Exercices 2023

I) ENS MP-MPI **XENS**

Exercice 1 [1] Soient S et T des ensembles finis non vides et f une application de S dans T. On pose $X = \{(x,y) \in S^2, f(x) = f(y)\}$. Montrer que $|X| \geq \max\left(\frac{|S|^2}{|T|}, \left(\left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil\right)^2 + |S| - \left\lceil\frac{|S|}{|T|}\right\rceil\right)$.

Démonstration. Pour le terme de gauche, il s'agit de montrer que $\sum_y n_y^2 \geq \frac{\left(\sum_y n_y\right)^2}{\sum_y 1}$, c'est Cauchy-Schwarz.
Pour le terme de droite, c'est un principe des tiroirs, puis compter pour 1 les éléments qui ne sont pas dans le tiroir. ☐

Exercice 2 [2] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et S un sous-ensemble non vide de $1, n$ tels que $\left|m - \sum_{i\in S} x_i\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

Démonstration. S sera un sous-ensemble d'entiers consécutifs : considérer les sommes partielles $S_0, \dots, S_n$. ☐

Exercice 3 [3] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E(n)$ la valuation 5-adique de $\prod_{k=1}^n k^k$. Donner un équivalent de $E(n)$, quand $n \to +\infty$.
SUP

Exercice 4 [5] Soit n un entier premier > 1. Montrer que -1 est un carré modulo n si et seulement si n est somme de deux carrés d'entiers.

Démonstration. Si p est somme de deux carrés d'entiers, $p \equiv 1[4]$, et a est un carré si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.
Réciproquement, si $n \mid m^2 + 1$, dur, dur.!! ☐

Exercice 5 [6]

1. Soit p un nombre premier impair. Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ contient $(p-1)/2$ carrés.
2. Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ s'écrit comme la somme de deux carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Soit n un entier impair. Montrer que tout élément de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ s'écrit comme somme de deux carrés.
   Indication : Commencer par le cas où n est sans facteur carré.

Exercice 6 [7] Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Si p est un nombre premier et si $r \in \mathbb{Q}^*$ s'écrit $\frac{a}{b}$ de manière irréductible, on définit la p-valuation $v_p(r)$ comme $v_p(a) - v_p(b)$.

1. Montrer que si $p \geq 3$ est premier, alors $v_p(H_{p-1}) \geq 1$.
2. Montrer que si $p \geq 5$ est premier, alors $v_p(H_{p-1}) \geq 2$.
3. Montrer que si $p \geq 5$ est premier, alors $v_p(H_{(p-1)}p) \geq 1$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $v_2(\ H\ )$.

Exercice 7 [9]

1. Calculer $\sum\limits_{d|n} \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.
2. Calculer $\sum\limits_{d|n} \mu(d)$ où μ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1, \mu(p) = -1, \mu\left(p^k\right) = 0$ pour $k \geq 2$ si p est un nombre premier et $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ si $n \wedge m = 1$. On pose $F\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \left|\left\{\frac{p}{q} \in [0,1]; q \leq x\right\}\right|$.
3. Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \ln x)$.

Démonstration.

1. $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$
2. $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$, ou 1 pour $n = 1$.
3. Par inversion de Möbius, on a $\varphi(d) = \sum\limits_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) d'$. ☐

Exercice 8 [10] Soient p, q deux nombres premiers distincts. On note $v_p(n)$ la valuation p-adique d'un entier n. On pose, pour $m \in \mathbb{N}^*, N(m) = (1-q)\left(1-q^2\right)\dots(1-q^m)$. Trouver une constante $c > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*, v_p(N(m)) \leq cm\ln(m)$.

Démonstration. Relier à 423 (LTE).
On a $v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(n)$ (pour $p \neq 2$).
Donc $v_p(N(m)) = \sum_{k=1}^m v_p(1-q) + v_p(m!)$, plus formule de Legendre. ☐

Exercice 9 [11] Si X est un ensemble fini, on note $X^* = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} X^k, c\colon\ (X^*)^2 \to X^*$ la concaténation et $\ell\colon X^* \to \mathbb{N}$ la longueur. Soient A et B deux ensembles finis et $\varphi\colon\ A^* \to B^*$ telle que, pour tous $a, a' \in A, \varphi\left(c\left(a, a'\right)\right) = c\left(\varphi(a), \varphi\left(a'\right)\right)$.

1. On pose $A = \{a,b,c,d\}$ et $B = \{0,1\}$. Étudier l'injectivité des applications définies sur les lettres de A puis étendues sur A^* par $\varphi\colon\ A \to B^*$ telles que $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 01, \varphi(c) = 10, \varphi(d) = 10011$, et $\psi\colon\ A \to B^*$ telle que $\psi(a) = 01, \psi(b) = 10, \psi(c) = 11, \psi(d) = 00$.
2. Montrer que, si φ est injective, alors $\sum_{a\in A} |B|^{-\ell(\varphi(a))} \leq 1$.

Démonstration.

1. La première est non injective : 0100110 peut être lu de deux façons.
   La seconde l'est.

2. On note C_N le nombre de choix possibles, de mots, dont la longueur totale N.
   On doit avoir $C_N \leq |B|^N$. Mais C_N vérifie une relation de récurrence : $C_N = \sum_{a\in A} C_{N-\ell(a}$.
   Donc les racines de cette récurrence doivent être $\leq |B|$, ce qui implique qu'en $|B|$ la valeur est négative, d'où le résultat. $\square$

Exercice 10 [12] 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition $(1\,2)$ et le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

2. La transposition $(1\,3)$ et le cycle $(1\,2\,3\,4)$ engendrent-ils $\mathcal{S}_4$?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq a < b \leq n$ tels que $\tau = (ab)$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{S}_n$. Montrer que $b-a$ et n sont premiers entre eux.
4. Montrer la réciproque de la propriété précédente.

Démonstration. 1.

2. Non.
3. Si $p \mid b-a \wedge n$, alors $\sigma(a) - \sigma(b) \equiv a - b[p]$.
4. Facile de se ramener à un cycle $(u\,u+1)$ $\square$

Exercice 11 [14] Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, on pose $X^{-1} = \left\{x^{-1}, x \in X\right\}$ et $XY = \{xy, (x,y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.

1. On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
2. On suppose que $\left|XX^{-1}\right| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

Démonstration. 1. Si X a un seul élément, ok. Sinon, alors pour tous $a, b \in X$, les ensembles aX et bX ne sont pas disjoints, donc il existe u, v tels que $au = bv \Leftrightarrow a^{-1}b = uv^{-1}$. D'où le résultat.

2. $X^{-1}X$ contient l'élément neutre, et stable par inverse.
   Si ce n'est pas un sous-groupe, c'est qu'il existe $u^{-1}va^{-1}b$ qui ne s'écrit pas de cette forme.
   ! !
   Quitte à translater, on peut supposer que $e \in X$. Alors XX^{-1} contient tous les éléments de X, et leurs inverses. Au moins la moitié des éléments de X ont leurs inverses dans X ! $\square$

Exercice 12 [15] Soient A un anneau et $B \subset A$ finie non vide. On note $E(B) = \left|\{(a,b,c,d) \in B^4 \mid ab = cd\}\right|$. Montrer que $E(B) \geq \frac{|B|^4}{|BB|}$.

Exercice 13 [16] 1. Montrer que $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent $SL_2(\mathbb{Z})$.

2. Soit $m \geq 2$. Montrer que le morphisme $\pi\colon SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjectif.

Exercice 14 [17] Soit p un nombre premier. On admet qu'il existe un anneau commutatif A dans lequel $p^2.1_A = 0_A$ et il existe un élément inversible x tel que :

- tout élément de A s'écrive $P(x)x^{-k}$ pour un $P \in \mathbb{Z}[X]$ et un $k \in \mathbb{N}$;
- pour deux polynômes P, Q dans $\mathbb{Z}[X]$ et deux entiers naturels k, l, l'égalité $P(x)x^{-k} = Q(x)x^{-\ell}$ équivaut à ce que X^kQ et $X^\ell P$ aient même réduit modulo p^2 (autrement dit, tous les coefficients de $X^kQ - X^\ell P$ sont des multiples de p^2).

1. Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Caractériser l'inversibilité de $P(x)x^{-k}$ dans A.
2. Montrer que le groupe multiplicatif $A^\times$ ne possède pas de partie génératrice finie.

Démonstration. $\square$

Exercice 15 [18] Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$. On pose $S_q = \sum\limits_{\substack{0\leq a<q \\ a\wedge q=1}} \sum\limits_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi a f(n)}{q}}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $q \wedge q' = 1$, alors $S_{qq'} = S_q S_{q'}$.

Démonstration. Les $a \in [\![1, qq']\!]$ premiers avec q et q' sont les $bq + aq'$, avec a premier avec q et b premier avec q'. $\square$

Exercice 16 [19] On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{C}$ est intégrable si : $\forall (x,y) \in X^2, |x-y| \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble intégrable X composé de n points tous sur un même cercle.

Démonstration. On veut que les $\sin(\frac{\theta_i - \theta_j}{2})$ soient rationnels, c'est-à-dire les $\sin\frac{\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_j}{2} - \sin\frac{\theta_j}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}$.
Il suffit donc de prendre les doubles d'une infinité de points rationnels sur le cercle. $\square$

Exercice 17 [20] Soit $z \in \mathbb{C}$ annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers. Soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $Q(z)$ est annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers.

Exercice 18 [21] Soit $n = 2m+1 \geq 1$ un entier impair. Expliciter un polynôme P_m de degré $2m$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sin(nx) = (\sin x)^n P_m(\operatorname{cotan} x)$.

1. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^m \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^m \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Démonstration. Easy. □

Exercice 19 [22] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. **SUP**

1. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si n est impair, alors P_n possède exactement une racine réelle, et qu'elle appartient à $[-n, -1]$.
3. On suppose n pair. Le polynôme P_n a-t-il une racine réelle ?
4. Déterminer les variations et la convexité de $x \mapsto P_n(x)$.

Exercice 20 [23] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$.

1. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, nP(x)P''(x) \leq (n-1)P'(x)^2$.
2. Donner un polynôme ne vérifiant pas le résultat de la question précédente, puis un polynôme non scindé le vérifiant.

Démonstration. 1.

2. Ajouter à un précédent. □

Exercice 21 [24] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On factorise P sous la forme $P = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k = \sum_{i=1}^{n} z_i^k$. Montrer que, si $k > n$, $S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_0 S_{k-n} = 0$ et que, si $k \leq n$, $S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1}S_1 = -ka_{n-k}$.

Exercice 22 [25] Une suite d'entiers $(a_n)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme si pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, $m - n \mid a_m - a_n$.

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $\left(P(n)\right)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme.
2. Montrer que $\left(\lfloor n!e \rfloor\right)_{n\geq 1}$ est un pseudo-polynôme.
3. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et que la suite $\left(P(n)\right)_{n\geq 1}$ ne soit pas un pseudo-polynôme.

Exercice 23 [26] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{n+1}$ tel que, pour tout $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$, le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Easy, à relier. □

Exercice 24 [27] Deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont entrelacées si

- $-P$ et Q sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$,
- P et Q n'ont aucune racine réelle commune,
- entre deux racines consécutives de P (respectivement Q) il y a une unique racine de Q (respectivement P).

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, $\lambda P + \mu Q$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P et Q sont entrelacés.

Démonstration. À relier. □

Exercice 25 [28] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. On note D_r le disque complexe ouvert de centre 0 et de rayon r. Montrer que $D_{1/n} \subset P(D_1)$.

Démonstration. $X + X^2Q(X) - z_i = 0$ avec $|z_i| < \frac{1}{n}$ admet toujours une racine, < 1.
Vient des relations coefficients-racines. □

Exercice 26 [31]

- CNS sur n pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.
- On suppose cette condition satisfaite. Combien y a-t-il de polynômes de degré $d \in \mathbb{N}$ fixé dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- Soit p premier. Montrer qu'il existe des polynômes irréductibles de degré 2 et 3 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 27 [32] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps, et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang ≤ 1. Montrer que V est de dimension $\leq n$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 28 [33] Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(X, Y) \in V^2$, on ait $\mathrm{Tr}(XY) = 0$.

Exercice 29 [35] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même rang telles que $A^2B = A$. Montrer que $B^2A = B$.

Démonstration. □

Exercice 30 [38] Soient $n \geq 1$ et E une partie de $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

1. On suppose que E est stable par différence symétrique. Que dire de $C = \{m1_A\}$ comme partie de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n$?
2. On ne fait plus l'hypothèse précédente, mais on suppose que $A \cap B$ est de cardinal pair pour tous $A, B \in E$. Montrer que $|E| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Exercice 31 [39] Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $|a_i| \geq 2$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i$, $a_{ii} = a_i$, $a_{ij} = 1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Montrer que A est inversible et que son déterminant a le même signe que $\prod a_k$.
2. Montrer que la conclusion tient encore si l'on suppose $|a_{ij}| \leq 1$ si $|i - j| = 1$ au lieu de $a_{ij} = 1$.

Exercice 32 [40] On considère $\varphi : \left(\mathbb{R}^4\right)^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui à (u, v) associe la matrice dont le coefficient en (i, j) vaut $\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$.

1. Que peut-on dire si $\varphi(u,v) = \varphi(u',v') \neq 0$?
2. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que A s'écrit comme $\varphi(u,v)$ avec (u,v) libre si et seulement si $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$ et $A \neq 0$.
4. Décrire l'image et le noyau d'une telle matrice.

Démonstration. □

Exercice 33 [41] Soient a, b, m, p des entiers naturels tels que $a^2 + b^2 - pm = -1$. On pose $A = \begin{pmatrix} p & a+ib \\ a-ib & m \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(i))$ telle que $A = B^*B$ où $B^* = \bar{B}^T$. Même question avec B dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Démonstration. On a une matrice hermitienne, de déterminant 1. Donc diagonalisable ? □

Exercice 34 [42] Soient $n \in \mathbb{N}^*, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^2$. Pour $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $f_g : (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mapsto \varphi_1(g(x_1)) \times \cdots \times \varphi_n(g(x_n))$, application de $(\mathbb{R}^2)^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

- il existe une suite $(g_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}^2$, $f_{g_k}(x_1, \ldots, x_n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- il existe une droite vectorielle L telle que $|\{i, L \subset \mathrm{Ker}(\varphi_i)\}| > \frac{n}{2}$.

Démonstration. Si il existe une droite L, en prenant $g_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ selon L et n'importe quel supplémentaire, ça devrait être bon.

Réciproquement, ! ! □

Exercice 35 [43] Soit G l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $ad - bc = 1$ et $a \equiv d \equiv 1 - c \equiv 1 \bmod 3$. Montrer que G est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Démonstration. Facile ? Attention : faux pour 2. □

Exercice 36 [45] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C_A \colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX - XA$. Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors C_A l'est aussi.

Exercice 37 [46] Soient A et B deux matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec A et B. Montrer que $BA = \pm AB$.

Démonstration. $\Leftarrow$ Ok.
Si $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec un Vect de dimension 2. Si $AB = \lambda BA$, c'est bon. Sinon, alors le commutant de $ABA^{-1}B^{-1}$ est $\mathrm{Vect}(I_n, C)$, donc $B = \lambda A + \mu I_n$, puis faire de la réduction. □

Exercice 38 [47] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ leurs multiplicités. On note $P_k = (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et $F_k = \mathrm{Ker}\, P_k(A)$.

1. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.
2. Montrer que P_k est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur F_k.
3. Montrer que A se décompose en $D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente et $ND = DN$.

Exercice 39 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et m la multiplicité de 0 dans χ_A. Montrer l'équivalence entre

- $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^2$.
- il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^m = A$.
- pour tout $k \geq 1$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^k = A$.

Exercice 40 [49] Soit $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ dont toutes les valeurs propres sont de module ≤ 1. Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $M^k - I_n$ soit nilpotente.

Exercice 41 [51] Soit $n \geq 1$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i+1,j})_{i,j}$ la matrice de permutation associée. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que $\forall A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})GL_n(\mathbb{C}), \quad f(PAP^{-1}) = f(A)$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions polynomiales $f \colon \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que $f(P_\sigma D P_\sigma^{-1}) = f(D)$. Expliciter un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$.

Exercice 42 Décomposition de Jordan [52] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $m, x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $(f^k(x))_{0\leq k\leq m-1}$ est libre. On note V le sous-espace de E engendré par cette famille.
2. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(f^{m-1}(x)) \neq 0$, W le sous-espace de E^* engendré par $(\varphi \circ f^i)_{0\leq i\leq m-1}$, $W^\perp$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $\forall \psi \in W^\perp, \psi(y) = 0$. Montrer que $W^\perp$ est un supplémentaire de V dans E stable par f.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme J_k avec $k \in \mathbb{N}^*$, où $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la sur-diagonale qui sont égaux à 1.

Démonstration. □

Exercice 43 [53] Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$. Un élément $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ soit une base de E.

1. Quels sont les endomorphismes de E diagonalisables et cycliques ?
2. Montrer que si u est cyclique, le commutant de u est égale à $\mathbb{K}[u]$.
3. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des sous-espaces $E_1, \ldots, E_r$ de E stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ et que, pour tout i, u_{E_i} soit cyclique.

Exercice 44 [54] Soient $r \in \mathbb{N}^*, d_1, \ldots, d_r$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $d_1 \,|d_2| \ldots \mid d_r$. Déterminer le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contienne un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$.

Démonstration. $n = r$ convient. Réciproquement, si G contient un tel groupe, on peut codiagonaliser. □

Exercice 45 [55] Le groupe $GL_2(\mathbb{Q})$ contient-il un élément d'ordre 5 ?

Exercice 46 [56] On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle.

1. Montrer que $\forall M \in H$, $e^M \in SL_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall M \in H$, $\operatorname{Tr} e^M \geq -2$.
3. A-t-on $\exp(H) = SL_2(\mathbb{R})$?
4. Montrer que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit d'une matrice de $SO_2(\mathbb{R})$ et d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0.
5. En déduire que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit de deux exponentielles de matrices de H.

Exercice 47 [57] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, h_1 et h_2 deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une norme sur E pour laquelle h_1 et h_2 sont des isométries et que $[h_1, h_2] = h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ commute avec h_1 et h_2. Montrer que l'espace des vecteurs de E fixes par h_1 et h_2 admet un supplémentaire dans E stable par h_1 et h_2.

Démonstration. On peut supposer que l'ensemble F des points fixes est de dimension 1. Donc est le noyau d'une forme linéaire φ. ! !
Notons C le commutateur. On a $Ch_2 = h_1 h_2 h_1^{-1}$.
Si h_1 et h_2 commutent.
Si $h_1 = h_2$. □

Exercice 48 [58] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

1. Montrer que $\sum |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.
2. Montrer que $|\det A| \leq n^{n/2} \sup |a_{ij}|$.

Exercice 49 [59] Soient $(E, \langle\rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ des vecteurs de E tels que, pour tout $(i,j) \in 1, m^2, \langle u_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$. On note p le projecteur orthogonal de E sur $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_m)$. Montrer que $\forall x \in E, \sum_{i=1}^n \langle u_i, x \rangle \langle x, p(v_i) \rangle = \|p(x)\|^2$.

Démonstration. Easy, on a $\langle x, p(v_i) \rangle = \langle p(x), v_i \rangle = \langle u_i, x \rangle$. □

Exercice 50 [ENS 60] On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$. On pose $F = \operatorname{Vect}(X, X^2, \ldots, X^n)$ et on note Q la projection orthogonale de 1 sur F.
On ecrit $Q = -\sum_{k=1}^n a_k X^k$ et $P = 1 + \sum_{k=1}^n a_k (X+1) \ldots (X+k)$.

- Determiner $\langle Q - 1, X^k \rangle$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et montrer que $P(k) = 0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
- Calculer $\inf_{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 e^{-x}\,dx$.

Exercice 51 [61] Soient $(E, \langle\rangle,) unespaceeuclidien, m \in \mathbb{N}^*, u, u_1, \ldots, u_m$ des vecteurs de E. Montrer que $u \in \mathbb{R}^+ u_1 + \cdots + \mathbb{R}^+ u_m$ si et seulement si pour tout $x \in E, \{x \in E; \forall i \in 1, m, \langle u_i, x \rangle \leq 0\} \subset \{x \in E; \langle u, x \rangle \leq 0\}$.

Démonstration. $\Rightarrow$: Easy.
$\Leftarrow$: Si les vecteurs u_i sont libres, on peut prendre un élément x orthogonal à tous sauf 1.
Sinon, si u_m est combinaison linéaire des précédents, avec un coefficient < 0. ! ! □

Exercice 52 [ENS 62] Montrer que, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, M s'ecrit d'une unique facon QR avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire superieure a termes diagonaux dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 53 [ENS 63] [Rennes sur dossier] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymetrique et inversible.

- Que peut-on dire de l'entier n ?
- En considerant M^2, montrer que M admet un plan stable puis qu'il existe une matrice orthogonale $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $O^T M O$ soit une matrice diagonale par blocs de la forme $\operatorname{diag}(R_{a_1}, \ldots, R_{a_k})$, avec $R_a = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.
- Qu'en est-il si M n'est plus supposee inversible ?

Exercice 54 [ENS 64] Soit $n \geq 1$. Determiner les matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + A^k = A^T$ pour tout entier $k \geq n$.

Exercice 55 [65] Soient $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de réflexion dans $\mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. On pose $A' = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Calculer $\chi_{A'}(1)$ en fonction de la première colonne de M et de χ_A.

Démonstration. $\chi_{A'}(1) = \det(I_{n+1} - M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}).!!$ ☐

Exercice 56 [ENS 66] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On suppose que A et $A + vv^T$ n'ont pas de valeur propre commune. Sous reserve d'existence, on pose $F(x) = 1 + v^T(A - xI_n)^{-1}v$ pour x reel.

- Montrer que les zeros de F sont les valeurs propres de $A + vv^T$.
- On note $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les valeurs propres de A. Montrer que chaque intervalle $]\lambda_1, \lambda_2[$,..., $]\lambda_{n-1}, \lambda_n[,]\lambda_n, +\infty[$ contient exactement une valeur propre de $A + vv^T$.

Exercice 57 [ENS 67] Soient $n \in \mathbb{N}$ impair, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $A + M$ soit nonversible. Montrer que $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 58 [68] Soient A, B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'ont pas -1 pour valeur propre et telles que AB n'ait pas 1 pour valeur propre. Montrer que $(A - I_n)(BA - I_n)^{-1}(B - I_n)$ est antisymétrique.

Démonstration. Classique ☐

Exercice 59 [ENS 69] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

- Determiner les valeurs propres de J et leur multiplicite.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
- Que peut-on dire de la matrice BJB ?
- Lorsque A est diagonale, calculer les valeurs propres de JA.
- Montrer plus generalement que toute valeur propre d'une matrice antisymetrique reelle est imaginaire pure.

Exercice 60 [70] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A non nécessairement distinctes. Montrer que $\forall k \in \Big[1, n, \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^k \lambda_{n+1-i}$.

Démonstration. ☐

Exercice 61 [71] 1. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ Montrer que AB est diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles.

2. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $f_{A,B} : X \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(AX) + \mathrm{Tr}\left(BX^{-1}\right)$. Montrer que $f_{A,B}$ admet un minimum $\mu_{A,B}$ atteint en une unique matrice $M_{A,B}$. Expliciter $\mu_{A,B}$ et $M_{A,B}$.

Démonstration. ☐

Exercice 62 [ENS 72] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On definit $p(A)$ comme la dimension maximale d'un sous-espace V sur lequel $\forall x \in V \setminus \{0\}$, $\langle Ax, x\rangle > 0$. On definit de meme $q(A)$ avec la condition $\langle Ax, x\rangle < 0$.

- Montrer que $p(A) + q(A) = \mathrm{rg}\, A$.
- Montrer que, si A est inversible, alors p et q sont constantes sur un voisinage de A dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on suppose que $f : t \mapsto \det(A + tB)$ n'a que des racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet au moins $|p(B) - q(B)|$ racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 63 [ENS 73] On note $\lambda_1(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonne d'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Si $1 \leq i, j \leq n$ et $i + j \geq n + 1$, que dire du signe de $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$?[MISSING$_{\text{PAGEFAIL}}$:1]# 80

Soient $a \leq b$ deux reels, et $(O - i \in I$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. On note X l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels qu'il existe une partie finie $J \subset I$ verifiant $[a, x] \subset \bigcup_{j \in J} O_j$. Montrer que $X = [a, b]$.

Exercice 64 [74] Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(M) \leq \cdots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonné de M.

1. On considère $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. Montrer que, si $i + j < n + 2$ alors $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) < 0$.
2. Généraliser à $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1 + \cdots + A_d \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. telle que $B = P^T AP$.

Démonstration. ☐

Exercice 65 [75] On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne. Soit $S \in \mathcal{S}_n$. On suppose que $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid S = M^T M - MM^T\}$ est non vide. On note $\gamma(S) = \inf_{M \in E} \|M\|^2$. Montrer que $\|S\| \leq \gamma(S) \leq 2\|S\|$.

Exercice 66 [76] 1. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^T AP$.

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Proposer une définition naturelle de $f(A)$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Pour A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on pose $d(A, B) = \left\| \ln\left(\sqrt{A^{-1}} B \sqrt{A^{-1}}\right) \right\|$. Justifier la définition, et montrer que d est une distance sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $d\left(P^T AP, P^T BP\right) = d(A, B)$.

Démonstration. ☐

Exercice 67 [77] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}\, X^T Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

2. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $L(M)\colon X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MX$. Montrer que L est un morphisme d'algèbre injectif.
3. Soit $|||\cdot|||_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, et $|||\cdot|||$ la norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ subordonnée à $\|\cdot\|$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $|||L(M)||| \leq |||M|||_2$.
4. Montrer que $\left|\left|\left|M^T\right|\right|\right|_2 = |||M|||_2$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 68 [78] On note $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associée à la norme $X \mapsto \sqrt{\bar{X}^T X}$.

1. Soient A, B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left\|e^{iA} - e^{iB}\right\| \leq \|A - B\|$.
2. Démontrer le même résultat sous l'hypothèse que A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\bar{A}^T = A$ et $\bar{B}^T = B$.

Démonstration. □

Exercice 69 [79] Soit $p > 1$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\Big\| x = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$.

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une norme.
2. Montrer l'inégalité de Hölder.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner la boule unité de la norme p pour plusieurs valeurs de p.

Exercice 70 [80] Soient $a \leq b$ deux réels, et $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a,b] \subset \bigcup_i O_i$. On note X l'ensemble des $x \in [a,b]$ tels qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $[a,x] \subset \bigcup_{j\in J} O_j$. Montrer que $X = [a,b]$.

Exercice 71 [ENS 81] Soient K un compact convexe non vide d'un espace norme E, f un endomorphism continu de E tel que $f(K) \subset K$. Montrer que f admet un point fixe dans K.

Exercice 72 [82] Peut-on écrire $]0{,}1[$ comme réunion dénombrable disjointe de segments d'intérieurs non vides ?

Démonstration. Non. Par l'absurde, on fait de la dichotomie, entre des segments, dont la distance tend vers 0, alors la limite n'appartient à aucun segment. □

Exercice 73 [83] Pour tout réel x dans $[0{,}1[$, on note $0, x_1x_2x_3\ldots$ le développement décimal propre de x. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i$. Soit a un réel tel que $0 < a < 9$. On définit $P_n = \{x \in [0{,}1[; S_n(x) \leq na\}$ et $P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$. Montrer que P est compact, non vide, d'intérieur vide et sans point isolé.

Démonstration. P est borné et fermé, car S_n est continue inférieurement. Clairement non vide et d'intérieur vide. Si $x \in P$, en retirant 1 a un chiffre de x arbitrairement grand, on reste dans P. Possible sauf si x est décimal, auquel cas on peut ajouter 1. □

Exercice 74 [ENS 84] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que la classe de similitude de A est fermee si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 75 [ENS 85]

- On note D le disque unite du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Demontrer qu'il existe une suite $(C - i \in \mathbb{N}$ de parties de D telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble C_i soit un carre de $\mathbb{R}^2$ dont les cotes sont paralleles aux axes ;
  - ▷ les C_i soient d'interieurs deux a deux disjoints ;
  - ▷ $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Aire}(C_i) = \pi$.
- On note $C = [-1,1]^2$. Demontrer qu'il existe une suite $(D - i \in \mathbb{N}$ de parties de C telle que :
  - ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble D_i soit un disque ferme de $\mathbb{R}^2$;
  - ▷ les D_i soient d'interieurs deux a deux disjoints ;
  - ▷ $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Aire}(D_i) = 4$.

Exercice 76 [ENS 2023 86] Soit $d \geq 1$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{R}[X]$.

1. On pose $A = \{(P,x) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}; P(x) = 0\}$ et $P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de A dans $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}$.
2. On pose $B = \{P \in \mathcal{P}; \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \neq 0$ ou $P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de B dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Démonstration.

1. Par translation, on peut passer de (P,x) à $(\tilde{P}, 0)$. Alors $P = X^n + Q + \alpha X$, avec $\alpha \neq 0$. On peut ramener Q à 0, et α à ± 1. Deux composantes connexes, selon le signe de $\alpha = P'(x)$.
2. B est l'ensemble des polynômes unitaires à racines simples. Le nombre de racines simples est un invariant, et réciproquement, ces morceaux sont clairement connexes par arcs. □

Exercice 77 [87] Soient $(M_k)_{k\geq 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables les unes aux autres, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\|M_k\| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et une extractrice $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\frac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|} \to N$.

Démonstration. On peut extraire $\frac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|}$ convergent, vers Π.

Si Π a une valeur propre complexe X, comme $\left\|\frac{M_{\varphi(k)}}{\left\|M_{\varphi(k)}\right\|} - \Pi\right\| \leq \varepsilon$, on a une valeur propre complexe proche de λ, donc $M_{\varphi(k)}$ a une valeur propre qui tend vers $+\infty$. □

Exercice 78 [88] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module < 1. Montrer qu'il existe une norme \|\| sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour la norme d'opérateur associée, on ait $\|A\| < 1$.

Démonstration. Trigonaliser, puis conjuguer par une matrice diagonale pour n'avoir que des petits coefficients hors de la diagonale. □

Exercice 79 [89] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de lignes $L_1, \ldots, L_n$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que, pour tout $i \in 1, n$, $\|L_i\|_2 = 1$ et la distance euclidienne canonique de L_i au sous-espace engendré par les L_j, pour $j \neq i$, est supérieure ou égale à ε. Montrer que A est inversible et que $\sup\left\{\left\|A^{-1}x\right\|_2 ; x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 = 1\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Démonstration. A est inversible car aucune ligne n'est combinaison linéaire des autres.
Si $x = E_i$, on considère les colonnes de A^{-1}, notées C_i. On $\langle C_i, L_i \rangle = 1$ et C_i orthogonal aux autres lignes, ce qui donne $\|C_i\|_2 \leq \frac{1}{\varepsilon}$, peut-être.
Ensuite, utiliser une convexité ? □

Exercice 80 [ENS 90] On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornees de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\| \ \| \ \|_\infty$. On fixe $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ non nulle a support compact, et on note $W(g)$ l'espace vectoriel engendre par les fonctions $x \mapsto g(x-n)$, n decrivant $\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des reels t lets que $\left\{x \mapsto f(x-t), f \in \overline{W(g)}\right\} = \overline{W(g)}$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.

Exercice 81 [91] Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles de limite 1 et (u_n) une suite réelle strictement positive telle que, pour tout n, $u_{n+2} = a_{n+1}u_{n+1} + b_{n+1}u_n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \frac{\ln(u_n)}{n}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent.

Démonstration. Soit m. On peut écrire $u_{a+n} = G_n u_a + G_{n+1}u_{a-1}$ et $u_{a+n+1} = G_{n+1}u_a + G_{n2}u_{a-1}$, où $G_n \xrightarrow[a \to +\infty]{} F_n$, ce qui devrait implique ce que l'on veut.
w_n s'obtient à partir de v_n par Cesàro. □

Exercice 82 [ENS 2023 92]
1. Si $n \geq 2$ est un entier, montrer que $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor = \sum_{j=2}^n \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor$.
2. Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=2}^n \lfloor \log_k(n) \rfloor$, puis un développement asymptotique à deux termes.

Démonstration.
1. Le premier compte les puissances de k inférieures à n, dont k^1.
   Le second compte les puissances j-èmes inférieures à n.
2. En coupant la somme en $k = \sqrt{n}$, on a du $\sqrt{n}\ln n + (n - \sqrt{n})n$, d'où un équivalent à n.
   En suite, on prend l'autre expression, on retire n. Le premier terme est $\sqrt{n}$. Les termes non nuls correspondent à $\sqrt[j]{n} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 2^j$, donc les autres termes sont au plus en $\sqrt[3]{n}\ln n$, d'où le DSA $n + \sqrt{n} + o_{+\infty}(\sqrt{n})$. □

Exercice 83 [ENS 93] Soient $\alpha > 0$ et $(a - n \in \mathbb{N}$ une suite strictement decroissante a valeurs dans $]0, 1[$. Soit $(u - n \in \mathbb{N}$ une suite definie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(u_n^\alpha + a_n)$. Montrer qu'il existe un unique $u_0 > 0$ tel que la suite $(u - n \in \mathbb{N}$ converge vers un reel strictement positif.

Exercice 84 [ENS 94] Soit (u_n) une suite definie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin(\ln n)$. On note V l'ensemble des valeurs d'adherence de (u_n).

- Montrer que, pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$.
- Montrer que $u_{n+1} - u_n \to 0$.
- Montrer que V est un intervalle inclus dans $[-1, 1]$, puis que $V = [-1, 1]$.

Exercice 85 [ENS 95] Si A est une partie de $\mathbb{N}^*$, on dit que A admet une densite si la suite $\left(\frac{|A \cap 1, n|}{n}\right)_{n \geq 1}$ admet une limite. Cette limite est alors notee $d(A)$.

- Si $m \in \mathbb{N}^*$, quelle est la densite de l'ensemble des multiples de m dans $\mathbb{N}^*$?
- Soient A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ admettant une densite. Montrer que $A \cup B$ admet une densite que l'on precisera.
- Donner un exemple de partie de $\mathbb{N}^*$ n'admettant pas de densite.

Exercice 86 [ENS 96] On considere une suite $a \in \{2, 3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n-ieme occurrence de 2 et la $(n+1)$-ieme occurrence de 2 soit egal a a_n.
Etudier la convergence de la suite de terme general $\frac{1}{n}\left|\{k \in 1, n, \ a_k = 3\}\right|$.

Exercice 87 [97] On considère une suite $a \in \{2, 3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geq 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n-ième occurrence de 2 et la $(n+1)$-ième occurrence de 2 soit égal à a_n. Montrer qu'il existe un unique irrationnel α tel que les indices $n \geq 1$ tels que $a_n = 2$ soient exactement les entiers de la forme $\lfloor m\alpha \rfloor + 1$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. □

Exercice 88 [98] Une suite réelle (x_n) est dite équirépartie modulo 1 si elle vérifie, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$, $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2ik\pi x_n} = 0$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(n\alpha)$ est équirépartie modulo 1.
2. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_{n+h} - x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie ; on veut montrer que (x_n) est équirépartie modulo 1.
   a) Soit (a_n) une suite de complexes de module ≤ 1. Montrer, pour tous $N, H \in \mathbb{N}^*$: $\left|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n\right| \leq \left|\frac{1}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_{n+h}\right| + \frac{2H}{N}$.

b) Montrer que $\left|\frac{1}{H}\sum_{h=0}^{H-1}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_{n+h}\right| \leq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=0}^{H-1}\frac{a_{n+h}}{H}\right|^2}$.

c) Conclure.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et de coefficient dominant irrationnel. Montrer que $(P(n))_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1.
4. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle équirépartie modulo 1, et $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$.
5. On reprend les hypothèses de la question 3. Montrer que la distance de $P(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$ est nulle.

Démonstration. 1.

2.

3.

4.

5. ?? □

Exercice 89 [ENS 99] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on note A_n la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

ou, pour tout $k \in 1, n-1$, $a_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$.
Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Determiner la limite de $(\operatorname{tr}(A_n^q))_{n\geq 2}$.

Exercice 90 [100] Montrer la convergence et calculer $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left\lfloor\frac{\ln(k)}{\ln(2)}\right\rfloor$.

Démonstration. Écrit quelque part… □

Exercice 91 [101] On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$. On se donne une suite presque nulle $v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ainsi qu'une suite $(u_k)_k$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ (l'élément u_k est donc noté $(u_{k,i})_{i\in\mathbb{N}}$). On suppose que, pour tout entier $p \geq 2$, la suite de terme général $w_k = \sum_{n=0}^{+\infty}(u_{k,n})^p$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty}(v_n)^p$. Montrer que $\inf_{\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_{k,\sigma(n)}-v_n\right)^2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. Écrit quelque part…
On peut supposer que les (v_n) sont décroissants, par réordonnement. □

Exercice 92 [102] Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et telle que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

Démonstration. Facile. □

Exercice 93 [103] Soient I un intervalle ouvert, $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable et $[a,b] \subset I$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que la tangente au graphe de f en c passe par le point $(a, f(a))$.

Démonstration. On peut supposer $f'(a) = f'(b) = 0$. À relier. □

Exercice 94 [ENS 104] Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soit derivable en aucun point.

Exercice 95 [105] Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geq 2$, f^n (puissance) soit polynomiale.

Démonstration. f^2 et f^3 polynomiales, donc f est une fraction rationnelle, $f \in \mathbb{Q}(x)$ et $f^2 \in \mathbb{Q}[X]$ impliquent $f \in \mathbb{Q}[X]$. □

Exercice 96 [ENS 106] Soit $p > 1$ un reel. Montrer qu'il existe une constante $k_p > 0$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x|^p + |y|^p = 2$, on ait $(x-y)^2 \leq k_p\,(4-(x+y)^2)$.

Exercice 97 [ENS 107] Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. On note $f^*(s) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(sx - f(x))$ et $f^*(x) = \sup_{s\in\mathbb{R}}(sx - f^*(s))$.
Montrer que $f^*(x) = \sup_{a \text{ affine } \leq f} a(x)$.

Exercice 98 [ENS 108] Soient I un ensemble fini et $(P - i \in I$ une famille de polynomes reels stable par derivation. On definit une fonction signe par $\operatorname{sign}(x) = \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $\operatorname{sign}(0) = 0$.

Pour $\varepsilon \in \{-1,1,0\}^I$, soient $A_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ \forall i \in I,\ \operatorname{sign}(P_i(t)) = \varepsilon(i)\}$ et
$B_\epsilon = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ \forall i \in I, \operatorname{sign}(P_i(t)) \in \{\varepsilon(i), 0\}\}$.

- Montrer que A_ε est soit vide, soit reduit a un point, soit un intervalle ouvert.
- Si A_ε est non vide, montrer que B_ε est l'adherence de A_ε. Si A_ε est vide, montrer que B_ε est soit vide suit un singleton.

Exercice 99 [ENS 109] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

- Soient $x_0, \dots, x_n$ des points de I. On note $V(x_0, \dots, x_n)$ le determinant de Vandermonde associe a $(x_0, \dots, x_n)$. Montrer qu'il existe $\tau \in I$ tel que
$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!} V(x_0, x_1, \dots, x_n)$$
- On suppose que $n = 2$, que I est un segment et que f est strictement convexe. On note $\Gamma_f = \{(x, f(x)); x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de f. Montrer qu'il existe une constante C, dependant uniquement de I et f, telle que le nombre de points de $\Gamma_f \cap \frac{1}{N} \mathbb{Z}^2$ soit majore par $C\, N^{2/3}$ pour tout entier $N \geq 1$.

Exercice 100 [ENS 110] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\, dx$.
- Montrer que $(w - n \geq 0$ est decroissante.
- Etablir une relation de recurrence entre w_{n+2} et w_n.
- Sans utiliser la formule de Stirling, determiner un equivalent simple de w_n.
- Determiner le rayon de convergence de la serie entiere $\sum w_n x^n$.

Exercice 101 Théorème de Rouché [111] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$.

1. Montrer que le nombre de racines de P de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité n'est autre que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} P'(e^{it})}{P(e^{it})}$ d
2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$ et tel que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$. Montrer que P et Q ont même nombre de racines de module strictement inférieurs à 1 comptées avec multiplicité.

Démonstration. □

Exercice 102 [ENS 112] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\, dx$ et $B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n}(x)\, dx$. On admet que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2nA_n = (2n-1)A_{n-1}$.
- Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{2B_0}{A_0} - \frac{2B_n}{A_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En deduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ puis que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 103 [113] Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et presque périodique c'est-à-dire telle que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x + nT) - f(x)| \leq \epsilon$. Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et presque périodique.
1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t} \int_0^t f$ possède une limite quand $t \to +\infty$.

Démonstration. 1. Easy.
2. !! □

Exercice 104 [ENS 114] Soit f une fonction continue par morceaux et croissante de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^1 f(x) e^{i\lambda x} dx \underset{\lambda \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Exercice 105 [ENS 115] Soient $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ des fonctions de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit A la matrice de terme general $A_{i,j} = \int_0^1 f_i(x) g_j(x)\, dx$.
On pose $B(x_1, \dots, x_n) = \det\left(f_i(x_j)\right)$ et $C(x_1, \dots, x_n) = \det\left(g_i(x_j)\right)$.Montrer que $\int_{[0,1]^n} B(x_1, \dots, x_n)\, C(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = n! \det(A)$.

Exercice 106 [ENS 116 - La fonction f • Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et telle que f' est uniformement continue. Est-ce que f' a une limite en $+\infty$?

Exercice 107 [ENS 117] [Rennes sur dossier] Soient $d, N \in \mathbb{N}$ tels que $N > d$. Soient $(P - n \in \mathbb{N}$ une suite de polynomes a coefficients reels de degre au plus d et $x_1, ..., x_N$ des reels distincts. On suppose que pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, la suite $(P_n(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornee. Montrer que l'on peut extraire de $(P - n \in \mathbb{N}$ une suite $(Q - n \in \mathbb{N}$ qui converge uniformement sur $[0, 1]$ vers un polynome de degre au plus d.

Exercice 108 [ENS 118] Montrer que la suite de fonctions de terme general $f_n : x \mapsto (\sin x)^n\, \cos(x)$ converge uniformement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 109 [ENS 119] On note I (resp. S) l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telles que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in [0, 1], f(x) \leq a\}$ est ferme (resp. de meme avec l'inegalite dans l'autre sens).
- Montrer que $S \cap I$ est l'ensemble C des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.
- Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$. On pose $f_n : x \mapsto \inf(\{1\} \cup \{f(y) + n|x - y|, y \in [0, 1]\})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n est continue pour tout n, que la suite (f_n) est croissante et que $f \in I$ si et seulement si la suite (f_n) converge simplement vers f.

Exercice 110 [120] Soit $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(n) = \ln(p)$ si $n = p^k$ avec p premier et $k \in \mathbb{N}^*$, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.
2. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^s}$.

3. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} \underset{s\to 1+}{=} \frac{1}{s-1} + O(1)$.
4. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \underset{s\to 1^+}{=} \ln\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1)$. Qu'en déduire ?

Démonstration. □

Exercice 111 [ENS 121] Soit $q \geq 2$ entier. On se donne un caractere non trivial χ sur le groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, c'est-a-dire un morphisme de groupes non constant $\chi : ((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \times) \longrightarrow (\mathbb{U}, \times)$. Pour $m \in \mathbb{Z}$, on pose alors $\widetilde{\chi}(m) = 0$ si q n'est pas premier avec m, et $\widetilde{\chi}(m) = \chi(\overline{m})$ sinon (ou $\overline{m}$ designe la classe de m modulo q).

- Montrer que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\chi(m)}{m^s}$ converge si et seulement si $s > 0$. - Montrrer que la fonction $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 112 [122] Soient $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle en $+\infty$ et $g\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$. Quelle est la limite de g en 0^+ ?

Démonstration. C'est $\sum f(2nx) - f((2n+1)x) = \sum \int_{2nx}^{(2n+1)x} f'(t)\,\mathrm{d}t$. Cela tend vers $\frac{1}{2}f(0)$, en découpant sur un segment, et en utilisant l'uniforme continuité de f'. □

Exercice 113 [ENS 123] Pour tout polynome trigonometrique $P : \theta \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(P)e^{ik\theta}$ (somme a support fini) et pour tout $d \in \mathbb{R}$, on pose $\|P\|_{h^d}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(P)|^2(1+|k|)^{2d}$.
On admet que $\|\ \|_{h^d}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{T}$ des polynomes trigonometriques pour tout $d \in \mathbb{R}$. Soit E l'espace des fonctions continues par morceaux et 2π-periodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On definit le produit de convolution de deux fonctions $f, g \in E$ par : $f \star g : \varphi \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)g(\varphi-\theta)\mathrm{d}\theta$. Enfin, on pose, pour $f \in E$, $\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\mathrm{d}\theta$.

- Montrrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ et $c = c(d) \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tous $f, g \in \mathcal{T}$,

$\|f \star g\|_2 \leq c(d)\|f\|_{h^d}\|g\|_2$.

- Determiner tous les reels d verifiant la condition de la question precedente.
- Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-periodique. On pose, pour $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta$ et, pour tout $d \in \mathbb{R}$, $\|f\|_{h^d}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2(1+|k|)^{2d}$. Determiner les $d \in \mathbb{R}$ tels que $\|f\|_{h^d} < +\infty$.
- Soient f, g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-periodiques et $d \in \mathbb{R}$. Calculer $\|f \star g\|_{h^d}$.

Exercice 114 [ENS 124] Soient $p \geq 2$ et $q \geq 2$ deux entiers tels que $p \wedge q = 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on pose $f(z) = \frac{1-z^{pq}}{(1-z^p)(1-z^q)}$. Ecrire $f(z)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ et trouver le plus grand $n \geq 0$ tel que $c_n = 0$.

Exercice 115 [125] Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-R, R[$ telles que $\forall x \in]-R, R\left[, \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = 0\right.$. Montrer que l'une au moins des deux fonctions f et g est identiquement nulle sur $]-R, R[$.

Démonstration. □

Exercice 116 [ENS 126] Soient $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et $g : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.

- Determiner les rayons de convergence de f et g.
- Trouver les complexes $z \in \mathcal{S}(0,1)$ tels que $f(z)$ converge.
- Montrrer que f admet un prolongement $\bar{f}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, developpable en serie entiere en tout point de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- Montrer que $|g(r)| \to +\infty$ quand $r \to 1$ avec $r \in \mathbb{R}$. - Montrrer que, si $z \in \mathcal{B}(0,1)$, alors $g(z^2) = g(z) - z$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{U}_{2^n}$. Montrrer que $|g(r\alpha)| \to +\infty$ quand $r \to 1$ avec $r \in \mathbb{R}$.
- Soit $h : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n+1}}{2^n+1}$. Montrrer que h est continue sur $\overline{\mathcal{B}}(0,1)$.
- Montrrer que, pour tout $z_0 \in \mathcal{S}(0,1)$, $\varepsilon > 0$ et $\tilde{h}$, prolongement de h sur $\overline{\mathcal{B}}(0,1) \cup \mathcal{B}(z_0, \varepsilon)$, la fonction $\tilde{h}$ n'est pas developpable en serie entiere en z_0.

Exercice 117 [ENS 127] Soit $\alpha = (\alpha - i \geq 1$ une suite de $\mathbb{Z}$ nulle a partir d'un certain rang. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \prod_{i\in\mathbb{N}^*} ((in)!)^{\alpha_i}$.

- Determiner, selon la valeur de α, le rayon de convergence R de la serie entiere $\sum_{n\geq 1} u_n z^n$.

Dans la suite, on note f la somme de cette serie entiere.

- Expliciter f si $\alpha = (-\delta_{i,1})_{i\geq 1}$.
- Pour une somme g de serie entiere sur un intervalle $]-a, a[$ non trivial, on pose $\Delta(g) : z \mapsto zg'(z)$. Expliciter $P(\Delta)(g)$ lorsque $g : z \mapsto z^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
- Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite complexe, et $P \in \mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{P(n+1)}$. Montrrer que $\sum_{n\geq 1} v_n z^n$ a un rayon de convergence non nul et donner une methode simple pour trouver une equation differentielle lineaire non triviale a coefficients polynomiaux dont sa somme est solution.
- Resoudre le meme probleme qu'en (d) lorsqu'il existe P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ sans racine dans $\mathbb{N}^*$ telles que $v_{n+1} = \frac{Q(n+1)}{P(n+1)} v_n$ pour tout $n \geq 1$, et en supposant cette fois-ci que $\deg(Q) \leq \deg(P)$.
- Justifier que le cadre de la question - s'applique bien a la suite $(u - n \geq 1$ lorsque $R > 0$.

Exercice 118 [ENS 128] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n!\,(30n)!}{(15n)!\,(10n)!\,(6n)!}$.

- Montrrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier.

- Determiner le rayon de convergence de la serie entiere $\sum u_n x^n$.
- Trouver une equation differentielle verifiee par la somme de la serie entiere precedente.

Exercice 119 [129] Existe-t-il une partie A de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n\in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$?

Démonstration. Cf un précédent □

Exercice 120 [ENS 130] • Soit $f\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une serie entiere de rayon $R > 0$. Montrrer que, pour tout $0 < r < R$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$.

- ▷ Soit f une fonction developpable en serie entiere de rayon de convergence egal a 1. On suppose que f est prolongeable par continuite sur le disque ferme $D_f(0,1)$. Expliquer pourquoi la formule de Cauchy ci-dessus reste vraie pour $r = 1$. - Soit $f : x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}e^{-\frac{1-x}{1+x}}$. Montrer que f est developpable en serie entiere au voisinage de 0.
- ▷ On admet que le rayon de convergence du developpement de f en 0 vaut 1. Montrer que les coefficients du developpement en serie entiere en 0 de f sont bornes par $M > 0$. Experimer M en fonction de f.

Exercice 121 [ENS 131] Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ a l'aide de la transformation de Laplace.

Exercice 122 [132] Soit $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^-$ tel que $\forall x \in [0,1], 1 + ax + bx^2 \geq 0$.

1. Si $a \in \mathbb{R}^+$, montrer que $n\int_0^1 \left(1+ax+bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Si $a \in \mathbb{R}^{-*}$, montrer que $n\int_0^1 \left(1+ax+bx^2\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{a}$.

Démonstration. □

Exercice 123 [133] Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{e^{2x}\cos^2(t)+e^{-2x}\sin^2(t)}}$. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq (ax+b)e^{-x}$.

Démonstration. □

Exercice 124 [ENS 134] Pour x reel, on pose $J(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin t)\,dt$.

- Calculer $J(0)$.
- Montrer que J est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- En estimant $\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \cos(x\sin t)\,dt$ pour un ε a choisir convenablement en fonction de x, etablir que $J(x) = O(x^{-1/2})$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 125 [ENS 135] Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f\star g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt$. Montrer que $f\star g$ est derivable et donner une expression de sa derivee.

Exercice 126 [ENS 136] Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geq 1$ et $s < t$ dans $]0,1[$, on pose
$a_n(f,s,t) = \frac{2}{t-s}\int_s^t f(u)\cos\left(\frac{2n\pi}{t-s}(u-s)\right)\,du.$

- On suppose f strictement convexe. Montrer que $a_1(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$.
- On suppose f strictement convexe. Montrer que $a_n(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Reciproquement, on suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ et $a_1(f,s,t) > 0$ pour tous $s < t$ dans $]0,1[$. Montrer que f est strictement convexe.

Exercice 127 [ENS 137] Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'equation differentielle sur $\mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^n y^{(k)} = 0$.
A quelle condition sur n tout element de $\mathcal{S}$ possede-t-il une limite en $+\infty$?

Exercice 128 [138] Soit I un (vrai) intervalle de $\mathbb{R}$. Si $r \in \mathbb{N}^*$ et $f_1,\dots,f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$, on pose $W_r(f_1,\dots,f_r) = \det\left(\left(f_j^{(i-1)}\right)_{1\leq i,j\leq r}\right)$.
Soient $r \in \mathbb{N}^*, f_1,\dots,f_r \in \mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$. Montrer que $W_r(gf_1,\dots,gf_r) = g^r W_r(f_1,\dots,f_r)$.
2. On suppose que, pour tout $k \in 1,r, W_k(f_1,\dots,f_k)$ ne s'annule pas. Montrer que, pour tout $(a_1,\dots,a_r) \in \mathbb{R}^r$ non nul, la fonction $a_1f_1 + \cdots + a_rf_r$ s'annule au plus $(r-1)$ fois sur I.
3. On suppose que $W_r(f_1,\dots,f_r)$ est identiquement nul sur I et que $W_{r-1}(f_1,\dots,f_{r-1})$ ne s'annule pas. Montrer que $(f_1,\dots,f_r)$ est liée.

Démonstration. □

Exercice 129 [ENS 139] On considere l'equation differentielle $(D_\lambda) : y'' + (\lambda - r)y = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $r \in C^\infty(I,\mathbb{R})$, ou I un intervalle contenant $[0,1]$. On considere E_λ l'espaces des solutions y de (D_λ) telles que $y(0) = 0, y(1) = 0$.

- Quelles sont les dimensions possibles de E_λ ?
- Caracteriser le cas $\dim(E_\lambda) = 1$. (On souhaite une condition portant sur y_λ, solution du probleme de Cauchy (D_λ), $y_\lambda(0) = 0$, $y'_\lambda(0) = 1$.)
- Montrer que, a r fixe, les E_λ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg$.
- On note N_λ le nombre de zeros de y_λ sur $[0,1]$. Pourquoi est-il fini ?
- Calculer N_λ dans le cas $r = 0$, $\lambda > 0$.

- Dans le cas general, etudier le comportement de N_λ.

Exercice 130 [ENS 140] Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et a, b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On considere l'equation differentielle $(E) : x^{''} + a(t)\, x' + b(t)\, x = 0$.

- Soit x une solution non nulle de (E). Montrer que les zeros de x sont isoles.
- On suppose a de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe z de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$, et $q : I \to \mathbb{R}$ continue telles que $x \mapsto [t \mapsto x(t)\, e^{z(t)}]$ definisse une bijection de l'ensemble des solutions de (E) sur celui des solutions de $y^{''} + q(t)\, y = 0$.
- Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \leq q_2$. On considere l'equation differentielle $(E_i) : y^{''} + q_i(t)\, y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs de y_1. Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
- Soient $q : I \to \mathbb{R}$ continue, et m, M deux reels strictement positifs tels que $m \leq q \leq M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs d'une solution non nulle de $y^{''} + q(t)y = 0$. Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$.# 141

Soient A une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M l'unique application derivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(0) = I_n$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ M'(t) = A(t)M(t)$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \det(M(t)) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}\, A\right)$.

Exercice 131 [ENS 142] Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, π-periodique et telle que $\int_0^\pi p(t)dt \geq 0$ et $\int_0^\pi |p(t)|dt \leq \frac{\pi}{4}$. Montrer que l'equation $u^{''} + pu = 0$ n'admet pas de solution u non nulle sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, u(t + \pi) = \lambda\, u(t)$.

Exercice 132 [ENS 143] Soit $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(A_0 + A_0^T) \subset \mathbb{R}^-$.

On admet l'existence d'une unique fonction $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(0) = A_0$ et $\forall t \geq 0,\ A'(t) = (A(t))^2 - \left(A(t)^T\right)^2$. Montrer que la fonction A a une limite en $+\infty$ et expliciter cette limite.

Exercice 133 [ENS 144] Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Decrire le comportement asymptotique en $+\infty$ des solutions de l'equation differentielle $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 134 [ENS 145] On considere l'equation differentielle $(1) : X'(t) = P(t)X(t)$ ou P est une application continue et periodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Resoudre (1) si $\forall t∈R,\ P(t)=( ) .$Onrevientaucasgeneral.SoitT \in \mathbb{R}^{+*}$ une periode de P. On note $X_1, \ldots, X_n$ une base de l'espace des solutions de (1) et, si $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))$. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t + T) = M(t)C$.
- Avec les notations de la question precedente, montrer qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t)e^{-tA}$ soit T-periodique.

Exercice 135 [ENS 146]
- Soit $f : (x, y) \mapsto \left(\ln\left(x^2 + y^2\right), \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$. Donner le domaine de definition Ω de f. Etudier la continuite et la differentiabilite de f.
  - ▷ On identifie naturellement $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$. Montrer que, si $(x, y) \in \Omega$, $df_{(x,y)}$ est $\mathbb{C}$-lineaire.

Exercice 136 [ENS 147] Calculer $\sup_{a,b,c>1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^b + \left(1 - \frac{1}{2b}\right)^c + \left(1 - \frac{1}{3c}\right)^a$.

Exercice 137 [ENS 148] Trouver $\sup_{a,b,c\geq1} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^b \left(1 - \frac{1}{2b}\right)^c \left(1 - \frac{1}{3c}\right)^a$.

Exercice 138 [ENS 149] [Rennes sur dossier] Soient $q \in \mathbb{R}^+$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1\}$, Determiner $\min_{(x,y)\in D}(x^q + y^q)$.

Exercice 139 [ENS 150] Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

Determiner les extrema de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

Exercice 140 [151] Soient f une application différentiable convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq 0$.
2. On suppose que l'application ∇f est L-lipschitzienne.

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq \frac{1}{L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$.

Exercice 141 [ENS 152] Soit $p > 1$. Montrer qu'il existe $K_p \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x|^p + |y|^p = 2$, on a $(x - y)^2 \leq K_p(4 - (x + y)^2)$.

Exercice 142 [ENS 153] Soient f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ telle que df_x soit injective. Montrer qu'il existe un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel f est injective.

Exercice 143 [ENS 154] On identifie $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 et telle que $\Delta f = 0$. Montrer que $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt$.

Exercice 144 [155] On munit $\mathbb{R}^n$ de la nome euclidienne canonique et on note B unité fermée de cet espace. Soient f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(u, v) \in B^2$, $\|-f(0) + v - df_u(v)\| \leq \frac{1}{2}$. Montrer que f s'annule exactement une fois sur B.

Démonstration. □

1) Géométrie

Exercice 145 [ENS 156] • Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(2\ \cos(\theta)) = 2\ \cos(n\theta)$.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, quel est le terme de plus haut degre de T_n ? En deduire les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.
- Determiner les triangles du plan euclidien dont les cotes ont des longueurs rationnelles et les angles sont des multiples rationnels de π.

Exercice 146 [157] Soit G un groupe d'isométries affines de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout point x, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$. Montrer que G contient une translation autre que l'identité de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Faux pour $G = O_2$. □

Exercice 147 [158] Soit S le groupe (pour la composition) des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe de S vérifiant les conditions suivantes :

- si $g \in G, g(0)$ est nul ou de module supérieur ou égal à 1 ;
- l'ensemble des $b \in \mathbb{C}$ tels que $z \mapsto z + b$ appartienne à G contient deux éléments $\mathbb{R}$ linéairement indépendants.

Montrer que l'ensemble $\{a \in \mathbb{U} \mid \exists b \in \mathbb{C},\ z \mapsto az + b \in G\}$ est fini.

Démonstration. Sinon, il existe une suite (a_n) qui s'accumule. On peut supposer qu'elle s'accumule sur 1, puis on peut borner les (b_n), puis extraire une suite convergence, donc elle est constante à partir d'un certain rang. Donc on a une infinité de $z \mapsto a_n z$, ce qui est impossible. □

Exercice 148 [ENS 159] Soit L la courbe du plan complexe d'equation $|z|^2 = \cos(2\arg(z))$.

- Trouver une equation cartesienne reelle definissant L.
- En deduire une parametrisation de $L \cap (\mathbb{R}^+)^2$ sous la forme $\{(x(r), y(r)),\ r \in [0,1]\}$. - Montrrer que la longueur de la courbe L entre le point $(0,0)$ et le point $(x(r), y(r))$ s'ecrit : $A(r) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
- Montrre que A definit une bijection de $[-1,1]$ dans un intervalle de la forme $[-w, w]$ ou $w > 0$.
- On definit $B = A^{-1}$. Montrer que B verifie une equation differentielle du second ordre.

Exercice 149 [ENS 160] Soit (e_1, e_2) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On pose $L =_1 +_2$ et on note $\mathrm{Vol}(L) = |\det(e_1, e_2)|$.

- Soit A un disque ferme de $\mathbb{R}^2$, d'aire strictement superieure a $\mathrm{Vol}(L)$. Montrer qu'il existe deux elements distincts x et y de A tels que $x - y \in L$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe dans $L \setminus \{0\}$ un element ℓ tel que $\|\ell\| \leq \frac{2+\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mathrm{Vol}(L)}$.
- Soit p un nombre premier congru a 1 modulo 4.
- Montrrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}$ tel que p divise $1 + \omega^2$.
- Montrrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$.

Exercice 150 [ENS 161] • On note D le disque unite du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Demontrer qu'il existe une suite $(C - i \in \mathbb{N}$ de parties de D telle que :

- ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble C_i soit un carre de $\mathbb{R}^2$ dont les cotes sont paralleles aux axes ;
- ▷ les C_i soient d'interieurs disjoints ;
- ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Aire}(C_i) = \pi$.
- ▷ On note $C = [-1,1]^2$. Demontrer qu'il existe une suite $(D - i \in \mathbb{N}$ de parties de C telle que :
- ▷ pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble D_i soit un disque ferme de $\mathbb{R}^2$;
- ▷ les D_i soient d'interieurs disjoints ;
- ▷ $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Aire}(D_i) = 4$.

2) Probabilités

Exercice 151 [ENS 162] On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de A de $\mathbb{N}$ telles que $\lim_{n \to +\infty} \frac{|A \cap [\![1,n]\!]|}{n}$ existe. Est-ce que $\mathcal{A}$ est une tribu ?

Exercice 152 [ENS 163] On pose, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, $d(\sigma) = \sum_{k=1}^n |\sigma(k) - k|$ et on note, pour $p \in \mathbb{N}$, $q_{n,p} = |\{\sigma \in S_n,\ d(\sigma) = p\}|$. Montrer que, si $p \geq 2n$, alors $q_{n,p}$ est pair.

Exercice 153 [ENS 164] Un derangement est une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sans point fixe. On note D_n le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ forme des derangements.

- Soit X une variable aleatoire suivant la loi uniforme sur D_n. Calculer la probabilite que X soit une permutation paire.

Indications.

- On donne la formule d'inversion de Pascal : si (a_n) et (b_n) sont deux suites telles que$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.
- On pourra calculer la difference du nombre d'elements pairs et impairs de D_n.
  - ▷ Soit Y une variable aleatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Calculer la probabilite de $(Y \in D_n)$ sachant que Y est paire.

Exercice 154 [165] Soient $m \geq 1$ et $r \geq 1$ deux entiers. On munit l'ensemble des morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de la loi uniforme. Donner une expression simple de la probabilité de l'événement «le morphisme φ est surjectif».

Démonstration. Le faire pour $m = p$, puis lemme Chinois. □

Exercice 155 [ENS 166] Deux joueurs A et B lancent une piecee truquee donnant pile avec une probabilite egale a $5/9$. Les regles de gain sont les suivantes : pile rapporte 5 euros et face 4 euros. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chacun des joueurs effectue $9n$ lancers independants; on note A_n (resp. B_n) la variable aleatoire donnant le gain du joueur A (resp. B).*

- Trouver un equivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $P\Big(A_{\mathrm{n}} = B_{\mathrm{n}}).\$Montrerque\mathbf{P}\left(A_n \geq B_n\right) \geq \frac{1}{2}$. Vers quoi tend $\mathbf{P}\left(A_n < B_n\right)$?

Exercice 156 [ENS 167] On joue a pile ou face avec une piecee pipee : la probabilite de tomber sur pile est $p < 1/2$. On effectue plusieurs lancers a la suite. Le score est le nombre de fois ou l'on est tombe sur pile. On gagne le jeu si, au bout de $2n$ lancers, le score est superieur a $n+1$. Trouver n qui maximise la probabilite de gagner le jeu au bout de $2n$ lancers.*

Exercice 157 [168] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{E}(X) = 1$, $\mathbf{E}\left(X^2\right) = 2$ et $\mathbf{E}\left(X^3\right) = 5$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{P}(X = 0)$?

- *Démonstration.* !!

On a $E(X)E(X^3) \geq E(X^2)^2$. En fait, mieux, $E(X)E(X^2) \geq ($
On a $(\sum p_i x_i^2)(\sum p_i) \geq (\sum p_i x_i)^2$, donc $2\sum p_i \geq 1$, donc $\sum p_i \geq \frac{1}{2} : p_0 \leq \frac{1}{2}$. □

Exercice 158 [ENS 169] Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier impair ≥ 3, $(X - m \geq 0$ une suite de variables aleatoires a valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que $X_0 = 0$, et pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_{m+1} = k+1 \,|\, X_m = k) = \mathbf{P}(X_{m+1} = k-1 \,|\, X_m = k) = \frac{1}{2}$. Montrer que $(X - m \geq 1$ converge en loi vers la loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Exercice 159 [ENS 170] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ c'est-a-dire le nombre de couples (i,j) avec $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

- Montrer que $P_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X^{I(\sigma)} = \prod_{k=1}^{n-1}(1 + X + \cdots + X^k)$.
- On pose $f(n) = |\{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ (n+1) \text{ divise } I(\sigma)\}|$. Exprimer $f(n)$ a l'aide de P_n.
- Montrer qu'il existe une infinite de nombres premiers p tels que $f(p-1) < \frac{(p-1)!}{p}$ et de meme une infinite de nombres premiers p tels que $f(p-1) > \frac{(p-1)!}{p}$.

Exercice 160 [ENS 171] Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, P une variable aleatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des polynomes unitaires de degre n de $\mathbb{F}_p[X]$, N le nombre de racines de P dans $\mathbb{F}_p$ (sans tenir compte des multiplicites). Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.

Exercice 161 [172] Dans tout l'exercice, les variables aléatoires considérées sont supposées réelles, discrètes et à loi de support fini. Pour deux telles variables X et Y, on note $X \leq_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leq \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Soient X une variable aléatoire vérifiant les conditions de l'exercice et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(f(X))$.
2. Donner un exemple de couple (X,Y) pour lequel $X \leq_c Y$ mais $X \neq Y$.
3. Montrer que si $X \leq_c Y$ alors $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X) \leq \mathbf{V}(Y)$.
4. Montrer que $X \leq_c Y$ si et seulement si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et
$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geq x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. □

Exercice 162 [173] On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. On choisit de façon équiprobable $u_1 \in 1, N$, puis $u_2 \in 1, u_1 - 1$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $u_\ell = 1$ avec nécessairement $\ell \leq N$. On note $E_N = \{u_j, 1 \leq j \leq \ell\}$.

1. Calculer $\mathbf{P}\left(k \in E_N\right)$ pour $1 \leq k \leq N$.
2. Calculer $\mathbf{P}\left(2 \in E_N \mid 3 \notin E_N\right)$.
3. Calculer $\mathbf{E}\left(|E_N|\right)$ et $\mathbf{V}\left(|E_N|\right)$.

Démonstration.
1. $P(k \in E_{k+1}) = \frac{1}{k}$, puis $P(k \in E_n) = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\big(P(k \in E_{N-1}) + \cdots + P(k \in E_{k+1})\big)$. On trouve $P(k \in E_N) = \frac{1}{k}$.
2. On a $P(2 \in E_N \mid 3 \in E_N) = \frac{1}{2}$.
3. Semble facile. □

Exercice 163 [ENS 174] Dans tout l'enonce, on fixe un entier $p \geq 1$.

- Developpper $(x_1 + \cdots + x_N)^p$ pour toute liste $(x_1, \ldots, x_N)$ de nombres reels.
- Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aleatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$. Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leq (2p)^p (\mathbf{E}(X^2))^p$.
- Montrer que $\mathbf{E}(X^{2p}) \leq p^p (\mathbf{E}(X^2))^p$.
- Soit $(a - k \geq 1$ une suite reelle telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = 1$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $Y_x = \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx)\, X_i$.

Montrer que $\omega \mapsto \int_0^{2\pi} Y_x(\omega)^{2p}\, dx$ prend au moins une valeur inferieure ou egal a $2\pi p^p$.

Exercice 164 [ENS 175] suivant la loi uniforme sur $\{1,-1\}$. Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aleatoires i.i.d. suivant la loi de Rademacher, et $a_1,\ldots,a_n$ des reels. On pose $Y=\sum_{k=1}^n a_k X_k$.

- Montrer que $\mathbf{E}(|Y|)^2 \leq \mathbf{E}(Y^2)$.
- Montrer que $\mathbf{E}(Y^2)=\sum_{k=1}^n a_k^2$.
- Montrer que si $\sum_{k=1}^n a_k^2=1$ alors $\mathbf{E}(Y^2)\leq e\,\mathbf{E}(|Y|)^2$.
- Montrer que $\mathbf{E}(Y^2)\leq e\,\mathbf{E}(|Y|)^2$ en toute generalite.

Exercice 165 [ENS 176] Une variable aleatoire discrete reelle X est dite decomposable s'il existe deux variables aleatoires discretes reelles non presque surement constantes et independantes X_1 et X_2 telles que $X\sim X_1+X_2$. - Une variable aleatoire de Bernoulli est-elle decomposable ? Une variable aleatoire binomiale est-elle decomposable ?

- Montrer que le polynome T^4+2T+1 ne peut se factoriser comme produit de deux polynomes de degre 2 a coefficients dans $\mathbb{R}^+$. En deduire une variable aleatoire reelle discrete decomposable X telle que X^2 ne soit pas decomposable.
- Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aleatoire suivant la loi uniforme que $[\![0,n-1]\!]$. Donner une condition necessaire et suffisante sur n pour que X soit decomposable.

Exercice 166 [ENS 177] Soit $p\in\,]0,1/2[$. Soit $(X-k\geq 1$ une suite de variables de Bernoulli i.i.d. de parametre p. On pose $ S_n=\sum_{k=1}^nX_k$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Determiner la plus grande valeur prise par la suite $(\mathbf{P}(S_{2n}>n))_{n\geq 1}$.

Exercice 167 [ENS 178] On fixe $n\in\mathbb{N}^*$ et on pose $ X=[\!\![1,n]\!\!]$. Soient A et B des variables aleatoires independantes uniformement distribuees sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X.

- Determiner la loi, l'esperance et la variance de la variable aleatoire $|A|$ (cardinal de A).
- Montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, $\mathbf{P}\left(|A|\geq\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)n\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
- Pour $i\in[\![1,n]\!]$, on note $\mathbf{1}_{\{i\}}$ la fonction indicatrice du singleton $\{i\}$. Determiner la loi de $\mathbf{1}_{\{i\}}(A)$.
- Calculer $\mathbf{P}(A\subset B)$. Commenter.

Exercice 168 [ENS 179] Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in[0,1]$. On considere un echiquier $n\times n$. On calorie chaque case en rouge (resp. en bleu) avec probabilite p (resp. $1-p$). On note $Q(p)$ la probabilite pour qu'il existe un chemin joignant le bord gauche au bord droit constite uniquement de cases rouges (il est entendu que les deplacements ne se font pas en diagonale). Que dire de la fonction Q ?

Exercice 169 [ENS 180] Soit $(X-n\geq 1$ une suite de variables aleatoires independantes de loi de Rademacher. On pose $ S_n=X_1+\cdots+X_n$ pour $n\geq 1$.

- Calculer l'esperance du nombre R de retour en zero de la suite $(S-n\geq 1$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{R}$. Montrer que la probabilite qu'il existe $n\geq 1$ tel que $S_n\notin I$ est egale a 1.
- Montrer que l'evenement $(R=+\infty)$ est presque sdr.

Exercice 170 [ENS 181] Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ un espace probabilise et $(m-k\in\mathbb{N}$ une suite de reels positifs de somme 1. On considere un arbre aleatoire sur cet espace tel que chaque noeud ait un nombre aleatoire X de successive avec, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X=k)=m_k$. Ces variables aleatoires correspondant au nombre de succcesseurs sont mutuellement independantes. On note X_1 la variable aleatoire comptant le nombre de succcesseurs de la racine. Caracteriser le fait que la longueur de l'arbre soit presque surement finie.

Exercice 171 [ENS 182] On construit iterativement et aleatoirement un arbre aleatoire sur l'ensemble de sommets $[\![1,n]\!]$ (graphe oriente) selon le procede suivant : a l'etape k, on choisit aleatoirementun point dans $1,k$ (avec probabilite uniforme) et on rajoute une arete orientee de ce point vers $k+1$. Ces choix s'effectuent de maniere independante les uns des autres.

- On note X_n la variable aleatoire donnant le nombre d'aretes partant du point 1. Determiner l'esperance et la variance de X_n.
- On suppose $n\geq 2$. On note S_n la variable aleatoire donnant le nombre de descendants (directs ou non) du sommet 2. Determiner la loi de S_n.
- Calculer l'esperance du nombre de feuilles de l'arbre.

Exercice 172 [183] Soient E un ensemble fini, $V:E\to\mathcal{P}(E)$ une fonction de E vers les parties de E et $f\colon E\to\mathbb{R}$ une fonction. Un point $a\in E$ est un minimum local si $f(a)\leq f(b)$ pour tout $b\in V(a)$. Soit M un entier tel que $M\geq\sqrt{|E|}$. Soient $b_1,\ldots,b_M$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans E. Soit k tel que $f(b_k)=\min_{1\leq i\leq M} f(b_i)$. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de E telle que $u_0=b_k$ et, pour tout $n\geq 0$:

- si u_n est un minimum local, alors $u_{n+1}=u_n$;
- sinon $u_{n+1}\in V(u_n)$ et $f(u_{n+1})<f(u_n)$.

Montrer que u_M est un minimum local avec probabilité au moins $1/2$.

Démonstration. La donnée est celle d'un graphe. Étant donné l'algorithme, on peut retirer des arêtes, de sorte que les voisins de a vérifient $f(b)<f(a)$. Auquel cas il n'y a plus de cycles.

Alors on choisit $\sqrt{n}$ sommets du graphe, puis le minimum. On veut montrer la plus longue chaîne décroissante à partir de celui-ci est de longueur $\leq\sqrt{n}$ avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On peut attribuer à chaque sommet sa valeur par f, et on peut supposer que c'est injectif.

Puis on peut ajouter des arêtes, vers ceux qui sont $<s$. Puis on peut retirer les arêtes, sauf celle juste en dessous. On est ramené à un graphe $n\to n-1\to\ldots\to 1$. □

Exercice 173 [ENS 184] Une variable aleatoire reelle X est infiniment divisible si X admet un moment d'ordre 2, et si, pour tout $n \geq 2$, il existe $(X_{i,n})_{i \in 1,n}$ i.i.d. et admettant des moment d'ordre 2 telles que $X \sim \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$. Montrer que si X est bornee et infiniment divisible, alors X est presque surement constante.

Exercice 174 [ENS 185] On se donne une suite $(X - i \geq 1$ de variables aleatoires independantes. On suppose que pour tout $i \geq 1$, il existe $a_i \in]0, 2]$ et $p_i \in [0, 1]$ tels que X_i soit a valeurs dans $\{0, a_i, -a_i\}$ et $\mathbf{P}(X_i = a_i) = \mathbf{P}(X_i = -a_i) = \frac{p_i}{2}$.

- Quelle relation doivent verifier a_i et p_i pour que $\mathbf{V}(X_i) = 1$? Dans toute la suite, on suppose cette relation verifiee et on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Calculer la variance de $n^{-1/2} S_n$.
- Montrer que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2} t S_n)) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\cos(n^{-1/2} t X_i))$.
- En deduire que $\mathbf{E}(\cos(n^{-1/2} t S_n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2/2}$.

Exercice 175 [ENS 186] On fixe un entier $n \geq 1$. On considere la relation d'ordre partielle $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^n$ definie par $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \forall i \in 1, n,\ x_i \leq y_i$. Une fonction $f \colon \{0, 1\}^n \to \mathbb{R}$ est dite croissante lorsque $f(x) \leq f(y)$ quels que soient x, y dans $\{0, 1\}^n$ tels que $x \preccurlyeq y$.

- Donner un exemple de fonction croissante non constante de $\{0, 1\}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- Dans la suite, on se donne une liste $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aleatoires i.i.d. suivant $\mathcal{B}(1/2)$. Soit $f \colon \{0, 1\}^n \to \mathbb{R}$ croissante. On suppose $n \geq 2$.

Montrer que $\mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_n)) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_{n-1}, 0) + \mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_{n-1}, 1))\Big)$. - Soit $f \colon \{0, 1\}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \{0, 1\}^n \to \mathbb{R}$ croissantes.
Montrer que $\mathbf{E}((fg)(X_1, \ldots, X_n)) \geq \mathbf{E}(f(X_1, \ldots, X_n))\, \mathbf{E}(g(X_1, \ldots, X_n))$.

Exercice 176 [ENS 187] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit S_n de la distribution uniforme de probabilite. On note $A_i = \{\sigma \in S_n,\ \sigma(i) = i\}$ et N la variable aleatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation.

- Soit $I \subset 1, n$. Calculer $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)$.
- Exprimer N avec des indicatrices. Calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.
- Soient $k \in 1, n$ et $F \subset 1, n$. Calculer $\sum\limits_{I \subset 1,n,\ |I|=k} \prod\limits_{i \in I} \mathbf{1}_F(i)$.
- Soit $k \in 1, n$. Calculer $\mathbf{E}(N(N-1)\cdots(N-k+1))$.
- Soient $X \sim \mathcal{P}(1)$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbf{E}(X(X-1)\cdots(X-k+1))$.
- Calculer $\mathbf{P}(N = 0)$.

Exercice 177 [ENS 188] On considere une suite i.i.d. $(X - n \geq 1$ de variables aleatoires suivant toutes la loi uniforme sur $\{1, 2\}$. On definit $(S - n \geq 0$ par $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.
<u>a) i)</u> Determiner l'esperance et la variance de S_n.

- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|S_n - 3n/2| \geq \varepsilon n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|S_n - 3n/2| \geq \varepsilon n^{2/3})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- On considere la variable aleatoire $T_n : \omega \mapsto \min\{k \in \mathbb{N},\ S_k(\omega) \geq n\}$. Determiner l'ensemble des valeurs prises par T_n.
- Soit $k \geq 2$. Montrer que $\mathbf{P}(T_n = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(T_{n-2} = k-1)$.
- Calculer l'esperance de T_n.

Exercice 178 [189] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 3$. On pose $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S = \{\pm e_i, 1 \leq i \leq d\}$, où e_i désigne l'élément de G dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème, égale à $\overline{1}$. Soient enfin $f \colon G \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et X une variable aléatoire uniformément distribuée sur G.
Montrer que $\mathbf{E}(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))|) \leq \frac{nd}{2} \max_{s \in S} \mathbf{E}(|f(X) - f(X+s)|)$.

Démonstration. C'est simple : On peut passer d'un somme à un autre en au plus $\frac{nd}{2}$ pas. ☐

II) X **XENS**

Exercice 179 [X MP 275] On note $p(n)$ le nombre de partitions de n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Monter que $p(n) \leq 2^{n-1}$.

Exercice 180 [X MP 276] Soient $e_r > \cdots > e_2 > e_1 \geq 0$ des entiers, $n = \sum_{k=1}^{r} 2^{e_k}$ et $X = \{s \in \mathbb{N};\ 2^s \mid n!\}$.

- Montrer que $\max X = n - r$.
- Montrer que le nombre d'entiers k tels que $\binom{n}{k}$ est impair est 2^r.

Exercice 181 [X MP 277] ★

- Montrer que l'equation $a^2 - 2b^2 = 1$ admet une infinite de solutions $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

Determiner l'ensemble des solutions.

- Que dire de l'ensemble des solutions de $a^2 - 2b^2 = -1$?# 278

Si G est un groupe, les elements d'ordre fini forment-il un sous-groupe ?

Exercice 182 [X MP 279] • Trouver deux groupes G_1 et G_2 non isomorphes de cardinal $2023 = 7.17^2$.

▷ Soit p premier. Montrer qu'un groupe de cardinal p^2 est isomorphe a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou â $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

▷ Soient G, H deux groupes finis et $\psi : G \to H$ un morphisme surjectif.

Montrer que $|G| = |H| \times |\operatorname{Ker}\psi|$.

- On suppose que G est un groupe de cardinal 2023, que $H = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et que $\varphi : G \to H$ est un morphisme surjectif. Montrer que G est isomorphe a $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \operatorname{Ker}\varphi$.
- Montrer que tout groupe de cardinal 2023 est isomorphe a G_1 ou G_2.

Exercice 183 [X MP 280] Soit G un groupe fini de neutre 1. Soit φ un automorphisme de G sans point fixe c'est-a-dire tel que : $\forall x \in G, \varphi(x) = x \Rightarrow x = 1$. On note n l'ordre de φ ; c'est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^n = \mathrm{id}$.

- Montrer que $\forall x \in G, x\,\varphi(x)\,\varphi^2(x)\,\cdots\,\varphi^{n-1}(x) = 1$.
- Si $n = 2$, que peut-on dire du groupe G ? Donner un exemple.
- Si $n = 3$, montrer que, pour tout $x \in G$, x et $\varphi(x)$ commutent.

Exercice 184 [X MP 281] Soient G un groupe et T l'ensemble des elements de G d'ordre fini.

- En general, T est-il un sous-groupe de G ?
- Soit S une partie finie de G stable par conjugaison munie d'une relation d'ordre totale $\leq$. Montrer que, pour tous $s_1,\ldots, s_r \in S$, il existe $s_1',\ldots, s_r' \in S$ tels que $s_1' \leq s_2' \cdots \leq s_r'$ et $s_1 s_2 \cdots s_r = s_1' s_2' \cdots s_r'$.
- Avec la question precedente, montrer que, si T est fini, alors T est un sous-groupe de G.

Exercice 185 [X MP 282] • Soit $s : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, t \mapsto t^{-1}$. Determiner le groupe engendre par s.

▷ On definit les applications $s_1 : (t, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto (t^{-1}, tu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et

Montrer que le sous-groupe qu'elles engendrent est isomorphe a $\mathcal{S}_3$.

- Retrouver le resultat de la question precedente en considerant le quotient A de $(\mathbb{R}^*)^3$ par la relation de colinearite, la bijection $f : A \to (\mathbb{R}^*)^2$ qui associe a la classe de (x_1, x_2, x_3) le couple $(x_1/x_2, x_2/x_3)$, et enfin les permutations de A induites par $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1, x_3)$ et $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3, x_2)$.
- Soit $n \geq 3$. Determiner le groupe engendre par les bijections $(s-1 \leq i \leq n$ de $(\mathbb{R}^*)^n$ definies par $s_i(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{i-2}, t_{i-1} \times t_i, t_i^{-1}, t_i \times t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_n)$ si $1 < i < n$, $s_1(t_1, \ldots, t_n) = (t_1^{-1}, t_1 \times t_2, t_3, \ldots, t_n)$ et $s_n(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1} \times t_n, t_n^{-1})$.

Ind. Considerer $f : (\mathbb{R}^*)^{n+1} \to (\mathbb{R}^*)^n$ definie par $f(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \left(\dfrac{t_2}{t_1}, \ldots, \dfrac{t_{n+1}}{t_n}\right)$ et chercher des bijections simples s_i' de $(\mathbb{R}^*)^{n+1}$ telles que $s_i \circ f = f \circ s_i'$.

Exercice 186 [X MP 283] Soit G un groupe fini d'ordre n. On note, pour tout diviseur positif d de n, $n_d(G)$ le nombre d'elements de G d'ordre d.

- Montrer que $n = \sum_{d|n} n_d(G)$.
- Calculer les $n_d(G)$ lorsque G est cyclique.
- Montrer que, si pour tout diviseur positif d de n, $|\{x \in G,\ x^d = 1\}| \leq d$, alors G est cyclique. - Soient $\mathbb{K}$ un corps et G un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$. Montrer que G est cyclique.

Exercice 187 [X MP 284] On pose $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib\ ;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- Montrver que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
- Determiner les elements de $\mathbb{Q}[i] \setminus \{0\}$ qui sont d'ordre fini.

Exercice 188 [X MP 285] • Soient $\mathbb{K}$ un corps, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $P = X^2 - aX - b$. On considere la $\mathbb{K}$-algebre A admettant une base sur $\mathbb{K}$ de la forme $(1, x)$ avec $x^2 = ax + b$. A quelle condition cette algebre est-elle un corps ?

▷ On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ ou p est un nombre premier. Combien de $\mathbb{F}_p$-algebres non isomorphes peut-on obtenir ainsi ?

Exercice 189 [X MP 286] Soit p un nombre premier. On suppose que, pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A, il existe un endomorphisme u_A de A de sorte que, pour tout couple (A, B) de $\mathbb{F}_p$-algèbres et tout morphisme τ de $\mathbb{F}_p$-algèbres de A dans B, on ait $\tau \circ u_A = u_B \circ \tau$. Que dire des u_A ?

Démonstration. Pour tout isomorphisme $\tau \colon A \to$, u_A commute avec τ. □

Exercice 190 [X MP 287] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$.
Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_k = 2^{n-1} P_n\left(\frac{X+1}{2}\right)$.

Exercice 191 [X MP 288] • Montrrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynome $S_n \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\forall N \in \mathbb{N},\ S_n(N) = \sum_{k=0}^{N-1} k^n$. Dans la suite, on note b_n le coefficient de S_n devant X.

▷ Donner une relation de recurrence exprimant b_n en fonction de $b_0, \ldots, b_{n-1}$.

▷ Pour $n \geq 1$, donner une relation entre S_n'' et S_{n-1}'.

▷ En deduire une expression explicite des coefficients de S_n en fonction de $b_0, \ldots, b_n$.

Exercice 192 [X MP 289] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$.
On pose $F : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \prod_{k=1}^{n} (1 + q^{2k-1} z)(1 + q^{2k-1} z^{-1})$.

- Montrver qu'il existe une unique list $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ telle que

$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ F(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k(z^k + z^{-k})$.

- Donner une relation de recurrence entre c_k et c_{k+1}, et en deduire une expression de c_k a l'aide d'un produit. Ind. Exprimer $F(q^2z)$ en fonction de $F(z)$.

Exercice 193 [X MP 290] Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(X+Y)^n$ soit congru a $X^n + Y^n$ modulo p.

Exercice 194 [X MP 291] Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(0) \neq 0$. Soit $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrver qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que X^n divise $P^k - f$.# 292 Soit p un nombre premier. Pour deux polynomes P, Q dans $\mathbb{Z}[X,Y]$, on note $P \equiv Q\ [p]$ pour signifier que $P - Q$ a tous ses coefficients (devant les X^kY^l) divisibles par p. On adopte une definition similaire pour les polynomes a une indeterminee.

- Exhiber un polynome $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$, $P \not\equiv T\ [p]$ et $P \not\equiv 0\ [p]$.
- Exhiber un polynome $P \in \mathbb{Z}[T]$ tel que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$, $P(X+Y) \equiv P(X) + P(Y)\ [p]$, $P \not\equiv T\ [p]$ et $P \not\equiv 0\ [p]$.
- Determiner tous les polynomes $P \in \mathbb{Z}[T]$ tels que $P(XY) \equiv P(X)P(Y)\ [p]$ et $P(X+Y) \equiv P(X) + P(Y)\ [p]$.

Exercice 195 [X MP 293] Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des complexes deux a deux distincts. Soient $n_1, \ldots, n_r$ dans $\mathbb{N}^*$ et $H_1, \ldots, H_r$ dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un $H \in \mathbb{C}[X]$ tel que $(X - \alpha_i)^{n_i}$ divise $H - H_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 196 [X MP 294]

- Soient $N_1, \ldots, N_r$ des entiers premiers entre eux deux a deux, et $f_1, \ldots, f_r$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier F tel que $F \equiv f_i\ [N_i]$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.
  - ▷ Soient $N_1, \ldots, N_r$ des elements de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux deux a deux, et $f_1, \ldots, f_r$ des elements de $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe $F \in \mathbb{C}[X]$ tel que N_i divise $F - f_i$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.
  - ▷ Soient f, g deux elements de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $h \in \mathbb{C}[X]$ tel que g divise $h^n - f$.

Exercice 197 [X MP 295] Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynome $X^{n+1} - nX^n + 1$ est-il irreductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 198 [X MP 296] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynome unitaire dont les racines complexes ont un module inferieur ou egal a 1. Montrer que les racines de P sont des racines de l'unite.

Exercice 199 [X MP 297] Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ possedant n racines distinctes $x_1, \ldots, x_n$. On ecrit $P^2 + 1 = Q_1 \ldots Q_r$ ou les Q_i sont dans $\mathbb{Z}[X]$. On pose $R = \sum_{i=1}^{r} {Q_i}^2 - r$.

- Montrer que les x_k sont racines au moins doubles de R.
- En deduire qu'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\deg(Q_i) \geq 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Exercice 200 [X MP 298] On se propose de donner une preuve du theoreme de d'Alembert-Gauss.

- Montrer qu'il suffit de montrer le theoreme pour les polynomes a coefficients reels. Dans la suite, on ecrira le degre d'un polynome non constant de $\mathbb{R}[X]$ sous la forme $2^n q$, ou $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ est impair. La preuve se fait par recurrence sur n.
- Montrer le theoreme dans le cas ou $n = 0$.

Dans la suite, on suppose le resultat vrai jusqu'au rang n, ou $n \geq 1$ est fixe.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degre $2^n q$, ou $n \geq 1$. On admet l'existence d'une extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ sur laquelle P est scinde, et on note $x_1, \ldots, x_d$ ses racines dans $\mathbb{K}$, distinctes ou non. Ayant fixe $c \in \mathbb{R}$, on pose $y_{ij}(c) = x_i + x_j + cx_ix_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq d$.
- Montrer que le polynome $Q_c = \prod_{i \leq j}(X - y_{ij}(c))$ est a coefficients reels. - Montrrer que l'un des $y_{ij}(c)$ est element de $\mathbb{C}$.
- Montrer finalement que l'un des x_i est element de $\mathbb{C}$.

Exercice 201 [X MP 299] Soient $F \in \mathbb{C}(X)$ et $q \in \mathbb{C}^*$.

- On suppose que q n'est pas une racine de l'unite. Montrer qu'il existe au plus deux fractions rationnelles $G \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F = 1 + G(qX)\, G(q^{-1}X)\, F(q^{-2}X)$, et que s'il y en a deux alors elles sont opposees l'une de l'autre.
- Montrer que le resultat precedent peut tomber en defaut si l'on ne suppose plus que q n'est pas une racine de l'unite.

Exercice 202 [X MP 300] Soit G un groupe, $\mathcal{M}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^G$.

Exercice 203 [X MP 301] On note C l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont non nuls. Pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in C$, on pose $J(M) = \left(\dfrac{1}{m_{i,j}}\right)_{1 \leq i,j \leq 2}$. Soit $\varphi : C \to C$ qui a M associe $J(M^{-1})$. Montrer que φ est bien definie et trouver a quelle condition sur $M \in C$ la suite $(\varphi^n(M))_{n \geq 1}$ est stationnaire, ou bien periodique a partir d'un certain rang.

Exercice 204 [X MP 302] Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ non nulle et $M = I_n + 3R$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k \neq I_n$.

Exercice 205 [303] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $p, u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que p est un projecteur et que $pu + up = u$. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

Démonstration. On a $u(\mathrm{Ker}\, p) \subset \mathrm{Im}\, p$ et $u(\mathrm{Im}\, p) \subset \mathrm{Ker}\, p$. □

Exercice 206 [X MP 304] Pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi_{A,B} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$.
Soit $T = \{\varphi_{A,B},\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.

- L'ensemble T est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
- Montrer que l'espace vectoriel engendre par T est $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 207 [X MP 305] Pour une matrice de projecteur $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $R_P = \det(I_n + (X-1)P)$.

- Calculer R_P en fonction de P.
- Soient P, Q des matrices de projecteur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $PQ = QP = 0$. Montrer que $R_P R_Q = R_{P+Q}$.
- Soit φ un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algebre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Montrer que $\varphi(E_{i,i})$ est un projecteur de rang 1, pour tout $i \in 1, n$.
- Que dire du rang de $\varphi(E_{i,j})$, pour i, j dans $1, n$?
- Montrer que $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^n \operatorname{Im} \varphi(E_{i,1})$.

Exercice 208 [X MP 306] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une application $q : V \to \mathbb{C}$ telle que $u^2 = q(u)\,\mathrm{id}$ pour tout $u \in V$.

- Monter que, pour tous $u, v \in V$, il existe $B(u,v) \in \mathbb{C}$ tel que $uv + vu = 2B(u,v)\,\mathrm{id}_E$.
- Montrer que B est une forme bilineaire. - Soient $d \geq 1$ et $u_1, \ldots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in 1, n$. Montrer que $(u_1, \ldots, u_d)$ est libre.
- Soient $d \geq 2$ et $u_1, \ldots, u_d \in V$ tels que $B(u_i, u_j) = -\delta_{ij}$ pour tous $i, j \in 1, n$. Montrer que les u_i sont de trace nulle, et que $\dim E$ est paire.

Exercice 209 [X MP 307] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On suppose que $\varphi(I_n)$ est inversible et que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\,\varphi(B)$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(A) = PAP^{-1}$.

Exercice 210 [X MP 308]
- Caracteriser les endomorphismes φ de $\mathbb{C}(X)$ verifiant $(*)$: $\forall F_1,\ F_2 \in \mathbb{C}(X), \varphi(F_1 F_2) = \varphi(F_1)\,\varphi(F_2)$.
  - ▷ Determiner les automorphismes de $\mathbb{C}(X)$ verifiant $(*)$.

Exercice 211 [X MP 309] Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i, j, m_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$.

- Montrer que 1 est valeur propre de M et que tout valeur propre de M est de module ≤ 1.
- On note $\mu = \min_{1 \leq i \leq n} m_{i,i}$. Montrer que le spectre de M est inclus dans le disque de centre μ et de rayon $1 - \mu$.
- On suppose que $\mu > 0$ et que 1 est valeur propre de multiplicite 1 dans χ_M. Montrer que $(M^p)_{p \geq 1}$ converge vers une matrice de rang 1 dont toutes les lignes sont egales.
- On se donne trois reels strictement positifs p, q, r tels que $p + q + r = 1$. On considere la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definie par $b_{i,i} = r$, $b_{i,i+1} = q$ si $i > 2$, $b_{1,2} = p + q$, $b_{i+1,i} = p$ si $i < n - 1$, $b_{n,n-1} = p + q$, et tous les autres coefficients sont nuls. Montrer que 1 est valeur propre simple de B, et expliciter la limite de $(B^k)_{k \geq 0}$.

Exercice 212 [X MP 310] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, F un sous-espace de E stable par f. Montrer que l'induit par f sur F est cyclique.

Exercice 213 [X MP 311] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $a, b \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ telles que $ab - ba = fv$.

- Que peut-on dire de $\det(ab - ba)$?
- Montrer que a et b sont cotrigonalisables.
- A quelle condition sur $u \in \mathcal{L}(E)$ existe-t-il $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uw - wv$ soit de rang 1 ?

Exercice 214 [X MP 312] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout vecteur $x \in E$, l'ensemble $\{f^n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

- Montrer que, si $f \in \mathrm{GL}(E)$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = \mathrm{id}$.
- On revient au cas general. Montrer l'existence de $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $f^{p+k} = f^p$.

Exercice 215 [X MP 313] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de permutation associee a σ. Montrer que, si σ et σ' sont dans $\mathcal{S}_n$, σ et σ' sont conjuguees dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

Exercice 216 [314] Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
2. Montrer que $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q + (\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p)$.
3. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
4. Montrer que le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0, 1]$.

Démonstration. □

Exercice 217 [X MP 315] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $L_n = D^n((X^2 - 1)^n)$, ou D designe l'operateur de derivation des polynomes.

- Determiner le degre de L_n. Montrer que $\int_{-1}^1 L_n(t)\,P(t)\,dt = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. - Montrer que L_n est scinde a racines reelles simples $x_1 < \cdots < x_n$ avec $x_1 > -1$ et $x_n < 1$. - Montrer qu'il existe des reels $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_{-1}^1 P(t)\,dt = \sum_{k=1}^n a_k P(x_k)$.

Exercice 218 [316] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\right\}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes.

- $\alpha = 2$.
- $\forall n \geq 1, \forall\,(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n) \in \left(S^2\right)^{3n}, \exists p \in S^2$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n}\|p-a_i\|^{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\|p-b_i\|^{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\|p-c_i\|^{\alpha}$$

Démonstration. □

Exercice 219 [X MP 317] Existe-t-il $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{Q})$ telle qu'il n'existe pas $B \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{Q})$ verifiant $B^2 = A$?

Exercice 220 [X MP 318] Soient E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{S}(E)$, $\Phi : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \|f(v)\|^2 - \langle f(v), v\rangle^2 \end{array}$. Donner une condition necessaire et suffisante pour que Φ admette un extremum.

Exercice 221 [X MP 319] On considere dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

- Soit $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $K^2 = -I$. Montrer que $K^T J \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si $J = K^T J K$.
- On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $K \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telles que $K^2 = -I$ et $K^T J \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $K \in \mathcal{C}$. Montrer que $K + J$ est inversible et que $(K + J)^{-1}(K - J)$ est symetrique.
- Soit $K \in \mathcal{C}$. On pose $S = (K + J)^{-1}(K - J)$. Montrer que $SJ + JS = 0$.

Exercice 222 [X MP 320] Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$, $\det(A + B) \geq \max(\det(A), \det(B))$.

Exercice 223 [X MP 321] Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\operatorname{tr}\left(e^A e^B\right) > 0$.
- Montrer que $\operatorname{tr}\left(e^{A+B}\right) \leq \operatorname{tr}\left(e^A e^B\right)$.

Exercice 224 [322] Soit $t_1, \ldots, t_n$ des réels.

1. Montrer que la matrice $A = (t_i t_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. On suppose $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$. Montrer que la matrice $B = (\min(t_i, t_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. On suppose $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$. Montrer que $M = B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Démonstration. 1. $X^T A X = (\sum t_i x_i)^2$
2. $\int \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i}\right)^2$
3. Il s'agit de montrer que $\int_0^1 \left(\sum x_i \mathbb{1}_{t_i}\right)^2 \geq (\sum t_i x_i)^2$, c'est-à-dire $\int h^2 \geq \left(\int h\right)^2$, car l'intégrale est sur $[0, 1]$. □

Exercice 225 [X MP 323] On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire standard et on note $\|A\| = \sup_{X\in B_f(0,1)} \|AX\|$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrver que $\|\|\|$ definit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrver que $\|\|A\| = \sup_{(X,Y)\in B_f(0,1)^2} |\langle AX, Y\rangle|$.
- On prend $A = \left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_0 \cdots x_n)^T$ et $Y = (y_0 \cdots y_n)^T$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, donner une interpretation de $\langle AX, Y\rangle$ a l'aide d'une integrale faisant intervenir $P : t \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{k=0}^n x_k e^{ikt}$ et $Q : t \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{k=0}^n y_k e^{ikt}$.
- En deduire que $\|\|A\| \leq 2\pi$.
- Montrver que l'on a meme $\|\|A\| \leq \pi$.

1) Analyse

Exercice 226 [X MP 324] Trouver $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, discontinue en $(0, 0)$, dont la restriction a toute droite passant par $(0, 0)$ est continue.

Exercice 227 [325] Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un convexe fermé non vide.

1. On suppose K borné. Montrer que K s'écrit comme intersection de carrés fermés.
2. On suppose K non borné et $K \neq \mathbb{R}^2$. Donner des exemples de tels convexes. Montrer que si K contient deux droites, celles-ci sont parallèles.
3. On suppose toujours K non borné. Montrer que K contient une demi-droite.

Démonstration. 1. Si $x \notin K$, on peut trouver une droite séparant x de K, donc un carré contenant K et non x.
2. Si K contient deux droites non parallèles, $K = \mathbb{R}^2$. La partie au dessus du graphe de $x \mapsto e^x$.
3. Fixer $y \in K$, et une suite $(x_n) \in K$ qui tend vers ∞, et prendre une valeur d'adhérence des segments $[y, x_n]$. □

Exercice 228 [X MP 326] Determiner les endomorphismes continus du groupe $\mathbb{C}^*$.

Exercice 229 [X MP 327] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^d$ de la structure euclidienne canonique. On definit une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ en posant, pour $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sup\left\{\|Mx\| \;;\; x \in \mathbb{R}^d,\ \|x\| = 1\right\}$.

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Montrver que $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.
- Soit $(u - n \geq 0$ une suite reelle. On suppose que la serie de terme general $|u_n - 1|$ converge.

Montrer que la suite de terme general $\prod_{k=0}^n u_k$ converge.
Soit $(M - n \geq 0$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On suppose que la serie de terme general $\|M_n - I_d\|$ converge. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_n$.

- Montrver que la suite $(B-n \geq 0$ converge.
- Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la suite de terme general $M_{\sigma(0)} \times \cdots \times M_{\sigma(n)}$?
- Soit $E = \left\{\prod_{k=0}^{+\infty} M_{\sigma(k)},\ \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})\right\}$. Existe-t-il une suite de matrices pour laquelle E n'est pas ferme ?
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Existe-il $(M-n \geq 0 \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que E possede exactement k composantes connexes ?

Exercice 230 [X MP 328] On definit la longueur d'un intervalle borne I de bornes a et b par $\ell(I) = |b-a|$. - Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $I_1, \ldots, I_N$ des intervalles bornes de $\mathbb{R}$ tels que $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{N} I_i$. Que peut-on dire de $\sum_{i=1}^{N} \ell(I_i)$?

- Soit $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p = 1, t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in 1, p$, $x_{q-1} \leq t_q \leq x_q$ et $x_q - x_{q-1} \leq \delta(t_q)$.
- Soit $(I-n \geq 1$ une suite d'intervalles bornes de $\mathbb{R}$ telle que $[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Que peut-on dire de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n)$?

Exercice 231 [X MP 329] Dans $\mathbb{R}^2$, on note D le disque unite ferme pour la norme infinie, C la sphere unite pour la norme infinie. On cherche a montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $r : D \to C$ telle que la restriction de r a C soit l'identite.

- On considere une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, antisymmetric (i.e. $f(x,y) = -f(y,x)$), et $A = (a_{i,j})_{i,j \leq n}$ une matrice reelle telle que : $\forall i,j \in 1, n-1$,

$f(a_{i,j}, a_{i+1,j}) + f(a_{i+1,j}, a_{i+1,j+1}) + f(a_{i+1,j+1}, a_{i,j+1}) + f(a_{i,j+1}, a_{i,j}) = 0.$
Montrer que :
$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i,1}, a_{i+1,1}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{n,j}, a_{n,j+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1,n}, a_{i,n}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(a_{1,j+1}, a_{1,j}) = 0$

- Soit $M \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & & & & 3 \\ \vdots & & M' & & \vdots \\ 1 & & & & 3 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ ou $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

est a coefficients dans $\{1,2,3\}$. Montrer qu'au moins un des petits carres de M comporte trois valeurs differentes.

- Montrer qu'on dispose d'un $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in D$ verifiant $\|x-y\|_\infty \leq \eta$, on a $\|r(x) - r(y)\| \leq \frac{1}{10}$.
- Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{n-1} \leq \eta$. Pour tous $i, j \in 1, n$, on pose

$v_{i,j} = \left(1 - 2\frac{i-1}{n-1}, 1 - 2\frac{j-1}{n-1}\right)$.
Montrer que, pour tous $i, j \in 1, n-1$, $v_{i,j}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}, v_{i,j+1}$ sont contenus dans une boule de rayon $1/10$.

- En utilisant une fonction bien choisie de C dans $\{1,2,3\}$, aboutir a une contradiction et conclure.
- Utiliser ce resultat pour montrer que toute fonction continue de D dans D admet un point fixe.

Exercice 232 [330] On dit qu'une famille $(D_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de disques fermés de $\mathbb{R}^2$ vérifie $(\mathcal{P})$ si

- pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ distincts, D_s et D_t ont des centres distincts,
- pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ tels que $s < t, D_s \subset D_t$.

1. Existe-t-il une telle famille ?
2. Soit $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ une fonction C^1 et injective. Existe-t-il une famille $(D_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ vérifiant $(\mathcal{P})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $A(t)$ soit le centre de D_t ?
3. Le résultat subsiste-t-il si A est seulement supposée continue ?

Démonstration. 1. Cercles de centre $(x,0)$, de rayon x.
2. Prendre D_t de rayon la longueur de la courbe de $A(0)$ à $A(t)$.
3. Prendre une fonction non réglée. □

Exercice 233 [X MP 331] Dans tout l'enonce, $\mathbb{K}$ designe $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne une $\mathbb{K}$-algebre A de dimension finie, et on identifie $\mathbb{K}$ a une sous-algebre de A via $\lambda \mapsto \lambda.1_A$. On suppose donnee sur A une norme multiplicative $\|\ \|$, autrement dit une norme verifiant $\forall (a,b) \in A^2,\ \|ab\| = \|a\|\,\|b\|$. Jusqu'a la question - incluse, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Soit $x \in A$. Montrer qu'il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ \|z_0 - x\| \leq \|z - x\|$.
- On suppose $\|a\| = 2$ pour $a = z_0 - x$. Montrer que $\|a - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\| \geq 2$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
- En deduire que $\|a-1\| = 2$.
- En deduire que $A = \mathbb{C}$.
- Retrouver le resultat de la question precedente en utilisant des polynomes annulateurs.

Dans la suite, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Est-ce que A est necessairement egale a $\mathbb{R}$?
- On admet qu'il existe une $\mathbb{R}$-algebre $\mathbb{H}$ ayant une base de la forme $(1,i,j,k)$ ou i,j,k anticommutent deux a deux et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. On considere la symetrie $x \mapsto \overline{x}$ par rapport a $\mathbb{R}$ parallelement a $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(i,j,k)$, et on considere la norme $N : q \mapsto \sqrt{\overline{q}q}$. Montrer que N est bien definie, est effectivement une norme, et qu'elle est multiplicative.
- Montrer que A est isomorphe, en tant que $\mathbb{R}$-algebre, a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Exercice 234 [332] Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^4+an^2+bn+c} \notin \mathbb{N}$.

Démonstration. Dérivée discrète. □

Exercice 235 [X MP 333] Pour $n \geq 2$, on note $\ell_n = \min\left\{k \in 1, n,\ \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{i}{n}\right) \leq \frac{1}{2}\right\}$.

- Montrer que $\ell_n = o(n)$.
- Donner un equivalent de ℓ_n.

Exercice 236 [334] Soient (a_n) et (b_n), deux suites réelles positives telles que la série de terme général b_n converge, que la série de terme général na_n diverge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k}$.
2. Montrer que (u_n) est bornée.
3. Montrer que, si (u_n) converge, alors sa limite est 0.

Démonstration. Cf une année précédente. □

Exercice 237 [X MP 335] On considere la suite reelle definie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un reel $C > 1$ tel que $x_n \sim C^{2^n} n^2$ quand $n \to +\infty$.# 336 Soit $(a - n \geq 0$ la suite reelle definie par $a_0 = 1, a_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = 2a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2}$. Donner un equivalent de a_n.

Exercice 238 [X MP 337] Soit $(a - n \geq 0$ definie par $a_0 = \pi/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Nature de la serie de terme general a_n2 ?

Exercice 239 [X MP 338] Soit $\sum u_n$ une serie convergente de reels positifs. Existe-t-il une suite $(v - n \geq 0$ de reels positifs tendant vers $+\infty$ telle que la serie $\sum u_n v_n$ converge ?

Exercice 240 [X MP 339] Soit (x_n) une suite reelle. On suppose que $(x_n y_n)$ est sommable pour toute suite reelle (y_n) de carre sommable. Montrer que (x_n) est de carre sommable.

Exercice 241 [X MP 340] Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Determiner la nature de la serie $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 242 [X MP 341] Etudier la convergence de la serie de terme general $\frac{\sin(\ln n)}{n}$.

Exercice 243 [X MP 342] On pose $u_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $n \geq 1$.

- Montrer que u converge vers une limite ℓ.
- Montrer que $\ell = -(\sqrt{2}+1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.
- Montrer que $u_n = \ell + \frac{1}{2n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
- Montrer que $\ell = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2}$.
- Etudier les variations de u.
- Determiner un developpement asymptotique semblable a celui de la question - pour la suite de terme general $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
- Soit $\alpha \in]0,1[$. Donner un developpement asymptotique a trois termes pour $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 244 [343] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Démonstration. La série $\sum \frac{1}{f(n)}$ a la même nature que $\int \frac{1}{f}$. On peut raccorder f de manière $\mathcal{C}^1$, puis on pose $u = f(t)$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{uf'(f^{-1}(u))}\,\mathrm{d}u,$$

puis IPP. □

Exercice 245 [X MP 344]

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{m}}{(m+n)\sqrt{n}} \leq \pi$.

  Ind. : Dans $\mathbb{R}^2$, considérer les points $x_n = (\sqrt{m}, \sqrt{n})$ et l'intersection r_n du cercle $C(0, \sqrt{m})$ avec le segment $[0, x_n]$.
- Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ deux suites de carre sommable et a termes positifs. On note $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ et $B = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$. Montrer que $\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi\sqrt{AB}$.

Exercice 246 [X MP 345]

- Trouver les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(xy) = f(x)\,f(y)$.
- Trouver les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall x \neq y \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$.

Exercice 247 [346] Que dire d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique ?

Démonstration. Easy. □

Exercice 248 [X MP 347] Trouver les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $|f'| + |f+1| \leq 1$.

Exercice 249 [X MP 348] Pour $x \geq 1$, on note $\Theta(x) = \sum_{p \in \mathcal{P},\ p \leq x} \ln(p)$. Montrer que $\Theta(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(x)$.

Exercice 250 [X MP 349] Soit F un ferme de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 251 [X MP 350] Soit $(x - n \geq 0$ une suite de points de $[0,1]^2$. Donner une condition necessaire et suffisante pour que, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, il existe une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]^2$ et une suite strictement croissante $(t - n \geq 0$ d'elements de $[0,1]$ telle que $f(t_n) = x_{\sigma(n)}$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 252 [X MP 351] Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$.

Exercice 253 [X MP 352] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n la derivee n-ieme de $(X^2-1)^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_{-1}^1 PL_n = 0$.
- Montrer que L_n possede n racines distinctes $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ dans $]-1,1[$.
- Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_{-1}^1 P = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(x_i)$.

Exercice 254 [X MP 353] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose \$ I$_{\text{n}}$=$\sum_{\text{k=0}}^{\text{n}}(-1)^{\text{k}}$ {n}{k}^{3}\$.

- On suppose n impair. Montrer que $I_n = 0$.
- On suppose n multiple de 4. Montrer que $I_n > 0$.
- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'egalite

\$ I$_{\text{2n}}$=(-1)$^{\text{n}}${4$^{\text{3n-1}}$}{π^2}$\int_0$$^{2\pi}$ $\int_0$$^{2\pi}$ sin$^{\text{2n}}$(x)\,sin$^{\text{2n}}$(y)\,sin$^{\text{2n}}$(x+y)\,dx\,dy\$.

Exercice 255 [X MP 354]

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que$H_n : (a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \int_0^{2\pi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) - f(t)\right)^2 dt$ admet un minimum, atteint en un unique point, et donner une expression simple de ce point en fonction de f.
  - ▷ Determiner la limite de $\min H_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 256 [X MP 355] Justifier l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{dt}{2 + \lfloor \frac{1}{t} \rfloor}$.

Exercice 257 [356] Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f(x) < \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que $f(x) > \frac{\sqrt{x^2+4} - x}{2}$ pour tout $x > 0$.
3. Donner un développement limité à quatre termes de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Démonstration. □

Exercice 258 [357] Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Pour $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{|u|, |v|\}$, calculer $I_r(u,v) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(u - re^{i\theta})(v - re^{i\theta})}$.

Démonstration. □

Exercice 259 [X MP 358] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ integrable, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$. On suppose que f' s'annule en un unique $M \in \mathbb{R}$.

- Donner le tableau de variations de f. Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^m f(t)dt = \frac{1}{2}$.
- Montrer que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 < M < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2) = \ell$.
- Supposons que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$, $f'(x_1) + f'(x_2) > 0$. Montrer que $m > M$.

Exercice 260 [X MP 359]

- Soient a et b deux suites reelles telles que $b - a$ converge vers 0. Soit $(f - m \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $m \geq 0$, il existe un entier N_m tel que $\forall n \geq N_m,\ a_m \leq f_n \leq b_m$. Montrer que (f_m) converge uniformement vers une fonction constante.
  - ▷ On note H l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes et telles que $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que H forme un groupe pour la composition des fonctions.
  - ▷ Soit $f \in H$. Montrer que $\sup\{f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}\} < 1 + \inf\{f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 261 [X MP 360] On note F l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$, C l'ensemble des fonctions continues de F. On note aussi $I = \{f \in F\ ;\ \forall a \in [0,1],\ \{x \in [0,1],\ f(x) \leq a\}$ est ferme$\}$ et $S = \{f \in F\ ;\ \forall a \in [0,1],\ \{x \in [0,1],\ f(x) \geq a\}$ est ferme$\}$.

Pour $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $L_n(f) : x \in [0,1] \mapsto \inf_{y \in [0,1]} (f(y) + n|x - y|) \in [0,1]$.

- Montrer que $C = I \cap S$. - Montrrer que, si $f \in F$, $L_n(f)$ est une suite croissante d'applications continues.
- Soit $f \in F$. Montrrer que $f \in I$ si et seulement s'il existe une suite $(f - n \geq 0$ de fonctions de C telle que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$.

Exercice 262 [X MP 361] Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ de classe C^1 telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \sim \dfrac{a}{x}$ quand $x \to +\infty$.

- Rappeler le theoreme d'integration des relations de comparaison.
- Donner un equivalent de $\ln f(x)$ quand $x \to +\infty$.
- Determiner le domaine de definition de la fonction $u : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) e^{-nx}$.

- Determiner les limites de u aux bornes de son intervalle de definition.
- Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \sim \dfrac{C}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 263 [X MP 362] Soit $(a - n \in \mathbb{N}$ une suite reelle telle que $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \dfrac{n+4}{n+1} a_{n+1} + \dfrac{3n+7}{n+2} a_n$.

- Montrer que le rayon de convergence de la serie entiere $\sum a_n x^n$ est strictement positif.
- Determiner la valeur de ce rayon de convergence.

Exercice 264 [X MP 363] Pour x reel, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ sous reserve de convergence.

- Determiner le domaine de definition de f.
- Etudier la continuite puis la derivabilite de f.
- Donner un equivalent simple de f en 1^-.
- Montrre que f est developpable en serie entiere, et preciser le developpement associe.

Exercice 265 [X MP 364] • Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ somme d'une serie entiere. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(z) = O(z^k)$ quand z tend vers 0. Montrrer que, pour r voisin de 0^+, il existe au moins $2k$ nombres complexes z de module r tels que $f(z)$ soit un nombre reel.

▷ Soient A et B deux polynomes a coefficients reels dont toute combinaison lineaire a coefficients reels est scindee ou nulle. Soient $x < y$ deux racines de A. Montrre que $[x, y]$ contient au moins une racine de B.

Exercice 266 [X MP 365] Soit $\sum a_n z^n$ une serie entiere de rayon de convergence egal a 1 et de somme f.
On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall r \in [0, 1[, \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| d\theta \leq C$.
Montrre que $\int_0^1 |f(t)| dt < +\infty$.

Exercice 267 [366] Soit $P = a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{Z}[X]$ avec a_1 impair.

1. Montrer l'existence d'une suite réelle $(b_k)_{k\geq 0}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(P(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$.
2. Montrer que les b_k sont tous non nuls.

Démonstration. 1.

2. Quand on dérive successivement e^P, on trouve une quantité qui vaut toujours 1 modulo 2. □

Exercice 268 [X MP 367] Pour x et q dans $]0, 1[$, on pose $(x, q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q^k x)$.

- Montrrer que la suite de terme general $(x, q)_n$ converge vers un reel $(x, q)_\infty > 0$.
- Determiner le rayon de convergence de la serie entiere $\sum_{n\geq 0} \frac{(x,q)_n}{(q,q)_n} z^n$. On notera $f_{x,q}$ sa somme sur le disque ouvert de convergence, et D son disque ouvert de convergence.
- Etablir l'identife $f_{x,q}(z) - f_{x,q}(qz) = (1 - x) z f_{x,q,q}(z)$ pour tout $z \in D$.
- Etablir l'identife $f_{x,q}(z) = \frac{1-xz}{1-z} f_{x,q}(qz)$ pour tout $z \in D$.
- Demontrer que $f_{x,q}(z) = \frac{(zx,q)_\infty}{(z,q)_\infty}$ pour tout $z \in D$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Determiner, pour tout $z \in D$, la limite de $f_{q^\alpha,q}(z)$ quand q tend vers 1^-.

Exercice 269 [X MP 368] • Pour $x \geq 0$ on pose $f(x) = \mathrm{card}\left\{(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, n^2 + m^2 \leq x\right\}$. Trouver un equivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

▷ On pose $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2}$. Trouver un equivalent de g en 1^- en utilisant g^2.

Exercice 270 [X MP 369] Soit p un nombre premier. Pour tout $F \in \mathbb{F}_p[X]$, on pose $|F| = p^{\deg F}$.

- Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, s > 1$. Montrre que la famille $\left(|F|^{-s}\right)$, indexee par les polynomes $F \in \mathbb{F}_p[X]$ unitaires, est sommable et calculer sa somme, qu'on notera $z(s)$.
- On note A l'ensemble des polynomes unitaires de $F \in \mathbb{F}_p[X]$ sans facteur carre, c'est-a-dire tels que : $\forall D \in \mathbb{F}_p[X]$, $D^2 | F \Rightarrow \deg D = 0$. Montrre que $\sum_{F \in A} |F|^{-s} = \frac{z(s)}{z(2s)}$.
- En deduire, pour tout $d \in \mathbb{N}$, la proportion de polynomes sans facteur carre parmi les polynomes unitaires de degre d de $\mathbb{F}_p[X]$.

Exercice 271 [X MP 370] Soit f continue sur $[0, 1]$ et $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{1+xt} dt$ pour $x \geq 0$. On suppose $f(0) \neq 0$.

- Donner un equivalent de g lorsque $x \to +\infty$.
- On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Majorer l'ecart avec l'equivalent trouve.
- Que peut-on dire de plus si f est de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 272 [X MP 371] • Determiner le domaine de definition de $f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2x}\, dt$.

▷ Montrre, pour tout reel $x > 0$, l'egalite $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{u \exp\left(-u^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{1-e^{-u^2}}} du$.

Exercice 273 [X MP 372] • Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\,dt$ pour tout reel x. - On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\,(1+t^2)}\,dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\forall x > 0,\ F^{''}(x) = F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

▷ Donner une expression simplifiee de F.

Exercice 274 [X MP 373] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ de carre integrable. On pose $S_f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y} dy$.

- Justifier la bonne definition de S_f.
- Montrer que S_f est de carre integrable.

Exercice 275 [X MP 374] Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t-xt^\alpha}\,dt.$

- Determiner la limite et un equivalent de I en $+\infty$.
- Donner un developpement asymptotique de I a tout ordre.
- Donner une condition necessaire et suffisante pour que ce developpement soit la somme partielle d'une serie convergente pour tout $x > 0$.

Exercice 276 [X MP 375] • Soient K un segment et $f : K \to K$ une fonction continue croissante. Montrer que f admet un point fixe.

▷ On considere l'equation differentielle non lineaire $(E) :\ x' = \cos(x) + \cos(t)$. On admet que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution φ_a de (E) sur $\mathbb{R}$ verifiant $\varphi(0) = a$, et que, pour tous a, b reels distincts, les fonctions φ_a et φ_b ne coincident en aucun point. Montrer que (E) possede une solution 2π-periodique.

Exercice 277 [X MP 376] Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $a \in [0, 1]$.

- Justifier qu'il existe une unique fonction $x_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ x'(t) = f(t) - (f(t) + g(t))\,x(t)$ et $x(0) = a$.
- On suppose que f et g ont une limite finie strictement positive en $+\infty$. Montrer que x_a tend vers 0 en $+\infty$.
- Montrer que f et g peuvent etre choisies de telle sorte que x_a n'ait pas de limite en $+\infty$.
- On suppose que l'une des fonctions f et g n'est pas integrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $x_1 - x_0$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 278 [X MP 377] Soient $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue a support compact et $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$. On considere l'equation differentielle \$y$^{''}$+ω^{2y}=v(t),\$ dont on note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions.

- Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $f^+_{a,b}$ (resp. $f^-_{a,b}$) de (E) telle que $f^+_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ pour tout t dans un voisinage de $+\infty$, (resp. $f^-_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ pour tout t dans un voisinage de $-\infty$.
- Montrer que $\mathcal{S}_E = \{f^+_{a,b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{f^-_{a,b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
- On pose $c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\cos(\omega t)\,dt$ et $s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\sin(\omega t)\,dt$, et on definit l'application $S_\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par : $f^-_{a,b} = f^+_{S_\omega(a,b)}$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Expliciter l'application S_ω en fonction de $c(\omega)$ et $s(\omega)$.
- On suppose que $S_\omega = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ pour tout $\omega > 0$. Montrer que v est identiquement nulle.

Exercice 279 [X MP 378] Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \leq q_2$. On considere l'equation differentielle $(E_i) : y^{''} + q_i(t)\,y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.

- Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros de y_1. Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
- Soient $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, m, M deux reels strictement positifs tels que $m \leq q \leq M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zeros consecutifs d'une solution non nulle x de $y^{''} + q(t)\,y = 0$.
- Montrer que les zeros de x fortner une suite strictement croissante $(t - n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq t_{n+1} - t_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 280 [X MP 379] • Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $pu + up = u$. Montrer que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

▷ Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $r \in 0, n$. On note G l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E de rang r. Soit $p \in G$. Determiner l'espace vectoriel tangent a G en p.

Exercice 281 [X MP 380] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considere le carre de coins $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. On choisit trois points A, B et C sur ce carre.

- Montrer qu'il existe une disposition des points A, B et C maximisant l'aire du triangle ABC.
- Caracteriser une telle disposition.

2) Geometrie

Exercice 282 [X MP 381] Pour $n \geq 2$, on note P_n le perimetre d'un polygone regulier a 2^n cotes inscrit dans le cercle unite.

- Calculer P_n et etudier la convergence de la suite $(P - n \geq 2$.
- Etablir une relation de recurrence entre P_n et P_{n+1}.
- Estimer l'erreur $2\pi - P_n$.
- Proposer une methode d'approximation de π par exces.

Exercice 283 [X MP 382] On se donne un triangle direct ABC du plan complexe. On note respectivement a, b, c les mesures principales des angles orientes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On note P l'unique point tel que $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB})$; Q l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AC})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ})$; R l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ et $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BA})$. L'objectif est de montrer que le triangle PQR est equilateral.

- On note f, g, h les rotations de centres respectifs A, B, C et d'angles de mesures respectives $\frac{2a}{3}$, $\frac{2b}{3}$ et $\frac{2c}{3}$. Montrer que P est l'unique point fixe de $g \circ h$.
- Montrer que $(f^3 \circ g^3 \circ h^3)(z) = z$ pour tout nombre complexe z.
- On note $f : z \mapsto a_1 z + b_1$, $g : z \mapsto a_2 z + b_2$ et $h : z \mapsto a_3 z + b_3$. Experimer P, Q, R en fonction des a_i et des b_i.
- Conclure.

Exercice 284 [X MP 383] Determiner le nombre moyen de 2-cycles, de 3-cycles, de p-cycles, d'une permutation de $[\![1, n]\!]$.

Exercice 285 [X MP 384]

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2}$.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle partition de n toute liste decroissante $(\lambda - 1 \leq k \leq n$ d'entiers naturels non nuls de somme n. On note $P(n)$ le nombre de telles listes.

Montrer que $P(n) \leq 2^{n-1}$.

- On fixe $n \geq 1$ et on considere une variable aleatoire X suivant la loi uniforme sur l'ensemble des partitions de n. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$. On pose $N_k = |\{i \in [\![1, n]\!] : X_i = k\}|$.

Exprimer $\mathbf{P}(N_k \geq j)$ comme un quotient $\frac{P(a)}{P(b)}$ pour des entiers a et b a preciser.

- Calculer $\sum_{i=1}^{n} i N_i$.

Exercice 286 [X MP 385] On considere la suite (a_n) definie par $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

- Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$.
- On lance une piece non truquee. Determiner la loi de la variable aleatoire X qui donne l'instant de premiere apparition du motif Face-Face.
- Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
- Donner un equivalent de $\mathbf{P}(X = n)$.

Exercice 287 [X MP 386] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{S}_n$ de la loi uniforme, et on note N la variable aleatoire associant a tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ le nombre de ses orbites.

- Calculer $\mathbf{P}(N = 1)$ et $\mathbf{P}(N = n)$.
- Donner une formule simple pour la fonction generatrice de N.
- Donner un equivalent de $\mathbf{E}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.
- Donner un equivalent de $\mathbf{V}(N)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 288 [X MP 387] Soient $n \geq 2$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aleatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $f_{(X_1, \ldots, X_n)}$ la variable aleatoire a valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ telle que, pour tout i, $f_{(X_1, \ldots, X_n)}(e_i) = e_{X_i}$.

- Determiner $\mathbf{E}\left(\mathrm{rg}\left(f_{(X_1, \ldots, X_n)}\right)\right)$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, soit μ_z la multiplicite de z comme valeur propre de $f_{(X_1, \ldots, X_n)}$. Calculer $\mathbf{E}(\mu_z)$.

Exercice 289 [X MP 388] Soient $b, n \in \mathbb{N}^*$. On considere $(B - 1 \leq i \leq n$ des variables aleatoires independantes suivant la loi uniforme sur $[\![0, b-1]\!]$. On note S l'ensemble des descentes de la suite B c'est-a-dire $S = \{i \in [\![1, n]\!],\ B_i > B_{i+1}\}$.

- Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, calculer $\mathbf{P}(B_i > B_{i+1})$.
- Soit $j \in [\![1, n-j-1]\!]$. Calculer $\mathbf{P}(B_1 > B_2 > \cdots > B_{j+1})$. - Pour $I \subset 1, n$, on pose $\alpha(I)$ (resp. $\beta(I)$) le nombre de suites a n elements a valeurs dans $0, b-1$ qui verifient $S \subset I$ (resp. $S = I$). Exprimer α en fonction de β, puis β en fonction de α.

Exercice 290 [X MP 389] Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ et $k \in \{1, \ldots, 2n\}$, on note $s(\sigma, k)$ le segment de $\mathbb{C}$ qui joint les points $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ et $e^{\frac{i\sigma(k)\pi}{n}}$. On note $b(\sigma)$ le nombre de segments qui ne croisent aucun autre segment (ou on dit que deux segments se croisent s'ils ont un point d'intersection qui n'est pas une extremite).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit σ_n une variable aleatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_{2n}$. Determiner $\mathbf{E}(b(\sigma_n))$ et en donner un equivalent.

Exercice 291 [390] Soient $p \in [0, 1/2]$, $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p$. On cherche p tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = 0\right) \geq \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = b\right)$.

1. Montrer que $p \leq \frac{1}{3}$, puis que $p < \frac{1}{3}$ et enfin que $p \leq \frac{1}{4}$.
2. Si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_X : \theta \mapsto \mathbf{E}\left(e^{iX\theta}\right)$. Exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de Φ_X.
3. En déduire que $p \leq \frac{1}{4}$ est une condition suffisante.

Démonstration.

1. On regarde les probabilités, jusqu'à $n = 3$.
2. $\Phi_X(\theta) = \sum P(X = k) e^{ikt}$ et formule de Cauchy.
3.

□

Exercice 292 [X MP 391] Soient n et d des entiers tels que $1 \leq d < n$, et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aleatoires independantes uniformement distribuees sur $0, d$. On note S_n la classe de $X_1 + \cdots + X_n$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- La variable aleatoire S_n est-elle uniformement distribuee sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- Calculer la loi de S_n.

Exercice 293 [X MP 392] Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(X - n \geq 1$ une suite i.i.d. de variables aleatoires suivant la loi uniforme sur $1, d$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

- Soient Y une variable aleatoire a valeurs dans $\mathbb{Z}$, $r \in 0, d-1$, $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Montrer que \$P(Y≡ r$[d]) = \frac{1}{n} \sum$k=0$^{\text{n-1}}$ 1$_{\{\omega}{}^{\text{kr}}$}E($\omega^{\text{kY}}$.\$

Soit $r \in 0, d-1$. Donner une expression de $\mathbf{P}(S_n \equiv r\,[d])$.
Determiner la limite de la suite de terme general $\mathbf{P}(S_n \equiv 0\,[d])$.

Exercice 294 [X MP 393] Soit $n \geq 1$.

- On se donne deux variables aleatoires independantes X_n et Y_n suivant chacune la loi uniforme sur $1, n^2$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Determiner la probabilite $u_n(r)$ pour que X_n et Y_n soient deux points distincts et le coefficient directeur de la droite (X_nY_n) soit egal a r. Donner un equivalent de $u_n(r)$ lorsque $n \to +\infty$.
- On se donne quatre variables aleatoires independantes X_n, Y_n, A_n, B_n suivant chacune la loi uniforme sur $1, n^2$. On note p_n la probabilite pour que $X_n \neq Y_n$, $A_n \neq B_n$ et les droites (X_nY_n) et (A_nB_n) soient paralleles. Montrer que $p_n = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 295 [X MP 394] Soit $a \in [1, 2]$. On pose $f_a : x \mapsto |1+x|^a - |2x|^a - ax.$*a)* : Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) \leq 1$.

- Soit X une variable aleatoire reelle centree et admettant un moment d'ordre 2. Montrer : $\forall c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}\left(|c+X|^a\right) \leq 2^a \mathbf{E}(|X|^a) + |c|^a$.
- Soit $(X - n \geq 1$ une suite i.i.d. de variables aleatoires centrees admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}\left(|\sum_{i=1}^n X_i|^a\right) \leq 2^a \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(|X_i|^a)$.

Exercice 296 [X MP 395] Une urne contient a boules jaunes et b boules rouges. On effectue une succession de tirages d'une boule dans l'urne avec remise. A chaque tirage, on ajoute une boule de la couleur de celle titee dans l'urne. Soit X_n la variable aleatoire du nombre de boules jaunes dans l'urne apres n tirages. Soit T_n l'evenement «tirer une boule jaune au n^{ieme} tirage».

- Calculer $\mathbf{P}_{T_2}(T_1)$.
- Determiner la loi de X_n.
- Calculer $\mathbf{P}(T_n)$.
- Pour $n_1, ..., n_p, m_1, ..., m_q$ tous distincts, calculer $\mathbf{P}(T_{n_1} \cap ... \cap T_{n_p} \cap \overline{T_{m_1}} \cap ... \cap \overline{T_{m_q}})$.

Exercice 297 [396] Soient $n \geq 1$ et A, B, C des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{0,1\}^n$.

1. Pour $n \geq 2$, calculer la probabilité p_n que ABC soit un triangle équilatéral.
2. Déterminer un équivalent de p_n.

Démonstration. Relier à un précédent.

1. On prend $A = \vec{0}$. Alors on veut B, C avec autant de termes 1, et autant de différences entre les deux.
   On considère les ensembles $B \subset [\![1, n]\!]$, $C[\![1, n]\!]$, et $B \oplus C$.
   Les parties $U = B \setminus C$, $V = C \setminus B$ et $W = B \cap C$ vérifient $u + w = v + w = u + v$, donc ils sont de même cardinaux, et disjoints. □

Exercice 298 [X MP 397] On munit l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $[1, n]$ de la probabilite uniforme. Soit X_n la variable aleatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation aleatoire $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

- Calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$.
- Determiner la loi de X_n.
- Etudier la convergence en loi de la suite $(X - n \in \mathbb{N}^*$.
- Calculer les esperance et variance de la variable aleatoire X_n.

Exercice 299 [X MP 398] Soit $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ une matrice aleatoire ou $(a+1) \sim \mathcal{P}(\alpha)$, $(b+1) \sim \mathcal{P}(\beta)$, $(c+1) \sim \mathcal{P}(\gamma)$ et $(d+1) \sim \mathcal{P}(\delta)$.

- Calculer la probabilite que la matrice M soit inversible.
- Calculer la probabilite que la matrice M soit inversible et diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 300 [X MP 399] Soient X et Y deux variables aleatoires a valeurs dans $\mathbb{N}$ verifiant $\mathbf{P}(X \geq Y) = 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\mathbf{P}(X = n) > 0$ et $\mathbf{P}(Y = i | X = n) = \dfrac{1}{n+1}$.

- Montrer que, si $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}P(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i, X - Y = j)$, puis que $X - Y \sim Y$.

- Montrer que $\mathbf{P}(Y = 0) > 0$.
- On suppose que $X - Y$ et Y sont independantes. Determiner la loi de Y, puis celle de X.

Exercice 301 [X MP 400] Soit $n \geq 3$ un entier. Si $k \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{k}$ la reduction de k modulo n. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aleatoires independantes a valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $k \in 1, n$, X_k suit la loi uniforme sur $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. Soit F l'application aleatoire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-meme telle que, pour tout $k \in 1, n$, $F(\overline{k}) = \overline{k} + X_k$. Calculer la probabilite que F soit bijective.

Exercice 302 [X MP 401] On cherche a collectionner N jouets. A chaque achat, chaque jouet a une probabilite uniforme d'etre obtenu. Pour $i \in 1, N$, on note T_i le temps d'attente pour obtenir i jouets differents.

- Calculer l'esperance de T_N.
- Calculer la variance de T_N.
- Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{T_N}{N \ln N} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 303 [X MP 402] Soit $(X - n \in \mathbb{N}^*$ une suite i.i.d. de variables aleatoires reelles centrees.
On suppose que $\mathbf{E}(X_1^4) < +\infty$.

- Montrer que $\mathbf{E}\left(\left(X_1 + \cdots + X_n\right)^4\right) = O(n^2)$.
- Pour $\varepsilon > 0$, quelle est la nature de la serie de terme general $\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} > \varepsilon\right)$?

Exercice 304 [X MP 403] Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X - k \geq 1$ une suite i.i.d. de variables aleatoires suivant la loi $\mathcal{P}(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

- Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geq x)dx = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.
- On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(T_n \geq x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$. Retrouver la formule de Stirling.