'ensemble des fonctions continues $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes et telles que $f(x + 1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que H forme un groupe pour la composition des fonctions.

▷ Soit $f \in H$. Montrer que $\sup\{f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}\} < 1 + \inf\{f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 331 [X MP 360] On note F l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, C l'ensemble des fonctions continues de F. On note aussi $I = \{f \in F \ ;\ \forall a \in [0, 1],\ \{x \in [0, 1],\ f(x) \leq a\}$ est ferme$\}$ et $S = \{f \in F \ ;\ \forall a \in [0, 1],\ \{x \in [0, 1],\ f(x) \geq a\}$ est ferme$\}$.

Pour $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $L_n(f) : x \in [0, 1] \mapsto \inf_{y\in[0,1]} (f(y) + n|x - y|) \in [0, 1]$.

- Montrer que $C = I \cap S$. - Montrrer que, si $f \in F$, $L_n(f)$ est une suite croissante d'applications continues.
- Soit $f \in F$. Montrrer que $f \in I$ si et seulement s'il existe une suite $(f - n \geq 0$ de fonctions de C telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

Exercice 332 [X MP 361] Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ de classe C^1 telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \sim \dfrac{a}{x}$ quand $x \to +\infty$.

- Rappeler le theoreme d'integration des relations de comparaison.
- Donner un equivalent de $\ln f(x)$ quand $x \to +\infty$.
- Determiner le domaine de definition de la fonction $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)e^{-nx}$.
- Determiner les limites de u aux bornes de son intervalle de definition.
- Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \sim \dfrac{C}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 333 [X MP 362] Soit $(a - n \in \mathbb{N}$ une suite reelle telle que $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ et

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \dfrac{n+4}{n+1} a_{n+1} + \dfrac{3n+7}{n+2} a_n.$

- Montrer que le rayon de convergence de la serie entiere $\sum a_n x^n$ est strictement positif.
- Determiner la valeur de ce rayon de convergence.

Exercice 334 [X MP 363] Pour x reel, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1 - x^n}$ sous reserve de convergence.

- Determiner le domaine de definition de f.
- Etudier la continuite puis la derivabilite de f.
- Donner un equivalent simple de f en 1^-.
- Montrre que f est developpable en serie entiere, et preciser le developpement associe.

Exercice 335 [X MP 364] • Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ somme d'une serie entiere. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(z) = O(z^k)$ quand z tend vers 0. Montrrer que, pour r voisin de 0^+, il existe au moins $2k$ nombres complexes z de module r tels que $f(z)$ soit un nombre reel.

▷ Soient A et B deux polynomes a coefficients reels dont toute combinaison lineaire a coefficients reels est scindee ou nulle. Soient $x < y$ deux racines de A. Montre que $[x, y]$ contient au moins une racine de B.

Exercice 336 [X MP 365] Soit $\sum a_n z^n$ une serie entiere de rayon de convergence egal a 1 et de somme f.

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall r \in [0,1[, \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| d\theta \leq C$.

Montre que $\int_0^1 |f(t)| dt < +\infty$.

Exercice 337 [366] Soit $P = a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{Z}[X]$ avec a_1 impair.

1. Montrer l'existence d'une suite réelle $(b_k)_{k\geq 0}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(P(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$.
2. Montrer que les b_k sont tous non nuls.

Démonstration. 1.

2. Quand on dérive successivement e^P, on trouve une quantité qui vaut toujours 1 modulo 2. □

Exercice 338 [X MP 367] Pour x et q dans $]0,1[$, on pose $(x,q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - q^k x)$.

- Montrrer que la suite de terme general $(x,q)_n$ converge vers un reel $(x,q)_\infty > 0$.
- Determiner le rayon de convergence de la serie entiere $\sum_{n\geq 0} \frac{(x,q)_n}{(q,q)_n} z^n$. On notera $f_{x,q}$ sa somme sur le disque ouvert de convergence, et D son disque ouvert de convergence.
- Etablir l'identife $f_{x,q}(z) - f_{x,q}(qz) = (1-x) z f_{x,q,q}(z)$ pour tout $z \in D$.
- Etablir l'identife $f_{x,q}(z) = \frac{1-xz}{1-z} f_{x,q}(qz)$ pour tout $z \in D$.
- Demontrer que $f_{x,q}(z) = \frac{(zx,q)_\infty}{(z,q)_\infty}$ pour tout $z \in D$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Determiner, pour tout $z \in D$, la limite de $f_{q^\alpha,q}(z)$ quand q tend vers 1^-.

Exercice 339 [X MP 368] • Pour $x \geq 0$ on pose $f(x) = \operatorname{card}\left\{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, n^2 + m^2 \leq x\right\}$. Trouver un equivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

▷ On pose $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2}$. Trouver un equivalent de g en 1^- en utilisant g^2.

Exercice 340 [X MP 369] Soit p un nombre premier. Pour tout $F \in \mathbb{F}_p[X]$, on pose $|F| = p^{\deg F}$.

- Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > 1$. Montrre que la famille $\left(|F|^{-s}\right)$, indexee par les polynomes $F \in \mathbb{F}_p[X]$ unitaires, est sommable et calculer sa somme, qu'on notera $z(s)$.
- On note A l'ensemble des polynomes unitaires de $F \in \mathbb{F}_p[X]$ sans facteur carre, c'est-a-dire tels que : $\forall D \in \mathbb{F}_p[X]$, $D^2 | F \Rightarrow \deg D = 0$. Montre que $\sum_{F\in A} |F|^{-s} = \frac{z(s)}{z(2s)}$.
- En deduire, pour tout $d \in \mathbb{N}$, la proportion de polynomes sans facteur carre parmi les polynomes unitaires de degre d de $\mathbb{F}_p[X]$.

Exercice 341 [X MP 370] Soit f continue sur $[0,1]$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{1+xt} dt$ pour $x \geq 0$. On suppose $f(0) \neq 0$.

- Donner un equivalent de g lorsque $x \to +\infty$.
- On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Majorer l'ecart avec l'equivalent trouve.
- Que peut-on dire de plus si f est de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 342 [X MP 371] • Determiner le domaine de definition de $f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2x} \, dt$.

▷ Montrre, pour tout reel $x > 0$, l'egalite $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{u \exp\left(-u^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{1-e^{-u^2}}} du$.

Exercice 343 [X MP 372] • Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) \, dt$ pour tout reel x. - On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\,(1+t^2)} \, dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\forall x > 0,\ F''(x) = F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$

▷ Donner une expression simplifiee de F.

Exercice 344 [X MP 373] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ de carre integrable. On pose $S_f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y} dy$.

- Justifier la bonne definition de S_f.
- Montrer que S_f est de carre integrable.

Exercice 345 [X MP 374] Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t-xt^\alpha} \, dt$.

- Determiner la limite et un equivalent de I en $+\infty$.
- Donner un developpement asymptotique de I a tout ordre.
- Donner une condition necessaire et suffisante pour que ce developpement soit la somme partielle d'une serie convergente pour tout $x > 0$.

Exercice 346 [X MP 375] • Soient K un segment et $f : K \to K$ une fonction continue croissante. Montrer que f admet un point fixe.

- ▷ On considere l'equation differentielle non lineaire (E) : $x' = \cos(x) + \cos(t)$. On admet que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution φ_a de (E) sur $\mathbb{R}$ verifiant $\varphi(0) = a$, et que, pour tous a, b reels distincts, les fonctions φ_a et φ_b ne coincident en aucun point. Montrer que (E) possede une solution 2π-periodique.

Exercice 347 [X MP 376] Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $a \in [0, 1]$.

- Justifier qu'il existe une unique fonction $x_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x'(t) = f(t) - (f(t) + g(t))\, x(t)$ et $x(0) = a$.
- On suppose que f et g ont une limite finie strictement positive en $+\infty$. Montrer que x_a tend vers 0 en $+\infty$.
- Montrer que f et g peuvent etre choisies de telle sorte que x_a n'ait pas de limite en $+\infty$.
- On suppose que l'une des fonctions f et g n'est pas integrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $x_1 - x_0$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 348 [X MP 377] Soient $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue a support compact et $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$. On considere l'equation differentielle $y"+ω^{2y}=v(t),$ dont on note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions.

- Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $f^+_{a,b}$ (resp. $f^-_{a,b}$) de (E) telle que $f^+_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ pour tout t dans un voisinage de $+\infty$, (resp. $f^-_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ pour tout t dans un voisinage de $-\infty$.
- Montrer que $\mathcal{S}_E = \{f^+_{a,b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{f^-_{a,b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
- On pose $c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\cos(\omega t)\, dt$ et $s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\sin(\omega t)\, dt$, et on definit l'application $S_\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par : $f^-_{a,b} = f^+_{S_\omega(a,b)}$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Expliciter l'application S_ω en fonction de $c(\omega)$ et $s(\omega)$.
- On suppose que $S_\omega = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ pour tout $\omega > 0$. Montrer que v est identiquement nulle.

Exercice 349 [X MP 378] Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \le q_2$. On considere l'equation differentielle $(E_i) : y'' + q_i(t)\, y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.

- Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros de y_1. Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
- Soient $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, m, M deux reels strictement positifs tels que $m \le q \le M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs d'une solution non nulle x de $y'' + q(t)\, y = 0$.
- Montrer que les zeros de x fortner une suite strictement croissante $(t - n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \le t_{n+1} - t_n \le \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 350 [X MP 379] • Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $pu + up = u$. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

- ▷ Soit E un espace euclidien de dimension $n \ge 1$. Soit $r \in 0, n$. On note G l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E de rang r. Soit $p \in G$. Determiner l'espace vectoriel tangent a G en p.

Exercice 351 [X MP 380] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considere le carre de coins $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. On choisit trois points A, B et C sur ce carre.

- Montrer qu'il existe une disposition des points A, B et C maximisant l'aire du triangle ABC.
- Caracteriser une telle disposition.

2) Geometrie

Exercice 352 [X MP 381] Pour $n \ge 2$, on note P_n le perimetre d'un polygone regulier a 2^n cotes inscrit dans le cercle unite.

- Calculer P_n et etudier la convergence de la suite $(P - n \ge 2$.
- Etablir une relation de recurrence entre P_n et P_{n+1}.
- Estimer l'erreur $2\pi - P_n$.
- Proposer une methode d'approximation de π par exces.

Exercice 353 [X MP 382] On se donne un triangle direct ABC du plan complexe. On note respectivement a, b, c les mesures principales des angles orientes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On note P l'unique point tel que $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB})$; Q l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AC})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ})$; R l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ et $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BA})$. L'objectif est de montrer que le triangle PQR est equilateral.

- On note f, g, h les rotations de centres respectifs A, B, C et d'angles de mesures respectives $\frac{2a}{3}$, $\frac{2b}{3}$ et $\frac{2c}{3}$. Montrer que P est l'unique point fixe de $g \circ h$.
- Montrer que $(f^3 \circ g^3 \circ h^3)(z) = z$ pour tout nombre complexe z.
- On note $f : z \mapsto a_1 z + b_1$, $g : z \mapsto a_2 z + b_2$ et $h : z \mapsto a_3 z + b_3$. Experimer P, Q, R en fonction des a_i et des b_i.
- Conclure.

Exercice 354 [X MP 383] Determiner le nombre moyen de 2-cycles, de 3-cycles, de p-cycles, d'une permutation de $[\![1, n]\!]$.

Exercice 355 [X MP 384] • Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2}$.

- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle partition de n toute liste decroissante $(\lambda - 1 \le k \le n$ d'entiers naturels non nuls de somme n. On note $P(n)$ le nombre de telles listes.

Montrer que $P(n) \leq 2^{n-1}$.

- On fixe $n \geq 1$ et on considere une variable aleatoire X suivant la loi uniforme sur l'ensemble des partitions de n. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$. On pose $N_k = |\{i \in [\![1, n]\!] : X_i = k\}|$.

Exprimer $\mathbf{P}(N_k \geq j)$ comme un quotient $\frac{P(a)}{P(b)}$ pour des entiers a et b a preciser.

- Calculer $\sum_{i=1}^{n} iN_i$.

Exercice 356 [X MP 385] On considere la suite (a_n) definie par $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

- Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$.
- On lance une piece non truquee. Determiner la loi de la variable aleatoire X qui donne l'instant de premiere apparition du motif Face-Face.
- Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
- Donner un equivalent de $\mathbf{P}(X = n)$.

Exercice 357 [X MP 386] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{S}_n$ de la loi uniforme, et on note N la variable aleatoire associant a tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ le nombre de ses orbites.

- Calculer $\mathbf{P}(N = 1)$ et $\mathbf{P}(N = n)$.
- Donner une formule simple pour la fonction generatrice de N.
- Donner un equivalent de $\mathbf{E}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.
- Donner un equivalent de $\mathbf{V}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 358 [X MP 387] Soient $n \geq 2, X_1, \ldots, X_n$ des variables aleatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $f_{(X_1,\ldots,X_n)}$ la variable aleatoire a valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ telle que, pour tout i, $f_{(X_1,\ldots,X_n)}(e_i) = e_{X_i}$.

- Determiner $\mathbf{E}\left(\mathrm{rg}\left(f_{(X_1,\ldots,X_n)}\right)\right)$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, soit μ_z la multiplicite de z comme valeur propre de $f_{(X_1,\ldots,X_n)}$. Calculer $\mathbf{E}(\mu_z)$.

Exercice 359 [X MP 388] Soient $b, n \in \mathbb{N}^*$. On considere $(B - 1 \leq i \leq n$ des variables aleatoires independantes suivant la loi uniforme sur $[\![0, b-1]\!]$. On note S l'ensemble des descentes de la suite B c'est-a-dire $S = \{i \in [\![1, n]\!],\ B_i > B_{i+1}\}$.

- Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, calculer $\mathbf{P}(B_i > B_{i+1})$.
- Soit $j \in [\![1, n-j-1]\!]$. Calculer $\mathbf{P}(B_1 > B_2 > \cdots > B_{j+1})$. - Pour $I \subset 1, n$, on pose $\alpha(I)$ (resp. $\beta(I)$) le nombre de suites a n elements a valeurs dans $0, b-1$ qui verifient $S \subset I$ (resp. $S = I$). Exprimer α en fonction de β, puis β en fonction de α.

Exercice 360 [X MP 389] Si $n \in \mathbb{N}^*, \sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ et $k \in \{1, \ldots, 2n\}$, on note $s(\sigma, k)$ le segment de $\mathbb{C}$ qui joint les points $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ et $e^{\frac{i\sigma(k)\pi}{n}}$. On note $b(\sigma)$ le nombre de segments qui ne croisent aucun autre segment (ou on dit que deux segments se croisent s'ils ont un point d'intersection qui n'est pas une extremite).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit σ_n une variable aleatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_{2n}$. Determiner $\mathbf{E}(b(\sigma_n))$ et en donner un equivalent.

Exercice 361 [390] Soient $p \in [0, 1/2], (X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p$. On cherche p tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = 0\right) \geq \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = b\right)$.

1. Montrer que $p \leq \frac{1}{3}$, puis que $p < \frac{1}{3}$ et enfin que $p \leq \frac{1}{4}$.
2. Si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_X : \theta \mapsto \mathbf{E}\left(e^{iX\theta}\right)$. Exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de Φ_X.
3. En déduire que $p \leq \frac{1}{4}$ est une condition suffisante.

Démonstration. 1. On regarde les probabilités, jusqu'à $n = 3$.

2. $\Phi_X(\theta) = \sum P(X = k)e^{ikt}$ et formule de Cauchy.
3.

□

Exercice 362 [X MP 391] Soient n et d des entiers tels que $1 \leq d < n$, et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aleatoires independantes uniformement distribuees sur $0, d$. On note S_n la classe de $X_1 + \cdots + X_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- La variable aleatoire S_n est-elle uniformement distribuee sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- Calculer la loi de S_n.

Exercice 363 [X MP 392] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(X - n \geq 1$ une suite i.i.d. de variables aleatoires suivant la loi uniforme sur $1, d$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

- Soient Y une variable aleatoire a valeurs dans $\mathbb{Z}$, $r \in 0, d-1$, $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Montrer que $P(Y≡ r[$d$]) $= \frac{1}{n} \sum$k=0n-1 1$\frac{\text{kr}}{\{\omega}$}E(ω$^{\text{kY}}$.$

Soit $r \in 0, d-1$. Donner une expression de $\mathbf{P}(S_n \equiv r\,[d])$.

Determiner la limite de la suite de terme general $\mathbf{P}(S_n \equiv 0\,[d])$.

Exercice 364 [X MP 393] Soit $n \geq 1$.

- On se donne deux variables aleatoires independantes X_n et Y_n suivant chacune la loi uniforme sur $1, n^2$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Determiner la probabilite $u_n(r)$ pour que X_n et Y_n soient deux points distincts et le coefficient directeur de la droite (X_nY_n) soit egal a r. Donner un equivalent de $u_n(r)$ lorsque $n \to +\infty$.

- On se donne quatre variables aleatoires independantes X_n, Y_n, A_n, B_n suivant chacune la loi uniforme sur $1, n^2$. On note p_n la probabilite pour que $X_n \neq Y_n$, $A_n \neq B_n$ et les droites (X_nY_n) et (A_nB_n) soient paralleles. Montrer que $p_n = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 365 [X MP 394] Soit $a \in [1, 2]$. On pose $f_a : x \mapsto |1 + x|^a - |2x|^a - ax.$*a)* : Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) \leq 1$.

- Soit X une variable aleatoire reelle centree et admettant un moment d'ordre 2. Montrer : $\forall c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}\left(|c + X|^a\right) \leq 2^a\mathbf{E}(|X|^a) + |c|^a$.
- Soit $(X - n \geq 1$ une suite i.i.d. de variables aleatoires centrees admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}\left(|\sum_{i=1}^n X_i|^a\right) \leq 2^a \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(|X_i|^a)$.

Exercice 366 [X MP 395] Une urne contient a boules jaunes et b boules rouges. On effectue une succession de tirages d'une boule dans l'urne avec remise. A chaque tirage, on ajoute une boule de la couleur de celle titee dans l'urne. Soit X_n la variable aleatoire du nombre de boules jaunes dans l'urne apres n tirages. Soit T_n l'evenement «tirer une boule jaune au n^{ieme} tirage».

- Calculer $\mathbf{P}_{T_2}(T_1)$.
- Determiner la loi de X_n.
- Calculer $\mathbf{P}(T_n)$.
- Pour $n_1, ..., n_p, m_1, ..., m_q$ tous distincts, calculer $\mathbf{P}(T_{n_1} \cap ... \cap T_{n_p} \cap \overline{T_{m_1}} \cap ... \cap \overline{T_{m_q}})$.

Exercice 367 [396] Soient $n \geq 1$ et A, B, C des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{0, 1\}^n$.

1. Pour $n \geq 2$, calculer la probabilité p_n que ABC soit un triangle équilatéral.
2. Déterminer un équivalent de p_n.

Démonstration. Relier à un précédent.

1. On prend $A = \vec{0}$. Alors on veut B, C avec autant de termes 1, et autant de différences entre les deux.
   On considère les ensembles $B \subset [\![1, n]\!]$, $C[\![1, n]\!]$, et $B \oplus C$.
   Les parties $U = B \setminus C$, $V = C \setminus B$ et $W = B \cap C$ vérifient $u + w = v + w = u + v$, donc ils sont de même cardinaux, et disjoints. □

Exercice 368 [X MP 397] On munit l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $[1, n]$ de la probabilite uniforme. Soit X_n la variable aleatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation aleatoire $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

- Calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$.
- Determiner la loi de X_n.
- Etudier la convergence en loi de la suite $(X - n \in \mathbb{N}^*$.
- Calculer les esperance et variance de la variable aleatoire X_n.

Exercice 369 [X MP 398] Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ une matrice aleatoire ou $(a+1) \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $(b+1) \sim \mathcal{P}(\beta)$, $(c+1) \sim \mathcal{P}(\gamma)$ et $(d + 1) \sim \mathcal{P}(\delta)$.

- Calculer la probabilite que la matrice M soit inversible.
- Calculer la probabilite que la matrice M soit inversible et diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 370 [X MP 399] Soient X et Y deux variables aleatoires a valeurs dans $\mathbb{N}$ verifiant $\mathbf{P}(X \geq Y) = 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}(X = n) > 0$ et $\mathbf{P}(Y = i|X = n) = \dfrac{1}{n+1}$.

- Montrer que, si $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}P(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i, X - Y = j)$, puis que $X - Y \sim Y$.
- Montrer que $\mathbf{P}(Y = 0) > 0$.
- On suppose que $X - Y$ et Y sont independantes. Determiner la loi de Y, puis celle de X.

Exercice 371 [X MP 400] Soit $n \geq 3$ un entier. Si $k \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{k}$ la reduction de k modulo n. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aleatoires independantes a valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k \in 1, n$, X_k suit la loi uniforme sur $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. Soit F l'application aleatoire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-meme telle que, pour tout $k \in 1, n$, $F(\overline{k}) = \overline{k} + X_k$. Calculer la probabilite que F soit bijective.

Exercice 372 [X MP 401] On cherche a collectionner N jouets. A chaque achat, chaque jouet a une probabilite uniforme d'etre obtenu. Pour $i \in 1, N$, on note T_i le temps d'attente pour obtenir i jouets differents.

- Calculer l'esperance de T_N.
- Calculer la variance de T_N.
- Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{T_N}{N \ln N} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 373 [X MP 402] Soit $(X - n \in \mathbb{N}^*$ une suite i.i.d. de variables aleatoires reelles centrees.
On suppose que $\mathbf{E}(X_1^4) < +\infty$.

- Montrer que $\mathbf{E}\left((X_1 + \cdots + X_n)^4\right) = O(n^2)$.
- Pour $\varepsilon > 0$, quelle est la nature de la serie de terme general $\mathbf{P}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} > \varepsilon\right)$?

Exercice 374 [X MP 403] Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X - k \geq 1$ une suite i.i.d. de variables aleatoires suivant la loi $\mathcal{P}(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $S_n = \sum_{k=1}^n X_k, T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

- Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geq x) dx = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.
- On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(T_n \geq x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$. Retrouver la formule de Stirling.

V) X PSI

1) Algebre

Exercice 375 [X PSI 404] Pour $n \geq 2$ on pose $P_n = (X+1)^n + X^n + 1$ et $Q(X) = (X^2 + X + 1)^2$.
Donner une condition necessaire et suffisante sur n pour que Q divise P.

Exercice 376 [X PSI 405] Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formee de projecteurs.

Exercice 377 [X PSI 406] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E diagonalisable. Montrer que f possede n valeurs propres distinctes si et seulement s'il existe $v \in E$ tel que $(v, f(v) \cdots, f^{n-1}(v))$ soit libre.

Exercice 378 [X PSI 407] Trouver Vect$(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.# 408

- Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$. Montrer que $\det(A+B) \geq \max(\det(A), \det(B))$. - Trouver une condition necessaire d'egalite lorsque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 379 [X PSI 409] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. - A-t-on necessairement $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$? - Trouver une condition necessaire supplementaire pour avoir $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2) Analyse

Exercice 380 [X PSI 410] Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer qu'il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\sqrt{n} - \sqrt{m} \in]a, b[$.

Exercice 381 [X PSI 411]
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire, avec $n \geq 2$. Montrer que P est scinde dans $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^{\deg P}$.
- Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisables dans $\mathbb{R}$ est un ferme.

Exercice 382 [X PSI 412] Soit $\alpha > 0$. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites reelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha}(b_n + c_n)$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha}(a_n + c_n)$, $c_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha}(a_n + b_n)$. Etudier leur comportement asymptotique.

Exercice 383 [X PSI 413] Étudier la serie $\sum (-1)^n \dfrac{\sin(\ln(n))}{n}$.

Exercice 384 [X PSI 414] Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ de classe C^1, strictement croissante avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $\sum \dfrac{1}{f(n)}$ converge si et seulement si $\sum \dfrac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge.

Démonstration. écrit quelque part…
Comparaison série intégrale, puis changement de variable. □

Exercice 385 [X PSI 415] Trouver les fonctions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y)$.

Exercice 386 [X PSI 416] Pour $a \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n(a) = \int_0^1 \dfrac{1}{1 + (at) + \cdots + (at)^n} dt$.
Determiner $\lim_{n \to +\infty} (\lim_{a \to 1} I_n(a))$ et $\lim_{a \to 1} (\lim_{n \to +\infty} I_n(a))$.

Exercice 387 [X PSI 417] Soient a, b, c trois reels strictement positifs.
On pose $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1\right\}$. On suppose que A, B, C sont trois points distincts de E tels que le plan tangent a E en A est parallele a (BC), le plan tangent a E en B est parallele a (CA), le plan tangent a E en C est parallele a (AB).
Calculer le volume du parallelepipede engendre par les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

3) Geometrie

Exercice 388 [X PSI 418] Soient abc un vrai triangle du plan complexe, α (resp. β, resp. γ) a rotation de centre a (resp. b, resp. c) et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

- Montrere que le centre de $\alpha \circ \beta$ appartient a l'intersection des trisectrices du triangles.
- Montrere que $\alpha^3 \circ \beta^3 \circ \gamma^3$ est l'identite du plan.
- Montrere que les points d'intersection des trisectrices forment un triangle equlateral.

4) Probabilites

Exercice 389 [X PSI 419] Determiner la loi d'une variable aleatoire X a valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2, \mathbf{P}(X>k+\ell \mid X>k)=\mathbf{P}(X>\ell)$.

Exercice 390 [X PSI 420] Une entreprise qui commercialise des eeufs en chocolat met dans chaque ceuf un jouet. Au total il y a N jouets differents. On suppose qu'a chaque achat d'ceuf la probabilite de tomber sur un jouet donne est identique pour chaque jouet. On note T_N le nombre d'eufs achetes jusqu'a obtenir la collection complete.

Montrer que $\mathbf{E}(T_N)=N\times H_N$ avec $H_N=\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}$.

Exercice 391 [X PSI 421] On pose$M=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d\\ b & a & d & -c\\ c & -d & a & b\\ d & c & -b & a\end{pmatrix}$ avec a,b,c,d des variables aleatoires a valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que $a+1,b+1,c+1,d+1$ suivent des lois de Poisson de parametres respectifs $\lambda_a,\lambda_b,\lambda_c,\lambda_d$. Calculer la probabilite de l'evenement $*M$ est inversible $\Rightarrow$.

Exercice 392 [X PSI 422] On considere deux variables aleatoires X et Y independantes a valeurs dans $[\![0,n]\!]$ qui suivent la meme loi. Trouver les lois de X possibles pour que $X+Y$ suive la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

Exercice 393 [X PSI 423] On dispose de n objets differents. On effectue des tirages aleatoires independants avec remise. On note N_n le nombre de tirages qu'il a fallu pour avoir les n objets differents.

- Calculer $\mathbf{E}(N_n)$ et $\mathbf{V}(N_n)$.
- Montrere que $\forall\varepsilon>0, \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{N_n}{n\ln(n)}-1\right|>\varepsilon\right)=0$.

VI) X PC

1) Algebre

Exercice 394 [X PC 424] Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $m\in\mathbb{N}^*$ et $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\in\{-1,1\}$ tels que $n=\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k k^2$.

Exercice 395 [X PC 435] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice qui n'est pas une homothetie. On suppose que M est une matrice qui commute avec PAP^{-1} pour tout $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est une homothetie. Meme question pour A et M matrices reelles.

Exercice 396 [X PC 436] Soit $n\geq 2$. Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, determiner les valeurs possibles du cardinal de l'ensemble $\{B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A=B^2\}$.

Exercice 397 [X PC 437] Trouver les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^p=A$, ou p est un entier ≥ 2.

Exercice 398 [X PC 438] Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\}$ telle que $AP=PB$.

Exercice 399 [X PC 439] Caracteriser les matrices $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'ensemble des matrices semblables a A engendre l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 400 [X PC 440] Soit G une partie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui contient I_2 et qui est stable par produit et passage a l'inverse. On note $\mathrm{Vect}(G)$ l'ensemble des combinaisons lineaires d'elements de G. Montrer que $\mathrm{Vect}(G)\neq\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si une des conditions suivantes est verifiee :
(i) il existe $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $M\in G$, la matrice $P^{-1}MP$ est triangulaire superieure,
(ii) il existe $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $M\in G$, la matrice $P^{-1}MP$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.

Exercice 401 [X PC 441] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$ ou les λ_i sont distincts et ou λ_i est de multiplicite $m_i\in\mathbb{N}^*$.

- Montrer qu'il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A=PTP^{-1}$ avec

$$T=\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1}+N_1 & * & \cdots & *\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & *\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{m_r}+N_r\end{pmatrix}$$

Exercice 402 [X PC 442] Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB^2-B^2A=B$. Montrer qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $B^{2p}\neq 0$ et $B^{2p+1}=0$.

Exercice 403 [X PC 443] Soient $n\in\mathbb{N}$ impair, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $AB+BA=A$.

- Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
- Que dire si n est impair.

Exercice 404 [X PC 444] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres non nulles distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. - Montrrer qu'il existe des nombres complexes $c_{i,j}$, avec $1\leq i\leq n, 0\leq j\leq n-1$, tels que $\forall k\in\mathbb{N}$, $A^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}c_{i,j}\lambda_i^k A^j$.

- Montrer l'unicite des $c_{i,j}$.
- On suppose de plus A inversible. Montrer que la formule reste vraie si $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 405 [X PC 445] Caracteriser les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont somme de deux matrices diagonalisables de rang 1.

Exercice 406 [X PC 446] Determiner les entier n tels qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ verifiant $A^2 - A + I_n = 0$.
Ind. Commencer par $n \leq 3$.

Exercice 407 [X PC 447] Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\ \det(M) = 1\}$. On note $\mathrm{ord}(A) = \inf\{n > 0,\ A^n = I\}$.

- Montrer que si $\mathrm{ord}(A) < +\infty$ alors $\mathrm{ord}(A)$ divise 12.
- Soient $A, B \in G$. On suppose que $\mathrm{ord}(A) = \mathrm{ord}(B) < +\infty$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ tel que $PAP^{-1} = B$. Peut-on toujours prendre P dans G ?

Exercice 408 [X PC 448] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si λ est un reel strictement negatif qui est valeur propre de la matrice $A\overline{A}$, alors la dimension du sous-espace propre associe est paire.

Exercice 409 [X PC 449] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ \|x\| = 1\right\}$ ou $\|\ \|$ designe la norme euclidienne canonique. Montrer l'equivalence entre les propositions suivantes.
(i) $\alpha = 2$.
(ii) $\forall n \geq 1, \forall\, (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n) \in (S^2)^{3n}$, $\exists p \in S^2$ tel que
$\sum_{i=1}^n \|p - a_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|p - b_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^n \|p - c_i\|^\alpha$.

Exercice 410 [X PC 450] Soit n un entier ≥ 2. Pour quelles valeurs du reel α existe-t-il $n+1$ vecteurs unitaires $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ verifiant $\forall (i,j) \in \{0, 1, \ldots, n\}^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j\rangle = \alpha$?
Ind. Considerer la matrice $A = (\langle u_i, u_j\rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 411 [X PC 451] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $n \geq 2$. Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est somme d'un nombre fini d'isometries.

Exercice 412 [X PC 452] • Est-il vrai que pour tout n et tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices AB et BA sont semblables ?

- ▷ Montrer que AA^T et A^TA sont semblables.
- ▷ Soient F, G des sous-espaces de dimension m de $\mathbb{R}^n$, p_F et p_G les projections orthogonales respectivement sur F et G. Montrer que $\mathrm{sp}(p_F \circ p_G) = \mathrm{sp}(p_G \circ p_F) \subset [0, 1]$.

Exercice 413 [X PC 453] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symetrique positive non nulle. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des reels $b_{i,k}$, avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq r$, tels que $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $a_{i,j} = \sum_{k=1}^r b_{i,k} b_{j,k}$. Quel est la plus petite valeur possible de r ?# 454 Soit $A = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leq i,j \leq n}$. Montrer que les valeurs propres de A sont dans $]0, \pi[$ et que la plus petite valeur propre est inferieure ou egale a $\frac{1}{2n+1}$.
On pourra montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_{-1}^1 P(t)\, dt + \int_0^\pi P(e^{i\theta}) i e^{i\theta}\, d\theta = 0$.

Exercice 414 [X PC 455] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et A^T commutent si et seulement si $AA^TA = A^2A^T$.

Exercice 415 [X PC 456] Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ non nulle, $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^m$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de leurs normes euclidiennes canoniques. Considerons les assertions :
(i) $\forall Z \in \mathbb{R}^n$, $\|AX - Y\| \leq \|AZ - Y\|$;
(i)' $A^TAX = A^TY$;
(ii) X est de norme minimale pour la propriete (i) ;
(ii)' $X \perp \mathrm{Ker}\, A^TA$.

- Montrer que (i) $\Longleftrightarrow$ (i)'.
- On suppose (i) verifie. Montrer qu'alors (ii) $\Longleftrightarrow$ (ii)'.
- Montrer l'unicite de X verifiant (i) et (ii). Notons BY ce vecteur.
- Montrer que B est lineaire. Montrer que, pour tout $Y \in \mathbb{R}^m$, $\|BY\| \leq \frac{\|Y\|}{\sqrt{\lambda_1}}$ ou λ_1 est la plus petite valeur propre non nulle de A^TA, et qu'il y a des cas d'egalite non triviaux.

Exercice 416 [X PC 457] Donner une condition sur $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour que l'application qui a $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ associe $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} u_{i,j}$ atteigne son maximum en un unique U.

Exercice 417 [X PC 458] Soit $\alpha \in]0, 1[$.

- Montrer que l'existence de $c_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda > 0$, $c_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\alpha}}{\lambda + t} dt = \lambda^{-\alpha}$.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On definit : $A^{-\alpha} = c_\alpha \int_0^{+\infty} t^{-\alpha}(A + tI_n)^{-1} dt$. Expliquer le sens de cette expression, montrer que l'integrale converge et que $\left(A^{-1/2}\right)^2 = A^{-1}$.
- Montrer que si $B - A$ est positive alors $A^{-1/2} - B^{-1/2}$ l'est aussi.

Exercice 418 [X PC 459] Soit $f : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme lineaire. Montrer l'equivalence des trois assertions suivantes :

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f\left(AA^T\right) \geq 0$;

ii) $\exists B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(A) = \mathrm{Tr}(AB)$;
iii) $\exists m \in \mathbb{N},\ \exists (X - i \in 1\ :\ m \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^m,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(A) = \sum_{i=1}^m \mathrm{Tr}\left(X_i^T A X_i\right)$.

Exercice 419 [X PC 460] Sont $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2) Analyse

Exercice 420 [X PC 461] Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $|I|$ sa longueur. Montrer qu'il existe une famille $(I - j \in A$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, non reduits a un point, deux a deux disjoints et tels que
$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{j\in A} I_j$ et $\sum_{j\in A} |I_j| = 42$.

Exercice 421 [X PC 462] On pose : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \left\{P \in E,\ P = P^T = P^2\right\}$. Soit $(P,Q) \in F^2$. Donner une condition necessaire et suffisante pour qu'il existe $f : [0,1] \to F$ continue telle que $f(0) = P$ et $f(1) = Q$.

Exercice 422 [X PC 463] Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue telle que $A(0) = A(1) = I_n$ et $A(s+t) = A(s)A(t)$ pour tous s, t.

- Donner des exemples non triviaux de telles applications.
- Montrer qu'il existe P inversible et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ tels que :

$\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = P\mathrm{diag}(e^{i2\pi\lambda_1 t}, \ldots, e^{i2\pi\lambda_n t})P^{-1}$.

Exercice 423 [X PC 464] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On definit une suite de matrices par $M_0 = A$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_{k+1} = M_k - M_k^2$. On etudie la convergence eventuelle de $(M - k \geq 0$.

- Etudier le cas ou A admet une valeur propre reelle $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$.
- Etudier le cas ou A est nilpotente.
- Etudier le cas ou $A = \lambda I + N$ avec $N \neq 0$, $N^2 = 0$ et $0 < \lambda < 1$.
- Etudier le cas ou $A = \lambda I + N$ avec $N^2 \neq 0$, $N^3 = 0$ et $0 < \lambda < 1$.

Exercice 424 [X PC 465] Soit E un espace vectoriel de dimension finie inclus dans $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que E est stable par translation, c'est-a-dire que $\forall f \in E, \forall a \in \mathbb{R}, (x \mapsto f(x+a)) \in E$. Montrer que $\forall f \in E, f' \in E$.

Exercice 425 [X PC 466] Soit E un espace vectoriel norme de dimension finie. Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p^2 = p$ et $q^2 = q$. On suppose que $\forall x \neq 0$, $\|(p-q)(x)\| < \|x\|$.

- Montrer que p et q ont le meme rang.
- Montrer que $u = pq + (\mathrm{id} - p)(\mathrm{id} - q)$ est inversible et que $p = uqu^{-1}$.

Exercice 426 [X PC 467] Soit $x \geq 0$. Donner un equivalent de la suite de terme general $u_n = \prod_{i=1}^n (x+i)$.

Exercice 427 [X PC 468] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} |\cos(k)| \geq \frac{4n}{10}$.

Exercice 428 [X PC 469] Soit c_n le nombre de listes $(a_1, \ldots, a_n)$ d'entiers telles que $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{1, \ldots, n\}$ et $\forall i \in \{1, \ldots n-1\}$, $a_{i+1} \neq a_i + 1$.

- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, on a $c_n = (n-1)c_{n-1} + (n-2)c_{n-2}$.
- Montrer que la suite $\left(\frac{c_n}{n!}\right)$ converge vers une limite non nulle.

Exercice 429 [X PC 470] Soit $C = 0,1234567891011121314\ldots$ (on ecrit les ecritures decimales de tous les entiers naturels a la suite). Montrer que C est irrationnel.# 471 Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $(n\{an!\})_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montr er que $a \in \mathbb{Q} + \mathrm{e}\mathbb{N}$.

Exercice 430 [X PC 472]

- On fixe $x \geq 0$. Determiner un equivalent simple de $u_n = (x+1)\cdots(x+n)$ de la forme $C(x)v_n(x)$ ou $C(x)$ est une constante qu'on ne cherchera pas a calculer et $v_n(x)$ est explicite.
  - ▹ Calculer $C(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, et la limite de $C(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 431 [X PC 473] Soit u_n le maximum de la fonction $x \mapsto (n-x)\ln(x)$ sur $[0,n]$.

- Trouver un equivalent de u_n.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \geq 3$, $v_n = u_n - n\ln(n) + n + n\ln(\ln(n)) + \lambda n$. Montr er que $v_n \to +\infty$ si $\lambda \geq 0$ et $v_n \to -\infty$ sinon.

Exercice 432 [X PC 474] Soit (u_n) une suite telle que $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n - e^{-1/u_n}$.

- Determiner la limite de (u_n).
- Montr er que, pour tout $\alpha > 0$ on a $n^\alpha u_n \to +\infty$.

Exercice 433 [X PC 475] Determiner $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}$.

Ind. Etudier si $n \geq m$, $a_{m,n} = \sqrt{1 + m\sqrt{1 + (m+1)\sqrt{1 + \cdots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}$, et considerer $a_{m,n}^2 - (m+1)^2$.

Exercice 434 [X PC 476] Soit (u_n) une suite bornee. Montr er qu'il y a equivalence entre :
(i) $\frac{1}{n}\sum_{k<n} |u_k| \to 0$,
(ii) il existe $A \subset \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n}|A \cap [0, n-1]| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\lim_{n\notin A} u_n = 0$.

Exercice 435 [X PC 477] Etudier la convergence de la serie de terme general $|\sin(2\pi n!e)|^{\alpha}$ selon les valeurs du reel $\alpha > 0$.

Exercice 436 [X PC 478] • Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornee telle que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{u_{n2^p}}{2^p} = 1$.
Que peut-on en dedaire sur la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?

- Soit $(v - n \in \mathbb{N}$ une suite reelle bornee. On suppose $\lim_{n\to+\infty}\left(v_n - \frac{1}{2}v_{2n}\right) = \frac{1}{2}$. Que dire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 437 [X PC 479] • Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montr er qu'il existe des entiers c_j, avec $0 \leq j \leq a-1$, tels que $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!^a} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sum_{j=0}^{a-1}c_j k^j}{k!^a}$.

▷ Montr er que les c_j sont uniquees (on traitera d'abord le cas $a = 2$).# 480

Soient $a \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(1-(1-a^k)^n\right)$.

▷ Montrer que la somme est bien definie.

▷ Donner un equivalent de S_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 438 [X PC 481] Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et croissantes. Soit $\lambda > 0$. Montrer qu'il existe un unique couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda u + f(u-v) = \lambda v + g(v-u) = 0$.

Exercice 439 [X PC 482] Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 440 [X PC 483] Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f' + af$ s'annule sur $]0,1[$.

Exercice 441 [X PC 484] • Soit $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction C^{∞}. Montrer que pour tout $n > 0$ et pour tout $x > 0$ il existe $c \in]x, x+n[$ tel que $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}(-1)^{n-k}f(x+k) = f^{(n)}(c)$.

▷ Soit $\lambda > 0$ tel que $n^{\lambda} \in \mathbb{N}$ pour tout n. Montrer que $\lambda \in \mathbb{N}$.

Exercice 442 [X PC 485] On appelle polynome trigonometrique reel toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnee par une formule $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et des constantes $a_k \in \mathbb{C}$. Trouver tous les couples (f,g) de polynomes trigonometriques reels tels que $f^2 + g^2 = 1$.

Exercice 443 [X PC 486] Soient a, b deux reels strictement positifs. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.

- Determiner les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
- On prolonge f en 0 en posant $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$? de classe $\mathcal{C}^{\infty}$?
- Soit $g : x \mapsto f(1/x)$. Trouver une fonction $x \mapsto h(x)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x) - h(x) \underset{x\to 0^+}{=} o(x^n)$.

Exercice 444 [X PC 487] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que les propositions suivantes sont equivalentes :

- f est croissante,
- pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(I,\mathbb{R})$, pour tout $x_0 \in I$, si $f - \varphi$ admet un minimum local en x_0, alors $\varphi'(x_0) \geq 0$.

Exercice 445 [X PC 488] Soit $g \in \mathcal{C}^3([0,2],\mathbb{R})$ telle que $g(0) = g(1) = g(2) = 0$.

- Montrer : $\forall x \in [0,2], \exists c \in [0,2], g(x) = \dfrac{1}{6}x(x-1)(x-2)g^{(3)}(c)$.
- Montrer que $\int_0^2 |g(x)|\,dx \leq \dfrac{1}{12}\|g^{(3)}\|_{\infty}$.
- Montrer que $\left|\int_0^2 g(x)\,dx\right| \leq \dfrac{1}{24}\left[\sup\left(g^{(3)}\right) - \inf\left(g^{(3)}\right)\right]$.# 489

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^{+*})$.

On pose \$ m=inf$_{[a,b]}\dfrac{f}{g}\$et\$M = \supset_{[a,b]}\dfrac{f}{g}$.\$ Montrer que $\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq \dfrac{(M+m)^2}{4Mm}\left(\int_a^b fg\right)^2$.

Exercice 446 [X PC 490] Soient \$ K :$[0,1]^{2\to\mathrm{R}}$\$et$f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que :
$\forall x \in [0,1]$, \$ f$(x) = \int_0$$^{1\mathrm{K}}$(x,z)g(z)\,dz\$ et \$ g$(x) = \int_0$$^{1\mathrm{K}}$(x,z)f(z)\,dz\$. Montrer que \$ f=g\$.

Exercice 447 [X PC 491] Soit E l'espace des fonctions \$ f∈ C^2(R,R)\$ telles que
$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(1+x^2\right)\left(|f(x)| + |f'(x)| + \left|f''(x)\right|\right) < +\infty$.
Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, on definit \$ A$_t$(f)(x)=txf(x)+f'(x)\$ et \$ A$_t^*$(f)(x)=txf(x)-f'(x)\$.
Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in E, \int_{-\infty}^{+\infty} A_t^*(A_t(f))(x)\,f(x)\,dx \geq 0$.

Exercice 448 [X PC 492] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

- Soient \$ f$_{1,\ldots,\mathrm{fn}\in\mathrm{R}}{}^{[a,b]}$\$. Montrer que $(f_1,\ldots,f_n)$ est libre si et seulement s'il existe \$ x$_{1,\ldots,\mathrm{xn}\in}$[a,b]\$ tels que la matrice $(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ soit inversible.
- Soit \$ E=Vect(f$_{1,\ldots,\mathrm{fn}}$)\$. Montrer que toute limite simple de fonctions de E est encore dans E.
- La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 449 [X PC 493] Posons \$ A=Q∩[0 ; 1] $\$.Existe-t-ilunesuite(f_n)$ de fonctions de A dans A, continues sur A et qui converge simplement sur A vers une fonction f qui n'est continue en aucun point de A ? La convergence peut-elle etre uniforme ?

Exercice 450 [X PC 494] On considere l'ensemble E des applications continues \$ f: R↦ $\mathbb{R}\$tellesqu'ilexiste\$M > 0\$verifiant\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq M$.

- Montrer que E est un espace vectoriel contenant le sous-espace des applications lineaires et celui des applications bornees.
- Soit \$ f∈ E\$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose \$ gn :x∈R↦ 2-n $f(2^{nx})\$.Montrerquelasuite(g_n)$ converge uniformement vers une application lineaire g. En deduire que f s'ecrit, de facon unique, comme somme d'une application lineaire et d'une application bornee.

Exercice 451 [X PC 495] On considere une suite $(f - n \geq 0$ d'applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers une application continue f.

- On suppose les f_n de classe C^1 et de derivees uniformement bornees, c'est-a-dire qu'il existe \$ C≥ 0\$ tel que $\forall n, \ \|f'_n\|_\infty \leq C$. Montrer que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur $[0, 1]$.
- On suppose maintenant les f_n de classe C^k pour un entier \$ k∈N*\$ et de derivees k-iemes uniformement bornees. La convergence de la suite (f_n) est-elle toujours uniforme sur $[0, 1]$?

Exercice 452 [X PC 496] Pour \$ n∈N*\$ et \$ x∈R^+\$, on pose \$ fn(x)=cos$\left(\frac{x}{\{}\sqrt{n}\}\right)$\,1_{[1, $^{\{}\pi\sqrt{n}\}\{2\}\}(x)\$$.

Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction \$ f\$ que l'on precisera. - Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$.

Exercice 453 [X PC 497] Soit $(f - n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions appartenant a $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et C une constante reelle positive. On suppose : (i) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n^{(3)}\|_\infty \leq C$, (ii) $\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$.

- Montrer que $\lim \|f'_n\|_\infty = \lim \|f''_n\|_\infty = 0$.
- Les resultats precedents restent-ils vrais si on ne fait plus l'hypothese (i) ?

Exercice 454 [X PC 498] On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on definit la fonction $T(f)$ par $T(f)(0) = f(0)$ et \$ T(f)(x)=1$\frac{}{x \int}$ 0xf(t)dt\$ pour $x \in]0, 1]$.
On definit par recurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $T^{n+1}(f) = T(T^n(f))$.

- Montrer que T est bien definie comme fonction de E dans lui-meme.
- Soit $f \in E$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = 0$ si $x \in [0, \varepsilon]$. Montrer que $T^n f$ converge uniformement vers la fonction nulle quand $n \to +\infty$.
- Etudier le comportement de $(T^n(f))_{n \geq 0}$ quand $n \to +\infty$ pour tout f continue.

Exercice 455 [X PC 499] Soit \$ F :x↦ $\sum_{k=0}^{+\infty(-1)^{kx2^k}}$\$.

Determiner le domaine de definition de F.
Trouver une relation entre $F(x)$ et $F(x^2)$.

On pose \$ G :x↦ $\sum_{k=0}^{+\infty x^{4^k}\left(1-x^{4^k}\right)}$\$.

Montrer que \$ G(x) $\$convergepourtoutx \in]0, 1[$.

Trouver une relation entre F et G.

Exercice 456 [X PC 500] Soient $\alpha > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, \$ fn :x↦ $\frac{\sin nx}{\{}n^\alpha\}\$.Laserie \sum f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? Pour quels α a-t-on convergence uniforme ?

Exercice 457 [X PC 501] On pose \$ g :x↦ $\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty \frac{2x}{n^2-x^2}}$\$.

Montrer que g est definie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Montrer que g est 1-periodique.
Etablir une relation entre \$ g$\left(\frac{x}{2}\right)$ \$, $\$g\left(\frac{x+1}{2}\right)\$et\$g(x)\$desquelestermesfontsens.Endeduirequeπ \operatorname{cotan}(\pi x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 458 [X PC 502] Soit (a_n) une suite de reels positifs tels que $\sum a_n$ diverge.

- Montrer que, pour tout intervalle de longueur non nulle I, il existe $x \in I$ tel que la serie $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas absolument. On pourra d'abord montrer que, pour tout \$ a< b\$ et tout N il existe $M \in \mathbb{N}$ et \$ x∈[a,b]\$ tel que $\sum_{n=0}^M a_n \cos^2(nx) > N$. - Existe-t-il des exemples ou la serie converge sur un intervalle non trivial ?

Exercice 459 [X PC 503] Soit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{n+3}{n+2} a_{n+1} + \frac{3n+7}{n+1} a_n$. Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est strictement positif et trouver un minorant de ce rayon.

Exercice 460 [X PC 504] Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres reels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ et $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k$.
On considere les assertions :
(i) la suite (σ_n) converge,
(ii) $f(x) = \sum a_n x^n$ a un rayon de convergence ≥ 1, et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ existe (et est finie).
A-t-on (i) $\Longrightarrow$ (ii) ? A-t-on (ii) $\Longrightarrow$ (i) ?

Exercice 461 [X PC 505] Etudier la limite de $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{k!}$ lorsque x tend vers 1^-.

Exercice 462 [X PC 506] On pose, pour $k\in\mathbb{N}$ avec $k\geq 2$, $\zeta(k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$.

- Montrer que, pour tout $x\in]-1,1[$, on a $\int_0^1\frac{1-t^x}{1-t}\,dt=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k$.
- En deduire la valeur de $S=\sum_{k=1}^{+\infty}(\zeta(2k)-\zeta(2k+1))$.

Exercice 463 [X PC 507] • Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Determiner s'il existe $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ developpable en serie entiere telle que $xy''+(1-x)y'-\lambda y=0$.

▷ On suppose $\lambda=2$. Expliciter les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ (on admet que sur chacun des deux intervalles l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2).

▷ Determiner les solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 464 [X PC 508] Soient $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{C}^{n-1}(I,\mathbb{R})$.

On note $W_n(f_1,\dots,f_n)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n\\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$.Ind. On admettra que, si $a_0,\dots,a_{n-2}$ sont des fonctions continues sur I, alors l'ensemble des solutions de l'equation differentielle $y^{(n-1)}+a_{n-2}(t)y^{(n-2)}+\cdots+a_1(t)y'+a_0(t)y=0$ est un espace vectoriel de dimension $n-1$.

Exercice 465 [X PC 509] Soient $\lambda>0$ et $x,y:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $x(0)>0$, $y(0)>0$, $x'=-xy$ et $y'=xy-\lambda y$.

- Montrer que x et y admettent des limites en $+\infty$. Ces limites sont-elles nulles ?
- Montrer qu'il existe $K>0$ et $\mu>0$ tels que $y(t)\sim Ke^{-\mu t}$ quand $t\to+\infty$.

Exercice 466 [X PC 510] Determiner les extrema de $f:(x,y)\mapsto 3x^2+2xy+2y^2-x^4$ sur le disque unite ferme et les points en lesquels ils sont atteints.

3) Probabilites

Exercice 467 [X PC 511] On a un de equilibre a N faces numerotees de 1 a N, et on effectue une suite de lancers independants. Le jeu s'arrete lorsque le resultat du lancer $n+1$ est strictement inferieur a celui du lancer n.

- Calculer la probabilite π_k que le jeu s'arrete apres le rang k.
- Montrer que π_k tend vers 0 pour $k\to+\infty$.

Exercice 468 [X PC 512] Soient $a\in\mathbb{R}$, $q\geq 3$ et (X_n) une suite de variables aleatoires mutuellement independantes et uniformes sur $\left\{\frac{k}{q},\ k=0,\dots,q-1\right\}$. On definit la suite (T_n) par : $T_0=0$ et $\forall n, T_{n+1}=T_n+a+\sin(2\pi(T_n-X_n))$. Determiner l'esperance de T_n.

Exercice 469 [X PC 513] On dispose de N pieces equilibrees. On lance les N pieces de maniere independante. On note X_1 le nombre de < < pile > > obtenus. On relance ces X_1 pieces et on note X_2 le nombre de < < pile > > obtenus…

- Calculer la fonction generatrice de X_2.
- Calculer la fonction generatrice de X_k, pour $k\geq 3$.
- Soit T l'instant ou l'on n'a plus de piece. Calculer $\mathbf{E}(T)$ dans le cas ou $N=4$.

Exercice 470 [X PC 514] Soient X et Y deux variables aleatoires discretes independantes telles que Y prenne un nombre fini de valeurs, et $\mathbf{E}(Y)=0$. On suppose que $|X|$ admet une esperance. Montrer que $\mathbf{E}(|X-Y|)\geq\mathbf{E}(|X|)$.

Exercice 471 [X PC 515] On tire une piece n fois independamment avec probabilite de faire pile $1/n$. Soit p_n la probabilite d'obtenir un nombre impair de fois pile. Etudier le comportement de p_n.

Exercice 472 [X PC 516] • Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x)\leq e^{x^2/2}$.

▷ Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=X_1+\cdots+X_n$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbf{P}(S_n\geq\lambda)\leq e^{-\lambda^2/2n}$.Algebre_

VII) Mines

Exercice 473 [Mines 517] Determiner les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Exercice 474 [Mines 518] Soient p un nombre premier et C_p l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tels qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ verifiant $z^{p^n}=1$.

- Montrer que C_p est un sous-groupe infini de $\mathbb{C}^*$.
- Determiner les sous-groupes de C_p.

Exercice 475 [Mines 519] Determiner tous les couples $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ verifiant : $3^m=8+n^2$.

Démonstration. Nécessairement, m pair, donc cela s'écrit $3^{2m}-n^2=8$. □

Exercice 476 [Mines 520] Soient p,q deux entiers superieurs ou egaux a 2.

- Montrer que si $q^p - 1$ est premier, alors $q = 2$ et p est premier.
- On suppose que p est premier et l'on note $k \in \mathbb{N}^*$ un diviseur de $2^p - 1$. Montrer que : $k \equiv 1\ [2p]$.

Exercice 477 [Mines 521] Soit $A = \{n \in \mathbb{N},\ 2^n + 1 \equiv 0\ [n]\}$.

- Montrer que 3 est l'unique nombre premier appartenant a A.
- Montrer que A contient toutes les puissances entieres de 3.

Exercice 478 [Mines 522] • Soit $n > 6$ un entier. Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2$ tel que $a + b = n$ et $a \wedge b = 1$.

▷ Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $p_1 \cdots p_k \geq p_{k+1} + p_{k+2}$. Ind. Utiliser la premiere question avec $n = p_1 \cdots p_k$.

Exercice 479 [Mines 523] On ecrit $n \in \mathbb{N}$ en base $p \in \mathcal{P}$: $n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k p^k$ et l'on pose $S_p(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$.

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que : $v_p\binom{n}{k} = \frac{S_p(k)+S_p(n-k)-S_p(n)}{p-1}$.
- Exprimer $v_p\binom{n}{k}$ en fonction des retenues dans l'addition de $n - k$ et k en base p.
- Est-ce que 7 divise $\binom{1000}{500}$?
- Montrer que 2 divise $\binom{2n}{n}$. Etudier la divisibilite par 4 pour $n \geq 2$.

Exercice 480 [Mines 524] Soient G un groupe et $k \in \mathbb{N}$.
On suppose que : $\forall i \in [\![k, k+2]\!], \forall (a, b) \in G^2, (ab)^i = a^i b^i$. Montrer que G est abelien.

Exercice 481 [Mines 525] Soit G un groupe commutatif de cardinal pq avec p, q deux nombres premiers distincts. Montrer que G est cyclique. Trouver un contre-exemple dans le cas ou G n'est pas commutatif.# 526

- Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que H est cyclique d'ordre divisant n. Soit d un diviseur de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d.
- On note φ l'indicatrice d'Euler. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n. Montrer l'egalite $n = \sum_{d \in \mathcal{D}(n)} \varphi(d)$.
- Montrer que si p, $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, alors $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de la decomposition en facteurs premiers de n.

Exercice 482 [Mines 527] • Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $a\mathbb{Z} = \{ax,\ x \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

▷ Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non reduit a $\{0\}$.
▷ Montrer que $a = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$ existe.
▷ On suppose $a \neq 0$. Montrer que $G = a\mathbb{Z}$.
▷ On suppose $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 483 [Mines 528] Soit p un nombre premier impair.

- D enombrer les carres de $\mathbb{F}_p$.
- Montrer que -1 est un carre de $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1[4]$.

Exercice 484 [Mines 529] Soient A un anneau commutatif integre et $(a_0, \ldots, a_n)$ une famille non nulle d'elements de A. Montrer que l'equation $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ admet au plus n solutions dans A.

Exercice 485 [Mines 530] On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau integre et determiner ses inversibles.

Exercice 486 [Mines 531] en Soit A un anneau commutatif.
Si I est un ideal de A, on note $R(I) = \{x \in A\ ;\ \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \in I\}$.

- Montrer que $R(I)$ est un ideal de A contenant I.
- Soient I et J deux ideaux de A. Montrer :

$R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)\,;\, R(I) + R(J) \subset R(I + J)$.

- Pour cette question, $A = \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des entiers naturels non nuls tels que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la decomposition primaire ne comporte aucun facteur premier d'exposant au moins egal a 2.

Exercice 487 [Mines 532] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes non nuls de meme module tels que, pour tout $i \in 1, n$, $|\sum_{k=1}^n z_k| = |\sum_{k=1}^n z_k - z_i|$. Calculer $(\sum_{k=1}^n z_k)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}\right)$.

Exercice 488 [Mines 533] • Montrer qu'il existe une unique suite (P_n) de polynomes a coefficients dans $\mathbb{Z}$ verifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$.

▷ Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$. Montrer que : $2\cos(a\pi) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 489 [Mines 534] • Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin^{2n+1}(\theta)} = P_n(\mathrm{cotan}^2\theta)$.

▷ Determiner les racines de P_n et calculer leur somme.

▷ Montrer que, pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{cotan}^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \mathrm{cotan}^2\theta + 1$. Deduire de ce qui precede la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 490 [Mines 535] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degre n. Montrer qu'il existe $k \in 0, n$ tel que $|P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}$.

▷ *Démonstration.* Interpolation de Lagrange. □

Exercice 491 [Mines 536] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

- A quelle condition P realise-t-il une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$?
- A quelle condition P realise-t-il une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?
- A quelle condition P realise-t-il une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 492 [Mines 537] On pose $B_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \frac{1}{k!}X(X-1)...(X-k+1)$.

- Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(B_0, ..., B_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $\exp(2i\pi P(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P(n) - \lfloor P(n) \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 493 [Mines 538] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in 0, n-1$. Soit $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ polynome de degre n tel que $(X-1)^k|P$. On note $\mu(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P. On veut montrer que $\mu(P) \geq k+1$. On raisonne par l'absurde et on pose $A = \{i \in 0, n,\ a_i \neq 0\}$.

- On pose $P_0 = 1$ et $P_s = \prod_{j=0}^{s-1}(X-j)$ pour $s \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\forall s \in 0, k-1,\ P^{(s)}(1) = \sum_{i\in A} a_i P_s(i)$.

- En deduire que $\forall i \in A$, $a_i = 0$, et conclure.
- L'inegalite demontree est-elle optimale ?

Exercice 494 [Mines 539] • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scinde sur $\mathbb{R}$ et non constant. Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' - \lambda P$ est simplement scinde sur $\mathbb{R}$.

▷ Le resultat de la question precedente s'etend-il a $P'' - \lambda P$? Comment le generaliser ?

Exercice 495 [Mines 540] • Soit P un polynome irreductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que les racines complexes de P sont simples.

▷ Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{Q}[X]$ non constant avec $\deg(P) \leq 2k-1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicite k. Montrer que α est rationnel.# 541

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec : $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$.

▷ Montrer que les racines complexes de P sont de module superieur ou egal a 1.

▷ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$. Montrer $\min_{k\in[0,n-1]} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq |z| \leq \max_{k\in[0,n-1]} \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

Exercice 496 [Mines 542] • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degre $n \geq 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considere la suite $\left(P^{(k)}(x)\right)_{k\in[0,n]}$.

On note $v(x)$ le nombre de changements de signe stricts :

Soit $a < b$ tel que $P(a)P(b) \neq 0$. Montrer que si l'on note $\mu(a,b)$ le nombre de racines comptees avec multiplicite sur $[a,b]$ de P comptees avec multiplicite, alors :

$\mu(a,b) \leq v(a) - v(b)$ et \$μ(a,b)≡ v(a)-v(b)\$\$[2]\$.

- Soit $P = a_0 + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On pose $V(P)$ le nombre de changements de signe stricts de la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $\mu(P)$ le nombre de racines strictement positives comptees avec multiplicite. Montrer que $\mu(P) \leq V(P)$ et \$μ(P)≡ V(P)\$\$[2]\$.

Exercice 497 [Mines 543] • Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Decomposer P'/P en elements simples.

▷ On note $a_1, ..., a_n$ les racines de P. Soit a une racine de P'. Montrer qu'il existe des reels positifs $t_1, ..., t_n$ tels que $t_1 + \cdots + t_n = 1$ et $t_1a_1 + \cdots + t_na_n = a$.

Exercice 498 [Mines 544] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynome de degre $n \geq 2$, ayant n racines reelles distinctes et non nulles $a_1 < ... < a_n$. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)}$ et $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_iP'(a_i)}$.

Exercice 499 [Mines 545] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynome unitaire de degre n. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses racines comptees avec multiplicite. On suppose que P est a coefficients entiers.

Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $P_q = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i^q)$ est a coefficients entiers.

Exercice 500 [Mines 546] Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une base de $\mathbb{K}$.

Exercice 501 [Mines 547] Quelle est la dimension du $\mathbb{Q}$-sous-espace de $\mathbb{R}$ engendre par $\mathbb{U}_5$?

Exercice 502 [Mines 548] Soient x, y, z des rationnels non nuls. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2y & z & 2x \\ z & x & 2y \end{pmatrix}$ est inversible.# 549 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}$. Montrer que $D = 0$ si et seulement si $x = y$.

Exercice 503 [Mines 550] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes. Soit B la matrice dont les colonnes sont $C'_1, \ldots, C'_n$ avec : $C'_j = \sum_{i \neq j} C_i$. Determiner $\det B$ en fonction de $\det A$.

Exercice 504 [Mines 551] • Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls et $b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{R}$ avec $b_1 < \cdots < b_p$. Montrer que $f_p : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=1}^p a_i e^{b_i x}$ s'annule au plus $p-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ et $\beta_1 < \cdots < \beta_n$ des reels. Montrer que : $\det \left(e^{\alpha_i \beta_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} > 0$.

Exercice 505 [Mines 552] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ou E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$ si et seulement si $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 506 [Mines 553] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer l'equivalence entre les trois proprietes suivantes :
  - ▷ $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$
  - ▷ $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$
  - ▷ $E = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u)$.
- Donner des exemples d'endomorphismes verifiant ces proprietes.
- L'equivalence est-elle vraie en dimension infinie ? Montrer que (i) et (ii) equivaut a (iii).

Exercice 507 [Mines 554] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $h \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle et $a \in E$ non nul tels que : $\forall x \in E, h(x) = x + \varphi(x)a$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(u - \operatorname{id}) = 1$ et $(u - \operatorname{id})^2 = 0$. Montrer que u est une transvection. La reciproque est-elle vraie ?

Exercice 508 [Mines 555] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que toutes les matrices semblables a A appartiennent au commutant de M. Determiner M. Meme question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 509 [Mines 556] Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On note x_1, x_2 et x_3 les racines (non necessairement distinctes) du polynome $X^3 + pX + q$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose $N_j = x_1^j + x_2^j + x_3^j$.
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le determinant de la matrice $M_n = (N_{i+j-2})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 510 [Mines 557] ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\det((i \wedge j)_{1 \leq i,j \leq n})$.
Ind. On rappelle que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $N = \sum_{d \mid N} \varphi(d)$ ou φ est l'indicatrice d'Euler.

Exercice 511 [Mines 558] Soient $K_1, \ldots, K_n$ des segments non triviaux disjoints.

- Montrer que, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ verifie $\int_{K_j} P = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, alors $P = 0$. - Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $\int_{K_j} P = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Exercice 512 [Mines 559] • Determiner le rang de $\operatorname{Com}(A)$ en fonction du rang de A.

▷ Calculer $\operatorname{Com}(\operatorname{Com}(A))$ lorsque $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

▷ Montrer que si X est un vecteur propre de A associe a une valeur propre non nulle, alors X est un vecteur propre de $(\operatorname{Com}(A))^T$.

Exercice 513 [Mines 560] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit D l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $m_{i,j} = 0$ si i et j sont de parites differentes.

- Montrer que D est une sous-algebre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $M \in D \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{Com}(M) \in D$.
- Traiter le cas ou M n'est pas inversible.

Exercice 514 [Mines 561] Trouver les solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 515 [Mines 562] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.
Montrer $\forall k \geq 1, \operatorname{tr}(A^k) + \operatorname{tr}(B^k) = \operatorname{tr}\left((A+B)^k\right)$.

Exercice 516 [Mines 563] • Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ verifiant : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle a la trace.

▷ Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ un endomorphisme d'algebre. Montrer que $\operatorname{tr} \circ g = \operatorname{tr}$.

Exercice 517 [Mines 564] Soit $f \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f(A) \neq 0$.

Exercice 518 [Mines 565] Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$ si et seulement s'il existe P inversible telle que $B = PA$.

Exercice 519 [Mines 566] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'equivalence entre : i) $u^2 = 0$ et $\exists v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v + v \circ u = \operatorname{id}$, ii) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$.

Exercice 520 [Mines 567] Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = A - I_n$.

Soit (E) l'equation matricielle $X^2 = A$.

- Quelles sont les matrices qui commutent avec N ? - Montrer que les solutions de (E) sont de la forme $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il y a au plus deux solutions.

- Rappeler le developpement limite a l'ordre n de $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Resoudre (E).

Exercice 521 [Mines 568] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

- Calculer $\det(A + I_n)$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA$. Calculer $\det(A + M)$. On commencera par le cas ou $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Le resultat est-il toujours vrai si $AM \neq MA$?

Exercice 522 [Mines 569] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

- Montrer que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
- Soient F un sous-espace vectoriel de E, G et H deux supplementaires de F. On note p (resp. q) la projection sur F (sur H) parallelement a G (a F).

Montrer que $\operatorname{rg}(p + q) = \operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q$.

Exercice 523 [Mines 570] Determiner les parties G de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $(G, \times)$ soit un groupe multiplicatif et G ne soit pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 524 [Mines 571] Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\sum_{M \in G} \operatorname{Tr}(M)$ est un entier divisible par le cardinal de G.

Exercice 525 [Mines 572]

- Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{g \in G} \operatorname{tr} g = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.
  - ▷ Soient G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par tous les elements de G. Montrer que V admet un supplementaire stable par tous les elements de G.

Exercice 526 [Mines 573] Determiner les ideaux bilateres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-a-dire les sous-groupes additifs stables par multiplication a gauche et a droite par n'importe quel element de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 527 [Mines 574] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f et g deux elements de $\mathcal{L}(E)$ tels que $fg - gf = \mathrm{id}_E$.

- Montrer que E est de dimension infinie ou nulle.
- Montrer que f n'est pas nilpotent.
- Donner un exemple de triplet (E, f, g) verifiant les conditions precedentes.

Exercice 528 [Mines 575] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $|\det A| \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \right)$.
- Lorsque $\det A \neq 0$, etudier le cas d'egalite.# 576

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie S de $\mathcal{L}(E)$ est dite dense si, pour tout $n \geq 1$, toute famille $(b_1, \ldots, b_n)$ de vecteurs de E et toute famille libre $(a_1, \ldots, a_n)$ de vecteurs de E, il existe $f \in S$ tel que $f(a_i) = b_i$ pour tout $i \in 1, n$.

- Quelles sont les parties denses de $\mathcal{L}(E)$ si E est de dimension finie ?
- Dans cette question, on suppose que E n'est pas de dimension finie.
- Montrer que $\{f \in \mathcal{L}(E),\ \operatorname{rg} f < +\infty\}$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$.
- Meme question avec $\{f \in \mathcal{L}(E);\ \operatorname{rg} f$ est fini et pair$\}$.
- Si S est dense dans $\mathcal{L}(E)$, determiner $\{g \in \mathcal{L}(E)\ ; \forall f \in S,\ fg = gf\}$.

Exercice 529 [Mines 577] Soit $(M_{i,j})$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ verifiant : $\forall (i, j, k, \ell) \in 1, n^4, M_{i,j} M_{k,\ell} = \delta_{j,k} M_{i,\ell}$.

- Montrer que $\operatorname{Im} M_{i,j}$ est independante de j. On la notera F_i.
- Montrer que $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.
- En deduire $\dim F_i$.
- Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (i, j) \in 1, n^2, M_{i,j} = P E_{i,j} P^{-1}$.
- Expliciter les automorphismes de l'algebre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 530 [Mines 578] Soit U une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non vide, finie et stable par produit. Montrer qu'il existe $M \in U$ tel que $\operatorname{tr} M \in \{0, \ldots, n\}$.

Exercice 531 [Mines 579] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $A_x = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Determiner la structure de l'ensemble : $\{\exp(A_x),\ x \in \mathbb{R}\}$ et expliciter $\exp(A_x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 532 [Mines 580] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec M est $\mathrm{Vect}(I_n, M, \ldots, M^{n-1})$.

Exercice 533 [Mines 581] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = \mathrm{id}$. Pour $b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, resoudre $x + \lambda u(x) = b$.

Exercice 534 [Mines 582] Soit $Z = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer χ_{Z^2}. La matrice Z est-elle diagonalisable ?

Exercice 535 [Mines 583] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U = (u_{i,j})_{1 \le i,j \le n},\ V = (v_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $u_{i,i+1} = 1$ pour $1 \le i \le n-1$, les autres coefficients etant nuls, $v_{i,j} = 1$ si $j > i$, les autres coefficients etant nuls.

- Calculer le polynome minimal de U.
- Montrer que U et V sont semblables.# 584

Soient $a_1 < \ldots < a_n$ des reels et $M = \begin{pmatrix} a_1+1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_2+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & a_n+1 \end{pmatrix}$.

- Determiner le polynome caracteristique de M.
- Montrer que M est diagonalisable et que ses espaces propres sont des droites.

Exercice 536 [Mines 585] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $P = X^2 + aX + b$. On suppose que P est irreductible sur $\mathbb{R}$ et annulateur de u.

- Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $F_x = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u.
- Soient F un sous-espace vectoriel stable par u et $x \in E \setminus F$. Montrer que $F \cap F_x = \{0\}$.
- Montrer que u est diagonalisable par blocs identiques de taille 2×2.

Exercice 537 [Mines 586] Ecrire l'ensemble des matrices symetriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisables comme reunion de deux plans vectoriels prives de leur droite d'intersection.

Exercice 538 [Mines 587] Soient a, b dans $\mathbb{R}^*$ et A la matrice de taille $2n$ dont la diagonale contient des a, l'anti-diagonale des b et les autres coefficients sont nuls.

- La matrice A est-elle diagonalisable ? Determiner ses elements propres.
- A quelle condition A est-elle inversible ?
- Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 539 [Mines 588] Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que A et B sont inversibles et preciser le sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ engendre par ces matrices.
- Dans le cas $n = 3$, preciser les matrices de G qui sont diagonalisables.

Exercice 540 [Mines 589] Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ defini par
$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = (X^2-1)P'' + 4XP'$.

- Montrer que le spectre reel de u est l'ensemble $\{n(n+3),\ n \in \mathbb{N}\}$, et que les espaces propres associes sont des droites vectorielles.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n l'unique polynome unitaire generateur de la droite propre associee a $n(n+3)$. Trouver une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2} pour $n \ge 2$.

Exercice 541 [Mines 590] Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $A \in E$ et $u_A : M \in E \mapsto AM$.

- Caracteriser les matrices A telles que u_A soit un automorphisme de E.
- Calculer determinant et trace de l'endomorphisme u_A.
- Montrer que u_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 542 [Mines 591]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulles et $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(AM)B$. - Determiner un polynome de degre 2 annulateur de f. - Etudier la diagonalisabilite de f.

Exercice 543 [Mines 592]

Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$. On suppose que $MN = 0$ et que $M + M^T$ est inversible. - Montrer que M et N ont un vecteur propre commun. - Montrer que $N + N^T$ n'est pas inversible.

Exercice 544 [Mines 593]

Soient $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PM - MP$. - L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? - Calculer la trace de f.

Exercice 545 [Mines 594]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ defini par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \Delta(M) = AM + MB$. Montrer que Δ est diagonalisable et preciser ses valeurs propres.

Exercice 546 [Mines 595] Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $p(M) = M'$ avec : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m'_{i,j} = m_{i,j}$ si $i = \sigma(j)$ et $m'_{i,j} = 0$ sinon.

- Montrer que p est un projecteur. Determiner son noyau et son image.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle. On definit deux applications φ et u_A par :
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = \sum_{k=1}^n m_{\sigma(k),k}$ et $u_A(M) = \varphi(M)A + \varphi(A)M$.

- Montrer que u_A est diagonalisable si et seulement si $\varphi(A) \neq 0$.
- L'endomorphisme u_A peut-il etre un projecteur ?

Exercice 547 [Mines 596] Soient E un $\mathbb{R}$-espace de dimension n, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

- Montrer que f est nilpotent.
- On suppose que g est diagonalisable et que $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. Determiner g.

Exercice 548 [Mines 597] Soient $n \geq 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

- Montrer que, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $AB^m - B^m A = mB^m$.
- En deduire que B est nilpotente.

Exercice 549 [Mines 598] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Montrer que deux endomorphismes u et v de E qui commutent ont un vecteur propre en commun.
- Montrer qu'une famille finie F d'endomorphismes de E qui commutent admet une base de trigonalisation commune a ses elements.

Exercice 550 [Mines 599] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de f tel que 0 soit racine simple de P.

Montrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
On suppose dans la suite que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fg = 0$. Montrer que f et g sont cotrigonalisables.
- Soit $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. Montrer que $f_1, \ldots, f_p$ sont cotrigonalisables.
- Soient $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents qui commutent. Calculer $f_1 \circ \cdots \circ f_n$.# 600

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si
$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)$ nilpotent $\Rightarrow P(A) = 0$.

Exercice 551 [Mines 601] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B diagonalisable. On suppose que $AB^3 = B^3 A$. Montrer que A et B commutent. Generaliser.

Exercice 552 [Mines 602] Quels sont les $n \in \mathbb{N}$ tels qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ verifiant $A^3 - A^2 = I_n$?

Exercice 553 [Mines 603] Determiner les entiers $n \geq 1$ tels qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ verifiant $f^3 + f^2 - \mathrm{id} = 0$ et $\operatorname{tr} f \in \mathbb{Q}$.

Exercice 554 [Mines 604] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AMA^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Soit $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) \in (\mathbb{C}^n)^{2n}$. Montrer que $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont des bases de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si $\left(X_i Y_j^T\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Montrer que A est inversible si et seulement si f_A est inversible.
- On suppose A diagonalisable. Montrer que f_A est diagonalisable.
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de A et Y un vecteur propre associe. Montrer que le sous-espace vectoriel $F = \left\{XY^T,\ X \in \mathbb{C}^n\right\}$ est stable par f_A.
- Montrer que si f_A est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Exercice 555 [Mines 605] Soit p une permutation de $[\![1, n]\!]^2$. On considere l'application $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ definie par : $u(A) = (A_{p(i,j)})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-il diagonalisable ?

Exercice 556 [Mines 606]

- Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $CD = DC$.

Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

- Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer l'equivalence des enonces suivants :

1. λ est valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & A^{-1}C \\ I_n & A^{-1}B \end{pmatrix}$,

ii) il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}x$ soit solution de $Ay'' - By' - Cy = 0$.

Exercice 557 [Mines 607] Donner une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituee de matrices diagonalisables.

Exercice 558 [Mines 608] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Exercice 559 [Mines 609] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $A^2 = A$ si et seulement si $\mathrm{rg}\, A \leq \mathrm{tr}\, A$ et $\mathrm{rg}(I_n - A) \leq \mathrm{tr}(I_n - A)$.

Exercice 560 [Mines 610] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^n} = I_2$.
Montrer que $A^2 = I_2$ ou qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^k} = -I_2$.

Exercice 561 [Mines 611] Soit u un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}^n$. Montrer que les propositions suivantes sont equivalentes :[MISSING$_{\text{PAGEFAIL}}$:1]# 621 Quelles sont les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, PA soit diagonalisable ?

Exercice 562 [Mines 622] Quelles sont les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, PA soit trigonalisable ?

Exercice 563 [Mines 623] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ defini par
$\forall T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ u(T) = AT - TB$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ (resp. $\beta \in \mathbb{C}$) une valeur propre de A (resp. B). Montrer que $\alpha - \beta$ est valeur propre de u.
- Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u, et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associe.

Montrer que, pour tout polynome $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)T = TP(\lambda I_n + B)$.

- Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$ telles que $\lambda = \alpha - \beta$.
- En deduire une condition necessaire et suffisante pour qu'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AT = TB$.

Exercice 564 [Mines 624] • Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ existe-t-il $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = \lambda BA$?

▷ Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ est-il vrai que, pour tout $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = \lambda BA$, les matrices A et B sont diagonalisables ?

Exercice 565 [Mines 625] On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des suites bornees de $(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}}$.
On s'interesse a l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathbb{B})$ qui a (u_n) associe (u_{n+1}).

- Determiner les valeurs et les vecteurs propres de T.
- Soit $S \subset \mathbb{B}$ un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{B}$ stable par T. On note $\widetilde{T}$ l'endomorphisme induit par T sur S. Montrer que l'on dispose de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ distincts tels que

$$S = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\left(\widetilde{T} - \lambda_i \mathrm{id}\right)$$

Exercice 566 [Mines 626] • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable. Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}$?

▷ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Resoudre l'equation $e^M = A$.

Exercice 567 [Mines 627] Soient $(E, \langle\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $v_1, \ldots, v_{n+2}$ des vecteurs de E. Montrer qu'on ne peut avoir : $\forall i \neq j,\ \langle v_i, v_j \rangle < 0$.

Exercice 568 [Mines 628] Soient $(E, \langle\rangle)$ un espace euclidien, $c_1, c_2 \in E$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{+*}$.

- A quelle condition les boules fermees $B_f(c_1, r_1)$ et $B_f(c_2, r_2)$ se rencontrent-elles ?
- A quelle condition les spheres $S(c_1, r_1)$ et $S(c_2, r_2)$ se rencontrent-elles ?

Exercice 569 [Mines 629] Soient E un espace prehilbertien reel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E telle que $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$. Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormalee de E. Le resultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus la famille libre, mais seulement constituee de vecteurs non nuls ?# 630 Soient E un espace euclidien, A une partie de E et $B = \left\{\langle x, y \rangle\ ;\ (x, y) \in A^2\right\}$. Montrer que A est fini si et seulement si B est fini.

Exercice 570 [Mines 631] Soient E un espace euclidien, A et B deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux. Montrer que les symetries orthogonales par rapport a A et par rapport a B commutent et que leur composee est la symetrie orthogonale par rapport a $(A + B)^{\perp}$.

Exercice 571 [Mines 632] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $a \in E \setminus \{0\}$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\Phi_\lambda : x \mapsto x - \lambda \langle a, x \rangle a$.

- Determiner les λ pour lesquels Φ_λ est inversible.
- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, calculer $\Phi_\lambda \circ \Phi_\mu$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Determiner les elements propres de Φ_λ.

Exercice 572 [Mines 633] Soit E un espace euclidien.

- Trouver les endomorphismes f de E tels que :

$\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y)\rangle = 0.$

- Pour un tel f, discuter de la nature de la suite de terme general \$ un=1$\overline{n\sum}$k=0n-1fk\$.

Exercice 573 [Mines 634] • Enoncer le theoreme de reduction pour une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

- ▷ Montrer que deux rotations de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ qui ont meme axe commutent.
- ▷ Montrer que deux demi-tours de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ d'axes orthogonaux commutent.
- ▷ Montrer que si deux rotations de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ commutent, alors on est dans l'un des deux cas precedents.

Exercice 574 [Mines 635] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

- Montrer que $A(a, b, c)$ est dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynome $X^3 - X^2 + t$ ou t appartient a un intervalle I que l'on determinera.
- Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determiner une droite et un plan stables par $A(a, b, c)$.
- Si $A(a, b, c) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, caracteriser l'endomorphisme canoniquement associe.

Exercice 575 [Mines 636] On travaille dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$. Pour P et Q dans E, on pose $\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t} dt.$

- Montrer que Φ est correctement definie et munit l'espace E d'un produit scalaire.
- Calculer $\Phi(X^p, X^q)$ pour $p, q \in \mathbb{N}$.
- Calculer l'orthonormalisee de Gram-Schmidt de la famille $(1, X, X^2)$.
- Calculer la distance de X^3 a $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 576 [Mines 637] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(P(x) + x^n\right)^2 \, dx \geq (n!)^2$.

Exercice 577 [Mines 638] Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. - Montrer que l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ d\$\ !\$efinit un produit scalaire sur E, - Determiner $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

Exercice 578 [Mines 639] Calculer le minimum de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \int_0^1 (t\ln(t) - xt - y)^2 dt$.

Exercice 579 [Mines 640] On fixe un entier $n \geq 0$, et on pose $Q_i = \left(X^i(1 - X)^i\right)^{(i)}$ pour $i \in 0, n$. On munit egalement $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire d\$\ !\$efini par $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt$.

- Montrer que $(Q_0, \ldots, Q_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- On fixe $k \in 0, n$ et on note $\mathcal{F}_{k,n}$ l'ensemble des elements de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le coefficient de X^k est egal a 1. Montrer que $\mathcal{F}_{k,n}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}_n[X]$, et preciser sa direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{k,n}$.
- Trouver $R_k \in \mathcal{F}_{k,n} \cap \overrightarrow{\mathcal{F}}_{k,n}^{\perp}$, et calculer $\int_0^1 R_k(t)^2\, dt$. Interpreter le resultat.

Exercice 580 [Mines 641] Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites reelles et $D : u \in E \longmapsto (u_{n+1} - u - n \in \mathbb{N}$.

- Verifier que D est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? Surjectif ?
- Donner les elements propres de l'endomorphisme D.
- Soit F l'espace des suites reelles de carre sommable.

Montrer que F est stable par l'endomorphisme D.

- On munit F de son produit scalaire $\langle\ \rangle$ usuel.

Decrire l'ensemble \$H= \\$\langle u, D(u)\rangle$ $\overline{\|u\|^2,}$\ u∈ F\\(0)n∈ N\\.\$

Exercice 581 [Mines 642] Soient $(E, \langle\ \rangle), p, q \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs orthogonaux.

- Verifier que $\operatorname{Im} p$ est stable par pq et que l'endomorphisme induit est symetrique.
- Montrer que $\operatorname{Ker}(pq) = \operatorname{Ker} q \oplus (\operatorname{Im}(q) \cap \operatorname{Ker}(p))$.
- Montrer que E est somme directe orthogonale de $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)$ et de $(\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$.
- En deduire que pq est diagonalisable.
- Montrer que le spectre de pq est inclus dans $[0, 1]$.

Exercice 582 [Mines 643] Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E. Montrer que $q \circ p$ est un projecteur si et seulement si p et q commutent.

Exercice 583 [Mines 644] On munit $E = \mathbb{R}^n$ munit du produit scalaire usuel. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par A. Montrer que $F^\perp$ est stable par A^T.
- On suppose $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $A^T A = AA^T$. Montrer que A est diagonalisable ou A est semblable a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\beta \neq 0$.# 645
- Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

- Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 584 [Mines 646] Soit E un espace euclidien de dimension 4. Trouver les endomorphismes $f \neq 0$ de E tels que $\operatorname{tr}(f) = 0,\ f + f^4 = 0$ et $f^* = -f^2$.

Exercice 585 [Mines 647] Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} M^j$. Etudier la convergence de la suite $(C - k \in \mathbb{N}$.

Exercice 586 [Mines 648] Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable a une matrice definie par blocs : $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou B est inversible de taille p. Montrer que p est pair.

Exercice 587 [Mines 649] Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable a une matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux antisymetriques de taille au plus 2×2.

Exercice 588 [Mines 650] Soient $A, M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que AA^T et $A^T A$ sont diagonalisables.
- Montrer que MN et NM ont les memes valeurs propres et que, pour toute valeur propre non nulle, les sous-espaces propres associes sont de meme dimension.
- Montrer que $A^T A$ et AA^T ont les memes valeurs propres avec les memes multiplicites.
- Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^T A = UAA^T U^{-1}$.

Exercice 589 [Mines 651] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T A = B^T B$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = QA$.

Exercice 590 [Mines 652] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = AA^T$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 591 [Mines 653] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que : $M^T M = MM^T$. Determiner $M^T M$ puis M.

Exercice 592 [Mines 654] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\det(A) \geq 0$.
- Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on pose $A_p = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$. Montrer que $\det(A_p) \geq 0$.

Exercice 593 [Mines 655] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k \geq 1}$ converge vers $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |b_{i,j}| \leq n\sqrt{\operatorname{rg} B}$.

Exercice 594 [Mines 656] Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}\right| \leq n \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.# 657 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)^2 \leq \operatorname{rg}(A) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.

Exercice 595 [Mines 658] Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Calculer $\max\{\operatorname{tr}(OS)\ ;\ O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice 596 [Mines 659] Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ (resp. $\mathcal{S}(E)$, $\mathcal{O}(E)$) l'ensemble des endomorphismes antisymetriques (resp. symetriques, orthogonaux) de E.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'ensemble $T = \{\operatorname{tr}(uv)\,;\, v \in \mathcal{O}(E)\}$ est majore.
- Montrer que si $u \in \mathcal{A}(E)$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tu) \in \mathcal{O}(E)$.
- On suppose que $\sup T$ est atteint en $v = \mathrm{id}$. Montrer que $u \in \mathcal{S}^+(E)$.
- Etudier la reciproque.

Exercice 597 [Mines 660] Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ sont les valeurs propres de Aprises avec multiplicite. Montrer que A est diagonale.

Exercice 598 [Mines 661]
- Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Montrer que $|x_j| \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} \|x\|_2$ pour tout $j \in 1, n$.

▷ Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.

Montrer que $|λ-{

trA}{n}≤$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} \left(\sqrt{\{ \backslash|A\backslash|_2{}^2\text{-}\{\frac{}{(\operatorname{tr} A)^2\}\{n\}\}.\$}}\right.$

Exercice 599 [Mines 662] Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, a\|X\|^2 \leq \langle X, AX \rangle \leq b\|X\|^2$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in [a, b], P(x) > 0$. Montrer que $P(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 600 [Mines 663]
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymetrique reelle. Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

▷ Montrer que $(I_n + A)(I_n - A)^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

▷ Soit $Q \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Resoudre l'equation $(I_2 + A)(I_2 - A)^{-1} = Q$, d'inconnue une matrice antisymetrique $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 601 [Mines 664] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A^{-1}$.
- On pose $D = CBC$. Montrer que $\det(I_n + D)^{1/n} \geq 1 + \det(D)^{1/n}$.
- En deduire que $\det(A + B)^{1/n} \geq \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}$.
- Est-ce encore vrai si $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?

Exercice 602 [Mines 665] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient a $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si, pour toute matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$.

Exercice 603 [Mines 666] On considere la forme quadratique $q : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x+z)^2 + 2xy + 4yz$.

- Determiner a, b, c tels que $q(x,y,z) = a(x+y+z)^2 + b(y-z)^2 + cz^2$.
- La forme quadratique q est-elle definie positive ?
- Trouver les plans de $\mathbb{R}^3$ sur lesquels la restriction de q est definie positive.$_{\text{Analyse\_}}$

Exercice 604 [Mines 667] Soient E un espace vectoriel norme et A une partie de E. On considere l'ensemble des parties que l'on peut obtenir en appliquant successivement des passages a l'interieur ou a l'adherence a partir de A.

- Montrer qu'il y en a au plus 7.
- Donner une partie A telle qu'il y en ait exactement 7.

Exercice 605 [Mines 668] Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel norme et A une partie non vide de E.
Soit $f : x \in E \mapsto d(x, A) = \inf\{\|x-a\|,\ a \in A\}$.

- Montrer que f est 1-lipschitzienne.
- Montrer que A est ferme si et seulement si $A = f^{-1}(\{0\})$.
- Montrer que tout ferme de E est intersection decroissante d'ouverts.
- Montrer que tout ouvert est union croissante de fermes.

Exercice 606 [Mines 669] Soient E un espace vectoriel norme et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

- Montrer que : $\forall x \in E, \exists y \in F, d(x,F) = \|y-x\|$.
- On suppose que $F \neq E$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u,F) = \|u\| = 1$.
- En deduire que $B_f(0,1)$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Exercice 607 [Mines 670] Determiner les sous-groupes compacts de $\mathbb{C}^*$.

Exercice 608 [Mines 671] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image de tout ouvert par f est un ouvert.

Exercice 609 [Mines 672] • Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'equivalence entre :
(i) $|f(x)| \to +\infty$ lorsque $N(x) \to +\infty$;
(ii) l'image reciproque de tout compact par f est un compact.

- Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que l'image reciproque de tout compact par f est un compact. Montrer que l'image directe de tout ferme par f est un ferme.
- La reciproque du resultat precedent est-elle vraie ?

Exercice 610 [Mines 673] On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$.
Si $f \in E$, on pose $u(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k f\left(\frac{1}{k}\right). \in \mathbb{R}$.

- Montrer que u est bien definie sur E.
- Montrer que u est continue sur E et determiner sa norme subordonnee.

Exercice 611 [Mines 674] Soient $L^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites sommables et $N : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$.

- Montrer que N est une norme.
- Soit A l'ensemble des suites de $L^1(\mathbb{R})$ nulle a partir d'un certain rang. Donner l'adherence et l'interieur de A. Ind. Remarquer que A est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.# 675

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $D = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \ ;\ \sum x_i^2 < 1,\ \sum x_i > 1\right\}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq \|x-y\|^2$. Que dire de f ?

Exercice 612 [Mines 676] Soient $(E, \| \ \|)$ un espace norme reel, $p \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$,.

- Montrer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre si et seulement si

$\inf\left\{\|\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\| \ ;\ (\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\right\} > 0$.

- En deduire que l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ tels que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre est un ouvert de E^p. Retrouver ce resultat plus simplement si E est de dimension finie.

Exercice 613 [Mines 677] Soient $n \geq 2$, K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Une partie $A \subset K$ est ε-separee si, pour tous $x, y \in A$ tel que $\|x-y\| < \varepsilon$, on a $x = y$.

- Montrer qu'il existe un entier $M(\varepsilon)$ tel que toute partie ε-separee de K est de cardinal inferieur a $M(\varepsilon)$ et il existe une partie ε-separee de K de cardinal $M(\varepsilon)$.
- Soit $f : K \to K$. On suppose que, pour tous $x, y \in K$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x-y\|$. Montrer que f est surjective.

Exercice 614 [Mines 678] Soient $n \geq 2$ et $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est compact. Montrer que f admet un extremum global. Que se passe-t-il si $n = 1$?

Exercice 615 [Mines 679] Soient $(E, \| \|)$ un espace norme reel de dimension finie, $k \in]0,1[$, f une application k-lipschitzienne de E dans E. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 616 [Mines 680] Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Pour $f \in E$ on pose $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_{-1}^0 f(t)\,dt$.

- Montrer que φ est une forme lineaire continue sur E et calculer $\|\varphi\|$.
- Existe-t-il f unitaire telle que $|\varphi(f)| = \|f\|$?

Exercice 617 [Mines 681] On note E l'espace vectoriel des fonctions de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$ continues par morceaux, muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 fg$ et de la norme euclidienne associee $\| \|$.

On dit qu'une suite $(f - n \geq 0 \in E^{\mathbb{N}}$ converge fortement (resp. faiblement) vers $f \in E$ si $\|f_n - f\| \to 0$ (resp. $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in C^1([-1,1],\mathbb{R})$).

- Montrer que la convergence uniforme implique la convergence forte. La reciproque estelle vraie ?
- Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
- Soit $(f - n \geq 0 \in E^{\mathbb{N}}$ convergent faiblement vers $f \in C^1([-1,1],\mathbb{R})$ et verifiant de plus $\|f_n\| \to \|f\|$. Montrer qu'alors $(f - n \geq 0 \in E^{\mathbb{N}}$ converge fortement vers f.
- Soit $(\varphi - n \geq 0 \in C^1([-1,1],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformement vers φ et telle que $(\varphi'_n)_{n\geq 0}$ converge uniformement. Soit par ailleurs $(f - n \geq 0 \in E^{\mathbb{N}}$ bornee et convergeant faiblement vers f. Montrer qu'alors $\langle f_n, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$.
- On pose $f_n(x) = \sin(nx)$ pour $n \geq 0$ et $x \in [-1,1]$. - Montrrer que $(f - n \geq 0$ converge faiblement vers la fonction nulle. - La suite $(f - n \geq 0$ converge-t-elle fortement ?

Exercice 618 [Mines 682] Soient $a_1 < \cdots < a_p$ des reels et $P = \prod_{i=1}^p (X - a_i)$.

On pose : $E = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ P(M) = 0\right\}$.

- Soit $M \in E$. Determiner les valeurs possibles de $\operatorname{tr} M$.
- Determiner les matrices $M \in E$ verifiant $\operatorname{tr} M = na_1$.
- Montrer que la matrice $a_1 I_n$ est isolee dans E.
- La matrice $\operatorname{Diag}(a_2, a_1, \ldots, a_1)$ est-elle isolee ?
- Generaliser.

Exercice 619 [Mines 683]
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P est scinde sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.
  - ▷ Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisables est ferme.
  - ▷ Quelle est l'adherence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 620 [Mines 684] Soient $n \geq 2$ et $r \in [1, n-1]$. L'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrees de taille n et de rang r est-il ouvert ? ferme ? Determiner l'interieur et l'adherence de $\mathcal{E}$.

Exercice 621 [Mines 685] On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel defini par

$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ et de la norme associee $\| \ \|_2$. Soit F un sous-espace de E tel qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall f \in F, \|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$.

- Montrer que $F \neq E$.
- Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille orthonormale de F.

Montrer que $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $|\sum_{i=1}^n a_i f_i| \leq C\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

- En deduire que F est de dimension finie majoree par C^2.

Exercice 622 [Mines 686] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si l'ensemble $\{PAP^{-1},\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ est ferme.

Exercice 623 [Mines 687] Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Exercice 624 [Mines 688] Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il un sous-espace vectoriel ?
- Quel est le sous-espace vectoriel engendre par $\mathcal{D}$? par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{D}$?
- L'ensemble $\mathcal{D}$ est il ouvert ? ferme ?

Exercice 625 [Mines 689] On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, pour $A \in E$, $\|A\| = \sup_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$. - Montrer que $\| \|$ est une norme d'algebre.

- Soit $A \in E$. Etudier la convergence de la serie $\sum A^k$ si $\|A\| < 1$.

Cette condition est-elle necessaire pour que la serie soit convergente ?

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_k = \left(I_n + \frac{A}{k}\right)^k$. Etudier la convergence et la limite de la suite (U_k).

Exercice 626 [Mines 690] Lorsque J est un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $S_n(J) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \ \ \mathrm{Sp}(M) \subset J\}$.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $S_n(I)$ est convexe.
- Montrer que $S_n(\overline{I}) = \overline{S_n(I)}$.

Exercice 627 [Mines 691] • Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un ferme non compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

▷ Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

▷ Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

▷ En deduire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

Exercice 628 [Mines 692] Determiner la limite de la suite de terme general \$ u$_n$=$\sum_{k=0}$$^{n-1}$$\left(\frac{n-k}{n}\right)$ ^{n}\$.

Exercice 629 [Mines 693] On pose \$ u$_n$=$\sum_{k=1}$^{n}{1}{k}$\left(1-\frac{1}{n}\right)$ ^{k}\$$pour tout n \geq 1$.

- Montrer que la suite $(u - n \geq 1$ est divergente.
- Donner un equivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 630 [Mines 694] Soit \$ f :[0,2]→R\$ une fonction C^1. On pose \$ u$_n$=1$\overline{n\sum}$$_{k=1}$$^{nf\,(\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}}$\$$pour n \geq 1$.

Etudier la convergence de la suite $(u - n \geq 1$.

Exercice 631 [Mines 695] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose \$ u$_n$=$\sum_{k=1}$$^{n\sin\,(\frac{\{}{\sqrt{k}\}\{n\}}}$\$$. Determiner un equivalent de u_n$.

Exercice 632 [Mines 696] Soit $\mathcal{B}$ le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ forme des suites $(u - n \in \mathbb{Z}$ bornees. Soit T l'endomorphisme de $\mathcal{B}$ qui a $(u - n \in \mathbb{Z}$ associe $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

- Montrer que T est lineaire. Determiner ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
- Determiner les sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{B}$ stables par T.

Exercice 633 [Mines 697] Etudier les suites definies par u_1, v_1 reels et

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, \$ u$_{n+1}$=u$_n$+v$_{n\arctan\,(\frac{1}{n^2}}$\$$et$\$$v_{n+1} = v_n - u_{n\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ \$.

Exercice 634 [Mines 698] \$\ \ - La suite $(d - n \geq 1$ est-elle convergente ? - La suite $(d - n \geq 1$ est-elle bornee ?

Exercice 635 [Mines 699] Soit $(b - n \in \mathbb{N}$ une suite strictement positive, croissante et non majoree.

- Montrrer que, si $(a - n \in \mathbb{N}$ est une suite reelle convergente de limite ℓ, alors

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

- Soit $(a - n \in \mathbb{N}$ une suite reelle. Montrer que, si la suite $\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.
- La reciproque de la propriete precedente est-elle vraie ?

Exercice 636 [Mines 700] Soit $(a - n \geq 0$ une suite reelle decroissante de reels strictement positifs, telle que $a_0 = 1$. On pose $b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{a_k}$ pour tout $n \geq 1$.

- Montrrer que $b_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geq 1$.
- On fixe $\ell \in [0, 1]$. Montrer que l'on peut choisir la suite $(a - n \geq 0$ de telle sorte que $b_n \to \ell$.

Exercice 637 [Mines 701] Soit $a \in]0, 1[$. On definit (u_n) par $u_0 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2 \ln(u_n)$.

- Montrer que (u_n) est definie et etudier sa convergence.
- On pose $F : x \mapsto \int_a^x \frac{dt}{t^2 \ln t}$. Montrer que $F(u_{n+1}) - F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- En deduire un equivalent de $F(u_n)$. Qu'en deduire sur u_n ?

Exercice 638 [Mines 702] Soit $(u - n \in \mathbb{N}$ definie par $u_0 \in]0, \pi/2]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$. Etudier la convergence de (u_n). Determiner un equivalent de u_n.

Exercice 639 [Mines 703] Pour tout $n \geq 2$, on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

- Montrer que l'equation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0, 1]$.
- Etudier la monotonie de la suite (x_n). Montrer sa convergence.
- Determiner la limite de la suite (x_n) et un equivalent simple de x_n.

Exercice 640 [Mines 704] Determine un developpement asymptotique a deux termes de x_n.

Exercice 641 [Mines 705] Soit (u_n) une suite reelle definie par $u_0 \geq 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$.

- Si (u_n) converge, quelle est sa limite ?
- On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$. Montrer que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
- Etudier la convergence de (u_n) dans le cas general.

Exercice 642 [Mines 705] Pour $n \geq 2$, on considere l'equation $\sin(x) = \frac{x}{n}$.

- Montrer que cette equation admet une unique solution sur $]0, \pi[$ qu'on notera x_n.
- Montrer que la suite $(x - n \geq 2$ converge. Quelle est sa limite ? - Donner un developpement asymptotique de x_n a la precision \$o$\left(\frac{1}{n^3}\right)$.\$

Exercice 643 [Mines 706] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{i=0}^{n}(X - i)$.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! r_n \in \left]0, 1\right[, P_n'(r_n) = 0$.

- Determiner un equivalent simple de r_n.

Exercice 644 [MINES 707] Soit (u_n) la suite definie par $u_0 \geq 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$

- Montrer que $u_n \to +\infty$.
- Donner un developpement asymptotique a trois termes de u_n.

Exercice 645 [MINES 708] Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P)=⊃t∈[0,1]|P(t)|.$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des polynomes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ et $a_n = \inf_{P \in E_n} N(P)$.

- Montrer que $a_n > 0$; calculer a_0 et a_1.
- Montrer que $(a - n \in \mathbb{N}$ est decroissante et de limite nulle.

Exercice 646 [MINES 709] Limite et developpement asymptotique en $o(1/n)$ de $u_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^{3/2}}\right)$.

Exercice 647 [MINES 710] Soit (u_n) une suite reelle verifiant : $∀(m,n)∈N^{2,u}_{n+m}≤ u_m+u_n.$ Montrer que : $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf\left\{\frac{u_n}{n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 648 [MINES 711] • Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ $(a \in \mathbb{R})$ ou dense dans $\mathbb{R}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{\pi}{\theta} \notin \mathbb{Q}$.

  - ▷ Montrer que $A = \{p\theta + 2\pi q,\ (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
  - ▷ Expliciter les valeurs d'adherence de la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.
  - ▷ Expliciter les valeurs d'adherence de la suite $(\cos(\sqrt{n}\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 649 [MINES 712] Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Convergence et somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Ind. Montrer que $\tan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$.

Exercice 650 [MINES 713] Soit (u_n) une suite reelle telle que $n(u_{n+1} - u_n) \to 1$. Quelle est la nature de la serie $\sum u_n$?

Exercice 651 [MINES 714] Determiner la convergence et la somme de la serie de terme general $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Exercice 652 [MINES 715] Determiner la nature de $\sum \frac{\cos(\ln n)}{\ln n}$.# 716 Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2$. Determiner la nature de $\sum \dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 653 [MINES 717] Nature de la serie de terme general $\dfrac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - (-1)^n}$?

Exercice 654 [MINES 718] Soit $\alpha > 0$ fixe. Nature de la serie de terme general $\sum \dfrac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n^\alpha}$?

Exercice 655 [MINES 719] Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in]0, 1[$. Nature de la serie $\sum \dfrac{(-1)^{\lfloor n^\beta \rfloor}}{n^\alpha}$.

Exercice 656 [MINES 720] • Montrrer que $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$.

  - ▷ Nature de la serie de terme general $u_n = \ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right)$?

Exercice 657 [MINES 721] Soient a, b deux reels tels que $0 < a < b$.

On pose $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b} u_n$.

- Determiner une condition necessaire et suffisante pour que la serie $\sum u_n$ soit convergente.
- Dans ce cas, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} n(u_{n+1} - u_n)$.
- En deduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 658 [MINES 722] Soit $(u - n \geq 0$ une suite decroissante de reels positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{1 + n^2 u_n}$. Montrrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice 659 [MINES 723] On pose $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\, dx$. Quel est le signe de u_n ? Montrrer que la serie $\sum u_n$ est semi-convergente.

Exercice 660 [MINES 724] Etudier $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{n}{k\sqrt{k^2 - n^2}}$.

Exercice 661 [MINES 725] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \dfrac{\cos(\ln(t))}{t}\, dt$ et $v_n = \dfrac{\cos\ln(n)}{n}$.

- Determiner la nature de la serie $\sum u_n$. - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $u_n - v_n = \int_n^{n+1} (t - n - 1) \frac{\cos\ln(t) + \sin\ln(t)}{t^2}\, dt$.
- En deduire la nature de la serie $\sum v_n$.

Exercice 662 [MINES 726] Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Montrer que $\sum f(n)$ converge.

Exercice 663 [MINES 727] On dit que la serie de terme general u_n enveloppe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a - \sum_{k=0}^n u_k| \leq |u_{n+1}|$. On dit qu'elle enveloppe strictement $a \in \mathbb{R}^{+*}$ lorsqu'il existe une suite $(\theta_n) \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a - \sum_{k=0}^n u_k = \theta_{n+1} u_{n+1}$.

- Soit $a > 0$. Donner un exemple de serie divergente qui enveloppe a.
- Donner un exemple de serie convergente qui enveloppe un reel $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
- Donner un exemple de serie convergente qui n'enveloppe aucun reel $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer que, si une serie enveloppe strictement un reel $a > 0$, alors elle est alternee.

Exercice 664 [MINES 728] • Soit $\sum u_n$ une serie a termes positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge aussi.

▷ Soit $\sum y_n$ une serie a termes complexes telle que, pour toute suite (x_n) qui tend vers 0, la serie $\sum x_n y_n$ converge. Montrer que $\sum |y_n|$ converge.

Exercice 665 [MINES 729] Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Construire $(v_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, croissante et de limite $+\infty$, telle que $\sum u_n v_n$ converge.

Exercice 666 [MINES 730] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Montrer que les proprietes suivantes sont equivalentes :

1. pour toute serie $\sum u_n$ convergente de terme general positif, la serie $\sum f(u_n)$ est convergente ;

ii) l'application $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est bornee au voisinage de 0^+.

Exercice 667 [MINES 731] Soit $\sum u_n$ une serie convergente a termes strictement positifs.

- Montrer que $\sum_{k=1}^n k u_k = o(n)$.
- Montrer que $\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k$ est le terme general d'une serie convergente.
- Montrer que la serie de terme general $\frac{1}{n+1} \left(n! \prod_{k=1}^n u_k\right)^{1/n}$ est convergente et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(n! \prod_{k=1}^n u_k\right)^{1/n} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

Exercice 668 [MINES 732] Pour toute permutation f de $\mathbb{N}^*$, on note \$Ef= \\$\alpha$ ∈R,\\;$\sum$f(n)$\frac{}{\{n^\alpha\}<+\infty}$\\.\$

- Montrer qu'il existe $f \in S(\mathbb{N}^*)$ tel que $E_f = \varnothing$.
- Soit $f \in S(\mathbb{N}^*)$. Montrer que si $E_f \neq \varnothing$, alors c'est un intervalle minore par 2 et non majore.
- Montrer que, si $\beta > 2$, alors il existe $f \in S(\mathbb{N}^*)$ tel que $E_f =]\beta, +\infty[$.

Exercice 669 [MINES 733] Soit $f_n = x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

- Montrer que, pour n pair, f_n ne s'annule pas et que, pour n impair, f_n s'annule en un unique point r_n.
- Montrer que, pour n impair, $-2n - 3 < r_n < 0$.

Exercice 670 [MINES 734] Soit α un reel non nul. On pose, pour $x \in [-1,1]$, $g_\alpha(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$. A quelle condition sur α la fonction g_α est-elle polynomiale ?

Exercice 671 [MINES 735] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2, telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Exercice 672 [MINES 736] Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que f est convexe si et seulement si : $\forall (x,y) \in I^2,\ \exists t \in]0,1[,\ f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t f(y)$.

Exercice 673 [MINES 737] Trouver les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)\cos(x)$.

Exercice 674 [MINES 738] Soient $A, B \in \mathbb{R}^+$, $f\colon \mathbb{R} \to$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq A$ et $|f''(x)| \leq B$.

- Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}^{+*}$, $|f'(x)| < \frac{A}{h} + \frac{Bh}{2}$.
- Trouver la meilleure majoration de $|f'(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 675 [MINES 739] Soit $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto x - \ln(1+x)$.

- Montrer que f definit une bijection f_1 de $]-1, 0]$ sur $\mathbb{R}^+$ et une bijection f_2 de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.
- Determiner un equivalent de f en 0. En deduire un equivalent de f_1^{-1} et f_2^{-1} en 0.
- Determiner le developpement asymptotique a l'ordre 2 de f_2^{-1} en 0.

Exercice 676 [MINES 740] Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{C})$. Soit $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],[-1,1])$ strictement croissante et surjective. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ l'application qui a $f \in E$ associe $f \circ g$. Soit F un sous-espace de E de dimension finie stable par Φ. On note Φ_F l'endomorphisme de F induit par Φ sur F.

- Montrer que Φ_F est un automorphisme de F.
- Montrer que la seule valeur propre de Φ_F est 1.

- Soit $\Psi = \Phi_F - \mathrm{id}_F$. Montrer que Ψ est nilpotent.# 741

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ derivable. Montrer l'equivalence entre les assertions suivantes : i) $f(0) = I_n$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(0)f(x)$, ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \det(f(x)) \neq 0$.

Exercice 677 [Mines 742] Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \in E \mapsto f'$. Montrer que D est un endomorphisme de E et determiner ses elements propres.

Exercice 678 [Mines 743] Soient $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$. On suppose que $f'(x)\, P\left(f(x)\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Determiner un equivalent de f en $+\infty$.

Exercice 679 [Mines 744] Soient $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue, $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose : $h(x) \int_0^x h^n \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Determiner un equivalent de h en $+\infty$.

Exercice 680 [Mines 745] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
On pose $F = \left\{ g \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})\ ;\ g(a) = g(b) = g'(a) = g^{'}(b) = 0 \right\}$.

- On fixe $f \in E$.

Montrer qu'il existe $g \in F$ tel que $f = g^{''}$ si et seulement si $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b t f(t)dt = 0$.

- Soit $h \in E$ tel que $\forall f \in F, \int_a^b h g^{''} = 0$. Montrer que h est affine.

Exercice 681 [Mines 746] Soient $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et u l'application definie par : $\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], u(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t)\, dt$. Verifier que u est un endomorphisme de E. Determiner ses elements propres.

Exercice 682 [Mines 747] Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x e^{t^2}\, dt = F(x)\, e^{x^2}$.

Exercice 683 [Mines 748] Etudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\sqrt{1-t}}$.

Exercice 684 [Mines 749] Calculer $I = \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}} + 1}\, dx$.

Exercice 685 [Mines 750] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a, b], R)$, $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in [a, b]$, $P(x) \leq f(x) \leq Q(x)$ et $\int_a^b (Q - P) \leq \epsilon$. Est-ce toujours vrai si f est uniquement continue par morceaux ?

Exercice 686 [Mines 751] Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. - Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in 0, n$, $\int_0^1 f(t)\, t^k dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois.

- On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)\, t^k dt = 0$. Montrer que f est nulle.

Exercice 687 [Mines 752] Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que : $\forall (\alpha, \beta) \in [a, b]^2, \int_\alpha^\beta f = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 688 [Mines 753] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $F = \left\{ g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}),\ g(a) = g(b) = 0 \right\}$. Determiner les $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ verifiant : $\forall g \in F, \int_a^b fg = 0$.

Exercice 689 [Mines 754] Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer : $120 \left(\int_0^1 f \right)^2 \leq \int_0^1 (f^{''})^2$.

Exercice 690 [Mines 755] Soient $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de $\|\|\|_\infty$ et B la boule unite fermee de E. Soit $f \in E$. Montrer que $\sup_{g \in B} \int_a^b fg = \int_a^b |f|$.

Exercice 691 [Mines 756] Etudier la convergence et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$.

Exercice 692 [Mines 757] Etudier la convergence de l'integrale $\int_0^{+\infty} t |\cos t|^{t^5}\, dt$.

Exercice 693 [Mines 758] Nature de $\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^x\, dx$ puis de $\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^{x^\alpha}\, dx$ avec $\alpha \in]1, +\infty[$.

Exercice 694 [Mines 759] Soit $\alpha > 0$. Etudier la convergence de l'integrale : $\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \right) - 1 \right) dx$.

Exercice 695 [Mines 760] Nature suivant $a \in \mathbb{R}$ de $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x - \ln(1+x)}{x^a}\, dx$? Calculer $I(5/2)$.

Exercice 696 [Mines 761]
- Soit $\sum u_n$ une serie convergente a termes positifs. Nature de $\sum u_n^2$?
  - ▷ Soit f une fonction continue, positive et integrable sur $\mathbb{R}^+$. Nature de $\int_0^\infty f^2$?

Exercice 697 [Mines 762] Soient $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\, dt$.

- Montrer que I_n et J_n sont bien definies. Montrer que (I_n) est constante.
- Montrer que $I_n - J_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. - Montrrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et la calculer.

Exercice 698 [Mines 763] Soit $a > 0$. Montrer que l'integrale : $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) + \arctan(x/a)}{1 + x^2}\, dx$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 699 [Mines 764] Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

- Soient $I_1 = \int_0^1 (1 + \text{cotan}^2(\pi t))f(t)^2\, dt$ et $I_2 = \int_0^1 f'(t)f(t)\,\text{cotan}(\pi t)\, dt$. Montrer la convergence de I_1 et I_2. Trouver une relation entre I_1 et I_2.
- Montrer que $\int_0^1 f'(t)^2\, dt \geq \pi^2 \int_0^1 f(t)^2\, dt$ et etudier le cas d'egalite.

Exercice 700 [Mines 765] Soit f continue et T-periodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'existence et l'unicite de λ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\, dt$ converge.

Exercice 701 [Mines 766] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue decroissante.

- On suppose que f est integrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Etudier la reciproque.

Exercice 702 [Mines 767] Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que f' est bornee et $\int_{\mathbb{R}} f$ converge.
Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$.

Exercice 703 [Mines 768] Etudier la convergence $\int_0^{+\infty} t|\cos(t)|^{t^5}\, dt$.

Exercice 704 [Mines 769] Etudier la convergence et la convergence absolue de $\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\ln(x)} dx$.

Exercice 705 [Mines 770] • Soient f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f de signe constant. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c) \int_a^b f(t)dt$.

▷ Soit $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ continue telle que f admet la limite $\lambda \in \mathbb{R}$ en 0 et il existe $\mu \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)-\mu}{t}$ est d'integrable convergente sur $[1, +\infty[$. Montrer que, pour tout $a < b$, l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t} dt$ existe et la calculer.

Exercice 706 [Mines 771] Soit f une fonction continue par morceaux et de carre integrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f$.

- Determiner la limite de g en 0. - Determiner la limite de g en $+\infty$.

Exercice 707 [Mines 772] Donner un equivalent, quand $x \to +\infty$, de \$∫$_1$^{x}\ !t^{tdt}\,\$?

Exercice 708 [Mines 773] Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- Montrer que f est definie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et seulement sur cet ensemble.
- Etudier l'integrabilite de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 709 [Mines 774] Si $a > 0$ et $b > 0$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt$.

Exercice 710 [Mines 775] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction de classe C^1. On suppose que f'/f tend vers une limite $a \in \mathbb{R}^{-*}$ en $+\infty$.

- Montrer que f et f' sont integrables sur $\mathbb{R}^+$.
- Donner un equivalent de $\int_x^{+\infty} f$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 711 [Mines 776] Trouver une valeur approchee rationnelle a 10^{-3} pres de $\int_0^1 e^{-t} \ln(t)\, dt$.

Exercice 712 [Mines 777] Quelles sont les fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $\mathbb{R}^+$ d'une suite d'applications polynomiales reelles ?

Exercice 713 [Mines 778] Soient S un segment de $\mathbb{R}$ non reduit a un point, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, f une fonction de classe C^n de S dans $\mathbb{R}$ telle que $\|f^{(n)}\|_{\infty,S} < m$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - p\|_{\infty,S} < \varepsilon$ et $\|p^{(n)}\|_{\infty,S} < m$.

Exercice 714 [Mines 779] Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(p - n \geq 0$ d'applications polynomiales reelles telle que $(p - n \geq 0$ converge uniformement vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 715 [Mines 780] Soient a et b deux nombres reels tels que $a < b$ et $S = [a, b]$.

- On suppose que $S \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$. Expliciter une fonction continue f de S dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas limite uniforme sur S d'une suite d'elements de $\mathbb{Z}[X]$.
- On suppose $S \subset]0, 1[$. On definit une suite $(P - n \geq 0$ de polynomes par $P_0 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = 2P_n(1 - P_n)$. Montrer que $(P - n \geq 0$ converge uniformement sur S vers la fonction constante egale a $\frac{1}{2}$.
- On suppose que $S \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Montrer que toute fonction continue f de S dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur S d'une suite d'elements de $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 716 [Mines 781] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n(1 - \sqrt{x})$.

- Determiner le domaine de convergence D de la serie de fonctions $\sum f_n$.
- Y a-t-il convergence normale sur D ? - Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

Exercice 717 [Mines 782] Soit $\alpha > 0$. Etudier les modes de convergence de la serie de fonctions $\sum u_n$ definie par $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.

Exercice 718 [Mines 783] Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geq1} \frac{e^{-nx}}{x+n}$. Domaine de definition, continuite de f, equivalent de f aux extremites de son domaine de definition.

Exercice 719 [Mines 784] Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geq1} \frac{x}{n(1+nx^2)}$. Domaine de definition, continuite, etude de la derivabilite, equivalents en 0 et $+\infty$.

Exercice 720 [Mines 785] • Montrer que la serie de fonctions $\sum \frac{x\,e^{-nx}}{\ln(n)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ mais non normalement.

▷ Montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 721 [Mines 786] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(n+x)}$.

- Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$. On note $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
- Montrer que la serie $\sum f_n$ converge normalement sur les segments de la forme $[0, M]$ avec $M > 0$. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
- Etudier la continuite de f. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
- Soient $n \geq 1$ et $x_0 \geq n$. Montrer : $f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. En deduire : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$.

Exercice 722 [Mines 787] Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$.
On pose $f_0 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a,b]$, $f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t)dt$.
Etudier la convergence simple de la serie $\sum f_n$ et calculer sa somme.

Exercice 723 [Mines 788] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin(nx))^2}{n^2}$.

- Montrer que la fonction f est definie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est-elle derivable en 0 ?# 789

Soients $a > 0$ et $f :x↦ $\sum_{\text{n=1}}^{+\infty \ln}\left(1 + \frac{a}{n^2x^2}\right)$.$

Determiner l'ensemble de definition de f.
Determiner un equivalent de f en 0, et en $+\infty$.

Exercice 724 [Mines 790] • Justifier la convergence pour $x \in [0, 1[$ de$:f(x)=$\prod_{\text{n=0}}^{+\infty}\left(\frac{1+x^n}{\{}1+x^{\text{n+1}}\}\right)^{\text{x}^{\text{n}}}$.$

- Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $:ln f(x)=x-1$\frac{}{x\sum_{\text{n=1}}}^{+\infty x^{\text{nln}}(1+x^{\text{n}})+\ln}$ 2.$
- En deduire : $\forall x \in [0, 1[\,, \ln f(x) = \ln 2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{x^m}{1+x+\cdots+x^m}$.
- Montrer que f possede une limite finie en 1^- et l'expliciter.

Exercice 725 [Mines 791] Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

- Determiner les domaines de definition des fonctions $ f=$\sum_{\text{n=0}}^{+\infty u_{\text{n}}\$etg=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n}$.
- Trouver une equation fonctionnelle reliant f et g.
- Montrer que f est analytique. Qu'en est-il de g ?

Exercice 726 [Mines 792] Rayon de convergence et somme de $ f :x↦ $\sum_{\text{n=1}}^{+\infty \frac{\{}{x}\text{2n+2}\}\{n(n+1)(2n+1)\}\$}$.

Exercice 727 [Mines 793] Rayon de convergence et somme de $ f :x↦ $\sum_{\text{n=1}}^{+\infty \frac{x^n}{4n^2-5n+1}\$}$.

Exercice 728 [Mines 794] Determiner le rayon de convergence et la somme de la serie entiere $\sum z^{n+(-1)^n}$.

Exercice 729 [Mines 795] Soit u qui a $ P∈C[X]$ associe $ u(P) :z↦ $e^{\text{-z}} \sum_{\text{n=0}}^{+\infty \frac{P(n)}{n!} z^{\text{n}}\$.Montrerqueu}$ est bien definie, et que c'est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$. Determiner ses elements propres.

Exercice 730 [Mines 796] Soients $ q∈]-1,1[$ et $ f :x↦ $\sum_{\text{n=0}}^{+\infty \sin}(\text{q}^{\text{nx}})$$.

- Montrer que f est definie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Montrer que f est developpable en serie entiere.

Exercice 731 [Mines 797] Soient α et β deux reels strictement positifs.

- Montrer que la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\alpha n+\beta}$ est convergente. - On note S la somme de la serie ci-dessus et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha k+\beta}$.

Exprimer S et r_n sous forme integrale.

- Determiner le rayon de convergence de la serie entiere $\sum r_n x^n$. Etudier son comportement aux bornes de l'intervalle de convergence.

Exercice 732 [Mines 798] Montrer qu'au voisinage de 0, la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \ln(1 + xe^{-t})\,dt$ est developpable en serie entiere et en donner les coefficients.

Exercice 733 [Mines 799] Expliciter le developpement en serie entiere de $\ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$ au voisinage de 0.

Exercice 734 [Mines 800] Soient $\tau \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \arctan\left(\tau \frac{x-1}{x+1}\right)$. Montrer que f est developpable en serie entiere en 0 et preciser le domaine exact de validite.

Exercice 735 [Mines 801] Rayon de convergence, ensemble de definition et somme de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{ch}(n)}{n} x^{2n}$?

Exercice 736 [Mines 802] Determiner le developpement en serie entiere en 0 de $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)$.

Exercice 737 [Mines 803] On pose : $\forall n \geq 2, u_n = \sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(ij)^2}$ et $S : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n$.

- Determiner un equivalent simple de u_n.
- Determiner le rayon de convergence R de S et simplifier $S(x)$ sur $]-R,R[$.
- Etudier la bonne definition et la continuite de S en R et en $-R$.

Exercice 738 [Mines 804] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degre $p \in \mathbb{N}^*$.

- Determiner le rayon de la serie entiere $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n$ et montrer que la somme de cette serie s'ecrit sous la forme $\frac{Q(x)}{R(x)}$ avec $Q, R \in \mathbb{R}[X]$.
- Soit $M = (P(i+j))_{1\leq i,j\leq p+1}$. Montrer que $\det(M) = 0$.
- Montrer que $\det(P(i+j))_{1\leq i,j\leq p} \neq 0$.

Exercice 739 [Mines 805] Soit $f : x \mapsto (\arcsin(x))^2$.

- Montrer que f est solution d'une equation differentielle lineaire d'ordre 2, sur un intervalle que l'on precisera.
- Montrer que f est developpable en serie entiere au voisinage de 0. Experimer les coefficients de ce developpement en serie entiere et donner son rayon de convergence.

Exercice 740 [Mines 806] On definit la suite (a_n) par : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$. - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq a_n \leq n^2$ et en deduire le rayon de convergence R de la serie entiere $\sum a_n x^n$.
On pose $f : x \in]-R,R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Montrer que f est solution de $(1-x)y' - (1+2x)y = 0$.
- Expliciter f a l'aide des fonctions suuelles.

Exercice 741 [Mines 807] On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+in^2x}$.

- Montrer que f est bien definie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Est-elle developpable en serie entiere ?

Exercice 742 [Mines 808] • Rappeler la formule de Stirling.

▷ Calculer le rayon de convergence de la serie entiere $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$.
▷ Calculer la somme de cette serie entiere en -1 apres s'etre assure de son existence.
▷ Calculer $\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x}\mathrm{d}x$.

Exercice 743 [Mines 809] • Determiner le rayon de convergence de $f : z \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} z^k$.

▷ Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Calculer $\exp(f(z))$. Ind. Considerer $t \in [0,1] \mapsto \exp(f(tz))$.
▷ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que :

$∀ z∈C,\ |z|≤ $\alpha \Rightarrow$ det(I$_n$+zA)=exp ($\sum$$_{k=1}$$^{+∞}$$\frac{(-1)^k}{k}$ \,tr(A^k)\,z^k .$

Exercice 744 [Mines 810] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. - Determiner le rayon de convergence de la serie $f(z) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \operatorname{tr}(A^p)z^p$ - Calculer $f(z)$ en fonction du polynome caracteristique de A.

Exercice 745 [Mines 811] Soit $(a - n \geq 0 \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la serie $\sum n|a_n|$ converge.

- Montrer que le rayon de $\sum a_n z^n$ est superieur ou egal a 1.
- On suppose $|a_1| \geq \sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|$ avec $a_1 \neq 0$. Montrer que $f : z \in \mathbb{D} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est injective.

Exercice 746 [Mines 812] • Developpere en serie entiere $\varphi : z \mapsto \frac{z}{(1-z)^2}$. Montrer que φ est injective sur $D_o(0,1)$.

On pose $f : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ avec (a_n) une suite reelle. On suppose que f est definie et injective sur $D_o(0,1)$. - Montrrer que $f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$.

- En deduire que $\operatorname{Im} z \geq 0 \iff \operatorname{Im} f(z) \geq 0$.
- Soit $R \in]0,1[$. Calculer $\int_0^\pi \operatorname{Im} f(Re^{it})\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t$.
- Montrrer que : $\forall n \geq 2, |a_n| \leq n$.

Exercice 747 [Mines 813] Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n \,\mathrm{d}\,t$.

- Trouver une relation de recurrence sur (I_n).
- Montrrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Donner une expression similaire pour I_{2n+1}.
- Donner un equivalent de I_n.

Exercice 748 [Mines 814] Soit, pour $n \geq 2$, $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{1+t+\cdots+t^n}$. Determiner de trois facons differentes la nature de $\sum I_n$.

Exercice 749 [Mines 815] On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_1^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}\,x$. Justifier l'existence de (u_n). Etudier la convergence de la suite (u_n) et de la serie $\sum u_n$.

Exercice 750 [Mines 816] Developpement asymptotique a deux termes de $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx}\ln(n+x)dx$?

Exercice 751 [Mines 817] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on pose $u_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}\,x$. Determiner un equivalent simple de u_n dans les cas $\alpha = 0$, $\alpha > 1$, $\alpha = 1$.

Exercice 752 [Mines 818] • Montrrer que $\int_0^{+\infty} \cos\left(u^2\right)\mathrm{d}\,u$ converge.

▷ Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Trouver un equivalent de $I_n = \int_0^1 \cos\left(n\left(au^2+bu^3\right)\right) \mathrm{d}\, u$.

Ind. Poser $t = \sqrt{na}u$.

Exercice 753 [Mines 819] Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\, t}{(1+t^\alpha)^n}$.

- Justifier la convergence de $I_n(\alpha)$.
- Etablir une relation entre $I_{n+1}(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$. En deduire une expression de $I_n(\alpha)$ en fonction de $I_1(\alpha)$ et de α.
- Determiner la limite de la suite $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$.
- Montrrer l'existence d'un reel $K(\alpha)$ tel que $I_n(\alpha) \sim \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$ quand $n \to +\infty$.# 820

On pose, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x-1}$.

- Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, qu'on appellera toujours f par la suite.
- Donner un equivalent de $\int_0^1 x^n f(x)\, dx$.
- Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x^n)\, dx = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 754 [Mines 821] Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continue par morceaux, integrable, continue en 0. Montrer que $\int_0^1 x\, g(u)\, \mathrm{e}^{-xu}\, du \xrightarrow[x\to+\infty]{} g(0)$. On commencera par le cas ou g est bornee.

Exercice 755 [Mines 822] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}-1}{t} e^{-t} dt$.

- Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|e^{iu} - 1| \leq |u|$.
- En deduire que f est derivable sur $\mathbb{R}$ puis simplifier l'expression de f.

Exercice 756 [Mines 823] On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

- Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ converge.

On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt$.

- Montrer que F est definie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
- En deduire que $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+i}$.
- En deduire la valeur de I.

Exercice 757 [Mines 824] On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x^2+2itx)}\, dx$. Montrer que l'integrale $h(t)$ est bien definie pour tout $t \in \mathbb{R}$ puis la calculer explicitement.

Exercice 758 [Mines 825] On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x}\, dt$.

- Determiner le domaine de definition de f.
- Montrer que f est derivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et expliciter f'.
- On pose $g : x \mapsto f(x) + f(1/x)$. Simplifier $g(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 759 [Mines 826] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\, dt$.

- Montrer que F est definie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$.
- Exprimer F a l'aide de fonctions usuelles.# 827

On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\, dt$.

- Montrer que F est definie sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Trouver une equation differentielle d'ordre 1 verifiee par F.
- En deduire F.

Exercice 760 [Mines 828] Soit $f : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{tx-t^2}\, dt$.

- Montrer que f est definie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Quelle equation differentielle verifie f ?
- Trouver les solutions du probleme de Cauchy $-2y'' + xy' + y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 761 [Mines 829] • Determiner le domaine de definition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$.

▷ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

▷ Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

▷ Donner une expression de f' puis de f.

▷ En deduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Exercice 762 [Mines 830] On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} |\sin(t)| e^{-xt} dt$. Determiner le domaine de definition de la fonction f et montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Expliciter la valeur de $f(x)$.

Exercice 763 [Mines 831] Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x \cos(x-y) f(y)\, dy$. Montrer que g est bien definie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et trouver sa limite en 0. On suppose que f tend vers ℓ en $+\infty$. Etudier la limite de g en $+\infty$.

Exercice 764 [Mines 832] Soient $C > 0$, $d > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^d e^{-tx^2}(C+x^2)^\alpha dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{C^\alpha}{\sqrt{t}}$.

Exercice 765 [Mines 833] Soit $f : x \mapsto \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\, dt$.

- Determiner le domaine de definition de f, etudier la continuite et les symetries.
- Expliciter $f(x)$.

Exercice 766 [Mines 834] On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1-xt+xt^2}$.

- Determiner le domaine de definition de f.
- Determiner le developpement de f en serie entiere sur un intervalle I centre en 0 que l'on precisera.# 835

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \ln(1+xe^{-t})\, dt$. Montrer que f est developpable en serie entiere au voisinage de 0 et expliciter son developpement.

Exercice 767 [Mines 836] Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On considere la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$.

- On suppose f bornee. Montrer que F est definie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- On suppose que f admet une limite finie non nulle ℓ en $+\infty$. Donner un equivalent de F en 0^+.
- On suppose f developpable en serie entiere sur $\mathbb{R}^+$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et que la serie $\sum n! a_n$ converge. Etudier le comportement de $F(1/x)$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.
- Donner des exemples de fonctions f telles que le domaine de definition de F soit $]0,+\infty[$, $]1,+\infty[$ ou $\emptyset$.

Exercice 768 [Mines 837] On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{C}$ continues et integrables, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{C}$ continues telles que, pour tout $s > 0$, la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s}$ est integrable. Si $f \in \mathcal{E}$, on pose $\widehat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \dfrac{f(u)}{u+s}\, du$ pour tout $s > 0$.

- Quelles inclusions existent entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$?
- Dans cette question, on suppose que $f(u) = u^{\alpha-1}$, ou $\alpha \in]0,1[$. Montrer que $\widehat{f_\alpha}$ est proportionnelle a f_α.
- Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que $\widehat{f}$ est continue, et determiner $\lim_{s\to+\infty} \widehat{f}(s)$.

Exercice 769 [Mines 838] Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{\ln(t)}{1-t}\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\ln(1-t)}{t} dt$ et en deduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n n^2}$.

Exercice 770 [Mines 839]

- Soit $(a - n \geq 0 \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sommable. Montrer $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{t^n}{n!}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

▷ Montrer le meme resultat en ne supposant que la convergence de la serie $\sum a_n$.

Exercice 771 [Mines 840] Soient $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{1-\sin\alpha\cos t}$:

- Expliciter une suite (a_n) telle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$.
- En deduire, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de : $\int_0^\pi \dfrac{\cos(nt)}{1-\sin\alpha\cos t}\, dt$.

Exercice 772 [Mines 841] Soit $(\lambda - n \in \mathbb{N}$ une suite croissante de reels strictement positifs.
On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \exp(-\lambda_n x)$.

- Determiner le domaine de definition de f.On suppose dans la suite que (λ_n) tend vers $+\infty$.
- Montr per que l'integrale $\int_0^{+\infty} f$ converge et la calculer.
- Traiter le cas particulier ou $\lambda_n = n+1$.

Exercice 773 [Mines 842] Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et S l'ensemble des solutions de $y' = ay + b$. Montr per l'equivalence entre :

1. tous les elements de S sont bornes, ii) a et b sont integrables.

Exercice 774 [Mines 843] Determiner les fonctions y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ derivables et telles que $y'(x) = y(\pi - x)$.

Exercice 775 [Mines 844] Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = e^{-1/x^2}$.

- Montr per que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est-elle solution d'une equation differentielle lineaire homogene ?

Exercice 776 [Mines 845] Resoudre l'equation differentielle $y' + |y| = 1$.

Exercice 777 [Mines 846] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = 1$. Trouver les fonctions $y \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ solutions de $\sum_{k=0}^n y^{(k)}\omega^{n-k} = 0$.

Exercice 778 [Mines 847] On considere la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definie par : $f(x) = \exp(-x^{-2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montr per que f n'est solution d'aucune equation differentielle lineaire homogene a coefficients constants (d'ordre quelconque).

Exercice 779 [Mines 848] Resoudre le systeme differentiel \$ \

Exercice 780 [Mines 849] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note (S) le systeme differentiel : $\forall p \in [1,n], x_p^{(m)} = \sum_{q=1}^n a_{p,q} x_q(t)$. Montr per que A est nilpotente si et seulement si toutes les solutions de (S) sont polynomiales.

Exercice 781 [Mines 850] Resoudre les systemes : $ \

Exercice 782 [Mines 851] Determiner les solutions developpables en serie entiere au voisinage de 0 de l'equation : $2xy^{''} - y' + 2y = 0$. Les exprimer a l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 783 [Mines 852] • Resoudre l'equation : $(1+t^2)y^{''} + 4ty' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en cherchant des solutions developpables en serie entiere.

▷ Resoudre : $(1+t^2)y^{''} + 4ty' + 2y = \frac{1}{1+t^2}$.# 853

On considere l'equation differentielle : $y^{''} - y = |\cos x|$. Existe-t-il des solutions positives ? Bornees ? Positives et bornees ?

Exercice 784 [Mines 854] Soient a, b des fonctions continues et 2π-periodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit (E) l'equation differentielle $y' + a(x)y + b(x) = 0$. Soit $A : x \mapsto \int_0^x a(t)\,dt$ et $I = A(2\pi)$.

- Trouver une condition sur I pour que A soit 2π-periodique.
- Montrer que si y est solution de (E), alors $x \mapsto y(x+2\pi)$ est aussi solution de (E).
- Supposons $I \neq 0$. Montrer que (E) admet une unique solution 2π-periodique.
- Que dire si $I = 0$?
- Donner un exemple pour illustrer chacune de ces situations.

Exercice 785 [Mines 855] Soit $f : x \mapsto \int_0^{2\pi} e^{x\sin(t)}dt$.

- Montrer que f est solution de $(*) : xy^{''} + y' = xy$.
- Quelles sont les solutions developpables en serie entiere sur $\mathbb{R}$ de $(*)$?

Exercice 786 [Mines 856] • Soient $A \in \mathbb{R}^+$, $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues. On suppose que $\forall x \geq 0,\, f(x) \leq A + \int_0^x f(t)\,g(t)dt$. Montrer que $\forall x \geq 0,\, f(x) \leq A\exp\left(\int_0^x g(t)dt\right)$.

Soit $(*)$ l'equation differentielle $x^{''}(t) + a(t)x(t) = b(t)$ avec a et b continues sur $\mathbb{R}^+$, b et $t \mapsto t\,a(t)$ integrables sur $\mathbb{R}^+$. Soit x solution de $(*)$.

- Montrer que

$\forall t \geq 1,\, x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)\,a(u)\,x(u)du + \int_1^t (t-u)\,b(u)du.$

- On pose, pour $t \geq 1$, $y(t) = \dfrac{|x(t)|}{t}$. Montrer l'existence de K tel que :

$\forall t \geq 1,$ $y(t)≤ Kexp$\left(\int_1$^{tu}\,|a(u)|du≤ K exp$\left(\int_1$^{+\infty u}\,|a(u)|du.$

Exercice 787 [Mines 857] Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, A une application continue et T-periodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une application X de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t+T) = \lambda X(t)$.

Exercice 788 [Mines 858] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$; Expliciter les solutions de $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 789 [Mines 859] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A quelle condition est-il vrai que toutes les solutions du systeme differentiel $X'(t) = AX(t)$ sont bornees sur $\mathbb{R}$?

Exercice 790 [Mines 860] Soient $D = [0,1]^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = x(1-y)$ si $x \leq y$ et $f(x,y) = y(1-x)$ sinon. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur D et les determiner.

Exercice 791 [Mines 861] Etudier la differentiabilite de la fonction f definie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.# 862 On note T le triangle plein defini par les points $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Determiner le minimum sur T de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(1-x-y)$.

Exercice 792 [Mines 863] Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 1$ et $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- La fonction f admet-elle des derivees partielles en $(0,0)$?
- Etudier les variations de $g : x \mapsto f(x,0)$.
- Determiner les extrema de f.

Exercice 793 [Mines 864] Soit $f : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ definie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ sinon.

- Montrer que f est continue.
- Etudier les extrema de f.

Exercice 794 [Mines 865] Soient E un espace vectoriel norme de dimension finie, f une forme lineaire sur E.

Montrer que l'application $g : x \in E \mapsto f(x)\,e^{-\|x\|^2}$ admet un minimum et un maximum, puis determiner ce maximum et ce minimum.

Exercice 795 [Mines 866] Determiner les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ verifiant $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On pourra faire le changement de variables $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

Exercice 796 [Mines 867] Soit $K \in \mathbb{R}$. Determiner toutes les fonctions $f\ :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'equation $x\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) - y\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = K\,f(x,y)$.

Exercice 797 [Mines 868] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On dit que f est homogene de degre α si :
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, f(tx,ty,tz) = t^\alpha f(x,y,z)$. Montrer que f est homogene de degre α si et seulement si $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = \alpha f$.

Exercice 798 [Mines 869] Resoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
Ind. Utiliser le changement de variable $(u,v) = (x+y,\, 2x+y)$.

Exercice 799 [Mines 870] • Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt$.
On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et
$D = \Big\{\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})\ ;\ \forall (f,g) \in E^2, \varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)\Big\}$.

- Montrer que la famille $(\varphi - 1 \leq i \leq n$ est libre, avec : $\varphi_i : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.
- Montrer que D est de dimension finie.# 871

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $k \in [0,1[$ tells que: $\forall a \in \mathbb{R}^2, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \leq k$. Soit (u_n) definie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose \$:an=max(|un+1 $- u_n|, |u_{n+2} - u_{n+1}|)$.\$
Montrer : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^2)^2, \exists c \in \mathbb{R}^2, f(b) - f(a) = (b - a|\nabla f(c))$.
Montrer que \$:∀(x,y,x',y')∈R4, $|f(x,y) - f(x^{'},y')$ $\leq$ kmax$(|x-x'|, |y-y'|)$.\$$Montrerque\,:\,\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} \leq ka_n$, puis qu'il existe deux constantes q et C telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq Cq^n$.
Montrer que (u_n) est une suite convergente et donner une propriete verifiee par sa limite.

Exercice 800 [Mines 872] Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, K une partie compacte non vide de Ω, f une fonction de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$.

- On suppose que $\Delta f > 0$. Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
- On suppose que $\Delta f \geq 0$. Montrer que $\max_K f = \max_{\mathbf{FT}(K)} f$.

Exercice 801 [Mines 873] Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x^2 + y^2 < R^2\}$, $(a - n \geq 0$ une suite complex telle que $\sum a_n z^n$ ait pour rayon de convergence R. Pour $(x,y) \in D_R$, on pose $f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+iy)^n$. Montrer que f est de classe C^2 et harmonique sur D_R.

Exercice 802 [Mines 874] Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. On pose : $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto X^T A X - 2B^T X$.

- Calculer $\nabla f(X)$.
- Montrer que f admet un minimum global et le determiner.
- Soit (X_k) une suite de vecteurs non nuls verifiant

$\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = X_k - \frac{\|\nabla f(X_k)\|}{X_k^T A X_k} \nabla f(X_k)$. On suppose que la suite (X_k) est convergente.
Determiner sa limite.

Exercice 803 [Mines 875] Pour $x = (x_0, \ldots, x_n)$ et $y = (y_0, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, on pose
$f(x,y) = \Big(\sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j=k}} x_i y_j\Big)_{k \in [0,2n]} \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

- Soient $x, y \in (\mathbb{R}^{n+1}$ non nuls. Montrer que $f(x,y)$ est non nul.
- Soient u et v les applications de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ definies par $u : x \mapsto f(x,x)$ et $v : x \mapsto \frac{f(x,x)}{\|f(x,x)\|}$ ou $\|\ \|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^{2n+1}$. Calculer les differentielles de u et v.
- Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul. Calculer rg $(\mathrm{d}v(x))$.

Exercice 804 [Mines 876] ★ Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differentiable telle que : i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ est injective ; ii) $\|f(x)\| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

- Calculer $\mathrm{d}g$. - Montrrer que g admet un minimum.
- En deduire que f est surjective.

Exercice 805 [Mines 877] Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

- Montrre que f est convexe si et seulement si $f(y) - f(x) \geq df_x(y-x)$ pour tous $x, y \in U$. Que donne cette caracterisation dans le cas ou $n = 1$?
- Soient α et β des reels fixes. On note E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$. Soit $\Phi : f \in E \mapsto \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$. Montrre que Φ atteint sa borne inferieure en un unique element de E, que l'on precisera.

Exercice 806 [Mines 878] Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne canonique.
On pose $f : M \in E \mapsto \|M\|^2 = \mathrm{tr}(M^T M)$ et $g : M \in E \mapsto \det M - 1$. On note h la restriction de f a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

- Justifier que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer leur gradient en une matrice $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
- Montrre que f admet un minimum sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Soit M_0 une matrice ou il est ateint.

- Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale au gradient de g en M_0. Montrre qu'il existe un chemin γ de classe $\mathcal{C}^1$ defini sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, a valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = H$.
- Montrre que $(\nabla f_{M_0})^\perp = (\nabla g_{M_0})^\perp$.
- Calculer le minimum de h sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 807 [Mines 879] Si $n \in \mathbb{N}^*$, determiner $T_{I_n}\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, puis, si $M \in \mathrm{SO}_n(_R)$,$T_M\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Probabilities

Exercice 808 [Mines 880] On tire au hasard un element A de $P(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Calculer la probabilite que $\mathrm{card}\, A$ soit un entier pair.

Exercice 809 [Mines 881] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leq \frac{n}{2}$. On se donne deux unres contenant chacune des boules numerotees de 1 a n. On tire m boules dans chaque urne et l'on note X le nombre de doublons. Calculer la loi de X puis sa variance.

Exercice 810 [Mines 882] Un couple met au monde quatre enfants. Chaque enfant a la probabilite $p \in]0, 1[$ d'etre une fille, et les naissances sont independantes. On considere les evenements \$A :≪\$e dernier est une fille ⇒, \$B :≪\$e couple a autant de filles que de garcons ⇒, \$C :≪\$es garcons naissent toujours apres une fille ⇒.

- Les evenements A et B (resp. A et C) sont-ils independants ?
- Les evenements A, B, C sont-ils mutuellement independants ?

Exercice 811 [Mines 883] Soit $p \in]0, 1[$. Dans un sac contenant n jetons numerotes de 1 a n, on tire S jetons ou S est une variable aleatoire suivant la loi binomiale de parametre n et p. Quelle est la probabilite d'obtenir des jetons de numeros consecutifs ?

Exercice 812 [Mines 884] On lance une piece jusqu'a obtenir deux piles de plus que de faces ou deux faces de plus que de piles. On note $p \in]0, 1[$ la probabilite que la piece donne pile. On note X la variablealeatoire associee au nombre de lancers. Determiner la loi de X et montrer que X est presque surement finie. La variable aleatoire X est-elle d'esperance finie ?

Exercice 813 [Mines 885] Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules noires et $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches. On tire successivement et sans remise les boules. On note X la variable aleatoire qui donne le rang de la derniere boule blanche titee. Calculer la loi, l'esperance et la variance de X.

Exercice 814 [Mines 886] On considere une urne qui contient une proportion $p \in]0, 1[$ de boules blanches. On effectue un tirage avec remise des boules. Soit X_n la variable donnant le nombre de tirages successifs necessaires pour obtenir n boules blanches. Donner la loi de X_1 ainsi que sa fonction generatrice $\mathcal{G}_{X_1}$. En deduire $\mathcal{G}_{X_n}$. Loi et esperance de X_n ?

Exercice 815 [Mines 887] On considere une urne remplie avec des boules numerotees de 1 a $2n$. On procede a une suite de tirages sans remise.

- Calculer la probabilite que les boules impaires soient tires exactement dans l'ordre $1, 3, \ldots, 2n - 1$.
- Soit X la variable correspondant au nombre de tirages necessaires pour obtenir toutes les boules impaires. Determiner la loi et l'esperance de X.

Exercice 816 [Mines 888] Soit $n \geq 2$. On place n boules numerotees de 1 a n dans une urne et l'on realise des tirages successifs avec remise. On note X le rang du tirage donnant pour la premiere fois un numero superieur ou egal aux precedents.

- Determiner la loi de X.
- Calculer l'esperance et la variance de X.

Exercice 817 [Mines 889] Une urne contient $n + 1$ boules numerotees de 0 a n. On y effectue des tirages avec remise. On pose $X_1 = 1$. Pour $i \geq 2$, X_i est la variable de Bernoulli egale a 1 si le numero de la boule titee au i-eme tirage n'avait jamais ete obtenu avant. On pose, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = X_1 + \cdots + X_i$.

- Determiner la loi des X_i.
- Calculer l'esperance et la variance de Y_i. Donner un equivalent de $\mathbf{E}(Y_n)$.
- Pour $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $\mathbf{P}(X_i = 1, X_j = 1)$.
- Etudier l'independance des X_i.

Exercice 818 [Mines 890] Soit $(J - n \in \mathbb{N}$ une suite de joueurs. Le joueur J_0 affronte le joueur J_1 ; le gagnant affronte J_2, puis le gagnant de ce nouveau match affronte J_3 et ainsi de suite. Lors d'un match, le joueur entrant a une probabilite $p \in]0, 1[$ de remporter le match. Le jeu termine lorsqu'un meme joueur remporte trois victoires. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'evenement < < le n-ieme match est joue > > . Determiner la limite de $\mathbf{P}(A_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 819 [Mines 891] On suppose que lorsqu'un enfant natt, il a une chance sur deux d'etre un garcon. Dans une famille donnee, le nombre d'enfants est la variable aleatoire Z et le nombre de filles est X.

- Montrer que : \$∀ t∈[0,1],G$_X$(t)=G$_Z$ $(\frac{1+t}{2}$.\$$ExpliciterlaloideX$ si Z suit une loi de Poisson de parametre λ.# 892

Une puce se trouve sur l'origine de $\mathbb{Z}^2$. A chaque etape, elle saute aleatoirement dans l'une des quatre directions. On note X_n l'abscisse de la puce a l'etape n. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_n^2)$.

Exercice 820 [Mines 893] On munit $\mathcal{S}_n$ de la probabilite uniforme. Calculer la probabilite π_n que $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ait un cycle de longueur strictement superieure a $\dfrac{n}{2}$ dans sa decomposition en produit de cycles a supports disjoints. Determiner un equivalent de π_n.

Exercice 821 [Mines 894] Soient X_1, X_2 deux variables aleatoires independantes qui suivent la loi geometrique de parametre $p \in]0, 1[$. On pose $Y = |X_1 - X_2|$.

- Calculer $\mathbf{P}(Y=0)$.
- Determiner la loi de Y.
- Montrer que Y est d'esperance finie et calculer $\mathbf{E}(Y)$.
- Montrer que Y possede un moment d'ordre 2 et calculer $\mathbf{V}(Y)$.

Exercice 822 [Mines 895] • Determiner la loi de la somme de n variables geometriques de parametre $p \in]0,1[$, independantes et identiquement distribuees.

▷ Soit $p \in]0,1[$. On lance des des tels que la probabilite de tomber sur 6 en jetant un de est p. Soit X la variable aleatoire egale au rang du n-ieme 6. Determiner la loi et l'esperance de X.

Exercice 823 [Mines 896] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ une variable aleatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Pour $m \in [\![1,n]\!]$, on note $X_m = \min\{k \in [\![1,n]\!],\ \sigma(k) \geq m\}$ et $Y_m = \max\{k \in [\![1,n]\!],\ \sigma(k) \geq m\}$. Calculer la loi de X_m et Y_m, et leur esperance.

Exercice 824 [Mines 897] Soient $\lambda > 0$ et X une variable aleatoire qui suit la loi de Poisson de parametre λ. Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et Y le reste de la division euclidienne de X par b. Determiner la loi de Y.

Exercice 825 [Mines 898] Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X - k \in \mathbb{N}^*$ une suite de variables aleatoires i.i.d. verifiant :

$\mathbf{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_k = -1) = 1-p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que $p = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \max_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}(S_{2n} = k) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$.

Exercice 826 [Mines 899] Soient A, B, C des variables aleatoires independantes telles que A suive la loi de Rademacher, et B et C la loi geometrique de parametre $p \in]0,1[$.

- Calculer la probabilite que le trinome $AX^2 + BX + C^2$ admette deux racines reelles distinctes.
- Calculer la probabilite que le trinome $AX^2 + BX + C^2$ admette une unique racine reelle.
- Calculer la probabilite que le trinome $AX^2 + BX + C^2$ n'admette aucune racine reelle.
- Cette derniere probabilite peut-etre egale a $\dfrac{1}{2}$? Dans ce cas, donner une valeur approchee de p a 10^{-1} pres.

Exercice 827 [Mines 900] On considere une variable aleatoire X suivant la loi de poisson de parametre λ et on pose $Y = X^2 + 1$. - Calculer l'esperance de Y.

- Calculer la probabilite de l'evenement $(2X < Y)$.
- Comparer les probabilites des evenements $(X \in 2\mathbb{N})$ et $(X \in 2\mathbb{N}+1)$.

Exercice 828 [Mines 901] Soit X une variable aleatoire a valeurs dans $[a,b]$, d'esperance $\mathbf{E}(X) = m$.

- Montrere que $\mathbf{V}(X) \leq (m-a)(b-m)$.
- Montrere que cette inegalite est optimale.

Exercice 829 [Mines 902] Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$ et on suppose que les racines du polynome caracteristique de M ne sont pas toutes simples.

- Montrere que M admet un vecteur propre de la forme $V = (v_1, ..., v_n, 0)^T$.
- Montrere que $(v_1, ..., v_n)^T$ est vecteur propre de A et orthogonal a b.
- Soient $X_1, ..., X_5$ variables de Bernoulli independantes de parametre $p \in]0,1[$.

On pose $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_5 & X_2 \\ 0 & X_5 & -1 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix}$. Montrere que la probabilite que le polynome caracte-ristique de la matrice N n'ait que des racines simples est superieure ou egale a $3p^3 - 2p^4$.

Exercice 830 [Mines 903] Soit $p \geq 3$ premier. Soit $K = \{x^2,\ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.

- Denombrer le cardinal de K.
- Soient A, B deux variables aleatoires a valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit N variable aleatoire comptant le nombre de solutions de (E) : $X^2 + AX + B = 0$. Determiner l'esperance et la variance de N.

Exercice 831 [Mines 904] Caracteriser les couples (X, a) avec X variable aleatoire discrete complexe et $a \in \mathbb{C}$ tels que $X \sim aX$.

Exercice 832 [Mines 905] Soit $\alpha > 1$. On munit $\mathbb{N}^*$ de la loi de probabilite $\mathbf{P}_\alpha$ definie par $\mathbf{P}_\alpha(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha}$ pour $n \geq 1$.

- Calculer $\mathbf{P}_\alpha(m\mathbb{N}^*)$ pour $m \geq 1$.
- On note $(p - k \geq 1$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrere que les $p_k\mathbb{N}^*$ sont mutuellement independants.

- En deduire la formule d'Euler \$$\zeta(\alpha)$=$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\{}p_k{}^{\alpha}\}\right)^{-1}$.\$

Exercice 833 [Mines 906] Soient X et Y deux variables aleatoires discretes strictement positives, de meme loi et d'esperance finie. Montrere que $\mathbf{E}(X/Y) \geq 1$. Ind. Commencer par le cas ou X et Y sont independantes.

Exercice 834 [Mines 907] Soit $(X - n \in \mathbb{N}^*$ une suite de variables aleatoires i.i.d. suivant la loi geometrique de parametre $p \in]0,1[$. On pose : $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n), \alpha_n = \mathbf{E}(Y_n)$ et $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n), \beta_n = \mathbf{E}(Z_n)$.

- Etudier la monotonie des suites (α_n) et (β_n). - Exprimer α_n en fonction de n.
- Determiner la limite de (β_n) puis un equivalent simple.

Exercice 835 [Mines 908] Soient $p, q \in]0,1[$. On considere deux variables aleatoires X et Y, independantes, suivant les lois geometriques de parametres respectifs p et q. Soit $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilite que M soit diagonalisable ?

Exercice 836 [Mines 909] Soient $p \in]0,1[$, X une variable aleatoire suivant la loi geometrique de parametre p. On pose $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$.

- Montrer que la variable Y suit une loi geometrique.
- Montrer que les variables Y et $2Y - X$ sont independantes.

Exercice 837 [Mines 910] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![1, d]\!]$. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on pose $Y_j = |\{i \in [\![1, n]\!],\ X_i = j\}|$.

- Determiner la loi de Y_j.
- Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et $k, \ell \in [\![1, n]\!]$. Calculer $\mathbf{P}(Y_i = k, Y_j = \ell)$.

Exercice 838 [Mines 911] Soit X une variable aleatoire discrete a valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) < +\infty$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose : $F_X(t) = \mathbf{E}(e^{-tX})$.

- Montrer que F_X est bien definie (a valeurs reelles) et continue.
- Montrer la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} F_X(t)\, dt$.
- Soient X et Y deux variables aleatoires independantes suivant la loi geometrique de parametre $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+Y}\right)$.
- Generaliser a m variables i.i.d. suivant la loi geometrique de parametre p.

Exercice 839 [Mines 912] Soit $(X - n \geq 1$ une suite de variables aleatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 2\}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $A_n = (\exists k \geq 0,\ S_k = -n)$ et $p_n = \mathbf{P}(A_n)$.

- Exprimer $\mathbf{P}(\exists k > 0,\ S_k = 0)$ en fonction de p_{-1} et de p_2.
- Trouver une relation entre p_{n+2}, p_n et p_{n-1}.
- En deduire la valeur de p_n.

Exercice 840 [Mines 913] Soient X une variable aleatoire a valeurs dans $\{-1, 1\}$, $(X - k \geq 1$ une suite i.i.d. de variables aleatoires suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Donner une condition necessaire et suffisante pour que, pour toute partie finie A de $\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n \in A) < +\infty$.

Exercice 841 [Mines 914] Soit (X_n) une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de parametre $1/2$. - Donner la loi de $Z_n = \sum_{k=0}^n 2^{n-k} X_k$. - Determiner $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Z_n \geq 3^n)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Z_n \geq 2^n)$.

Exercice 842 [Mines 915] Soit X une variable aleatoire a valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

- Montrer que $\mathbf{P}(X \geq x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. - On suppose que $\mathbf{E}(X) < +\infty$. Montrer que $\mathbf{P}(X \geq x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. - Soit $(X - n \geq 1$ une suite i.i.d. de variables aleatoires.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = |\{X_1, \dots, X_n\}|$.

- Donner un equivalent de $\mathbf{E}(R_n)$ lorsque les X_i suivent la loi geometrique de parametre $p \in]0,1[$.
- Dans le cas general, montrer que $\mathbf{E}(R_n) = o(n)$.

Exercice 843 [Mines 916] Soit $(X - i \geq 1$ une suite de variables aleatoires i.i.d. On suppose que chaque variable aleatoire $X_i + 1$ suit la loi geometrique de parametre $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- Determiner la loi de S_n.
- Determiner $M_n = \max\{\mathbf{P}(S_n = k),\ k \in \mathbb{N}\}$ puis un equivalent simple de M_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 844 [Mines 917] Soit $(X - n \geq 1$ une suite i.i.d. de variables aleatoires suivant la loi geometrique de parametre $p \in]0,1[$. Montrer l'existence de $\alpha > 0$ que l'on determinera tel que :
$\forall \epsilon > 0, \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k - \alpha\right| \geq \epsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Exercice 845 [Mines 918] Soit $g : t \mapsto \frac{e^t}{(1+e)-t}$

- Montrer que g est la fonction generatrice d'une variable aleatoire X a valeurs dans $\mathbb{N}$.

- Soit $(X_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}$ une famille i.i.d. de variables aleatoires de meme loi que X. Determiner la probabilite que $M = \begin{pmatrix} 0 & X_{1,2} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & X \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$ ait un nombre fini de de sous-espaces stables.

Exercice 846 [Mines 919] Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aleatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de parametre p. On pose $U = (X_1 \ \cdots \ X_n)$ et $M = U^T U$.

- Determiner la loi des variables aleatoires $\mathrm{tr}(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$.
- Calculer la probabilite que M soit une matrice de projection.# 920

Soit (X_n) une suite de variables aleatoires independantes, strictement positives, L^2 et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(X_n) = 1$. On dit que (X_n) converge en probabilites vers 0 si : $\forall \alpha > 0, \mathbf{P}(X_n \geq \alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

- Soient $\lambda \in [0,1]$ et $X \in L^2$ telle que $\mathbf{E}(X^2) > 0$.

Montrer que : $\mathbf{P}(X \geq \lambda \mathbf{E}(X)) \geq \dfrac{(1-\lambda)^2 \mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

- Montrer que $\mathbf{E}(\sqrt{P_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si (X_n) converge vers 0 en probabilites.

Exercice 847 [Mines 921] • Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille i.i.d. de variables aleatoires de Rademmacher, $S = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que, si $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{E}(e^{tS}) \leq \exp\left(-\dfrac{nt^2}{2}\right)$. En deduire que, si $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathbb{P}(|S| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.

▷ Generaliser au cas ou les X_k sont des variables aleatoires discretes i.i.d, a valeurs dans $[-1,1]$ et centres.

Exercice 848 [Mines 922] Soit $(X - i \in \mathbb{N}^*$ une suite de variables aleatoires i.i.d. possedant un moment d'ordre 4. On pose : $m = \mathbf{E}(X_i)$ et $V_4 = \mathbf{E}((X_i - m)^4)$.

- Justifier la bonne definition (dans $\mathbb{R}$) de m et V_4.

Pour $\epsilon > 0$, on pose : \$ A_n^{ϵ}=$\left(\left|\dfrac{1}{n}\right.\right.$ $\sum$ $_{i=1}{}^{n}$(X_i-m) $\geq \epsilon$.\$

Montrer que $\mathbf{P}(A_n^\epsilon) \leq \dfrac{3V_4}{n^2\epsilon^4}$.

Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p^\epsilon\right) = 0$.

Montrer que $\mathbf{P}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m\right) = 1$.

1) Mines PSI

a) Algebre

Exercice 849 [Mines PSI 923] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(k)$ est premier. Montrer que P est constant.

Exercice 850 [Mines PSI 924] Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, \$ P(X+n)+$\sum$$_{k=0}{}^{n-1}$$a_{kP}$(X+k)=0\$.

Exercice 851 [Mines PSI 925] Soit (P) le plan de $\mathbb{R}^3$ d'equation $x - 2z - y = 0$ et u le vecteur $(1,2,1)^T$.

- Calculer la matrice de projection vectorielle sur (P) parallelement a u. - Calculer l'image par cette projection de la droite $(D) : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0. \end{cases}$

Exercice 852 [Mines PSI 926] Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considere les polynomes $E_k = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$.

- Montrrer que $(E - 0 \leq k \leq n$ est une base de E.
- Calculer $\sum_{k=0}^n kE_k$ et $\sum_{k=0}^n k^2 E_k$.
- Comment aurait-on pu prevoir les resultats obtenus ?

Exercice 853 [Mines PSI 927] Resoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'equation : $A^2 + (-1)^n \det(A) I_n = 0$.

Exercice 854 [Mines PSI 928] Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition necessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible. Calculer alors M^{-1}.

Exercice 855 [Mines PSI 929] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice n.

- Justifier l'existence d'un vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$. En deduire que la famille $(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0)$ est libre.

- Montrrer que A est semblable a $J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) i) : Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrrer que $\lambda(e^{J_n} - I_n)$ est nilpotente. Preciser son indice de nilpotence.

- Montrrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = \lambda P^{-1} e^{J_n} P$.
- En deduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = e^B$.

Exercice 856 [Mines PSI 930] ★ Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, F est sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) \subset F$. On suppose que $E = F + \mathrm{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

Exercice 857 [Mines PSI 931] • Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, que l'on decompose en $P = Q + iR$ avec P et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $Q + \lambda R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- ▷ En deduire que deux matrices A et B reelles, semblables sur $\mathbb{C}$, sont semblables sur $\mathbb{R}$.
- ▷ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = B^3 = I_n$ et $tr(A)=$tr(B). Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 858 [Mines PSI 932] Diagonaliser $A=

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\in$M$_n$(R)$.# 1201 On considere un de equilibre a n faces. Les lancers se modelisent par une suite $(X - i \geq 1$ i.i.d de variables aleatoires suivant la loi uniforme sur $1, n$.

Pour $k \in 1, n$, on note $T_k = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ |\{X_1, \ldots, X_n\}| = k\}$.

- Determiner la loi de T_k.
- Donner un equivalent, quand $n \to +\infty$, du nombre moyen M_n de lancers necessaires pour obtenir toutes les faces.

Exercice 859 [Mines PSI 1202] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N = n!$. Soient $p_1, \ldots, p_m$ les facteurs premiers distincts de N, Soient X_1, X_2 deux variables aleatoires independantes qui suivent la loi uniforme sur $1\,;\,N$.

- Montrer que les evenements $(p_k|X_1)$: ◁p_k divise X_1 ↾ sont independants pour $k \in 1\,;\,m$.
- Pour $k \in 1\,;\,m$, calculer $\mathbf{P}(p_k|X_1$ et $p_k|X_2)$.
- Calculer la probabilite de l'evenement ◁X_1 et X_2 sont premiers entre eux ↾.

Exercice 860 [Mines PSI 1203] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $1\,;\,n$ de la probabilite uniforme.

- Soit a un diviseur de n, on note $D(a)$ l'ensemble des multiples de a qui se trouvent dans $1\,;\,n$. Calculer $\mathbf{P}(D(a))$.
- On note $p_1, \ldots, p_k$ les diviseurs premiers (distincts) de n. Montrer que $D(p_1), \ldots, D(p_k)$ sont mutuellement independants.
- Soit B l'ensemble des entiers dans $1\,;\,n$ qui sont premiers avec n. Calculer $\mathbf{P}(B)$ a l'aide de $p_1, \ldots, p_k$.
- On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers dans $1\,;\,n$ qui sont premiers avec n. Montrer que $\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ \text{p divise } n}} \frac{p-1}{p}$

Exercice 861 [Mines PSI 1204] Soit X une variable aleatoire discrete a valeurs reelles. Soient $b > 0$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que $g(x) \geq b$ pour tout $x \in I$.

- Montrer que $\mathbf{P}(X \in I) \leq \frac{\mathbf{E}(g(X))}{b}$.
- On suppose que X a un ecart-type σ et que $\mathbf{E}(X) = 0$.

Montrer : $\forall t > 0$, $\mathbf{P}(X > t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$.

Ind. Utiliser une fonction $x \mapsto (x + c)^2$ pour un reel $c > 0$.

Exercice 862 [Mines PSI 1205] Soient X, Y deux variables aleatoires discretes a valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, independantes et identiquement distribuees. Montrer que $\mathbf{E}(X/Y) \geq 1$. A quelle condition a-t-on egalite ?

Exercice 863 [Mines PSI 1206] Les variables aleatoires A, B suivent la loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{P}(1\,;\,n)$ et elles sont independantes. On pose $X = \mathrm{Card}(A \cup B)$. Calculer $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 864 [Mines PSI 1207] • Soit $(A - n \in \mathbb{N}^*$ une suite d'evenements. Montrer que B : ◁ Il existe un rang a partir duquel A_n est vraie ↾ est un evenement et que $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right)$.

- ▷ Soient $(X - n \in \mathbb{N}^*$ une suite i.i.d. de variables aleatoires reelles de meme loi que X.On suppose $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\mathbf{E}(X^4) < +\infty$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
- ▷ Calculer $\mathbf{E}({S_n}^4)$ en fonction de n, $\mathbf{E}(X^2)$ et $\mathbf{E}(X^4)$.
- ▷ En deduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k\geq n} \left(\left|\frac{S_k}{k}\right| \leq \varepsilon\right)\right) = 1$ et que, presque surement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0$.

Exercice 865 [MINES PSI 1208] Soit $\alpha > 0$.

- Montrer l'existence d'une variable aleatoire X valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction generatrice \$ G_X $(t = \frac{1}{\{} (2-t)^{\alpha} \}\$.Donnerunequivalentde$ quand $n \to +\infty$.
- Pour $\lambda > 0$, montrer que $\mathbf{P}(X \geq \lambda + \alpha) \leq \frac{2\alpha}{\lambda^2}$.

VIII) Centrale

1) Algebre

Exercice 866 [CENTRALE 1209] On considere, pour $n \in \mathbb{N}$, \$ C_n=1$\frac{}{n+1\binom{2n}{n})\$.}$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, \$ $C_{n\in N}^{*}$\$.
Calculer $\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.
Donner tous les entiers tels que \$ C_n\$ soit pair. En deduire tous les entiers tels que \$ C_n\$ soit impair.

Exercice 867 [CENTRALE 1210] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des nombres premiers inferieurs ou egaux a n et \$ P_n=$\prod_{p\in P(n)}$p\$.

- Montrer que $\forall n \geq 2$, $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n$.
- Montrer que $\forall n \geq 1$, $\binom{2n+1}{n} < 4^n$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, \$ P_{2n+1}< $4^{nP}{}_{n+1}$\$.

Exercice 868 [CENTRALE 1211] Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini commutatif tel que le nombre d'automorphismes de G est 3.
a) i) : Donner la definition d'un automorphisme. Montrer que $\varphi : x \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G.

- Montrer que, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.
- Montrer que G possede un sous-groupe V d'ordre 4 et preciser les automorphismes de V.# 1212

Soient p un nombre premier tel que $p \equiv 3[4]$ et $C = \{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ x = y^2\}$.

- Rappeler l'enonce du petit theoreme de Fermat. Montrer que $-1 \notin C$.

On pose $\pi_x = \prod_{y\in C\setminus\{x\}}(x+y)$ pour $x \in C \setminus \{0\}$ et $\pi = \prod_{x\neq y\in C}(x+y)$.

- Determiner le cardinal de C.
- Montrer que $\forall x \in C \setminus \{0\}$, $\pi_x = \pi_1$.
- Calculer π.

Exercice 869 [CENTRALE 1213] On pose $u = 2 + \sqrt{3}$, $v = 2 - \sqrt{3}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = 2^n - 1$ et $s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$.

- Montrer que, si M_n est premier, alors n est premier.
- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n^2 - 2$. Qu'en deduire sur le suite $(s - n \in \mathbb{N}$?
- Soit q un nombre premier. On munit l'ensemble $B = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ des deux lois de composition interne definies par :

$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$ et $(x,y)\cdot(x',y') = (xx' + 3yy', xy' + x^{'}y)$.

- Montrer que les deux lois precedentes muinssent B d'une structure d'anneau commutatif fini.
- Montrer que, si 3 n'est pas un carre modulo q, alors l'anneau precedent est un corps.
- On note $A = \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$. Montrer que l'application π definie par $\pi(a + b\sqrt{3}) = (\overline{a}, \overline{b})$ est bien definie et est un morphisme surjectif d'anneaux de A dans B.
- On suppose n premier. Montrer que, si M_n divise s_{n-2} alors M_n est premier.

Ind. On pourra raisonner par l'absurde en considerant le plus petit facteur premier q de M_n et determiner l'ordre de $(\overline{2}, \overline{1})$ dans le groupe des elements inversibles de l'anneau B.

Exercice 870 [CENTRALE 1214] Soit A un anneau commutatif. On dit que A est noetherien lorsque tous ses ideaux sont engendres par une partie finie de A.

- Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont-ils noetheriens ?
- Montrer que A est noetherien si et seulement si toute suite croissante d'ideaux est stationnaire.
- Soit A un anneau non commutatif. On dit que $\mathcal{I}$ est un ideal a gauche de A lorsque $\mathcal{I}A \subset \mathcal{I}$ (definition similaire pour un ideal a droite). Soit A noetherien, c'est-a-dire que tous les ideaux, a droite ou a gauche, de A sont de type fini. Montrer que l'inversibilite a gauche equivaut a l'inversibilite a droite, i.e. $\forall a \in A, \Big(\exists b \in A,\ ab = 1 \iff \exists b \in A,\ ba = 1\Big)$.

Ind. Considerer $\varphi : x \mapsto ax$.

Exercice 871 [CENTRALE 1215] • Soit G un groupe commutatif fini. Si a et b sont deux elements de G d'ordre premiers entre eux, quel est l'ordre de ab ?

- ▷ Soit G un groupe commutatif fini. Montrer qu'il existe un element de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des elements de G.
- ▷ Soit p un nombre premier. Montrer que le groupe $\mathbb{F}_p^*$ est cyclique.

Exercice 872 [Centrale 1216] Soit $(T - n \in \mathbb{N}$ la suite de polynomes reels definie par $T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. - Montrrer que $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$ pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
- Montrre que, pour $n \geq m$, $2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$.

On considere l'equation differentielle $(E) : (1 - x^2)P'^2 = n^2(1 - P^2)$.

- Montrre que, pour $n \in \mathbb{N}$, T_n et $-T_n$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
- Montrre que tout polynome solution de (E) est de degre n, puis determiner les polynomes solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 873 [Centrale 1217] Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ et $b_1 < b_2 \cdots < b_p$ des reels et $M = (e^{a_ib_j})_{1\leq i,j\leq p}$.

- Calculer $\det M$ lorsque $b_k = k - 1$ pour tout k.
- Montrre que M est inversible, puis que $\det M > 0$.

Exercice 874 [Centrale 1218] • Rappeler la definition de l'indicatrice d'Euler, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de sa decomposition en facteurs premiers.

- ▷ Pour $n \geq 2$, calculer $\sum_{d|n} \varphi(d)$ (la somme etant restreinte aux diviseurs positifs).
- ▷ En deduire le determinant de A, ou $A_{i,j} = i \wedge j$.

Exercice 875 [Centrale 1219] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'on ait $(f(a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- A l'aide des matrices $U_{x,y} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$, montrer que f est injective.
- En utilisant l'ensemble $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$, en deduire que f est strictement monotone.
- On suppose que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$. Montrre qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, il existe $z_{x,y} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)f(y) = f(a)f(z_{x,y})$, et conclure a une absurdite.
- Traiter de meme le cas $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{-*}$.

Exercice 876 [Centrale 1220] • Rappeler la formule de developpement d'un determinant par rapport a une ligne ou une colonne. En deduire, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une relation entre $\mathrm{Com}\,A$, A et $\det A$.

- ▷ Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definie par : $a_{i,i} = 2$, $a_{i,j} = -1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ dans tout autre cas. Calculer le determinant de A.
- ▷ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres coefficients sont negatifs et telle que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0$ pour tout i. Montrre que A est inversible.
- ▷ Montrre que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

Exercice 877 [Centrale 1221] Soient $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $F : X \mapsto MXM^{-1}$ et $f : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB)$.

- Montrre que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- Trouver les endomorphismes h de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui verifient, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(F(A), B) = f(A, h(B))$.
- Dans cette question, on suppose que $n = 2$.Soit \$h :(∈{M}₂(R)↦ ( ) .\$$Determinerlesendomorphismesk$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $f(h(A), B) = f(A, k(B))$ pour tout \$(A,B)∈{M}ₙ(R)².\$ Parmi eux, preciser ceux qui sont trigonalisables, diagonalisables.

Exercice 878 [Centrale 1222] • Enoncer et demontrer la caracterisation du rang par les matrices extraites.

- ▷ Soit $\Omega_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(_K)$ telles que, pour tout $k \in 1, n$, la matrice $M_k := (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}$ soit inversible. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, montrer que Ω_n est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- ▷ Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(_K)$ appartient a $\Omega_n(\mathbb{K})$ si et seulement si M s'ecrit TT' ou T (resp. T') est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inferieure (resp. superieure) inversible.

Exercice 879 [Centrale 1223] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Donner la definition du polynome minimal π_A. Donner une condition necessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
- Calculer $\det(A)$ et A^2.
- Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$. Donner une condition sur les $a_1, \ldots, a_n$ pour que A soit diagonalisable.

Exercice 880 [Centrale 1224] On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Montrer que toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.
- Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ et $D = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Montrer qu'il existe un polynome f tel que pour tout $i \in 1, n$, $f(\alpha_i)^2 = \alpha_i$. En deduire que $f(D)^2 = D$.

On considere la suite $(c - k$ definie par $c_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} c_ic_{k-i}$ et le polynome $\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} c_kX^{k+1}$.

- Determiner le reste de la division euclidienne de φ^2 par X^n.

- Trouver un polynome g tel que, pour toute matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on ait $g(N)^2 = I_n + N$.
- Soit A une matrice inversible. Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{C}[A]$ telle que $R^2 = A$.

Exercice 881 [Centrale 1225] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note E_i ses sous-espaces propres et $n_i = \dim E_i$.

- Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$.
- Soit g un endomorphisme de E. Montrer que les propositions suivantes sont equivalentes :
- g commute avec f, - pour tout $i \in 1, r$, $g(E_i) \subset E_i$.En deduire que la dimension du commutant de f est $\sum_{i=1}^r {n_i}^2$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que la dimension du commutant de A est superieure ou egale a n.

Exercice 882 [Centrale 1226] Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On note $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt[n]{|\mathrm{tr}\,(A^n)|}$.

- Si $\mathrm{Sp}(A)$ est un singleton, montrer que (u_n) converge vers $\rho(A)$.
- Donner un exemple de matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que (u_n) ne converge pas.

On suppose maintenant que A a au moins deux valeurs propres distinctes.

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que 1 est valeur d'adherence de (z^n). Montrer que $\rho(A)$ est valeur d'adherence de u_n.

Exercice 883 [Centrale 1227] Soit E un espace-vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Pour toute partie $A \subset \mathcal{L}(E)$, on note $\mathcal{C}(A) = \{u \in \mathcal{L}(E)\ ;\ \forall v \in A,\ u \circ v = v \circ u\}$. L'objectif de l'exercice est d'etudier $\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\}))$.

- Montrer que $\mathcal{B}(f)$ est une $\mathbb{K}$-algebre contenant $\mathbb{K}[f]$.
- On suppose f nilpotente d'indice n. Montrer que $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.
- Soient G_1, G_2 deux sous-espaces vectoriels supplementaires stables par un $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f_i = f_{|G_i}$. On suppose que $\pi_{f_1} \wedge \pi_{f_2} = 1$. Montrer que $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Exercice 884 [Centrale 1228] Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, $a \in E$ un vecteur unitaire, et H l'hyperplan orthogonal a la droite vectorielle dirigee par a. On note σ la symetrie orthogonale par rapport a l'hyperplan H, et p la projection orthogonale sur H.

- Montrer que, pour tout sous-espace vectoriel F de E, $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$.
- Montrer que, pour $x \in E$, $p(x) = x - \langle a, x\rangle a$.
- Soit $\Omega = \{x \in E,\ \langle a, x\rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, \sigma(x)\rangle \leq 0\}$.

Montrer les equivalences suivantes, pour $x \in E$:

- $x \in \Omega$ si et seulement si $\langle a, x\rangle \leq \|p(x)\|$,
- $x \in \Omega$ si et seulement si $\forall y \in \Omega$, $\langle x, y\rangle \leq 0$.

Exercice 885 [Centrale 1229] Soit E un espace euclidien. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

- Rappeler l'identite du parallelogramme et les identites de polarisation.
- Montrer l'equivalence suivante :

1. $∃ c∈{R},\;∀(x,y)∈ E²,\;⟨ s(x),s(y)⟩=c ⟨ x,y⟩,$

ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle s(x), s(y)\rangle = 0$.

Exercice 886 [Centrale 1230] • Montrer que $(P, Q) \mapsto \int_0^1 PQ$ definit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En deduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\int_0^1 x^k P(x)\,\mathrm{d}x = 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On pose $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$. - Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_i$, puis que $\int_0^1 f^2 \geq n^2$.

Exercice 887 [Centrale 1231] • Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- ▹ Soit (E, φ) un espace euclidien et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Montrer que la matrice $(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est symetrique definie positive.
- ▹ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $L_p = \frac{d^p}{dX^p}[X^p(1-X)^p] \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille (L_p) est orthogonale pour le produit scalaire de la question a. Est-elle orthonormale ?
- ▹ Soit $M = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n+1}$. Montrer que la matrice M est symetrique definie positive et calculer $\det M$.

Exercice 888 [Centrale 1232] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

- Rappeler la definition d'une matrice definie positive. Donner des proprietes d'une telle matrice.
- Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $J(x) = \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$. Montrer que J est strictement convexe, c'est-a-dire que : $\forall x \neq y, \forall \lambda \in]0, 1[$, $J(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y)$.
- Montrer que J atteint un minimum en un unique point de $\mathbb{R}^n$ et que ce vecteur est solution de l'equation $Ax = b$.

Exercice 889 [Centrale 1233] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. On note $S_\alpha = \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \det M \geq \alpha\}$. Le but de cet exercice est de s'interesser, pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, a la quantite $m_\alpha(A) = \inf_{M \in S_\alpha} \mathrm{tr}(AM)$.

- Montrer que les valeurs propres d'une matrice symetrique reelle sont reelles. Rappeler le theoreme spectral. Justifier l'existence de $m_\alpha(I_n)$ puis la calculer.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$. Prouver l'unicite puis calculer $m_\alpha(A)$.

- Que se passe-t-il lorsque $\alpha = 0$?

Exercice 890 [Centrale 1234] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a coefficients dans $\{0,1\}$ et de trace nulle. On suppose que $A^2 + A - (d-1)I_n = J_n$ ou J_n est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

- Montrer que chaque ligne de A contient d coefficients egaux a 1.
- Montrer que $AU = dU$ ou $U = (1 \cdots 1)^T$. En deduire que $n = d^2 + 1$.
- Montrer que la multiplicite de d est egale a 1.
- Montrer que les autres valeurs propres de M sont racines de $X^2 + X - d + 1 = 0$.
- Montrer qu'il existe deux entiers naturels m_1 et m_2 tels que $m_1 + m_2 = n - 1$ et $d + m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$ ou r_1 et r_2 sont les solutions de l'equation precedente.
- Montrer que si $m_1 = m_2$ alors $d = 2$. On suppose $d > 2$ dans la suite.
- Montrer qu'il existe un entier k tel que $4d - 3 = (2k+1)^2$ puis que $k^4 \equiv 1\ [2k+1]$.
- Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a $16k^4 \equiv 1\ [2k+1]$. En deduire qu'on a forcement $d \in \{2, 3, 7, 57\}$.# 1235

Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^T & A_2 \end{pmatrix}$ une matrice symetrique definie positive avec $A_1 \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$.

- Montrrer que A_1 et A_2 sont definies positives.
- Montrer qu'il existe R_1 et R_2 symetriques definies positives telles que $R_1^2 = A_1$ et $R_2^2 = A_2$.
- Montrer que $\det(A) \leq \det(A_1)\det(A_2)$.

Exercice 891 [Centrale 1236] On considere la relation binaire pour $(A,B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 A \preceq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Montrer que l'on definit ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer qu'une partie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est bornee si et seulement si elle est majoree et minoree pour $\preceq$.
- Montrer que toute suite croissante majoree pour $\preceq$ converge.
- Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $A \preceq B \implies B^{-1} \preceq A^{-1}$.

Exercice 892 [Centrale 1237] Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(S) \leq \cdots \leq \lambda_n(S)$ le spectre ordonne de S. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique note $\langle\ \rangle$ et on note S^{n-1} la spere unite.

- Montrer que, si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1(S) = \min\{\langle Sx, x\rangle\ ;\ x \in S^{n-1}\}$.
- Si $d \in 1, n$, soit $\mathcal{V}_d$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension d de $\mathbb{R}^n$. Montrer que, si $k \in 1, n$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$\lambda_k(S) = \min\limits_{V \in \mathcal{V}_k} \max\{\langle Sx, x\rangle\ ;\ x \in V \cap S^{n-1}\} = \max\limits_{V \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min\{\langle Sx, x\rangle\ ;\ x \in V \cap S^{n-1}\}$.

- Si $(i,j) \in 1, n^2$, $i + j \leq n + 1$ et $(S, S') \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$, montrer que

$\lambda_{i+j-1}(S + S') \leq \lambda_i(S) + \lambda_j(S')$.

2) Analyse

Exercice 893 [Centrale 1238] Soient $(E, \|\ \|)$ un espace norme, F un sous-espace vectoriel ferme strict de E et $\delta \in]0,1[$. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire u de E tel que $d(u, F) \geq \delta$.

Exercice 894 [Centrale 1239] Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normes.
Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour $P(X) = p_0 + p_1 X + \cdots + p_d X^d \in \mathbb{R}_d[X]$ on pose $\|P\| = \max(|p_0|, ..., |p_d|)$.

- Verifier que l'application $\|\ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.

b) i) Soit $(y - n \in \mathbb{N}$ une suite d'elements de E, convergeant vers $\ell \in E$.
Montrer que l'ensemble $Y = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

- Soit $f : E \to E'$ continue telle que, pour tout compact K de E', $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que, si F est un ferme de E, alors $f(F)$ est un ferme de E'.
- Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ un polynome unitaire. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ est une racine de P telle que $|x| > 1$, alors $|x| \leq \|P\| + 1$. En deduire que l'ensemble des polynomes unitaires et scindes de $\mathbb{R}_d[X]$ est ferme dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Exercice 895 [Centrale 1240] • Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'equation $e^z = -1$.

▷ Soit $f\colon \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $f(-z) = f(z)$. En deduire que, si A et B sont deux parties fermees de reunion $\mathbb{U}$, il existe deux points de $\mathbb{U}$ diametralement opposes tous deux dans A ou tous deux dans B. - Soient D le disque unite ferme du plan complexe et $g : D \to \mathbb{C}^*$ continue telle que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $g(-z) = -g(z)$. On admet qu'il existe h continue telle que $g = \exp \circ h$. Montrer qu'il existe $z \in D$ tel que $h(-z) = h(z)$.

Exercice 896 [Centrale 1241] Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel norme. Pour $A \subset E$ non vide et $x \in E$, on note $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|,\ a \in A\}$.

- On suppose A ferme. Soit $x \in E$. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in A$.
- Soient F un sous-espace vectoriel ferme de E et $\delta \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $x \in E$ unitaire verifiant $d(x, F) \geq \delta$.
- On suppose E de dimension infinie et on admet que les sous-espaces vectoriels de dimension finie sont fermes. Montrer que la sphere unite n'est pas un compact de E.

Exercice 897 [Centrale 1242] Soit φ la fonction definie sur $[0,1]$ par $\varphi(0)=0$ et $\varphi(t)=-t\ln(t)$ pour $t\in]0,1]$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose S_n l'ensemble des vecteurs $p=(p_1,...,p_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que $p_1+...+p_n=1$ et $p_i\geq 0$ pour tout $1\leq i\leq n$. On pose enfin $H_n(p)=\sum_{i=1}^n\varphi(p_i)$ pour $p\in S_n$.

- - Donner la definition d'une partie compacte d'un espace vectoriel norme, et en donner une caracterisation en dimension finie.
- Montrer que S_n est une partie compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$.
- - Montrer que H_n est continue.
- Montrer que H_n atteint sur S_n un maximum en un unique point p_0, et expliciter p_0.

Soit $v=(v_1,...,v_n)\in\mathbb{R}^n$. On pose $f_v(p)=H_n(p)+\sum_{i=1}^n p_iv_i$ pour $p\in S_n$.
On pose $f_v^*=\sup_{p\in S_n}f_v(p)$ et $E_v=\{p\in S_n,\ f_v(p)=f_v^*\}$.

- Montrer que E_v est non vide. Determiner f_v^* et E_v.

Exercice 898 [Centrale 1243] Soient $(E,\|\ \|)$, $(E',\|\ \|)$ deva espaces vectoriels normes de dimension finie, A un ferme non vide de E, B une partie non vide de E'. Soit $f:A\to B$ continue bijective telle que l'image reciproque par f de toute partie bornee de B est bornee. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice 899 [Centrale 1244] Un espace norme reel est dit separable lorsqu'il contient une partie denombrable dense.

- L'espace $\mathbb{R}$ est-il separable ?
- Montrer qu'un espace norme de dimension finie est separable.
- Soit E un espace prehilbertien reel de dimension infinie. Montrer que E est separable si et seulement s'il existe une suite orthonormalee $(e-n\geq 0$ telle que Vect $(e-n\geq 0$ soit dense dans E.

Exercice 900 [Centrale 1245] Soit E l'espace des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f\in E$, on note $\varphi(f)$ la primitive de f d'integrale nulle sur l'intervalle $[0,1]$.

- Justifier la definition de φ puis etablir qu'il s'agit d'une application lineaire sur E.

On munit E de la norme $\|\ \|_\infty$ sur $[0,1]$.
On note \$\\|φ\\|$_{\text{op}}$=⊃ \\{ \\|φ(f)\\|$_{\infty,\,[0,\,1]\}\{}$\\|f \\|$_{\infty,\,[0,\,1]\},}$\\ f∈ E\\\\0$_{\text{E}}$\\\\.\$

- Montrer que $\|\varphi\|_{\text{op}}$ est correctement definie et en trouver un majorant. - Soient $f\in E$ et G la primitive de $F=\varphi(f)$ nulle en 0. Etablir que, pour tout $x>0$,

$$G(x)=xF(x)-\int_0^x tf(t)dt=(x-1)F(x)-\int_x^1(1-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

- Determiner la norme $\|\varphi\|_{\text{op}}$.

Exercice 901 [Centrale 1246] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f_A(x)=(A+xI_n)^{-1}A$ pour x reel convenable.

- Montrer que la fonction f_A est definie au voisinage epointe de 0.
- Etudier le comportement de la fonction f_A en 0 dans le cas ou A est inversible, puis dans le cas ou A est nilpotente.
- Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer l'existence de $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Im}(u^p)\oplus\mathrm{Ker}(u^p)=\mathbb{R}^n$.

En deduire l'existence de deux supplementaires F et G dans $\mathbb{R}^n$, stables par u, tels que u induit sur F un automorphisme et induit sur G un endomorphisme nilpotent.

- Caracteriser les matrices A pour lesquelles f_A a une limite en 0.

Exercice 902 [Centrale 1247] Soient (a_n) une suite a termes reels positifs et (b_n) une suite a termes complexes. On suppose que la serie $\sum a_n$ diverge et que $b_n\sim a_n$. On note $S_n=\sum_{k=0}^n a_k$.

- Montrer que la serie $\sum b_n$ diverge et que les sommes partielles des deux series sont equivalentes.
- On suppose qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\frac{S_n}{na_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda$. Determiner la limite de $\frac{1}{n^2a_n}\sum_{k=0}^n ka_k$.

Exercice 903 [Centrale 1248] • Rappeler la regle de d'Alembert pour une serie numerique a termes positifs.

- ▷ On considere une suite croissante $(q-n\geq 1$ d'entiers ≥ 2.
- ▷ Quel est le rayon de convergence de la serie entiere $\sum\frac{z^n}{q_1\cdots q_n}$?
- ▷ Montrer que si la suite (q_n) est stationnaire alors le reel \$ x=$\sum_{\text{n=1}}{}^{+\infty\frac{1}{q_1\cdots q_n}\$appartienta\mathbb{Q}\cap]0,1]}$.
- ▷ On admet reciproquement que si (q_n) tend vers $+\infty$ alors $x\notin\mathbb{Q}$. Montrer que les reels e, $\mathrm{ch}(\sqrt{2})$ et $e^{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.
- ▷ Montrrer la reciproque admise ci-dessus.

Exercice 904 [Centrale 1249] Soit $I=]-1,+\infty[$. On dit que $f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ verifie $(*)$ si et seulement si :
$\forall x,y\in I,\ f(x)+f(y)=f(x+y+xy)$.
On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $x_n=\frac{1}{(n+2)(2n+1)}$ et $y_n=\frac{n}{n+1}$. Soit $f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

- Simplifier $x_n+y_n+x_ny_n$. Montrer que la serie de terme general \$ f(x$_{\text{n}}$)\$ converge et exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty}f(x_n)$ en fonction de $f(1)$.
- Montrer que f est derivable. - Trouver toutes les fonctions continues verifiant $(*)$.

Exercice 905 [Centrale 1250] Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ trois fois derivable telle que $ff^{(3)}=0$.

- Montrrer que, si f' est strictement monotone sur un intervalle I, alors f prend une meme valeur au plus deux fois sur I.
- On pose $\Gamma = \{x \in I, f''(x) = 0\}$. Montrer que, si Γ est non vide, alors Γ n'est ni majore, ni minore.
- Montrer que Γ est un intervalle et en deduire f.

Exercice 906 [Centrale 1251] • Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que g est strictement monotone.
On cherche les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g^2(x) = 2g(x) - x$.

- Montrer qu'une telle fonction est bijective et strictement croissante.
- Exprimer g^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis conclure.

Exercice 907 [Centrale 1252] • Rappeler la definition d'une fonction lipschitzienne. Montrer qu'une fonction lipschitzienne est continue. Soient $\alpha \in]0, 1]$ et
$H_\alpha = \left\{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \,|\, \exists L > 0,\, \forall (x, y) \in [0, 1],\, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha\right\}$.

- Montrer H_α est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, que si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, alors $H_\beta \subset H_\alpha$. Verifier que $x \mapsto x^\alpha \in H_\alpha$.
- Montrer que, pour $0 < \alpha < \beta \leq 1$, H_β est strictement inclus dans H_α.
- Montrer que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \subset H_\alpha \subset \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et que ces inclusions sont strictes.

Exercice 908 [Centrale 1253] • Soient a, b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivable. On suppose que f admet la meme limite finie ℓ en a et en b. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

▷ Soit $f : x \in]-1, 1[\mapsto e^{\frac{1}{x^2-1}}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynome P_n tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{2n}} f(x)$. Quel est le degre de P_n ?

▷ Combien $f^{(n)}$ a-t-elle de zeros ?

Exercice 909 [Centrale 1254] • Donner la definition de la multiplicite d'une racine d'un polynome puis sa caracterisation a l'aide des derivees successives du polynome.

▷ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Exprimer P'/P a l'aide des racines de P.

▷ Soit $r > 0$. On suppose que P ne s'annule pas sur le cercle $C(0, r)$ du plan complexe. On pose $N_r(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it}\, dt$. Montrer que $N_r(P)$ est egal au nombre de racines de P (comptees avec multiplicite) dans le disque $D(0, r)$.

Exercice 910 [Centrale 1255] Soit E l'ensemble des fonctions $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que $\int_0^{+\infty} f^2 < \infty$. Soit $f \in E$.
On pose $\|f\| = \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}$ et on definit l'application Tf par : $Tf(0) = f(0)$ et, pour tout $x > 0, Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^{x'} f$.a) i)_ : Rappeler le theoreme concernant la derivabilite des fonctions $x \mapsto \int_a^x f$. - Montrver que Tf est continue. - Montrver que, pour tout $x > 0$, on a $Tf(x)^2 \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t)^2\, dt$.

- Soit $A > 0$. Montrver que $\int_0^A Tf(x)^2\, dx \leq 2 \int_0^A \frac{f(x)}{x} \left(\int_0^x f\right) dx$. En deduire que $Tf \in E$ et que $\|Tf\| \leq 2\|f\|$
- Montrver que la constante 2 est optimale dans l'inegalite $(*)$. On pourra considerer les fonctions $f_a : t \mapsto t^{-a}$.

Exercice 911 [Centrale 1256] Soient (a_n) une suite reelle telle que $(\sum_{k=0}^n a_k)$ est bornee, (b_n) une suite reelle decroissante de limite nulle et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sin(nx)$.

- Montrver qu'une serie absolument convergente est convergente.
- Montrver que la serie de terme general $a_n b_n$ converge.
- Montrver que la serie de fonctions de terme general $b_n f_n$ converge.

Exercice 912 [Centrale 1257] Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ croissante telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{a}{x}$ ou $a > 0$.

- Citer le theoreme d'integration des relations de comparaison, puis trouver un equivalent de $\ln(f(x))$ quand $x \to +\infty$.
- Donner le domaine de definition de $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\, e^{-nx}$. Determiner les limites de u aux bornes de son domaine de definition.
- Montrver qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \sim \frac{C}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 913 [Centrale 1258] Soient $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha \geq 2$ et $\beta \in]1, +\infty[$. Soit $f : t \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(2\pi\alpha^n t)}{\beta^n}$.

- Montrver que f est definie et continue. Si $\alpha < \beta$, montrer que f est derivable sur $\mathbb{R}$.
- On suppose $\alpha \geq \beta$. Montrver que f n'est pas derivable en 0.

Exercice 914 [Centrale 1259] Soit $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \sin(nx)\, e^{-n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Montrver que f est $\mathcal{C}^\infty$ puis developpable en serie entiere au voisinage de l'origine.

Exercice 915 [Centrale 1260] On considere la serie entiere $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ou $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} (t - k)\, dt$ avec $a_0 = 1$.

- Montrver que le rayon de convergence R est ≥ 1.
- Calculer $S(x)$ pour $|x| < 1$ puis montrer que $R = 1$.
- Determiner un equivalent de a_n.# 1261

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

- Donner le developpement en serie entiere de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$. Exprimer le developpement en serie entiere de $f : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ (avec $f(0) = 1$) a l'aide des c_n.

- Soit r un rationnel que l'on peut ecrire $r = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ avec $b \wedge d = 1$. Montrer que r est entier. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,$$c_{n\in\mathbb{N}}$.
- Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$ en fonction de c_{n+1}.

Exercice 916 [Centrale 1262] Pour $n \geq 1$, on note t_n le nombre de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. On convient que $t_0 = 1$,

- Montrer que la serie entiere $\sum \frac{t_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence ≥ 1.
- Calculer t_1, t_2, t_3. Montrer que, si $n \geq 2$, $t_n = t_{n-1} + (n-1)t_{n-2}$.
- Determiner $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} x^n$ pour $x \in]-1, 1[$. En deduire une expression de t_n sous forme de somme. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{t_n}{n!}$.

Exercice 917 [Centrale 1263] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynomes P a coefficients dans $\{0, 1, 2\}$ tels que $P(2) = n$, et $a_n = |\mathcal{P}_n|$. On note s_n la somme des chiffres de l'ecriture binaire de l'entier n, et pour $k \in [\![0, 7]\!]$, on pose $b_{n,k} = |\{i \in [\![0, n]\!],\ s_i - s_{n-i} \equiv k\ [8]\}|$.

- Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.
- Montrer que $\mathcal{P}_n$ est fini.
- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = a_n$ et que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = a_n + a_{n-1}$.

Ind. Pour la premiere egalite, on pourra exhiber une bijection entre $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{2n+1}$.

- Montrer que la serie entiere $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence egal a 1.

On note $A(x)$ la somme de cette serie.

- Montrer que, pour $x \in]-1, 1[$, $A(x) = (1 + x + x^2)A(x^2)$.

En deduire que $\forall x \in]-1, 1[$, $A(x) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n}(1 + x^{2^k} + x^{2^{k+1}})$.

- On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Etablir que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$,

$$\prod_{k=0}^{n}(1 + x^{2^k} + x^{2^{k+1}}) = \left(\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} (-j)^{n-s_k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} (-\overline{j})^{n-s_k} x^k\right).$$

- Que peut-on en deduire sur (a_n) ?

Exercice 918 [Centrale 1264] • - Rappeler la definition de partie dense dans $\mathbb{R}$ et en donner une caracterisation sequentielle.

▷ Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.

On dit qu'une suite reelle $(a - n \in \mathbb{N}$ verifie la propriete (P) si :1. La serie entiere $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence superieur ou egal a 1,

1. La somme S_a de cette serie entiere admet une limite reelle en 1^-.
2. - Montrer que, si la serie $\sum a_n$ converge absolument, alors la suite $(a - n \in \mathbb{N}$ verifie (P),
3. Etudier la reciproque.
4. Trouver toutes les suites $(a - n \in \mathbb{N}$ periodiques qui verifient (P).

Exercice 919 [Centrale 1265] Soient $(a - n \geq 1$ une suite de carre sommable et \$ f :t$\mapsto \sum_{\mathrm{n=1}}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$\$.

Preciser le domaine de definition de f.

Montrer que f est developpable en serie entiere autour de 0.

Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2, 1/2]$ alors la suite (a_n) est nulle.

Exercice 920 [Centrale 1266] • Rappeler la definition d'une fonction f developpable en serie entiere en 0 et preciser une expression de $f^{(k)}(0)$ en fonction des coefficients pour $k \in \mathbb{N}$.

▷ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 pour laquelle il existe $\alpha > 0, M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |f^{(k)}(x)| \leq M a^k k!$.

Montrer que f est developpable en serie entiere en 0.

- Soit f une fonction developpable en serie entiere en 0. Montrer l'existence de $\alpha > 0, M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |f^{(k)}(x)| \leq M a^k k!$.

Exercice 921 [Centrale 1267] On admet le theoreme suivant :Pour S une serie entiere de rayon de convergence infini dont la somme ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, il existe une serie entiere L de rayon de convergence infini telle que $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(L(z)) = S(z)$.

- - Rappeler tous les modes de convergence d'une serie entiere sur son disque ouvert de convergence.

- Soient \$ F(z)=$\sum_{\mathrm{n=0}}^{+\infty a_n z^n}$\$$derayondeconvergenceinfiniet$\$G(z)=Re($F(z)$)\$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\int_0^{2\pi} F(re^{it})dt = 2\pi a_n R^n$, puis que

$\int_0^{2\pi} G(Re^{it})e^{-int}dt = \pi a_n R^n$ et $\int_0^{2\pi} G(Re^{it})dt = 2\pi \mathrm{Re}(a_0)$.

- Montrer que, s'il existe p et q reels strictement positifs tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ |G(z)| \leq p|z| + q$, alors F est un polynome de degre au plus 1.
- Montrer que l'application $z \mapsto z\exp(z)$ est une surjection de $\mathbb{C}$ sur lui-meme.

Exercice 922 [Centrale 1268] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $t \in]-r, r[$, $\det(\mathrm{id} - tu) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k \operatorname{tr}(u^k)}{k}\right)$.

Exercice 923 [Centrale 1269.] • - Rappeler la definition de fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. - _Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on definit une fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)$ si $x \in [0, n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

Montrer que la suite $(f - n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f a preciser et que $\int_{\mathbb{R}^+} f_n \not\longrightarrow \int_{\mathbb{R}_+} f$ quand $n \to +\infty$.

- Rappeler le theoreme de convergence dominee.

Le demontrer sous l'hypothese supplementaire d'une convergence uniforme sur tout segment.

- Soit $(f - n \in \mathbb{N} \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur $\mathbb{N}$ vers une suite $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose l'existence d'une suite sommable positive $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leq \varphi(t)$.

Montrer que les suites f_n et f sont sommables et que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 924 [Centrale 1270] Pour tout reel a, on pose $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$.

- On fixe un entier $n \geq 1$. Montrer que la fonction $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \left\{\frac{1}{x}\right\}^n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que l'integrale $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ est convergente.
- Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\frac{(-1)^i i}{(i+1)k^{i+1}}\right)_{\substack{i\geq 1\\ k\geq 2}}$ est sommable et exprimer sa somme S sous la forme d'une serie faisant intervenir la fonction ζ.
- Exprimer I_1 en fonction de S.

Exercice 925 [Centrale 1271] • Montrer le theoreme d'integration des series uniformement convergentes sur un segment.

▷ Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue, on pose $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$. Meme definition lorsque f est a valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note, pour $r > 0$, $\gamma_r : t \in [0, 2\pi] \mapsto re^{it}$.

Soit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la somme d'une serie entiere de rayon de convergence infini. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. Montrer que $f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$.

- En deduire, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand (a preciser), l'egalite $\exp(M) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (zI_n - M)^{-1}\,dz$.

Exercice 926 [Centrale 1272] Soient $E = \mathcal{C}^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E,\ f(0) = f(\pi) = 0\}$. Soient $\varphi, q \in E$, la fonction q etant positive. On note α une primitive de φ. On pose $D(y) = y'' + \varphi y' - qy$ et $L(y) = -e^\alpha D(y)$ pour tout $y \in E$, et $\langle y, z \rangle = \int_0^\pi y(x)L(z)(x)\,dx$ pour tous $y, z \in F$.

- Rappeler le theoreme de Cauchy-Lipschitz.
- Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur F.
- Soit $h \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f_0 \in F$ telle que $D(f_0) = h$.# 1273
- Soient E un espace euclidien, U un ouvert de E, et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Rappeler la definition de la differentielle $df(a)$ de f en $a \in U$ et du gradient $\nabla f(a)$, ainsi que l'expression de $\nabla f(a)$ en base orthonormale.
- On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

Montrer que $\nabla(\det)(A) = \mathrm{Com}(A)$.

- Quel est le coefficient de X dans χ_A ?
- Determiner l'espace tangent a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Exercice 927 [Centrale 1274] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.

- Montrer que J est strictement convexe.
- Montrer que $J(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.
- En deduire que J admet un minimum.
- Calculer ∇J et conclure quant au minimum de J.

Exercice 928 [Centrale 1275] Soient $(E, \langle\ \rangle)$ un espace prehilbertien reel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

- Pour tout $x \in E$, exprimer la projection orthogonale de x sur F a l'aide d'une base orthonormale de F. Justifier la formule.
- On definit la fonction $d_F : E \setminus F \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, F)$. Montrer que d_F est differentiable, et calculer sa differentielle.

3) Probabilites

Exercice 929 [Centrale 1276] On note d_n le nombre de derangements de n objets, c'est-a-dire le nombre de permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sans point fixe.

_a) i)Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$.

- Montrer que la serie entiere $\sum \frac{d_n}{n!} t^n$ a un rayon de convergence superieur ou egal a 1.

On note $D(t)$ la somme de cette serie.

- Calculer $e^t D(t)$.
- En deduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

- Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la probabilite p_n qu'un element de $\mathcal{S}_n$ soit un derangement.

_c) i)Pour n et p entiers naturels, on note $s_n(p)$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[1, p]$.
Montrer que $p^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} s_n(k)$.

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $\left(s_n(p) \frac{x^p}{p!} \frac{y^n}{n!}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Sa somme est notee $S(x, y)$.

- Calculer $e^x S(x, y)$. - En deduire la valeur de $s_n(p)$ dans le cas $n = p$, puis dans le cas general $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 930 [Centrale 1277] On melange les cartes d'un jeu de $2n$ cartes.
Avec quelle probabilite les cartes de numero impair sont-elles correctement ordonnees ?

Exercice 931 [Centrale 1278] Pour $A_1, ..., A_n$ parties finies d'un ensemble E, on admet que
$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}|$.

- Expliciter la formule precedente pour $n = 2$ et $n = 3$.

La demontrer pour $n = 2$.

- On definit une fonction μ sur $\mathbb{N}^*$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ si l'entier $n \geq 2$ s'ecrit $n = p_1...p_k$ ou $p_1,\ldots, p_k$ sont k nombres premiers distincts et $\mu(n) = 0$ sinon.

Calculer la probabilite que deux entiers choisis aleatoirement dans l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ soient premiers entre eux a l'aide de la fonction μ.

Exercice 932 [Centrale 1279] Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aleatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de parametre 1. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $T_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

- Determiner la loi de S_n. Qu'en deduire sur T_n ?
- Montrer que $\sum_{k\geq 0} \dfrac{k(n^k - 1)}{(n + k)!}$ converge et calculer la somme.
- Calculer $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geq x)\, dx$.

Exercice 933 [Centrale 1280.] • Rappeler les formules des probabilites totales et composees.
On fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(U - n \geq 1$ une suite de variables aleatoires independantes uniformement distribuees sur $[\![1, d]\!]$. Soit $N_d = \inf\{n \geq 2,\ U_n \in \{U_1, \ldots, U_{n-1}\}\}$.

- Quelles sont les valeurs prises par N_d ?
- Montrer que $\mathbf{P}(N_d > k) = \dfrac{d!}{d^k(d - k)!}$ pour tout $k \in [\![0, d]\!]$.
- Pour tout reel $x > 0$, calculer $\lim_{d\to+\infty} \mathbf{P}\left(\dfrac{N_d}{\sqrt{d}} > x\right)$.

Exercice 934 [Centrale 1281.] • Soient $x > 0$ et X_x une variable de Poisson de parametre x. Calculer l'esperance de X_x. Montrer que $\mathbf{P}(|X_x - \mathbf{E}(X_x)| \geq \varepsilon x) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} x^n$.

- Determiner le domaine de definition de u_α.
- Determiner u_1 et u_2.
- Montrer que, pour tout $\alpha < 0$, $u_\alpha(x) = o\left(\mathrm{e}^x\right)$ quand $x \to +\infty$.
- Montrer que, si $\alpha \in]-1, 0[$, $u_\alpha(x) \sim x^\alpha e^x$ quand $x \to +\infty$.

4) Centrale - PSI

a) Algebre

Exercice 935 [Centrale - PSI 1282] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Trouver α pour que $A^3 = \alpha A$. Calculer A^n en fonction de α.

Exercice 936 [Centrale - PSI 1283] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$ tels que : $(f - a\,\mathrm{id}) \circ (f - b\,\mathrm{id}) = 0$.

- Determiner $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(f - a\,\mathrm{id})$ et $\mu(f - b\,\mathrm{id})$ soient des projecteurs.
- Montrer que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f - b\,\mathrm{id})$.
- Determiner f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 937 [Centrale - PSI 1284] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

- On suppose A inversible. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

- On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$. Montrer que A est inversible, et que A^{-1} est a coefficients entiers. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de polynomes caracteristiques possibles pour A.

Exercice 938 [Centrale - PSI 1285] Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A a une valeur propre double $a > 0$ et une simple $b > 0$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe un unique polynome $P_f \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que : $P_f(a) = f(a), P_f(b) = f(b), P_f'(a) = f'(a)$.
- Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$, on pose $f(A) = P_f(A)$. Calculer $f(A)$ dans les cas ou $f : x \mapsto x^2$, puis $f : x \mapsto x^3$.
- Desormais on prend $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Conjecturer la valeur de $Af(A)$ et prouver cette conjecture.

Exercice 939 [Centrale - PSI 1286] Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales.
Si $P \in E$, on pose $L(P) : x \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^{x} P(t)\, e^t \,\mathrm{d}t$.

- Montrer que L est un endomorphisme de E.
- Trouver les elements propres de L.

Exercice 940 [Centrale - PSI 1287] On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u = (a, b, c)^T$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. On note D=Vect(u) et p la projection orthogonale sur D.

- Experimer $p(v)$ pour tout vecteur $v = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$